Quinta giornata nazionale di Analisi Non Standard nelle scuole superiori

Atti del convegno

Verona, 10 Ottobre 2015

La giornata di studio si è svolta
presso il Dipartimento di Informatica dell'Università di Verona
Sabato, 10 Ottobre 2015.

Impaginato a cura di *Bruno Stecca e Daniele Zambelli*

ↄMatematicamente
info@matematicamente.it
ISBN
febbraio 2016

L'Associazione Mathesis - Società Italiana di Scienze MM. e FF. - sezione di Verona
Il Dipartimento di Informatica dell'Università degli Studi di Verona
Il Piano Lauree Scientifiche - Università degli Studi di Verona
Il Gruppo promotore NSA - Verona

organizzano la

5ª Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Verona, sabato 10 ottobre 2015

Sede: Dipartimento di Informatica – Università di Verona - Strada Le Grazie 15

Sessione del mattino: ore 9:00 – 12:45

9.00 Registrazione
9.25 Inizio lavori, saluti e comunicazioni organizzative

9.30 **Ruggero Ferro**, Fondamenti della Matematica - UNIVR
Ritorno all'analisi infinitesimale

10.15 **Giorgio Goldoni**, ITIS Leonardo Da Vinci - Carpi (MO)
Uso di strumenti ottici non standard per un approccio visivo ad alcuni teoremi di analisi

11.00 Pausa

11.15 **Mauro Di Nasso**, Logica Matematica - UNIPI
Introduzione all'analisi con infinitesimi

12.00 **Andrea Sellaroli**, Liceo Scientifico G. Fracastoro - Verona
Condensatori: dall'esperimento all'equazione differenziale

12.45 – 14.15 Pausa pranzo

Sessione pomeridiana: 14.15 – 17.00

14.15 Organizzazione e avvio lavori

14.30 – 16.00 Interventi in sezioni parallele (i partecipanti potranno seguire tre interventi, a scelta):

Al momento le comunicazioni accettate comprendono:
Paolo Bonavoglia, Liceo Classico M. Foscarini - Venezia
Percorsi, difficoltà ed errori da evitare nell'insegnamento della NSA nei Licei
Sergio Casiraghi, e-Tutor Master DIDASCA - Sondrio
La NSA nella didattica viva della scuola secondaria superiore: una terza via
Andrea Centomo, Liceo Scientifico F. Corradini - Thiene (VI)
Problemi di Massimo e Minimo: un confronto tra metodi standard e non standard
Lucia Rapella, ITCG P. Saraceno - Morbegno (SO)
Sui teoremi del calcolo integrale
Roberto Zanasi, ITIS E. Fermi - Modena
Il pié veloce Achille e la ipertartaruga
Bruno Stecca & Daniele Zambelli, Liceo Scientifico G. Fracastoro – Verona
Materiali didattici per l'insegnamento della NSA

16.00 Discussione e conclusioni.

17 00 Fine lavori

Dispensa MIUR dall'insegnamento Prot. n. AOODGPER 24631– Roma 07- 08 - 2015 – Dirigente Giuseppe Bonelli
Per informazioni e invio di comunicazioni → nsa2015vr@gmail.com ,Tel. 348 7310069 ; per iscrizioni → info@mathesisverona.it

Indice

Presentazione

La quinta edizione della Giornata nazionale di studio sull'Analisi non Standard per la scuola superiore, svoltasi a Verona il 10 Ottobre 2014, è stata un buon successo. Possiamo dirlo oggi, a posteriori, ricordando gli oltre 160 presenti e il loro apprezzamento per le attività in programma.

Possiamo attribuire il successo ad alcune semplici ragioni:

- ragioni di contenuto, legate all'esigenza di approfondire temi essenziali ai curricoli e di dibattere esperienze didattiche innovative consolidate o recenti;
- ragioni organizzative, legate all'autorevolezza degli enti organizzatori e al lavoro capillare che è stato messo in campo.

Il gruppo di lavoro che ha progettato il convegno era composto da:

- Ruggero Ferro (Univr), per il Dipartimento di Informatica, sede dell'evento;
- Sisto Baldo (Univr), per il Progetto Lauree Scientifiche, che ha fornito il supporto economico;
- Alberto Burato e Luciano Corso, dell'Associazione Mathesis, sezione di Verona, fondamentale supporto sia per le comunicazioni che per l'esonero ministeriale;
- Leonardo Aldegheri, Bruno Stecca, Daniele Zambelli, per l'organizzazione e il coordinamento.

Il convegno è stato preparato anche scrivendo e diffondendo un articolo introduttivo all'Analisi non Standard, comparso nel n.205 della rivista elettronica Matematicamente, che è stato diffuso a tutti gli iscritti al convegno e ai soci della Mathesis, nella speranza di avvicinare anche i meno esperti ai temi trattati.

La giornata aveva un tema: "L'Analisi non standard e la didattica dell'Analisi matematica", con una caratterizzazione. Infatti avevamo chiesto ai relatori di presentare

- alcuni aspetti teorici essenziali;
- esperienze concrete di insegnamento;

sottolineando, in confronto con i metodi tradizionali:

- i vantaggi del nuovo approccio per lo studente e per il docente;
- gli eventuali punti critici;
- l'eleganza nella ricerca della soluzione di un problema.

Gli articoli che seguono sono le relazioni, riviste dagli autori nelle settimane successive all'evento. Essi costituiscono, a nostro avviso, un interessante e utile stimolo alla formazione dei docenti e un quadro fedele delle esperienze didattiche in campo.

Febbraio 2016 Il gruppo NSA - Verona

1

Ritorno all'analisi infinitesimale

Ruggero Ferro

Vista l'impossibilità del linguaggio, sia formale che informale, di dire di cosa si sta parlando se non si assumono già noti per via non linguistica alcuni concetti da cui derivare gli altri, per capire gli sviluppi e le affermazioni dell'analisi matematica è opportuno rifarsi ai problemi che ha inteso affrontare: il movimento e la determinazione di aree non delimitate da spezzate chiuse. Nel Rinascimento si cominciò ad affrontare questi problemi usando quantità trascurabili da certi punti di vista, e il lavorio per precisare questa nozione fu molto travagliato. Direi che il motivo fondamentale di queste difficoltà fu che ci si scontrava con un concetto di infinito (e infinitesimo) intuito ma allora non ben chiarito. Una mentalità aristotelica e archimedea delle critiche ha portato all'abbandono dei fruttuosi metodi infinitesimali che non sapevano rispondere alle obiezioni. Gli sviluppi del ventesimo secolo richiesti dalla crisi dei fondamenti hanno mostrato come superare gli ostacoli, permettendo di utilizzare le idee di quattro secoli fa in modo rigoroso, semplice ed efficiente: ritornando agli infinitesimi. Ora il problema si gioca sul come conciliare l'idea di infinito attuale di Cantor (sviluppatasi nel frattempo) con quella infinitesimale. Il mio intervento intende esplicitare e chiarire, con la semplicità richiesta dal tempo limitato, le problematiche qui velocemente adombrate.

1.1 Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Il linguaggio (sia formale che informale) non è in grado di precisare di cosa sta parlando, senza assumere che sia noto, per via non linguistica, il significato di alcune parole. Così è opportuno partire da problemi presenti nell'esperienza quotidiana e da situazioni concrete per cogliere i quali non è necessario il linguaggio. Ecco problemi che hanno portato all'analisi matematica: velocità istantanea, pendenza in un punto, volume di un solido anche se non limitato da facce poligonali piane.

La velocità istantanea è un fatto facilmente sperimentabile e si possono confrontare direttamente velocità istantanee, anche con strumenti meccanici. È goffamente artificioso definirla come il limite della velocità media, piuttosto è lo spostamento globale in un arco di tempo che è ottenuto dai contributi delle velocità istantanee in quel periodo. Per avvicinarsi a una misurazione della velocità istantanea, possiamo vederla come il rapporto tra lo spostamento in un istante e la durata dell'istante stesso, durata che è così assolutamente piccola da essere non apprezzabile, è trascurabile. Per stimare la velocità istantanea di un oggetto si potrebbe fotografarlo con un certo tempo di esposizione e poi misurare quanto l'immagine sia mossa (abbia contorni imprecisi). Minore è il tempo di esposizione meno mossa sarà l'immagine e la velocità istantanea potrebbe essere valutata come rapporto tra l'imprecisione dei contorni e il tempo di esposizione. Ci si potrebbe accontentare di un'immagine scattata con un tempo d'apertura così breve che non si riesce ad accorgersi che è mossa. Ma ciò potrebbe essere rilevato da strumenti più precisi. Allora ci inventiamo una macchina fotografica con tempo di apertura assolutamente piccolo, e imprecisione dei contorni dell'immagine assolutamente piccoli da essere trascurabili. Comunque il rapporto tra imprecisione dei contorni e tempo di apertura ci dà una valutazione della velocità istantanea dipendente dal tempo di apertura, ma con variazioni trascurabili. Così, trascurati i trascurabili, possiamo dire di avere una buona indicazione della velocità istantanea.

Un simile approccio può essere adottato per la pendenza. Pure il volume di un solido può esser visto come la somma infinita di elementi infinitesimi di volume.

Questi problemi ci portano a immaginare variazioni trascurabili in un continuo di possibilità, con le difficoltà del concetto di continuo che concepiamo senza buchi né interruzioni:

1. Vorremmo misurare le grandezze in un continuo contando le unità di misura contenute, o loro n-esimi (si sta ancora contando con i razionali), ma questo desiderio non è realizzabile a causa della presenza di grandezze incommensurabili.

2. Vorremmo almeno misurare queste grandezze approssimandole con multipli razionali di un'unità di misura, approssimazioni che concepiamo tanto precise quanto permettono i multipli razionali. Ma, perché mai tra le approssimazioni razionali per difetto e quelle per eccesso ci deve essere un solo elemento separatore?

Se ce ne fossero più di uno? La distanza tra loro sarebbe minore di 1/n per ogni naturale n positivo. Si sente l'esigenza di grandezze trascurabili/infinitesime.

Diciamo che una grandezza ξ positiva è trascurabile (piccola in modo assoluto) se, $0 < \xi$ e, per ogni naturale positivo n, $\xi < \frac{1}{n}$.

Caratteristica dei numeri trascurabili non nulli: aggiungendo, anche ripetutamente, trascurabili si mantiene la trascurabilità.

Se ξ è maggiore di 0 e minore di $\frac{1}{n}$ per ogni n naturale positivo, allora, per ogni k naturale positivo, $k \times \xi$ è pure maggiore di 0 (ovvio) e minore di $\frac{1}{n}$ per ogni n positivo. Infatti, dall'ipotesi ($\xi < \frac{1}{m}$ per ogni naturale positivo m) segue che, per ogni scelta dei naturali positivi k e n, $\xi < \frac{1}{k \times n}$ (anche $k \times n$ è un naturale positivo), sicché $k \times \xi < k \times \frac{1}{k \times n}$, cioè $k \times \xi < \frac{1}{n}$, per ogni n naturale positivo, e $k \times \xi$ è trascurabile. QED.

