

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Un algoritmo de Branch & Cut para el problema de coloreo particionado

Santiago Palladino

Directoras: Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

{spalladino,imendez,pzabala}@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura

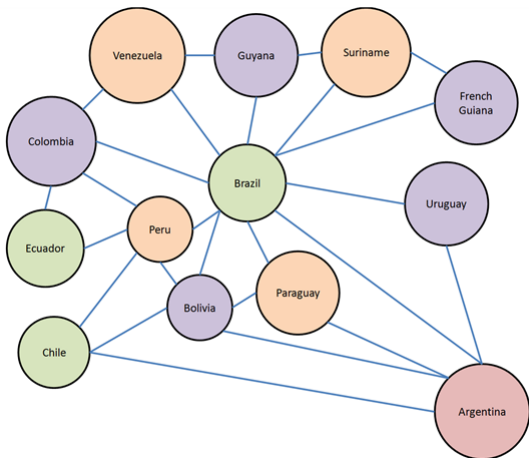
Junio 2011





# Coloreo

## Pintando el mapa de sudamérica...



Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos

Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo

Reforzando el modelo

Eliminación de simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de branching

Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de prueba

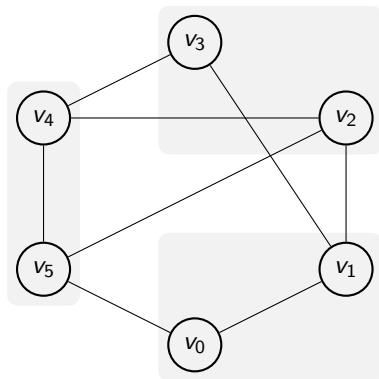
Versus Cplex

Versus Representatives Model

Conclusiones

# Grafos particionados

Un grafo **particionado** es un grafo en el que el conjunto de nodos se encuentra dividido en particiones  $P_0, \dots, P_q$ .





# Redes WDM

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos

Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo

Reforzando el modelo

Eliminación de simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategía de branching

Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

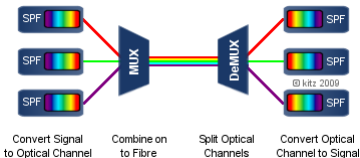
Conjunto de prueba

Versus Cplex

Versus Representatives Model

Conclusiones

Wavelength-division multiplexing (WDM) permite multiplexar distintas señales ópticas sobre un mismo enlace físico utilizando distintas frecuencias para cada uno.



Se tiene una red compuesta por nodos en la que las conexiones entre ellos utilizan esta tecnología.





# Resolución en dos partes

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos

Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Li y Sinha propusieron una solución en dos partes para este problema:

- 1 Generar un conjunto de rutas posibles entre cada par de nodos a conectar
- 2 Elegir una ruta de cada conjunto de manera tal que se minimice la cantidad de frecuencias necesarias



# Asignación de frecuencias

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos

Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

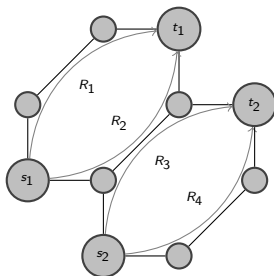
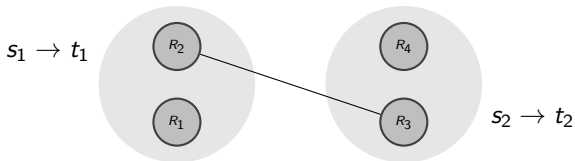
El siguiente paso es elegir una ruta entre cada par de nodos y asignarle una frecuencia, de manera tal que dos rutas distintas con la misma frecuencia no compartan ningún enlace.

Esto puede modelarse como un problema de coloreo particionado:

- Los nodos representan las rutas
- Las rutas están agrupadas en particiones según qué conexión satisfacen
- Los ejes indican que las rutas comparten al menos un enlace y no pueden compartir frecuencia
- Las frecuencias se modelan mediante los colores

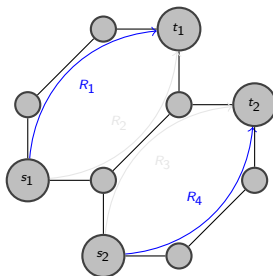
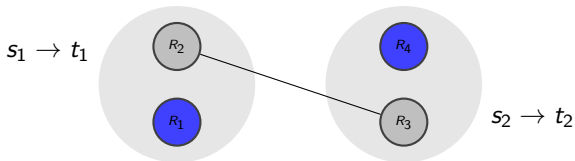
# Asignación de frecuencias

Nuestro ejemplo puede resolverse usando una única frecuencia...



# Asignación de frecuencias

Nuestro ejemplo puede resolverse usando una única frecuencia...



# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Definimos las siguientes variables binarias:

- $x_{ij}$  es verdadera sii el vértice  $i$  es coloreado con el color  $j$
- $w_j$  es verdadera sii el color  $j$  fue usado

# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Definimos las siguientes variables binarias:

- $x_{ij}$  es verdadera sii el vértice  $i$  es coloreado con el color  $j$
- $w_j$  es verdadera sii el color  $j$  fue usado

Buscamos minimizar la cantidad de colores distintos usados

$$\text{mín} \sum_{j \in C} w_j$$

# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

**Modelo inicial de  
coloreo**

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Agregamos las restricciones de coloreo:



# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

**Modelo inicial de  
coloreo**

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Agregamos las restricciones de coloreo:

- La variable  $w_j$  es verdadera sii algún vértice usa el color  $j$

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall i \in V$$

# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Agregamos las restricciones de coloreo:

- La variable  $w_j$  es verdadera sii algún vértice usa el color  $j$

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall i \in V$$

- Dos vecinos no pueden usar el mismo color

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall j \in C, \forall (i, k) \in E$$

# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Agregamos las restricciones de coloreo:

- La variable  $w_j$  es verdadera sii algún vértice usa el color  $j$

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall i \in V$$

- Dos vecinos no pueden usar el mismo color

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall j \in C, \forall (i, k) \in E$$

- Cada vértice tiene exactamente un color asignado

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V$$

# Modelo de coloreo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Agregamos las restricciones de coloreo:

- La variable  $w_j$  es verdadera sii algún vértice usa el color  $j$

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall i \in V$$

- Dos vecinos no pueden usar el mismo color

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall j \in C, \forall (i, k) \in E$$

- Cada **partición** tiene exactamente un color asignado

$$\sum_{x_i \in p} \sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V, p \in P$$

# Modelo de coloreo

## Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

### Introducción

Grafos  
Motivación

### Modelo

#### Modelo inicial de coloreo

Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

### Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

### Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives  
Model

### Conclusiones

Con esto ya tenemos una formulación básica del problema que podemos resolver con un algoritmo de branch and cut. Pero podemos reforzar la formulación para mejorar los tiempos de resolución del algoritmo:

- expresando las restricciones de adyacencia de otras maneras
- agregando restricciones de eliminación de simetría
- agregando otras desigualdades válidas

# Restricciones de adyacencia

- Dado un nodo  $i_0$ , por cada partición vecina, o bien  $i_0$  usa el color  $j$ , o a lo sumo uno de sus vecinos por partición puede usarlo.

$$\sum_{i \in P_k \cap N(i_0)} x_{ij} + x_{i_0j} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall P_k \in P, \forall i_0 \in V$$

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

**Reforzando el  
modelo**

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

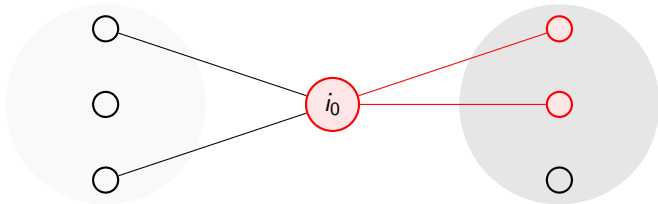
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Restricciones de adyacencia

- Dado un nodo  $i_0$ , por cada partición vecina, o bien  $i_0$  usa el color  $j$ , o a lo sumo uno de sus vecinos por partición puede usarlo.

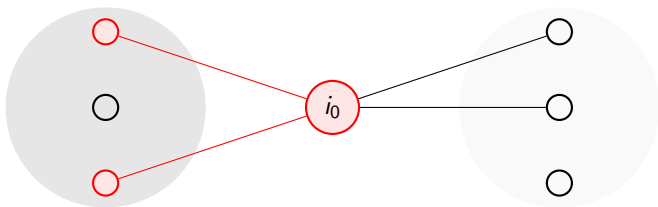
$$\sum_{i \in P_k \cap N(i_0)} x_{ij} + x_{i_0j} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall P_k \in P, \forall i_0 \in V$$



# Restricciones de adyacencia

- Dado un nodo  $i_0$ , por cada partición vecina, o bien  $i_0$  usa el color  $j$ , o a lo sumo uno de sus vecinos por partición puede usarlo.

$$\sum_{i \in P_k \cap N(i_0)} x_{ij} + x_{i_0j} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall P_k \in P, \forall i_0 \in V$$

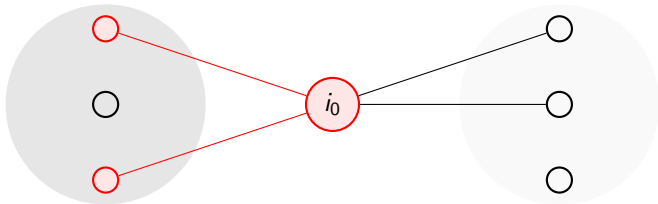




# Restricciones de adyacencia

- Dado un nodo  $i_0$ , por cada partición vecina, o bien  $i_0$  usa el color  $j$ , o a lo sumo uno de sus vecinos por partición puede usarlo.

$$\sum_{i \in P_k \cap N(i_0)} x_{ij} + x_{i_0j} \leq w_j \quad \forall j \in C, \forall P_k \in P, \forall i_0 \in V$$



Estas restricciones arrojaron los mejores resultados para grafos de alta densidad.

# Restricciones de adyacencia

- Generalizamos las anteriores pidiendo o bien un nodo  $i_0$  usa el color  $j$ , o bien a lo sumo  $r$  de sus vecinos lo utilizan.

$$\sum_{i \in N(i_0)} x_{i_0j} + r * x_{i_0j} \leq r * w_j \quad \forall j \in C, \forall i_0 \in V$$

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

**Reforzando el  
modelo**

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

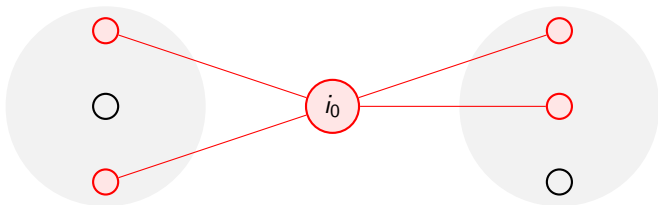
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Restricciones de adyacencia

- Generalizamos las anteriores pidiendo o bien un nodo  $i_0$  usa el color  $j$ , o bien a lo sumo  $r$  de sus vecinos lo utilizan.