È accettabile ammettere che ci siano quantità trascurabili, assolutamente piccole e non nulle? A che possono servire grandezze tanto piccole da essere trascurabili? Trascuriamole e basta! Invece, grandezze, anche se trascurabili, possono portare a risultati utili: il rapporto tra due di esse può essere non trascurabile. Ad esempio $\frac{\xi}{\xi} = 1$.

Se si accettano i numeri trascurabili e si vuole che questi siano numeri a tutti gli effetti, bisogna costruire un nuovo sistema numerico (detto degli iperreali) che, oltre loro, includa i reali e sia chiuso per le usuali operazioni. Così ci saranno gli opposti di iperreali, i reciproci degli infinitesimi, che saranno infiniti (in valore assoluto maggiori di tutti i numeri naturali), iperreali finiti (in valore assoluto minori di un qualche naturale).

Gli iperreali finiti sono del tipo un reale più un infinitesimo, e il reale infinitamente vicino a un iperreale finito (cioè che dista un infinitesimo da questo) viene detto parte reale o parte standard dell'iperreale finito.

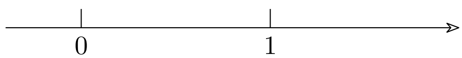
Ci si può fare un'idea di cosa sono e come agiscono i trascurabili e gli iperreali? Per precisare ciò, Leibniz esplicitò il principio che va sotto il suo nome: gli iperreali hanno tutte le stesse proprietà dei numeri (reali).

Non tutte! Non l'archimedeità, ad esempio.

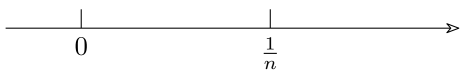
Quali allora? Quelle che vanno bene! E l'esperto sa quali sono.

Questa risposta degli inizi dell'analisi matematica lascia perplessi, e perplessi furono molti studiosi dell'epoca. Oggi la risposta è ben diversa e la vedremo in seguito. Tuttavia, il rifiuto degli infinitesimi non fu per questa imprecisione nel dichiarare il loro comportamento, ma per una rigida mentalità archimedea: *non ci può essere niente tra 0 e tutti i numeri del tipo* $\frac{1}{n}$*, con* n *naturale positivo*. Perché tale divieto? Perché la retta deve essere archimedea? Per vedere meglio come è fatta la retta nei pressi dell'origine ingrandiamola n volte, cambiando scala (zoom in $\times n$): i vari punti si saranno allontanati, 1 non sarà più visibile e al suo posto ci sarà $\frac{1}{n}$, ma per il resto immaginiamo che la retta appaia immutata.

Grandezza naturale:

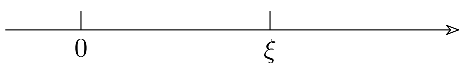


Zoom in $\times n$:

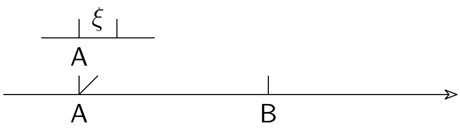


E se si potesse ingrandire infinite volte?

Zoom in $\times \frac{1}{\xi}$:



L'immagine della retta con la sua origine rimarrebbe inalterata, ma tutti i punti indicati dai reciproci dei naturali positivi si sarebbero allontanati tanto da uscire dal campo di visione. Il tratto di retta che continuiamo a vedere sarà costituito da punti tutti infinitamente vicini all'origine. E se volessimo andare da un punto A a un punto B, visibili sulla retta nella scala usuale, mediante passi di lunghezza infinitesima ξ, (il tratto di retta più in alto vuole indicare quello che si vede con un ingrandimento alla scala di ξ puntato in A)



quanti passi si devono fare? Facendone un numero finito si rimane sempre infinitamente vicino ad A, sicché per arrivare a B bisogna fare infiniti passi. Bisogna accettare i numeri naturali infiniti che contano tali passi!

1.2 Ipernaturali e nozioni di infinito

Ma cosa sono i naturali infiniti? Questa nozione d'infinito è diversa da quella di Cantor e di Peano. Per essi, e anche per noi per come siamo stati ammaestrati, i naturali sono tutti numeri che si possono ottenere a partire da 0 ripetendo un numero finito di volte l'operazione di passaggio al successore immediato, anche se non riusciamo a dire bene cosa intendiamo per finito. Addirittura Peano, con il principio d'induzione, chiede che i numeri naturali siano il minimo insieme chiuso per passaggio all'immediato successore a partire da 0. Cantor poi vuole che questo insieme dei naturali, visto come una sola cosa, sia il più piccolo infinito da cui partire per la costruzione di tutti gli infiniti.

Perché considerare numeri naturali solo quelli di questo minimo insieme chiuso per passaggio all'immediato successore? Perché non continuare a contare (passare all'immediato successore) anche dopo aver esaurito i naturali di Peano?

La situazione potrebbe essere vista in questo modo; avendo continuato a contare gli elementi di un insieme si è andati così avanti da aver perso il conto; però, se si considera un ulteriore elemento dell'insieme questo sarà contato dal numero naturale successore immediato di quello sconosciuto (avendo perso il conto) cui si era arrivati, e se si continuano a considerare altri elementi il numero corrispondente conterà queste aggiunte a partire dal numero che non si conosce.

Si può andare avanti tanto da considerare una quantità così grande di ulteriori elementi da perdere nuovamente il conto, tuttavia si può riprendere a considerare un ulteriore elemento alla volta e così continuare a contare. Addirittura, si può immaginare di perdere il conto di quante volte si è perso il conto, e tuttavia continuare a contare.

Comunque, concepiamo i naturali infiniti proprio come i naturali, ordinati e con le loro proprietà:

- ognuno di questi numeri è diverso da ciascuno dei suoi predecessori, e tra un numero e il suo successore immediato non c'è niente;
- ognuno di questi numeri, fuorché 0, ha predecessore immediato;
- si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere con resto, con il solito significato di queste operazioni;
- si possono confrontare tra loro gli elementi di un qualsiasi insieme S (ad esempio per dire chi è il più grande), purché S sia contabile da uno di questi numeri naturali, anche infiniti.

Chiamiamo ipernaturali i numeri introdotti. Questi possono essere divisi in finiti (i soliti) e infiniti (quelli che seguono tutti i finiti). Diremo poi iperfinito un insieme di elementi che può essere contato da un numero ipernaturale.

Perché non accettare gli ipernaturali? Ciascuno costituisce un infinito in atto, secondo una nozione non cantoriana di infinito.

Uno potrebbe avere dei dubbi se accettare questa diversa nozione di infinito attuale poiché non sa se queste idee porteranno a contraddizioni. Ma la risposta c'è ed è no, non porteranno a contraddizioni. Lo ha dimostrato Robinson costruendo il suo sistema di analisi non standard, tanto coerente quanto l'analisi standard, ed evidenziando, nel nuovo sistema numerico degli iperreali, gli ipernaturali con esattamente le proprietà che abbiamo già indicato per loro.

Poiché la matematica costruisce e organizza rappresentazioni mentali coerenti utili alla comprensione della molteplicità della realtà, e i concetti che stiamo analizzando lo sono, non si capisce perché non debbano avere un ruolo importante in questa disciplina.

1.3 Ruolo degli ipernaturali

Gli ipernaturali sono molto importanti nell'ottenere molti risultati fondamentali dell'analisi. Vengono utilizzati per suddividere un intervallo $[a, b]$ in parti di uguale lunghezza ε (fuorché forse l'ultima), anche se ε è un infinitesimo, mediante i punti: a, $a+\varepsilon$, $a+2\varepsilon$, ..., $a+j\varepsilon$, ..., $a+N\varepsilon$, b dove N è il massimo ipernaturale tale che $a+N\varepsilon$ è minore di b, e dove j è un ipernaturale minore o uguale a N. Ancora i tratti di retta più in alto indicano ingrandimenti alla scala di ε puntati nei punti sotto indicati.

Queste suddivisioni di un intervallo permettono di ottenere facilmente i più profondi teoremi dell'analisi matematica, confrontando i valori di una funzione nei punti di partizione dell'intervallo, con dimostrazioni che presentano difficoltà pari a quella vista, quindi presentabili anche in una scuola superiore. Per enunciare i

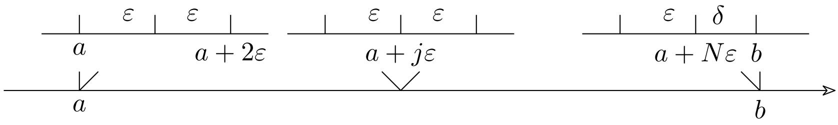


Figura 1.1:

teoremi cui si fa riferimento è opportuno, prima, precisare la nozione di continuità di una funzione in un intervallo chiuso.

Una funzione f è detta continua in un intervallo chiuso se, per ogni coppia di iperreali x_1 e x_2 nell'intervallo, se sono infinitamente vicini ($x_1 \approx x_2$), cioè se $x_1 - x_2$ è un infinitesimo, allora anche $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sono infinitamente vicini ($f(x_1) \approx f(x_2)$), cioè $f(x_1) - f(x_2)$ è un infinitesimo. Ed ecco alcuni profondi teoremi dalla dimostrazione facile usando gli ipernaturali.

- Data una funzione f continua in un intervallo chiuso $[a;\ b]$, se agli estremi f è una volta positiva e l'altra negativa allora f ha almeno uno zero interno all'intervallo.

  Si suddivide l'intervallo in parti con passi di lunghezza ε. Se in nessuno di tali punti la funzione è nulla, si cerca il primo dei punti $a+j\varepsilon$ della partizione in cui la funzione sia dello stesso segno di $f(a)$ mentre in $a+(j+1)\varepsilon$ la funzione è di segno diverso. Segue, per la continuità, che la funzione è nulla nel punto che è la parte reale di $a+j\varepsilon$.

- Una funzione continua in un intervallo chiuso ha massimo e minimo.

  Si suddivide l'intervallo in parti con passi di lunghezza ε. Si osserva che ogni punto reale dell'intervallo è infinitamente vicino a un punto della partizione se ε è un infinitesimo non nullo. Si cerca un punto $a+j\varepsilon$ della partizione in cui la funzione ha valore maggiore o uguale ai valori negli altri punti della partizione: questo confronto si può fare perché l'insieme dei punti partizione è contabile da un ipernaturale. Segue, per la continuità e poiché se $\alpha \leq \beta$ allora $\mathrm{st}(\alpha) \leq \mathrm{st}(\beta)$, che la funzione ha massimo nel punto che è la parte reale di $a+j\varepsilon$.

- Si possono costruire facilmente le somme di Riemann normali, inferiori e superiori, sia finite che infinite, per una funzione positiva f in un intervallo chiuso $[a;\ b]$ e da queste l'integrale definito, dimostrando facilmente che misura l'area sotto f, se f è continua nell'intervallo chiuso.

  In effetti, se ε indica un reale non nullo, l'intervallo si suddividerà con un numero finito N di punti di partizione, e la somma di Riemann sarà (vedi Figura 1):

$$f(a)\varepsilon+f(a+\varepsilon)\varepsilon+\cdots+f(a+j\varepsilon)\varepsilon+\cdots+f(a+(N-1)\varepsilon)\varepsilon+f(a+N\varepsilon)(b-(a+N\varepsilon)) =$$

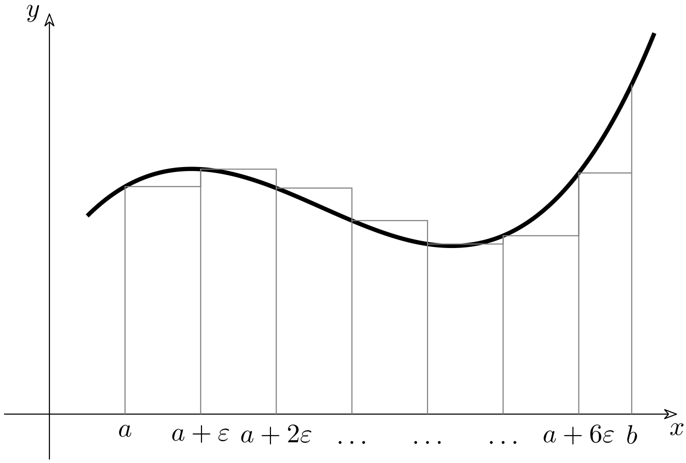


Figura 1.2: Somma di Riemann finita.

$$= \left(\sum_{j=0}^{N} f(a + j\varepsilon) \times \varepsilon \right) + f(a + N\varepsilon) \times (b - (a + N\varepsilon)) = \sum_{a}^{b} f(x) \times \varepsilon$$

Se $f_m(a + j\varepsilon)$ indica il minimo della funzione f nell'intervallo da $a + j\varepsilon$ a $a+(j+1)\varepsilon$, e se $f^M(a+j\varepsilon)$ indica il massimo della funzione f nell'intervallo da $a+j\varepsilon$ a $a+(j+1)\varepsilon$, allora sostituendo f_m a f nelle espressioni precedenti si ottiene la somma di Riemann inferiore, mentre se si sostituisce f^M a f nelle espressioni precedenti si ottiene la somma di Riemann superiore. Chiaramente il plurirettangolo misurato dalla somma di Riemann superiore contiene l'area sotto la funzione f che contiene il plurirettangolo misurato dalla somma di Riemann inferiore.

Se si ripetono le stesse costruzioni considerando ε infinitesimo non nullo si ottengono rispettivamente le somme di Riemann infinite normale, inferiore e superiore. Se f è continua nell'intervallo $[a;\ b]$, si vede facilmente che le somme di Riemann infinite superiore e inferiore sono finite e infinitamente vicine, sicché la loro parte reale dovrà coincidere con l'area sotto la funzione f. In tale caso si vede anche che la parte reale è indipendente dall'infinitesimo considerato. Così diviene naturale definire l'area sotto la funzione f come $\mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x) \times \varepsilon\right)$, che viene chiamato l'integrale definito da a a b della funzione f con passi delle partizione di lunghezza ε, e indicato da $\int_a^b f(x)\varepsilon$

Si dimostrano anche (sempre senza difficoltà, cioè con difficoltà del livello di quelle delle dimostrazioni viste) tutte le altre usuali proprietà degli integrali definiti, incluso il teorema fondamentale del calcolo.

1.4 Confronto tra nozioni di limite

Ora cercherò di confrontare i metodi "classici" con quelli "non standard" per quanto riguarda la nozione di limite.

L'accettazione degli infinitesimi era risultata molto efficace per lo sviluppo dell'analisi matematica, ma rifiutati questi per motivi ideologici, come recuperare i risultati già ottenuti con gli infinitesimi facendone a meno? La soluzione trovata nella seconda metà dell'800 fu un'opportuna nozione di limite, mediante la quale si poterono definire continuità, derivate, integrali e quant'altro. Tale nozione di limite si basa sulla nozione di "piccolo".

La nozione di piccolo non può essere assoluta, ma è solo relativa: una quantità piccola su scala astronomica non è certo piccola su scala nucleare, si può parlare solo di più piccolo di una quantità fissata. La nozione di piccolo non si preserva operando su di essa: una somma di "più piccoli di ..." non è detto che sia "più piccola di ...".

La definizione classica dice: L è il limite di $f(x)$ per x tendente a c se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad ((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

con la presenza dei piccoli relativi come "più piccolo di δ" e "più piccolo di ε".

Quant'è difficile capire e spiegare perché questa debba essere la nozione di limite (ma lo si può fare con molto lavoro). Com'è difficile cogliere il gioco delle tre quantificazioni alternate esattamente in quell'ordine, e della direzione dell'implicazione. Peggio, questa definizione permette solo di verificare che un dato numero L è il limite, ma non dice come trovarlo. Per fare ciò, bisogna utilizzare i teoremi sui limiti (limite della somma è la somma dei limiti, ecc.) le cui dimostrazioni richiedono di avere acquisito bene l'orribile definizione classica di limite.

A scuola non si dimostrano questi teoremi, che sono sostituiti da regole, e la matematica è umiliata e perde il suo significato.

Prima di questa nozione di limite introdotta per abolire gli infinitesimi, l'analisi matematica cominciava con la nozione di derivata:

Il tasso di variazione di una quantità (che è funzione f della variabile x) in un punto c è la parte reale del rapporto incrementale, se c'è ed è sempre la stessa per ogni incremento infinitesimo non nullo della variabile x, cioè:

$$f'(c) = \mathrm{st}\left(\frac{f(c+\varepsilon) - f(c)}{\varepsilon}\right)$$

se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni infinitesimo ε diverso da 0.

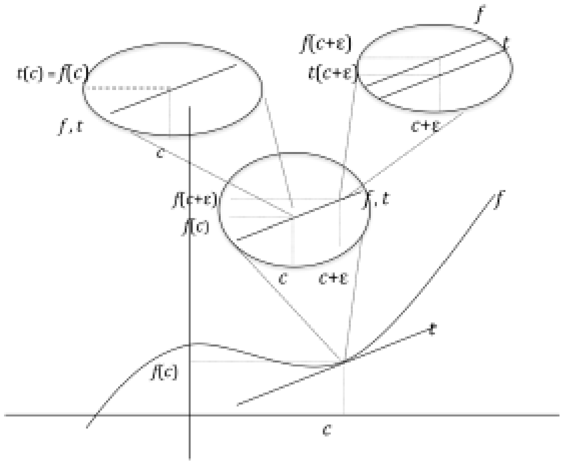


Figura 1.3: In questa, sono mostrati gli assi e la funzione f con evidenziato il punto di ascissa c e di ordinata $f(c)$. La retta t, che passa per il punto evidenziato, ha pendenza $\mathrm{st}\left(\frac{f(c+\varepsilon)-f(c)}{\varepsilon}\right)$. Per vedere cosa succede nell'infinitamente vicino al punto della curva di ascissa c, si è usato, nell'ovale che corrisponde al punto $(c;\ f(c))$, un ingrandimento infinito alla scala ε (infatti, vi si vedono sia c che $c+\varepsilon$) che permette di notare come la curva grafico della funzione f e la retta t siano indistinguibili, infatti differiscono per una quantità infinitesima rispetto a ε. Allora per vedere il comportamento rispettivo di queste due linee, si utilizzano due altri ingrandimenti infiniti nel precedente ingrandimento, uno puntato sempre su $(c;\ f(c))$ e l'altro su $(c+\varepsilon;\ f(c+\varepsilon))$. Nel primo si vedono ancora il grafico di f e la retta t coincidenti come lo erano nel primo ingrandimento e per lo stesso motivo, nel secondo, invece, le due linee sono distinte per un infinitesimo rispetto all'infinitesimo ε ma ci troviamo in un punto di ascissa a distanza ε da c, e non a distanza un infinitesimo rispetto a ε.

Il rapporto incrementale può essere diverso per diversi infinitesimi non nulli, ma se ha sempre la stessa parte reale, si possono trascurare i vari infinitesimi che distinguono il rapporto incrementale dalla sua parte reale, e questa è la derivata (la pendenza) della funzione in quel punto (vedi Figura 1.3).

All'interno della definizione di derivata c'è anche quella di limite: basta estendere la considerazione ad una qualsiasi funzione f e non solo ai rapporti incrementali per i vari infinitesimi, ma per i valori infinitamente vicini a c. Il limite della funzione f per x tendente a c è la parte reale della funzione calcolata in $c+\varepsilon$, $\mathrm{st}(f\,(x+\varepsilon))$, se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni infinitesimo non nullo ε. (vedi Figura 1.4)

Il limite (standard o non standard) descrive il comportamento della funzione f nei pressi di c. In particolare quello non standard indica il comportamento

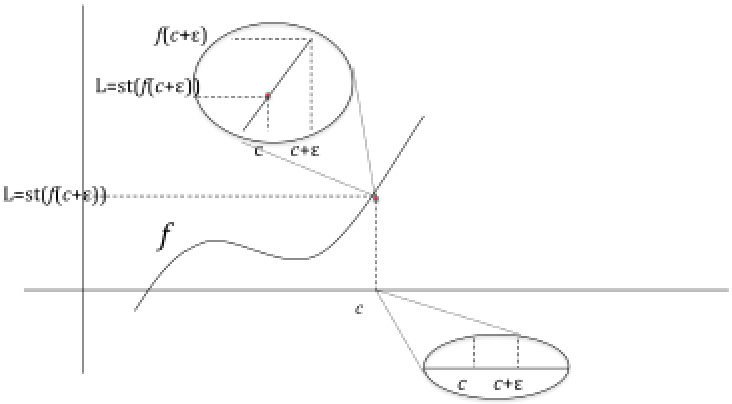


Figura 1.4: Un punto rosso indica che non conosciamo il comportamento della funzione nel punto di ascissa c. Se andiamo a valutare la funzione in un qualsiasi punto di ascissa c+ε incrementata da c per un infinitesimo non nullo ε, notiamo che il corrispondente valore $f(c+\varepsilon)$ è infinitamente vicino a L (lo notiamo perché si vede con un ingrandimento nella scala di ε)

della funzione f nell'infinitamente vicino a c ma non in c, comportamento che consiste nell'avere tutti i valori della funzione, corrispondenti ai punti infinitamente vicini a c e diversi da c, infinitamente vicini a un unico numero reale L. Questa definizione permette di calcolare il limite: basta considerare il valore $f(c+\varepsilon)$, con ε un qualsiasi infinitesimo non nullo, ed esprimerlo in modo da isolare le parti trascurabili (infinitesime) e trascurarle nel passare alla parte reale. Ad esempio siano:

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - x - 5}{x - 1} \quad e \quad c = 1$$

Allora

$$f(1+\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^3 + 5(1+\varepsilon)^2 - (1+\varepsilon) - 5}{(1+\varepsilon) - 1} =$$

$$= \frac{1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 5 + 10\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 1 - \varepsilon - 5}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{12\varepsilon + 8\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon(12 + 8\varepsilon + \varepsilon^2)}{\varepsilon} = 12 + 8\varepsilon + \varepsilon^2$$

e, poiché $8\varepsilon + \varepsilon^2$ è un infinitesimo, $\mathrm{st}\,(f(1+\varepsilon)) = 12$. Per fare ciò è necessario conoscere il comportamento di operazioni e funzioni rispetto alla suddivisione degli iperreali in infinitesimi non nulli, finiti (cioè minori in valore assoluto di un qualche numero naturale) non infinitesimi, infiniti (maggiori in valore assoluto di ogni numero naturale).