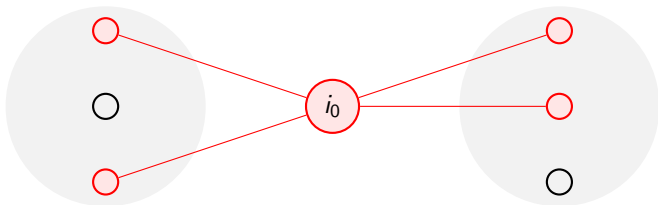
$$\sum_{i \in N(i_0)} x_{i_0j} + r * x_{i_0j} \leq r * w_j \quad \forall j \in C, \forall i_0 \in V$$



# Restricciones de adyacencia

- Generalizamos las anteriores pidiendo o bien un nodo  $i_0$  usa el color  $j$ , o bien a lo sumo  $r$  de sus vecinos lo utilizan.

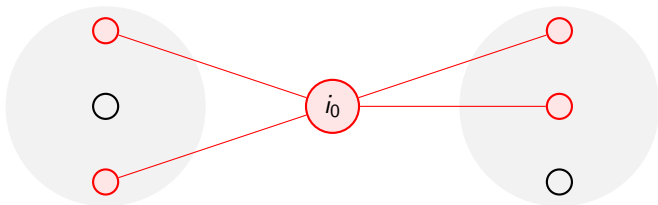
$$\sum_{i \in N(i_0)} x_{i_0j} + r * x_{i_0j} \leq r * w_j \quad \forall j \in C, \forall i_0 \in V$$



# Restricciones de adyacencia

- Generalizamos las anteriores pidiendo o bien un nodo  $i_0$  usa el color  $j$ , o bien a lo sumo  $r$  de sus vecinos lo utilizan.

$$\sum_{i \in N(i_0)} x_{i_0j} + r * x_{i_0j} \leq r * w_j \quad \forall j \in C, \forall i_0 \in V$$



Estas restricciones arrojaron los mejores resultados para grafos de baja densidad.

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo

Reforzando el modelo

**Eliminación de simetría**

Algoritmo

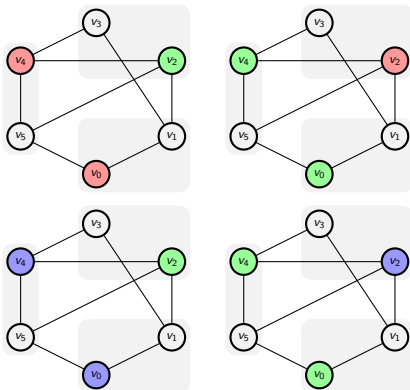
Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

Conclusiones

Un problema inherente a coloreo, que se traduce al modelo, es que admite muchas soluciones simétricas para un mismo grafo:



# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

**Eliminación de  
simetría**

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Buscamos agregar restricciones al modelo que eliminen soluciones simétricas:

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

**Eliminación de  
simetría**

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Buscamos agregar restricciones al modelo que eliminen soluciones simétricas:

- No se permite usar un color hasta que no se hayan usado todos los anteriores

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall 1 \leq j < c$$



# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Buscamos agregar restricciones al modelo que eliminen soluciones simétricas:

- No se permite usar un color hasta que no se hayan usado todos los anteriores

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall 1 \leq j < c$$

Esta restricción asegura que sólo se usen los primeros colores, pero permite soluciones simétricas que usan el mismo conjunto de colores.

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

**Eliminación de  
simetría**

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- La cantidad de nodos coloreados con un color  $j_0 + 1$  no puede ser mayor que la cantidad coloreada con  $j_0$ .

$$\sum_{i \in V} x_{ij} \geq \sum_{i \in V} x_{ij+1} \quad \forall 1 \leq j < c$$

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- La cantidad de nodos coloreados con un color  $j_0 + 1$  no puede ser mayor que la cantidad coloreada con  $j_0$ .

$$\sum_{i \in V} x_{ij} \geq \sum_{i \in V} x_{ij+1} \quad \forall 1 \leq j < c$$

Elimina muchas soluciones simétricas, pero aún permite intercambiar colores entre aquellos usados por la misma cantidad de nodos.

# Eliminación de simetría

- Asignamos el color de menor índice al conjunto de nodos que tenga la partición de menor índice

$$x_{ij} \leq \sum_{l=j-1}^{k-1} \sum_{u \in P_l} x_{uj-1} \quad \forall 1 < k \leq q, \forall i \in P_k, \forall 1 < j \leq k$$

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

**Eliminación de  
simetría**

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Asignamos el color de menor índice al conjunto de nodos que tenga la partición de menor índice

$$x_{ij} \leq \sum_{l=j-1}^{k-1} \sum_{u \in P_l} x_{uj-1} \quad \forall 1 < k \leq q, \forall i \in P_k, \forall 1 < j \leq k$$

- Ninguna partición puede estar coloreada con un color de etiqueta mayor a su índice

$$x_{ij} = 0 \quad \forall j > p(i) + 1$$

# Eliminación de simetría

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Asignamos el color de menor índice al conjunto de nodos que tenga la partición de menor índice

$$x_{ij} \leq \sum_{l=j-1}^{k-1} \sum_{u \in P_l} x_{uj-1} \quad \forall 1 < k \leq q, \forall i \in P_k, \forall 1 < j \leq k$$

- Ninguna partición puede estar coloreada con un color de etiqueta mayor a su índice

$$x_{ij} = 0 \quad \forall j > p(i) + 1$$

Este par de restricciones es el que mejores resultados arrojó en el algoritmo implementado.