Questi comportamenti sono riassunti nelle seguenti tavole, dove ε, δ e γ indicano infinitesimi non nulli, a, b e c finiti non infinitesimi, H, J e K infiniti:

$+$	ε	a	H
δ	γ	c	K
b	c	c	K
J	K	K	?

$\times$	ε	a	H
δ	γ	γ	?
b	γ	c	K
J	?	K	K

x	$-x$	$\frac{1}{x}$
δ	γ	K
b	c	c
J	K	γ

Ciascuno di questi risultati ha una facile dimostrazione, con difficoltà al livello della dimostrazione vista, sicché è utilmente presentabile in una scuola superiore (un paio di questi risultati per esemplificazione del procedimento da seguire e gli altri per utile esercizio di apprendimento).

Vorrei proporre un paio di slogan che colgano le differenze tra le due nozioni di limite presentate. La nozione non standard corrisponde a:

"se mi impegno moltissimo, faccio benissimo",

con i superlativi assoluti.

La nozione classica corrisponde a:

"so impegnarmi abbastanza da far meglio di quanto richiesto, qualunque sia la precisione voluta",

con i superlativi relativi.

C'è poi lo slogan che coglie la presentazione dei limiti in molti testi scolastici (che presentano le due colonne per i valori delle variabili indipendente e dipendente):

"più mi impegno, meglio faccio (ma non è detto che si raggiunga il traguardo)".

Questo slogan è la riduzione al relativo dello slogan con i superlativi assoluti dell'analisi non standard. Esso rappresenta una nozione che travisa gravemente quella di limite, e ne ostacola la comprensione.

Si noti che c'è una bella dimostrazione dell'equivalenza delle nozioni di limite standard e non standard. Si dimostra, infatti, che:

$$\forall x\,((x \neq c \wedge x \approx c) \rightarrow f(x) \approx L)$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x\,((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

La nozione classica di limite ha un ruolo anche in una presentazione con i metodi non standard, quando, trovato il comportamento di una funzione nell'infinitamente vicino di un punto, si vuole concludere che pure nelle vicinanze di quel punto il comportamento è lo stesso. Così, anche seguendo l'approccio non standard bisogna arrivare alla orribile definizione classica di limite. Tuttavia, giunti al punto di porsi questo problema avendo seguito un approccio non standard, la preparazione dello studente è tale che può cogliere meglio ciò che la definizione classica intende notare, e può affrontare più agevolmente le difficoltà della nozione classica di limite e la seguente dimostrazione di equivalenza. Così questo risultato sarà da proporsi eventualmente alla fine dell'insegnamento. Esso permette di proseguire poi in corsi che seguono il metodo classico.

Da questo rapido confronto tra metodi "classici" e metodi "non standard", dovrebbe essere emerso come la trattazione classica presenti nozioni e teoremi ostici, tanto che, nella didattica scolastica, si riducono le definizioni precise a nozioni intuitive, meglio vaghe e quindi incomprensibili (o le si fanno imparare a memoria senza coglierne il significato) e si tralasciano le dimostrazioni trasformandole in regole ingiustificate che umiliano la volontà di comprensione degli alunni, rendendoli macchine esecutrici che, giustamente, odiano la matematica.

D'altra parte, partendo dalle nozioni non standard (molto più accessibili), le dimostrazioni non standard per arrivare agli stessi teoremi su cui basare il calcolo sono molto semplici e presentabili in una scuola superiore, permettendo così agli studenti di acquisire il significato di ciò che stanno facendo e di giustificare i calcoli successivi.

Certo, bisognerà aver già introdotto iperreali e ipernaturali, ma ciò può esser fatto agilmente mentre s'introducono reali e naturali, permettendo agli alunni di vedere modi diversi di affrontare gli stessi problemi. Si noti che una corretta presentazione di reali e naturali non è meno difficoltosa di quanto si sta proponendo di fare, una volta accettato che in matematica i problemi possono avere molteplici soluzioni.

1.5 Ruolo del linguaggio

Fin qui tutto bello avendo nascosto lo sporco (le difficoltà) sotto il tappeto. Fin dall'inizio si era detto che gli enti classici e i corrispondenti non standard devono avere le stesse proprietà, ma era problematico dire quali.

Non che oggi manchi la risposta (che non era chiara nell'epoca d'oro dell'analisi), ma può presentare difficoltà didattiche.

Di fatto le proprietà che si devono mantenere sono tutte quelle esprimibili nel linguaggio dei reali, e per completare le dimostrazioni bisognerebbe spesso mostrare che quanto asserito è esprimibile in tale linguaggio. Si noti che le nozioni di finito, di numero naturale, di numero reale, di archimedeità, e altre, non sono esprimibili nel linguaggio dei reali.

Le difficoltà vengono dal fatto che nelle nostre scuole si osserva molto raramente la differenza tra significato e sua espressione nel linguaggio. Già in prima elementare dovrebbe essere evidenziata la differenza tra numero e cifra, tra scrittura e suo significato.

Se in passato non lo si faceva è perché si riteneva che ogni significato fosse completamente descrivibile con il linguaggio, e che qualunque buona descrizione indicasse univocamente il suo significato. Ma oggi si sa che non è così e sussiste l'enorme problema che anche le descrizioni più precise dei concetti che coinvolgono una qualche idea di infinito possono essere interpretate in modi totalmente diversi. Sicché una scuola aggiornata dovrebbe essere molto sensibile a questa tematica, e di conseguenza le difficoltà evidenziate sarebbero facilmente superabili.

Quindi ben vengano i metodi non standard almeno per sollecitare una presa di coscienza delle difficoltà del linguaggio, presa di coscienza che dovrebbe essere presente nella scuola, specialmente negli insegnamenti di matematica e informatica, che basano il calcolo proprio sul collegamento e sulla differenza tra linguaggio e significato. Come si fa a parlare di variabili e di algebra senza aver presente questo rapporto?

1.6 Conclusione

Quanto detto finora evidenzia e confronta alcuni aspetti del metodo non standard di presentazione dell'analisi matematica, in particolare in vista di un suo efficace utilizzo didattico nelle scuole superiori. Ma ci sarebbero ancora molti altri aspetti e osservazioni da aggiungere, che non possono essere presenti in questo intervento. Vorrei sottolineare solo altri tre aspetti particolarmente rilevanti dal punto di vista didattico.

1. Abbiamo notato due diverse nozioni matematiche d'infinito e di limite: entrambe sono importanti per la comprensione e per gli sviluppi della matematica, prima o poi entrambe vanno acquisite e padroneggiate dagli studenti, notandone la differenza e le diverse applicazioni. L'uso, anche congiunto, di entrambe permetterà di sviluppare potenti strumenti matematici (non necessariamente da includere nella didattica delle superiori).

2. I metodi non standard sono applicabili non solo all'analisi matematica ma ai vari settori della matematica, dalla probabilità alla geometria, alla topologia,

eccetera. Come i vari ambiti della matematica possono essere affrontati partendo dalla teoria degli insiemi, così un'opportuna teoria non standard degli insiemi permette di affrontare con questa modalità i vari aspetti della matematica. Può essere opportuno indagare quanto questa ulteriore apertura possa essere utile per facilitare l'approccio degli studenti alla matematica, tenendo presente che, come per la teoria degli insiemi classica ci sono varie proposte e assiomatizzazioni, così avviene anche nel caso non standard.

3. Se le idee di fondo dei metodi non standard sono abbastanza bene delineate, questi non sono precisati nei dettagli che possono essere sviluppati in modi alternativi. Oltre a una più precisa comprensione di oggetti e concetti matematici in generale e non standard in particolare, queste ulteriori precisazioni possono portare alla scelta di proposte didatticamente più efficaci e convenienti, oltre che a giustificare metodi di calcolo più opportuni.

Termino ricordando che i metodi non standard permettono, oltre a quanto già illustrato, modellizzazioni della realtà (in particolare della probabilità, della finanza, dell'economia, della biologia eccetera) non disponibili con i metodi classici, sicché danno allo studente che avanzi negli studi poderosi nuovi strumenti per la vita professionale.

2

Strumenti ottici per un approccio ad alcuni teoremi di analisi

Giorgio Goldoni

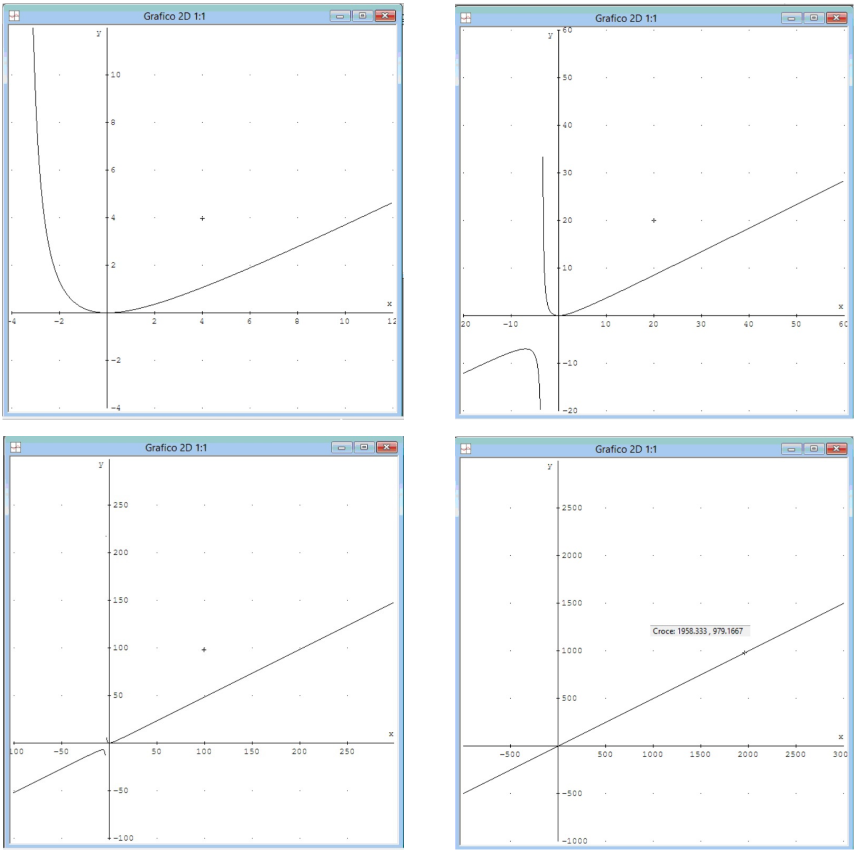
I comuni software di matematica usati per tracciare il grafico di una funzione consentono di zoomare all'avanti e all'indietro, operazioni che gli studenti sono abituati a fare quotidianamente sui loro dispositivi touch screen e che corrispondono all'uso di microscopi, zoom e telescopi standard. Partendo da alcuni tentativi empirici fatti al computer al fine di determinare un asintoto obliquo, si giunge alle formule che stabiliscono l'esistenza e l'espressione di un tale asintoto passando dagli strumenti ottici standard offerti dal software a quelli non standard, che appartengono all'indagine astratta e che conducono a una vera e propria dimostrazione non standard. Come ulteriore esempio di questa tecnica dimostrativa guidata da un approccio visivo, si giunge poi a una regola de l'Hôpital e al corrispondente caso discreto. L'approccio visivo consente soprattutto di comprendere a fondo il ruolo delle ipotesi di applicabilità della regola e di costruire facilmente opportuni controesempi.

2.1 Determinazione numerica di un probabile asintoto obliquo

Analizziamo il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 7x}$$

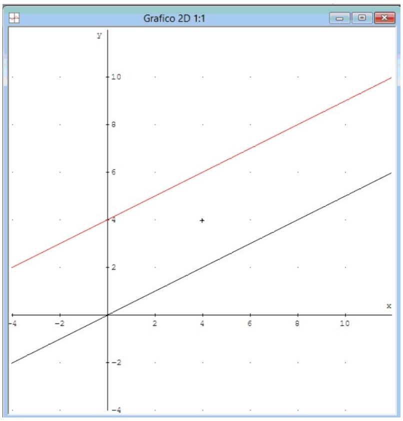
lontano dall'origine, per valori positivi di x. A questo scopo tracciamo il grafico della funzione con uno dei tanti software disponibili e poi zoomiamo ripetutamente all'indietro. Presto il grafico risulta indistinguibile da una retta passante per l'origine.

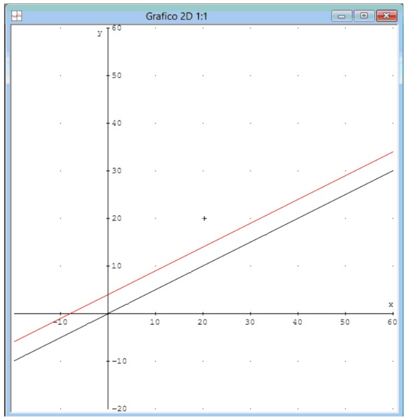


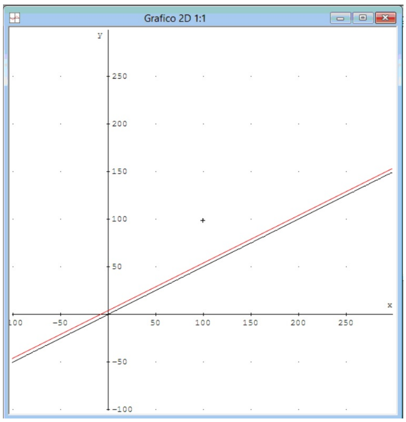
Posizionando il cursore sul grafico e prendendo le coordinate del punto indicato, si ricava che l'ordinata è, con grande precisione, la metà dell'ascissa. Questo sembra indicare che il grafico, a grande distanza dall'origine, si comporta come una retta passante per l'origine e di pendenza $m = 0,5$. Una conferma empirica si ottiene tracciando con diverso colore la retta r di equazione

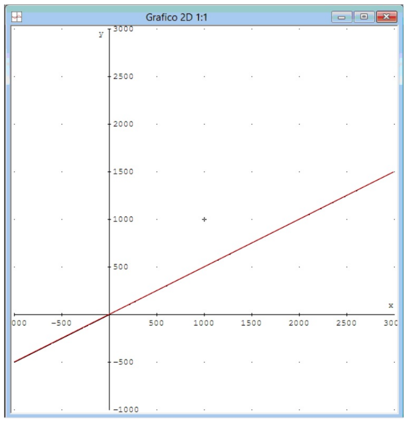
$$y = \frac{1}{2}x$$

che si sovrappone al grafico precedente. Si sarebbe a prima vista tentati di affermare che la funzione f ha come asintoto obliquo destro questa retta. In realtà l'uso dello zoom all'indietro ci ha dato solo l'indicazione della pendenza del probabile asintoto obliquo. Infatti, ogni retta di pendenza , pur di zoomare sufficientemente all'indietro, finisce col diventare indistinguibile dalla retta di uguale pendenza passante per l'origine.

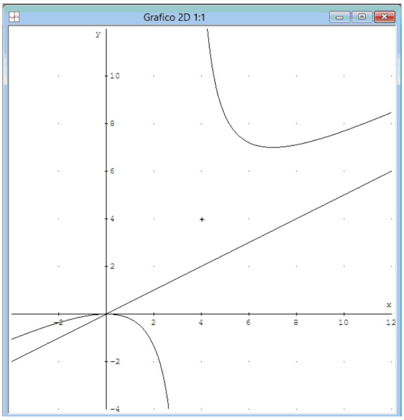


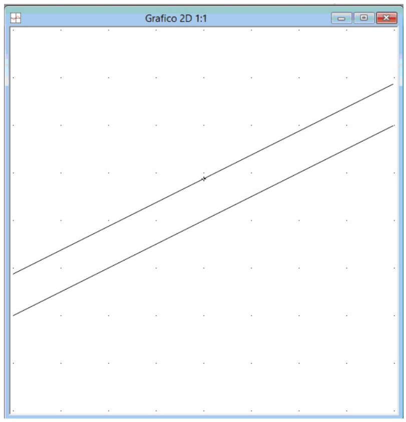






Al fine di stimare il valore dell'intercetta con l'asse y dell'asintoto, ritorniamo alla scala iniziale e andiamo ad osservare il grafico con l'equivalente di un telescopio standard in un punto lontano della retta r, prendendo come centro il punto della retta r di ascissa $x = 1000$.





Nella schermata originale, si riconosce dal colore che il grafico della funzione risulta indistinguibile da una retta parallela a r, ma traslata verso l'alto. Muovendo verticalmente il cursore si vede che esso viene a trovarsi sul grafico di f passando da ordinata $y = 500$ a ordinata $y = 501,75$. Stimiamo allora che l'asintoto obliquo sia dato dalla retta s di equazione $y = 0,5x + 1,75$. Sulla falsa riga di quanto appena visto possiamo adesso facilmente giungere alle espressioni che ci forniscono la pendenza e l'intercetta di un asintoto obliquo di una funzione quando esso esiste.

2.2 Determinazione di un asintoto obliquo

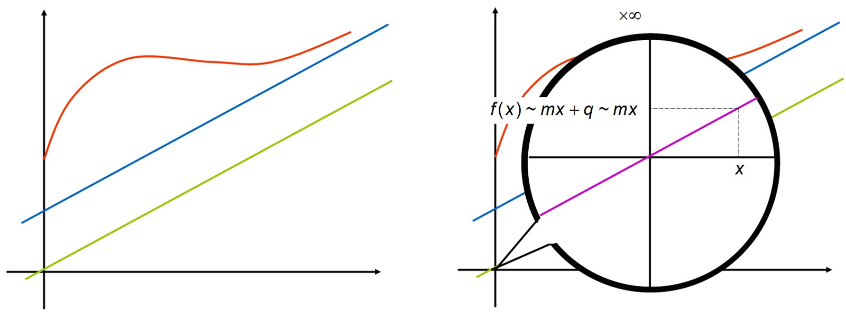
Diremo che la retta $y = mx + q$, con, $m \neq 0$, è un asintoto obliquo destro per la funzione f, il cui dominio contiene un intervallo illimitato a destra, se per $x = +\infty$, cioè per valori infiniti positivi di x, si ha che

$$(1) \qquad f(x) \approx mx + q.$$

In particolare, $f(x)$ dovrà necessariamente essere infinito e, poiché due infiniti a distanza finita sono indistinguibili, per $x = +\infty$ si avrà che

$$f(x) \sim mx + q \sim mx$$

.



Ciò equivale ad affermare che il grafico della funzione, l'asintoto e la sua parallela per l'origine risultano indistinguibili nel campo visivo di uno zoom non standard. Ne segue che

$$m \sim \frac{f(x)}{x}$$

e, poiché per i finiti non infinitesimi essere indistinguibili equivale ad essere infinitamente vicini, dovrà essere

$$m \approx \frac{f(x)}{x}$$

e quindi

$$m = \mathrm{st}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

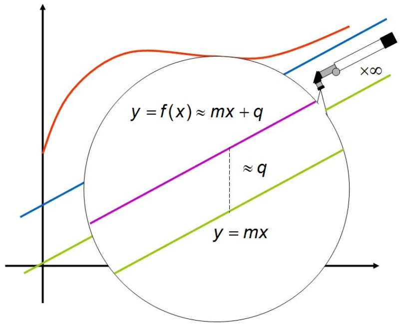
In termini intuitivi, la pendenza m dell'asintoto, che è data dal rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto qualsiasi della sua parallela per l'origine, a distanza infinita risulta indistinguibile dal rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto del grafico della funzione. Per il calcolo dell'intercetta dell'asintoto, segue dalla (1) che

$$q \approx f(x) - mx$$

e quindi che

$$q = \mathrm{st}\left[f(x) - mx\right].$$

Osservati con un telescopio non standard, il grafico e l'asintoto risultano infinitamente vicini e il valore q dell'intercetta dell'asintoto, che è dato per ogni valore di x dalla differenza tra l'ordinata dell'asintoto e quella della sua parallela per l'origine, per valori infiniti di x risulta infinitamente vicino alla differenza tra l'ordinata del grafico della funzione e la parallela all'asintoto per l'origine.