# Desigualdades válidas en el modelo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

**Eliminación de  
simetría**

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Ningún vértice puede usar un color de etiqueta mayor a la cantidad de colores usados.

$$\sum_{j \in C} j x_{ij} \leq \sum_{j \in C} w_j \quad \forall i \in V$$

# Desigualdades válidas en el modelo

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Ningún vértice puede usar un color de etiqueta mayor a la cantidad de colores usados.

$$\sum_{j \in C} jx_{ij} \leq \sum_{j \in C} w_j \quad \forall i \in V$$

- **Ninguna partición** puede usar un color de etiqueta mayor a la cantidad de colores usados.

$$\sum_{j \in C} \sum_{i \in P_k} jx_{ij} \leq \sum_{j \in C} w_j \quad \forall P_k \in P$$



# Resolución

## Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

### Introducción

Grafos  
Motivación

### Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

### Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

### Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

### Conclusiones

Una vez fijado el modelo, una manera de resolver un problema de programación lineal entera consiste en aplicar un algoritmo de *branch and cut*, el cual es una combinación de las técnicas de planos de corte y de branch and bound.

# Resolución

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Una vez fijado el modelo, una manera de resolver un problema de programación lineal entera consiste en aplicar un algoritmo de *branch and cut*, el cual es una combinación de las técnicas de **planos de corte** y de branch and bound.

La primera se basa en resolver el problema de programación lineal **sin** las restricciones de integralidad, eliminar la solución fraccionaria con algún criterio, y repetir el proceso hasta llegar a una solución óptima entera.

# Resolución

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Una vez fijado el modelo, una manera de resolver un problema de programación lineal entera consiste en aplicar un algoritmo de *branch and cut*, el cual es una combinación de las técnicas de planos de corte y de **branch and bound**.

La primera se basa en resolver el problema de programación lineal **sin** las restricciones de integralidad, eliminar la solución fraccionaria con algún criterio, y repetir el proceso hasta llegar a una solución óptima entera.

La segunda subdivide el problema sucesivamente en otros más pequeños, eliminando ciertas soluciones fraccionarias, y manteniendo durante el recorrido del árbol generado una cota superior y otra inferior para el óptimo buscado.

# Componentes

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

**Algoritmo**

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Un algoritmo de branch and cut consta entonces, de los siguientes componentes:

# Componentes

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

**Algoritmo**

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Un algoritmo de branch and cut consta entonces, de los siguientes componentes:

- **Algoritmos de separación**, para remover soluciones fraccionales aplicando planos de corte construidos a partir de desigualdades válidas

# Componentes

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Un algoritmo de branch and cut consta entonces, de los siguientes componentes:

- **Algoritmos de separación**, para remover soluciones fraccionales aplicando planos de corte construidos a partir de desigualdades válidas
- **Estrategias de branching**, para decidir con qué criterio se subdivide el problema a cada nodo del árbol

# Componentes

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Un algoritmo de branch and cut consta entonces, de los siguientes componentes:

- **Algoritmos de separación**, para remover soluciones fraccionales aplicando planos de corte construidos a partir de desigualdades válidas
- **Estrategias de branching**, para decidir con qué criterio se subdivide el problema a cada nodo del árbol
- **Heurísticas inicial y primal**, para contar con soluciones enteras factibles durante el recorrido del árbol, que actúan como cotas superiores para el óptimo.







# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

**Planos de corte**

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Una partición no puede colorearse con el color  $j_0$  a menos que todos los anteriores ya hayan sido usados.

$$\sum_{i \in p_0} \sum_{j \geq j_0} x_{ij} \leq w_{j_0} \quad \forall p_0 \in P, j_0 \in C$$

# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Una partición no puede colorearse con el color  $j_0$  a menos que todos los anteriores ya hayan sido usados.

$$\sum_{i \in p_0} \sum_{j \geq j_0} x_{ij} \leq w_{j_0} \quad \forall p_0 \in P, j_0 \in C$$

Hay solamente  $|P| \times |C|$ , con lo que pueden resolverse mediante simple enumeración.

# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

**Planos de corte**

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Dado un maximum component independent set  $I$  de tamaño  $\alpha$  tal que cada nodo está en una partición distinta, a lo sumo  $\alpha$  nodos pueden tener el mismo color.

$$\sum_{i \in I} x_{ij_0} \leq \alpha w_{j_0} \quad \forall j_0 \in C$$

# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Dado un maximum component independent set  $I$  de tamaño  $\alpha$  tal que cada nodo está en una partición distinta, a lo sumo  $\alpha$  nodos pueden tener el mismo color.

$$\sum_{i \in I} x_{ij_0} \leq \alpha w_{j_0} \quad \forall j_0 \in C$$

Especializamos esta desigualdad tomando subgrafos cuyos conjunto independientes máximos son fáciles de calcular.

- Component paths
- Component holes

# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Dado un maximum component independent set  $I$  de tamaño  $\alpha$  tal que cada nodo está en una partición distinta, a lo sumo  $\alpha$  nodos pueden tener el mismo color.

$$\sum_{i \in I} x_{ij_0} \leq \alpha w_{j_0} \quad \forall j_0 \in C$$

Especializamos esta desigualdad tomando subgrafos cuyos conjunto independientes máximos son fáciles de calcular.

- Component paths
- Component holes

Nuevamente usamos un algoritmo goloso para construir estos planos de corte, acotando la cantidad de veces que cada nodo y cada eje puede ser visitado.

# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
**Planos de corte**  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Dado un grafo, definimos su *grafo de particiones* como un grafo que tiene un nodo por cada partición del original, y dos nodos son adyacentes si todos los nodos de las dos particiones eran adyacentes entre sí:





# Desigualdades válidas para PCP

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

**Planos de corte**

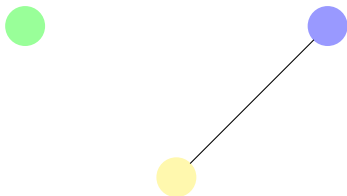
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Dado un grafo, definimos su *grafo de particiones* como un grafo que tiene un nodo por cada partición del original, y dos nodos son adyacentes sii todos los nodos de las dos particiones eran adyacentes entre sí:





# Planos de corte

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

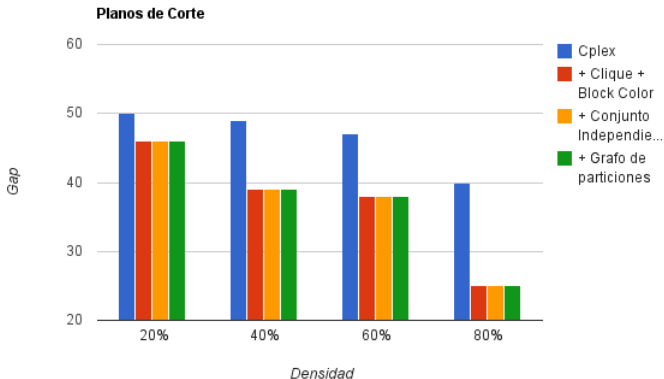
Modelo  
Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

Algoritmo  
**Planos de corte**  
Estrategia de branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

Conclusiones

Analizamos el gap en grafos de distinta densidad al aplicar distintas familias de corte sobre los ya provistos por CPLEX en un algoritmo de planos de corte:



# Estrategia de Branching

Lo siguiente es definir una estrategia de branching, que determina cómo generar los subproblemas a partir de un nodo del árbol.

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
**Estrategia de  
branching**  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

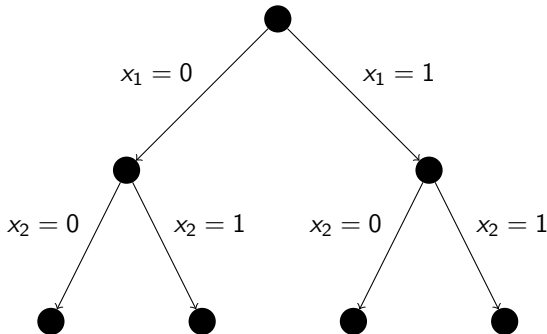
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Estrategia de Branching

Lo siguiente es definir una estrategia de branching, que determina cómo generar los subproblemas a partir de un nodo del árbol.

Las estrategias típicas son tomar la variable con valor más fraccionario o menos fraccionario en la solución de la relajación, y forzar a que tome valor 0 o 1 en cada hijo.







# Estrategia de Branching en PCP

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

Algoritmo

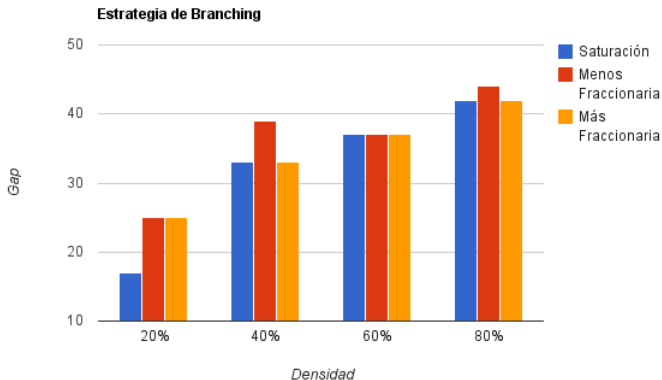
Planos de corte  
**Estrategia de branching**  
Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

Conclusiones

Comparando contra las otras estrategias en grafos de distinta densidad en un branch and bound:





# Heurísticas

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

La heurística primal se utiliza para generar soluciones enteras a lo largo del algoritmo, que actúan como cota superior para el óptimo.

Una heurística usual consiste en redondear las variables de acuerdo a su valor fraccionario en la relajación para llegar a una solución entera.

# Heurísticas

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

La heurística primal se utiliza para generar soluciones enteras a lo largo del algoritmo, que actúan como cota superior para el óptimo.

Una heurística usual consiste en redondear las variables de acuerdo a su valor fraccionario en la relajación para llegar a una solución entera.

Nosotros adaptamos algoritmos existentes de coloreo a este problema para utilizar como heurísticas.

# Algoritmos de enumeración

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

En coloreo, un algoritmo de enumeración recorre posibles coloreos, eliminando gran cantidad de soluciones simétricas y podando aquellos que no logran un valor mejor al alcanzado hasta el momento.

En cada iteración, se elige un nodo y se intenta colorearlo con los colores disponibles.

# Algoritmos de enumeración

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

En coloreo, un algoritmo de enumeración recorre posibles coloreos, eliminando gran cantidad de soluciones simétricas y podando aquellos que no logran un valor mejor al alcanzado hasta el momento.

En cada iteración, se elige un nodo y se intenta colorearlo con los colores disponibles.

Distintos criterios para elegir el nodo a colorear dan lugar a distintos algoritmos:

- Mayor grado del nodo
- Menor grado del nodo
- Mayor grado de saturación

# Algoritmos de enumeración

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

En coloreo, un algoritmo de enumeración recorre posibles coloreos, eliminando gran cantidad de soluciones simétricas y podando aquellos que no logran un valor mejor al alcanzado hasta el momento.

En cada iteración, se elige un nodo y se intenta colorearlo con los colores disponibles.