Nel caso della funzione $f(x)=\frac{x^3}{2x^2+7x}$ studiata empiricamente, abbiamo che per $x=+\infty$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{2x^2+7x}\sim\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

e quindi che

$$\frac{f(x)}{x}\approx\frac{1}{2}=m$$

Abbiamo poi che

$$f(x)-mx=\frac{x^3}{2x^2+7x}-\frac{x}{2}=\frac{-7x^2}{2\left(2x^2+7x\right)}\sim-\frac{7x^2}{4x^2}=-\frac{7}{4}$$

da cui

$$f(x)-mx\approx-\frac{7}{4}=q$$

e l'asintoto obliquo è dato da

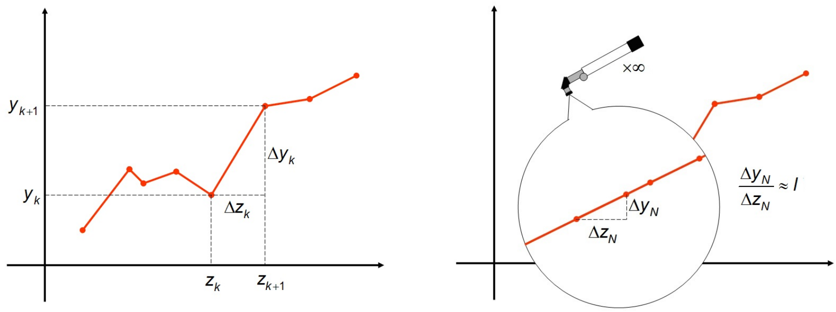
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$$

In questo caso i valori numerici di m e q erano particolarmente semplici e l'analisi empirica ha consentito addirittura di indovinarli, ma il suo vero pregio è stato quello di suggerire in modo visivo come stabilire con esattezza l'esistenza di un asintoto obliquo e determinarne la pendenza e l'intercetta passando semplicemente dall'uso degli strumenti ottici standard forniti dal software a quelli non standard e alla relativa corrispondenza analitica.

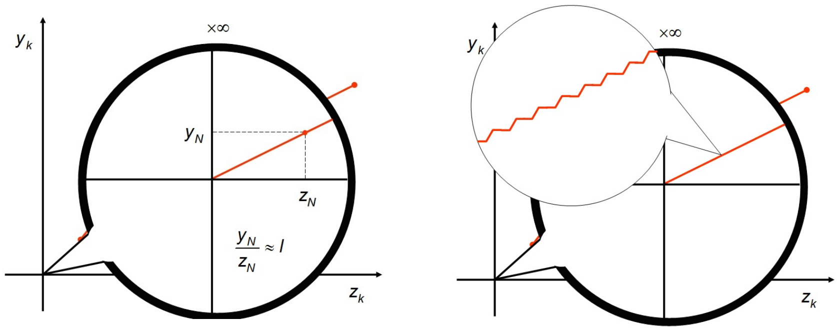
2.3 Una visualizzazione vincente per le regole de l'Hôpital nella forma discreta (Teoremi di Cesaro)

Consideriamo il caso di due successioni $\langle y_k\rangle$ e $\langle z_k\rangle$, con la seconda divergente positivamente, ossia tale che per ogni valore infinito N dell'indice si abbia che

$z_N = +\infty$. Nel caso in cui la successione abbia differenze positive, cioè che sia $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k > 0$ e quindi che la successione sia monotona crescente, se $\frac{\Delta y_N}{\Delta z_N} \approx l$ per ogni indice infinito N, allora sarà anche $\frac{y_N}{z_N} \approx l$. Si tratta dell'enunciato di uno dei cosiddetti Teoremi di Cesaro, che corrispondono di fatto alla versione discreta dei Teoremi di de L'Hôpital. Questo e gli altri Teoremi di Cesaro possono essere resi evidenti mediante l'uso degli strumenti ottici ideali non standard, visualizzazione che conduce non solo a una loro vera e propria dimostrazione non standard, ma che, soprattutto, consente di comprendere a fondo il ruolo giocato dalle ipotesi e di costruire facilmente degli esempi che mostrano che non vale il loro inverso e cioè che può accadere che sia $\frac{y_N}{z_N} \approx l$ per ogni indice infinito senza che lo stesso valga per il rapporto delle differenze. Risulta vincente visualizzare non i grafici delle due successioni, ma la spezzata i cui vertici hanno coordinate $(z_k;\ y_k)$, come se si trattasse di un moto nel piano a tempo discreto.



La monotonia di $\langle z_k \rangle$ assicura che i vertici della spezzata si spostino sempre più a destra e la sua divergenza garantisce che essi esistano a distanza infinita dall'origine. L'ipotesi che il quoziente delle differenze abbia una stessa parte standard l per valori infiniti dell'indice si traduce visivamente nel fatto che, osservati con un telescopio non standard, i vertici della spezzata risultano allineati. Puntando uno zoom non standard nell'origine, la spezzata risulta allora indistinguibile da una retta di pendenza l passante per l'origine.



Ecco allora che il valore di pendenza risulta infinitamente vicino al rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto qualsiasi della spezzata che nel campo visivo dello zoom risulta separato dall'origine e quindi che

$$\frac{y_N}{z_N} \approx l$$

per ogni indice infinito N. Risulta immediatamente chiaro che non vale il viceversa, e cioè che se la spezzata nel campo visivo dello zoom risulta indistinguibile da una retta di pendenza l passante per l'origine, non è detto che il rapporto delle differenze abbia parte standard costante per ogni indice infinito. Potrebbe infatti trattarsi di una spezzata con un andamento "seghettato" per la quale i rapporti delle differenze assumono valori alterni, come nel caso delle successioni $\langle y_k \rangle$ e $\langle z_k \rangle$ date rispettivamente da

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 5, \quad 5, \ldots$$

e

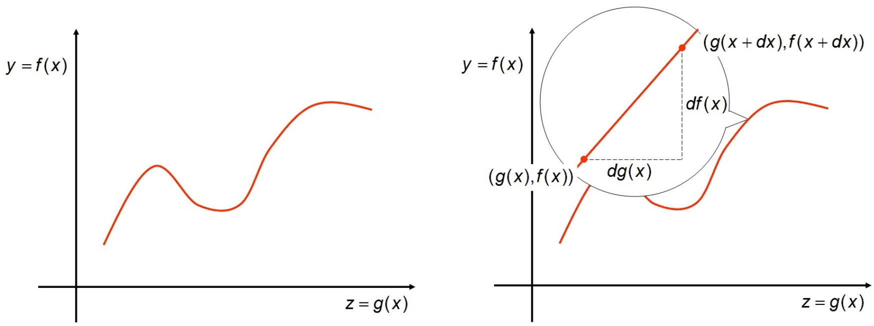
$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \ldots$$

$$\text{cioè con } y_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & \text{per } k \text{ dispari} \\ \frac{k}{2} & \text{per } k \text{ pari} \end{cases} \quad \text{e } z_k = k.$$

Per indici infiniti N si ha allora che $\frac{y_N}{z_N} \approx \frac{1}{2}$, mentre $\frac{\Delta y_N}{\Delta z_N}$ vale 0 se N è dispari e 1 se N è pari.

2.4 Il caso continuo

Consideriamo ora il Teorema di de L'Hôpital che corrisponde al caso continuo del precedente Teorema di Cesaro. Supponiamo quindi di avere due funzioni f e g definite su uno stesso intervallo illimitato a destra, entrambe derivabili. Ammettiamo inoltre che sia $g(+\infty) = +\infty$, cioè che $g(x)$ sia un infinito positivo per ogni infinito positivo x e che sia $g'(x) > 0$ in tutto l'intervallo e quindi che g sia monotona crescente. Sotto queste ipotesi, se per $x = +\infty$ si ha che $\frac{f'(x)}{g'(x)} \approx l$, allora è anche $\frac{f(x)}{g(x)} \approx l$. Ancora una volta, la rappresentazione grafica vincente è quella di considerare f e g come le componenti di un moto piano.

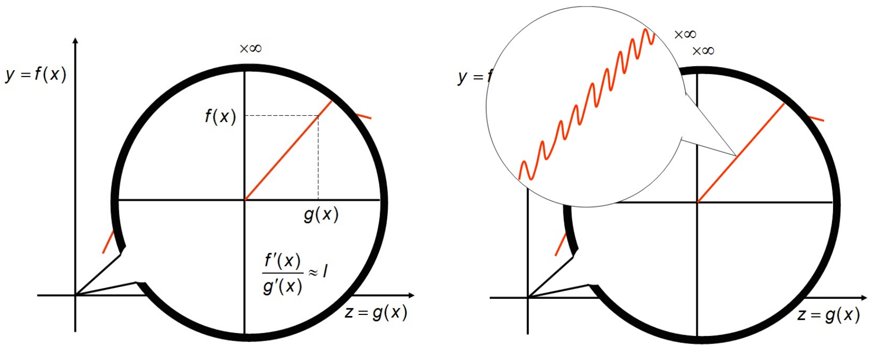


La monotonia di g assicura che il punto che descrive nel piano zOy la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} z = g(x) \\ y = f(x) \end{cases}$$

si sposta verso destra, mentre la divergenza di g ci garantisce che la curva esiste per valori infiniti dell'ascissa z. Nel punto di coordinate $(g(x);\ f(x))$ la curva è poi dotata di tangente di pendenza $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Infatti, essendo f e g derivabili, in corrispondenza di un incremento infinitesimo non nullo dx si ha che l'ascissa e l'ordinata del punto risultano incrementate rispettivamente degli infinitesimi $dg(x)$ e $df(x)$, di cui il primo non nullo per l'ipotesi di positività di g'. Avremo allora che

$$\frac{df(x)}{dg(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{dg(x)}{dx}} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Osservata con un telescopio non standard la curva ci appare rettilinea con pendenza l e puntando uno zoom non standard nell'origine essa risulta indistinguibile da una retta di pendenza l passante per l'origine. Ne segue che il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto della curva che si trova nel campo visivo dello zoom, separato dall'origine, risulterà infinitamente vicino al valore di pendenza e quindi che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx l \text{ per } x = +\infty$$

Come nel caso discreto, è immediato intuire che non vale il viceversa e cioè che può accadere che abbia parte standard definita il rapporto tra le funzioni, ma non quello delle loro derivate. Basta immaginare che, puntando un microscopio non standard nel campo visivo dello zoom, la curva risulti oscillante. A questo scopo è sufficiente prendere $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x$. Abbiamo in questo caso che per $x = +\infty$ è $\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{x+\sin x}{x} \approx 1$, ma $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$ non ha una parte standard definita.

2.5 Conclusione

L'approccio visivo a diversi teoremi di analisi matematica mediante l'uso di microscopi, telescopi e zoom ideali, nel caso della trattazione non standard, fornisce non solo un prezioso aiuto all'intuizione estendendo la potenza di strumenti che i giovani di oggi sono avvezzi a utilizzare quotidianamente, ma suggerisce in modo immediato una vera e propria dimostrazione analitica, rendendo particolarmente chiaro il ruolo giocato dalle ipotesi.

3

Un'introduzione all'analisi con infinitesimi

Mauro Di Nasso

I successivi ampliamenti degli insiemi numerici costituiscono un aspetto fondamentale dello sviluppo della matematica: dai numeri naturali ai numeri interi, dagli interi ai razionali, dai razionali ai reali, dai reali ai complessi. L'analisi nonstandard ha mostrato che esistono altre possibili e importanti estensioni del campo dei numeri reali: i numeri iperreali. Esiste pero' un campo ordinato intermedio tra i reali e gli iperreali che ha il vantaggio di poter essere costruito e giustificato in modo molto semplice, e che è già sufficiente per sviluppare un'analisi con infinitesimi.