Distintos criterios para elegir el nodo a colorear dan lugar a distintos algoritmos:

- Mayor grado del nodo
- Menor grado del nodo
- Mayor grado de saturación

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

La variante que utiliza el mayor grado de saturación, DSATUR, es una de las que mejores tiempos logra.

# DSatur

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

La variante que utiliza el mayor grado de saturación, DSATUR, es una de las que mejores tiempos logra.

Si bien es un algoritmo exacto, limitamos su ejecución a una determinada cantidad de tiempo para usarlo como heurística, pues arroja soluciones muy buenas en poco tiempo.

La variante que utiliza el mayor grado de saturación, DSATUR, es una de las que mejores tiempos logra.

Si bien es un algoritmo exacto, limitamos su ejecución a una determinada cantidad de tiempo para usarlo como heurística, pues arroja soluciones muy buenas en poco tiempo.

Puede generalizarse para coloreo particionado según distintos criterios:

- **Nodo más sencillo:** de cada partición sin colorear, se toma el nodo de menor grado de saturación, luego se elige entre ellos el de mayor grado.
- **Partición más difícil:** se determina cuál es la partición aún no coloreada más difícil según distintos criterios, y de ella se elige el nodo de menor grado de saturación.



La variante que utiliza el mayor grado de saturación, DSATUR, es una de las que mejores tiempos logra.

Si bien es un algoritmo exacto, limitamos su ejecución a una determinada cantidad de tiempo para usarlo como heurística, pues arroja soluciones muy buenas en poco tiempo.

Puede generalizarse para coloreo particionado según distintos criterios:

- **Nodo más sencillo:** de cada partición sin colorear, se toma el nodo de menor grado de saturación, luego se elige entre ellos el de mayor grado.
- **Partición más difícil:** se determina cuál es la partición aún no coloreada más difícil según distintos criterios, y de ella se elige el nodo de menor grado de saturación.

La variante que utiliza el mayor grado de saturación, DSATUR, es una de las que mejores tiempos logra.

Si bien es un algoritmo exacto, limitamos su ejecución a una determinada cantidad de tiempo para usarlo como heurística, pues arroja soluciones muy buenas en poco tiempo.

Puede generalizarse para coloreo particionado según distintos criterios:

- **Nodo más sencillo:** de cada partición sin colorear, se toma el nodo de menor grado de saturación, luego se elige entre ellos el de mayor grado.
- **Partición más difícil:** se determina cuál es la partición aún no coloreada más difícil según distintos criterios, y de ella se elige el nodo de menor grado de saturación.

# DSatur Particionado

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

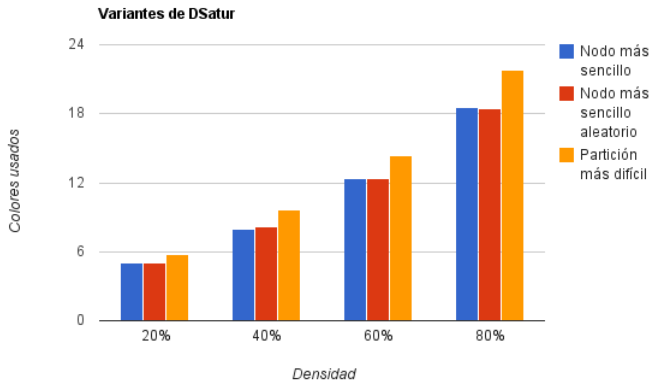
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Comparamos estos criterios en corridas de un minuto sobre grafos de distinta densidad:



# Heurística inicial

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Teniendo definida la variante de DSatur a utilizar, la aplicamos como heurística inicial, ejecutando por 5 segundos.

Esto no sólo provee una solución inicial para el algoritmo, que actúa como cota superior desde el principio del árbol, sino que también acota considerablemente la cantidad de variables y restricciones.

# Heurística inicial

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Teniendo definida la variante de DSatur a utilizar, la aplicamos como heurística inicial, ejecutando por 5 segundos.

Esto no sólo provee una solución inicial para el algoritmo, que actúa como cota superior desde el principio del árbol, sino que también acota considerablemente la cantidad de variables y restricciones.

Sea  $\chi_0$  la solución de la heurística inicial,

$$x_{ij} \quad 1 \leq i \leq |V|, 1 \leq j \leq |P|$$

$$w_j \quad 1 \leq j \leq |P|$$

# Heurística inicial

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Teniendo definida la variante de DSatur a utilizar, la aplicamos como heurística inicial, ejecutando por 5 segundos.

Esto no sólo provee una solución inicial para el algoritmo, que actúa como cota superior desde el principio del árbol, sino que también acota considerablemente la cantidad de variables y restricciones.

Sea  $\chi_0$  la solución de la heurística inicial,

$$x_{ij} \quad 1 \leq i \leq |V|, 1 \leq j \leq \chi_0$$
$$w_j \quad 1 \leq j \leq \chi_0$$

Por cada color que no se utilice en la solución inicial, se tienen  $|V| + 1$  variables menos.

# Heurística primal

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Dada una solución fraccionaria, fijamos en 1 aquellas variables  $x_{ij}$  mayores a determinado valor. A partir de ese coloreo parcial, utilizamos DSatur para construir una solución entera válida.

# Heurística primal

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching

**Heurísticas  
Primal e Inicial**

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Dada una solución fraccionaria, fijamos en 1 aquellas variables  $x_{ij}$  mayores a determinado valor. A partir de ese coloreo parcial, utilizamos DSatur para construir una solución entera válida.