3.1 Introduzione

L'*analisi nonstandard*, introdotta negli anni '60 del secolo scorso dal logico matematico Abraham Robinson [**?**], ha posto su basi fondazionali rigorose l'uso di numeri infinitesimi ed infiniti nell'analisi matematica.

Per numero *infinitesimo* si intende un numero positivo ε più piccolo di tutte le frazioni $1/n$ con n naturale positivo. Per numero infinito si intende un numero numero positivo Ω più grande di tutti i numeri naturali n.[1]

Nell'*analisi infinitesimale* contemporanea, basata sui numeri reali, i numeri infinitesimi *non* esistono, ma storicamente non sempre è stato così. Anzi, i fondamentali risultati del calcolo sono stati inizialmente dimostrati mediante un uso diretto di quantità infinitesime ed infinite.

In questo articolo, dopo alcuni cenni storici sulle quantità infinitesime ed infinite, viene ripercorso il cammino matematico che ha portato ai successivi ampliamenti dei sistemi numerici, dai numeri naturali, agli interi, ai razionali, ai reali, ai complessi.

Nello stesso spirito, presentiamo poi i campi superreali, che estendono la retta reale con l'introduzione di "nuovi" numeri infinitesimi ed infiniti. In particolare,

[1] Qui abbiamo considerato soltanto quantità positive. Le definizioni rigorose di numero infinitesimo ed infinito nel quadro dei campi ordinati si trovano più avanti (cf. Definizione 3.6.4).

costruiamo il più piccolo campo superreale (i numeri α-superreali) con una semplice costruzione algebrica basata sulle espressioni polinomiali fratte.

Infine, esponiamo un paio di risultati recenti che pongono su basi logiche rigorose la nostra presentazione.

La tesi principale sottesa in questa esposizione è che l'uso di numeri infinitesimi ed infiniti può essere utilmente introdotto nell'insegnamento della matematica nelle scuole superiori, come utile passo introduttivo ai concetti fondamentali dell'analisi.

3.2 Un po' di storia

Il problema delle quantità infinitesime – collegato al concetto di continuità e di moto – è stato tema centrale della discussione matematico-filosofica fin dall'antichità.

- Zenone: Il paradosso di "Achille e la tartaruga" e il paradosso della "freccia";
- Euclide: "*Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente*".

(Euclide, *Gli Elementi*, Libro V, Definizione IV.)

Notiamo che grandezze omogenee che *non* hanno fra loro rapporto, sono grandezze una *infinitesima* rispetto all'altra:

$$\underbrace{A + \ldots + A}_{n \text{ volte}} < B \quad \text{per ogni naturale positivo } n, \text{ cioè:}$$

$$\frac{A}{B} < \frac{1}{n} \quad \text{per ogni naturale positivo } n.$$

- Archimede fece un uso euristico di quantità *infinitesime* per "divinare" aree o volumi, usando poi il metodo geometrico di *esaustione* per fornire dimostrazioni rigorose alle proprie intuizioni.

> *Ciò dunque non è stato dimostrato per mezzo di quel che è stato detto; ma è stata fornita una indicazione che la conclusione sia vera: perciò noi, vedendo che la conclusione non è stata dimostrata, ma presumendo che essa sia vera, proporremo la dimostrazione per via geometrica.*
>
> (Archimede, *Il Metodo*.)

Il XVII secolo vide la nascita del calcolo differenziale con Gottfried Leibniz e Isaac Newton.

E questi invero sono soltanto gli inizi di una geometria molto più sublime.

(Leibniz 1684, *Nova methodus pro maximis et minimis*.)

- Leibniz: Uso diretto dei numeri infinitesimi; è sua la notazione $\frac{df}{dx}$ come rapporto di *incrementi infinitesimi*.

Per dimostrare la *Regola di Leibniz*, egli considerava il prodotto:

$$dxy = (x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$$

e poi ometteva l'ultimo termine: *"la quantità $dx\,dy$ è infinitamente piccola rispetto al resto, poiché si suppone che dx e dy siano infinitamente piccoli"*.

Molti dei teoremi fondamentali del calcolo scoperti tra il XVIII e il XIX secolo, vennero giustificati con un esplicito uso di quantità infinitesime: Teorema di *Rolle* 1691, Regola di *de l'Hospital* 1696, Formula di *Taylor* 1715, ...

Ben presto nacquero severe critiche fondazionali a quella nuova matematica.

- Berkeley: I metodi e gli oggetti del nuovo calcolo non hanno maggiore giustificazione di quanta ne abbiano *"i misteri della religione o gli oggetti della fede"*.

> *E che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente. E allora non dobbiamo forse chiamarli gli spettri di quantità morte?*
>
> (G. Berkeley 1734, *The analyst.*)

L'uso diretto di quantità infinitesime restò però pratica comune ancora a lungo. I molti importanti risultati che continuavano ad ottenersi, non favorirono lo sviluppo di studi fondazionali.

> *I differenziali essendo privi di quantità, sono anche detti infinitesimi e, per la loro natura sono da interpretarsi come del tutto nulli o uguali a zero. Così se alla quantità x si attribuisce un incremento ω, di modo che diventi $x+\omega$, il suo quadrato xx diventerà $xx + 2x\omega + \omega\omega$, e dunque subirà l'incremento $2x\omega + \omega\omega$, perciò l'incremento della x, che è ω, starà all'incremento del quadrato, che è $2x\omega + \omega\omega$ come 1 sta a $2x + \omega$; il quale rapporto diventa di 1 a $2x$ soltanto nel momento in cui ω svanisce. Sia dunque $\omega = 0$ e il rapporto di questi incrementi evanescenti, che è la sola cosa che si considera nel calcolo differenziale, è quello di 1 a $2x$.*
>
> (L. Euler 1755, *Institutiones calculis differentialis*)

In formule:

$$\frac{(x+\omega)^2 - x^2}{(x+\omega) - x} = \frac{x^2 + 2x\omega + \omega^2 - x^2}{\omega} =$$

$$\frac{\omega(2x+\omega)}{\omega} = 2x+\omega = 2x.$$

Un'intensa ricerca fondazionale portò, nella seconda metà del XIX secolo, all'attuale formalizzazione "ε-δ" di Weierstrass. I numeri infinitesimi ed infiniti sono banditi dalla analisi.

> *Zenone affrontava in realtà tre problemi, i problemi degli infinitesimi, dell'infinito, e della continuità. Dai suoi tempi fino ai nostri, le migliori intelligenze di ogni generazione aggredirono a turno quei problemi ma non approdarono, in genere, a niente. Ai nostri giorni, però, tre studiosi, Weierstrass, Dedekind e Cantor, li hanno completamente risolti. Le soluzioni, per chi conosce la matematica, sono tanto chiare da non lasciare il minimo dubbio o la minima difficoltà.*
>
> (B. Russell 1901, *Mysticism and Logic*)

Tuttavia, anche dopo Weierstrass l'eliminazione dei numeri infinitesimi dalla pratica matematica non fu né immediata né indolore.

> *L'idea di infinitesimo non implica contraddizioni. Come matematico, preferisco il metodo degli infinitesimi a quello dei limiti, perché molto più facile e meno infestato di trappole.*
>
> (C.S. Pierce 1891, *The Law of Mind*)

> *Sono diventato pienamente convinto che il linguaggio e l'idea degli infinitesimi dovrebbero essere usati ai livelli piú elementari dell'istruzione – con tutte le precauzioni, naturalmente.*
>
> (A. de Morgan 1889, *Grave's Life of W.R. Hamilton*)

Col tempo si diffuse tra i matematici la comune opinione secondo la quale, usando le parole dello stesso Russell, *"gli infinitesimi devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori"*.

- *Davvero i concetti di numero infinitesimo e di numero infinito sono contraddittori?*

Affronteremo il problema usando il moderno linguaggio dell'algebra. La nozione centrale sarà quella di *campo ordinato*, che assiomatizza le proprietà fondamentali che l'intuizione attribuisce all'insieme di "tutte le quantità numeriche".

3.3 Introduzione di nuovi insiemi numerici

La storia della matematica è segnata da una serie di successivi ampliamenti degli insiemi numerici. Il passo iniziale:

- Insieme dei *numeri naturali* $\mathbb{N}$, dotato delle operazioni di *somma* e di *prodotto*, e di un *ordine*.

Sorge naturale un problema.

- Problema della *differenza*:

  Dati n ed m, posso trovare k tale che $n + k = m$?

Dalle proprietà dei numeri naturali segue che un tale k esiste ed unico se e solo se $n \leq m$. Ci risulterebbe utile "inventare" un nuovo numero "$m - n$" con la proprietà $n + (m - n) = m$, per ogni scelta dei numeri naturali m ed n.

- *È contraddittorio assumere l'esistenza di questi nuovi numeri?*

  No, non è contraddittorio. Si può fare!

Infatti:

- L'insieme dei *numeri interi* $\mathbb{Z}$ si costruisce aggiungendo ad $\mathbb{N}$ tutte le differenze "$n - m$" per $n < m$.
- L'insieme numerico $\mathbb{Z}$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{N}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{N}$, ed ha un ordine che estende quello di $\mathbb{N}$.
- In $\mathbb{Z}$ il *problema della differenza* ha sempre soluzione perché ogni elemento ha un inverso rispetto alla somma.

Anche con gli interi, sorge naturale un problema.

- Problema del *quoziente*:

  Dati a e $b \neq 0$ in $\mathbb{Z}$, posso trovare c tale che $b \cdot c = a$?

Tranne che in alcuni casi particolari (cioè quando a è multiplo di b) un tale c *non* esiste. Ci risulterebbe utile "inventare" un nuovo numero $\frac{a}{b}$ con la proprietà: $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

- *È contraddittorio assumere l'esistenza di questi nuovi numeri?*

  No, non è contraddittorio. Si può fare!

Infatti:

- L'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ si costruisce aggiungendo a $\mathbb{Z}$ tutti i quozienti $\frac{a}{b}$ dove $b \neq 0$.

- L'insieme numerico $\mathbb{Q}$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{Z}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{Z}$, ed ha un ordine che estende quello di $\mathbb{Z}$.
- In $\mathbb{Q}$ il *problema della differenza* ha sempre soluzione perché ogni elemento ha un inverso rispetto alla somma.
- In $\mathbb{Q}$ il *problema del quoziente* ha sempre soluzione perché ogni elemento diverso da 0 ha un inverso rispetto al prodotto.

I numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono il primo esempio di *campo ordinato*.