Si bien la heurística primal funciona correctamente, la inicial arroja un resultado demasiado cerca del óptimo, lo cual hace que la heurística primal sea incapaz de mejorar el resultado inicial en la mayoría de los casos. Sólo en grafos muy densos logra una mejora respecto de la solución inicial.



# Resultados

## Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

### Introducción

Grafos  
Motivación

### Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

### Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

### Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

### Conclusiones

Una vez construidos los componentes que forman el branch and cut, pasamos a evaluar su performance comparándolo contra otros algoritmos de programación lineal entera ya existentes.

# Conjunto de prueba

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
**Conjunto de  
prueba**  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

La mayoría de las pruebas fueron ejecutadas sobre dos familias de grafos aleatorios:

- Grafos binomiales
- Grafos de Holme-Kim

Asimismo se hicieron pruebas sobre grafos del conjunto de instancias DIMACS para coloreo.





# Instancias DIMACS

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

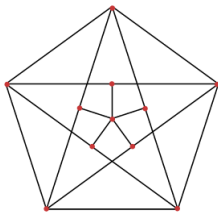
Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Los grafos correspondientes a las challenges de DIMACS son grafos particularmente difíciles de colorear. Construimos a partir de ellos grafos particionados agrupando los nodos de manera aleatoria.



# Resultados en binomiales PCP vs Cplex

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

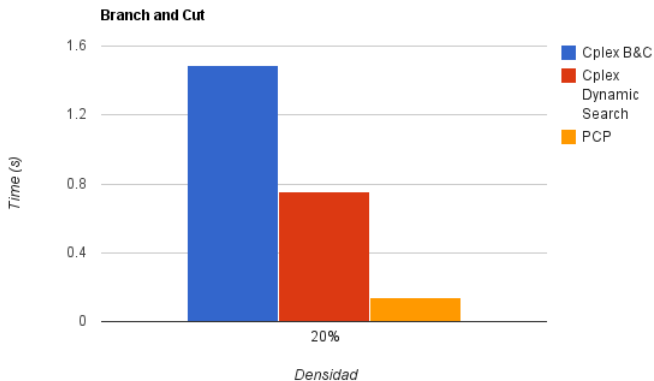
Modelo  
Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

Conclusiones

Ejecutamos el branch and cut sobre grafos aleatorios binomiales, de 90 nodos y 2 nodos por partición. Todos los grafos de baja densidad fueron resueltos a optimalidad, en distintos tiempos:



# Resultados en binomiales PCP vs Cplex

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo

Reforzando el modelo

Eliminación de simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de branching

Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

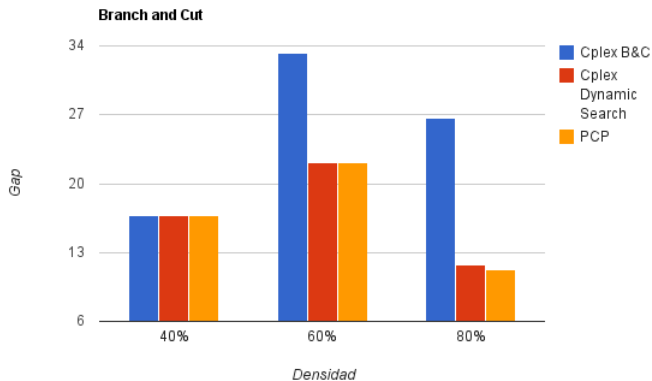
Conjunto de prueba

Versus Cplex

Versus Representatives Model

Conclusiones

Los de mayor densidad, obtuvieron los siguientes gaps en promedio tras 2hs de ejecución:



# Tamaños de partición PCP vs Cplex

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

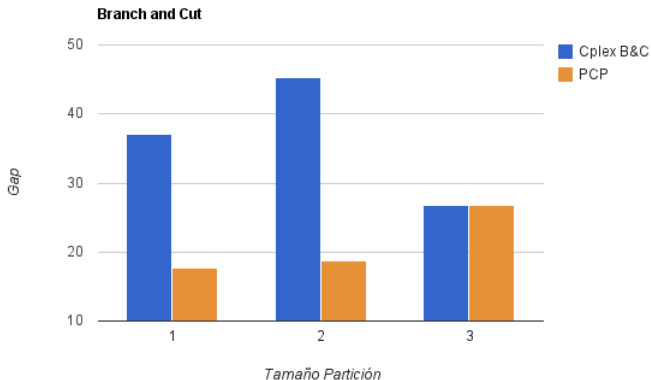
Conjunto de prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Evaluamos también cómo cambia la performance de los algoritmos conforme varía el tamaño de partición. Para tamaños de 1 a 3 nodos por partición, en binomiales de 90 nodos y densidad 60 %, obtuvimos:





# Tamaños de partición PCP vs Cplex

Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

Resultados

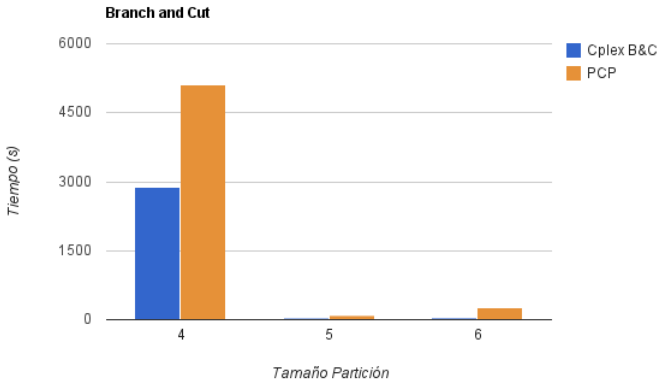
Conjunto de prueba

Versus Cplex

Versus Representatives Model

Conclusiones

Los grafos de particiones de mayor tamaño fueron todos resueltos a optimalidad, con los siguientes tiempos:



# Instancias DIMACS PCP vs Cplex

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
**Versus Cplex**  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Particionando de forma aleatoria 15 instancias DIMACS diferentes,  
los resultados obtenidos fueron:

Mejor resultado PCP: 4/15  
Mejor resultado Cplex: 4/15  
Empates: 7/15

# Representatives Model

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex

**Versus  
Representatives  
Model**

Conclusiones

Comparamos nuestro algoritmo contra el derivado del *representatives model*, un modelo alternativo para coloreo, el cual también fue generalizado a coloreo particionado y llevado a un branch and cut.

En este modelo, cada nodo es *representado* por otro (o por sí mismo). Todos los nodos que tienen el mismo representante, pertenecen a una misma clase de equivalencia y utilizan el mismo color.

$x_{uv} = 1$  si el nodo  $u$  representa al nodo  $v$

# PCP vs Representatives Model

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

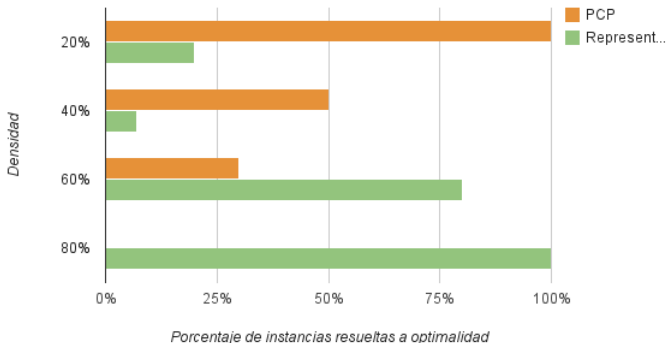
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

Dados grafos aleatorios de 90 nodos, particiones de 2 nodos y distinta densidad, comparamos qué porcentaje de las instancias evaluadas fueron resueltas a optimalidad por ambos algoritmos tras 2 horas de ejecución.



# Conclusiones

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Conclusiones

## Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

### Introducción

Grafos  
Motivación

### Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

### Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

### Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

### Conclusiones

- El algoritmo desarrollado específicamente para este problema mejora los resultados provistos por un framework genérico como es Cplex.

# Conclusiones

## Un algoritmo de Branch & Cut para PCP

Santiago Palladino, Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

### Introducción

Grafos  
Motivación

### Modelo

Modelo inicial de coloreo  
Reforzando el modelo  
Eliminación de simetría

### Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de branching  
Heurísticas Primal e Inicial

### Resultados

Conjunto de prueba  
Versus Cplex  
Versus Representatives Model

### Conclusiones

- El algoritmo desarrollado específicamente para este problema mejora los resultados provistos por un framework genérico como es Cplex.
- DSATUR particionado arroja excelentes resultados iniciales, corresponde al Branch and Cut lograr y principalmente probar la optimalidad.

# Conclusiones

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- El algoritmo desarrollado específicamente para este problema mejora los resultados provistos por un framework genérico como es Cplex.
- DSATUR particionado arroja excelentes resultados iniciales, corresponde al Branch and Cut lograr y principalmente probar la optimalidad.
- Distintos modelos para un mismo problema pueden comportarse de manera diametralmente opuesta según las instancias que resuelven.



# Trabajo a Futuro

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Trabajo a Futuro

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Realizar un análisis teórico más detallado del poliedro, hallando su dimensión y caracterizando facetas, así como buscando nuevas desigualdades válidas.

# Trabajo a Futuro

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Realizar un análisis teórico más detallado del poliedro, hallando su dimensión y caracterizando facetas, así como buscando nuevas desigualdades válidas.
- Convertir dichas desigualdades en nuevos planos de corte que ayuden al Branch and Cut a demostrar optimalidad más rápidamente.

# Trabajo a Futuro

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción  
Grafos  
Motivación

Modelo  
Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo  
Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados  
Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Realizar un análisis teórico más detallado del poliedro, hallando su dimensión y caracterizando facetas, así como buscando nuevas desigualdades válidas.
- Convertir dichas desigualdades en nuevos planos de corte que ayuden al Branch and Cut a demostrar optimalidad más rápidamente.
- Hacer un análisis más detallado de las variantes de DSATUR como algoritmo per se y no como un componente de otro.

# Trabajo a Futuro

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo

Reforzando el  
modelo

Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte

Estrategia de  
branching

Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba

Versus Cplex

Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

- Realizar un análisis teórico más detallado del poliedro, hallando su dimensión y caracterizando facetas, así como buscando nuevas desigualdades válidas.
- Convertir dichas desigualdades en nuevos planos de corte que ayuden al Branch and Cut a demostrar optimalidad más rápidamente.
- Hacer un análisis más detallado de las variantes de DSATUR como algoritmo per se y no como un componente de otro.
- Analizar la performance del branch and cut sobre otras familias de grafos, especialmente aquellas resultantes de instancias reales del min-RWA.



# That's all folks...

Un algoritmo de  
Branch & Cut  
para PCP

Santiago  
Palladino, Isabel  
Méndez-Díaz,  
Paula Zabala

Introducción

Grafos  
Motivación

Modelo

Modelo inicial de  
coloreo  
Reforzando el  
modelo  
Eliminación de  
simetría

Algoritmo

Planos de corte  
Estrategia de  
branching  
Heurísticas  
Primal e Inicial

Resultados

Conjunto de  
prueba  
Versus Cplex  
Versus  
Representatives  
Model

Conclusiones

# Gracias!