Definizione 3.3.1 Un *campo ordinato* è un insieme $\mathbb{F}$ dove:

- Sono date due operazioni binarie di *somma* $+$ e di *prodotto* $\cdot$ ed un *ordine* $<$;
- Sono specificati gli elementi neutri 0 e 1;

e valgono le seguenti proprietà:

- Le operazioni sono *associative*, *commutative*, soddisfano la proprietà *distributività*, e sono coerenti con l'ordine[2];
- Ogni elemento a ha un *inverso* $-a$ rispetto alla somma;
- Ogni elemento $a \neq 0$ ha un *inverso* a^{-1} rispetto al prodotto.

Fino a Pitagora, tutte le quantità numeriche considerate si potevano interpretare come numeri razionali, ma in conseguenza del teorema che porta il suo nome si dimostra che:

- *Non* esistono numeri razionali che misurano la lunghezza della diagonale del quadrato di lato unitario. Infatti, non esistono numeri razionali q tali che $q^2 = 2$.

Consideriamo i seguenti due insiemi di numeri razionali positivi:

$$X = \{x > 0 \mid x^2 < 2\} \quad \text{e} \quad Y = \{y > 0 \mid y^2 > 2\}.$$

Notiamo che:

- $X < Y$, cioè ogni $x \in X$ è minore di tutti gli $y \in Y$;
- X *non* ha massimo, e Y *non* ha minimo;

[2] cioè se $a < b$ allora $a+c < b+c$ per ogni c; e se $0 < a < b$ allora $a \cdot c < b \cdot c$ per ogni $c > 0$.

- X e Y sono *contigui*, cioè per ogni razionale $q > 0$ esistono $x \in X$ e $y \in Y$ la cui distanza $y - x < q$.

Tuttavia, tra X e Y c'è un "buco", cioè *non* esistono razionali q tali che $x < q < y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Dunque:

- *non* esiste il minimo dei maggioranti di X, e
- *non* esiste il massimo dei minoranti di Y.

Si pone in modo naturale un problema.

- Problema della *completezza*:

  Siano X e Y due classi *contigue* di numeri razionali:

  1. $X \neq \emptyset$ è un *segmento iniziale*, cioè $q' < q \in X \Rightarrow q' \in X$;
  2. $Y \neq \emptyset$ è un *segmento finale*, cioè $q' > q \in Y \Rightarrow q' \in Y$;
  3. $X < Y$;
  4. Per ogni $q > 0$, esistono $x \in X$ e $y \in Y$ la cui distanza $y - x < q$.

  Posso trovare un *elemento separatore*? Cioè, un numero razionale q tale che $X \leq q \leq Y$? Equivalentemente, posso trovare per ogni insieme non vuoto limitato $X \subset \mathbb{Q}$ il minimo dei suoi maggioranti $\sup X$, e il massimo dei suoi minoranti $\inf X$?

Come abbiamo appena visto nell'esempio di sopra, questo non sempre è possibile. Per ogni coppia (X, Y) di classi contigue, ci risulterebbe utile "inventare" un nuovo numero z che fosse elemento separatore $X \leq z \leq Y$.

- *È contraddittorio assumere l'esistenza di questi nuovi numeri?*

  No, non è contraddittorio. Si può fare!

Infatti, grazie al lavoro fondazionale di Dedekind, Heine, Cantor nella seconda metà del XIX secolo, sono stati introdotti i numeri reali.

- L'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$ si costruisce aggiungendo a $\mathbb{Q}$ un elemento separatore per ogni coppia di classi contigue (X, Y).
- L'insieme numerico $\mathbb{R}$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{Q}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{Q}$, ed ha un ordine che estende quello di $\mathbb{Q}$.
- In $\mathbb{R}$ il *problema della differenza* ha sempre soluzione perché ogni elemento ha un inverso rispetto alla somma.

- In $\mathbb{R}$ il *problema del quoziente* ha sempre soluzione perché ogni elemento diverso da 0 ha un inverso rispetto al prodotto.

- In $\mathbb{R}$ il *problema della completezza* ha sempre soluzione perché ogni coppia di classi contigue X, Y ha un elemento separatore (proprietà di *completezza dei numeri reali*).

Riguardo la proprietà di completezza, vale un fondamentale risultato.

Teorema 3.3.2 (di unicità) *A meno di isomorfismi*[3]*, esiste un unico campo ordinato completo.*

Anche l'insieme numerico dei numeri reali può essere ampliato per soddisfare ulteriori proprietà.

Attenzione! Visto il teorema di sopra, ogni campo che amplia i numeri reali $\mathbb{R}$, non potrà essere sia *ordinato* che *completo*.

Un problema che si incontra subito operando con i numeri reali, è il seguente

- Problema della *radice*:

  Sia $P(X) = c_n X^n + \ldots + c_1 X + c_0$ un polinomio non costante. Posso sempre trovare una sua *radice*? Cioè, posso sempre trovare un numero a tale che $P(a) = 0$?

Tutti i polinomi di primo grado hanno una radice, ma ci sono già polinomi di secondo grado che *non* hanno radici. Gli esempi più semplici riguardano l'esistenza delle radici quadrate.

- Esiste una *radice* del polinomio $P(X) = X^2 - b$? Cioè, posso trovare un numero $\sqrt{b}$ tale che il suo quadrato $(\sqrt{b})^2 = b$?

Grazie alla proprietà di *completezza* dei numeri reali, si dimostra che ogni numero $b \geq 0$ ha una radice quadrata. Tuttavia, *nessun* numero $b < 0$ ha una radice quadrata, perché il quadrato di un numero non può essere negativo. Il caso più semplice di equazione polinomiale senza soluzioni è il seguente:

$$X^2 = -1$$

Ci risulterebbe utile "inventare" un nuovo numero che sia radice quadrata di -1, cioè un numero i con la proprietà: $i^2 = -1$.

[3] L'*isomorfismo* è una relazione che vale tra due strutture matematiche (in questo caso tra due campi ordinati) quando esse sono sostanzialmente indistinguibili, nel senso che basta rinominare gli elementi e le due strutture diventano uguali.

- *È contraddittorio assumere l'esistenza di questo numero i?*

  No, non è contraddittorio. Si può fare!

Infatti:

- L'insieme dei *numeri complessi* $\mathbb{C}$ si costruisce aggiungendo ad $\mathbb{R}$ il nuovo numero i, detto *unità immaginaria*, e chiudendo per somme e prodotti.
- L'insieme numerico $\mathbb{C}$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{R}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ è un *campo*, e quindi:
  - il *problema della differenza* ha sempre soluzione perché ogni elemento ha un inverso rispetto alla somma.
  - il *problema del quoziente* ha sempre soluzione perché ogni elemento diverso da 0 ha un inverso rispetto al prodotto.
- In $\mathbb{C}$ il *problema della radice* ha sempre soluzione, perché ogni polinomio non banale a coefficienti complessi ha una radice (*Teorema fondamentale dell'algebra*[4]).

Come avevamo anticipato, nell'ampliamento dai numeri reali ai numeri complessi, qualcosa si perde:

- Il campo $\mathbb{C}$ *non* è *ordinato*, cioè non è possibile definire un ordine sui numeri complessi che sia coerente con le operazioni.

Infatti, in ogni campo ordinato si ha $a^2 \geq 0$ per ogni numero a, mentre $i^2 = -1 < 0$!

3.4 Numeri grandi e numeri piccoli

Nel linguaggio dei campi ordinati, si possono formalizzare anche le nozioni di numero "grande" (infinito) e di numero "piccolo" (infinitesimo).

Definizione 3.4.1 Un numero Ω si dice *infinito positivo* se $\Omega > n$ per ogni naturale n. Analogamente, un numero Ω si dice *infinito negativo* se $\Omega < -n$ per ogni naturale n.

[4] Quindi non solo i polinomi della forma $X^2 - a$ hanno sempre una radice, ma tutti i polinomi non costanti $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ di qualsiasi grado hanno sempre una radice complessa. Si tratta di un risultato molto importante, la cui dimostrazione richiede strumenti avanzati che non rientrano negli usuali programmi delle scuole superiori.

Definizione 3.4.2 Un numero ε si dice *infinitesimo* se $-\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n}$ per ogni naturale positivo n.

Una proprietà delle grandezze considerata fin dall'antichità è la seguente:

- *"Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente".*

(Euclide, *Gli Elementi*, Libro V, Definizione IV.)

Nella matematica moderna, quella proprietà si formalizza nel linguaggio dei campi ordinati, con il nome di *proprietà archimedea*.

Definizione 3.4.3 Un campo ordinato si dice *archimedeo* se tutti i numeri positivi "hanno fra loro rapporto", cioè se vale la proprietà:

- Se $y > x > 0$, allora esiste un numero naturale n tale che $n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ volte}} \geq y$.

La validità o meno della proprietà archimedea può essere equivalentemente formulata in modi diversi.

Teorema 3.4.4 *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato qualunque. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *$\mathbb{F}$ contiene numeri infiniti Ω.*

2. *$\mathbb{F}$ contiene numeri infinitesimi $\varepsilon \neq 0$.*

3. *$\mathbb{F}$ non è archimedeo.*

Dim. $(1) \Leftrightarrow (2)$. Basta notare che un numero Ω è infinito se e solo se il suo reciproco $\frac{1}{\Omega}$ è un infinitesimo diverso da 0.

$(1) \Rightarrow (3)$. Sia Ω un numero infinito, ad esempio positivo. Allora i numeri positivi $\Omega > 1$ sono un controesempio alla proprietà *archimedea*, perché $n \cdot 1 = n < \Omega$ per tutti i numeri naturali n.

$(3) \Rightarrow (1)$. Siano $y > x$ due numeri positivi che siano un controesempio alla proprietà *archimedea*, cioè tali che $n \cdot x < y$ per ogni naturale n. Allora $\frac{y}{x} > n$ per ogni n, e quindi $\Omega = \frac{y}{x}$ è un numero infinito. $\square$

La proprietà di completezza è più forte della proprietà archimedea.

Teorema 3.4.5 *Se un campo ordinato* non è *archimedeo, allora* non è *completo.*

Dim. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme dei numeri infinitesimi. Valgono le seguenti proprietà:

- x è un maggiorante di $\mathcal{I}$ se e solo se x è un numero positivo *non* infinitesimo.
- x *non* è infinitesimo se e solo se $\frac{x}{2}$ *non* è infinitesimo.

Perciò x è un maggiorante di $\mathcal{I}$ se e solo se $\frac{x}{2} < x$ è un maggiorante di $\mathcal{I}$. Ma allora l'insieme limitato $\mathcal{I}$ *non* ha estremo superiore perché non esiste il minimo dei suoi maggioranti. Abbiamo così trovato un controesempio alla proprietà di completezza. □

3.5 I numeri superreali

Vorremmo "inventare" almeno un nuovo numero α da aggiungere ai numeri reali, che sia infinito positivo, cioè che abbia la proprietà: $\alpha > n$ per ogni naturale n.

Notiamo che se un tale numero esistesse, allora esisterebbe anche un numero infinitesimo non nullo, cioè il reciproco $\frac{1}{\alpha}$.

- *È contraddittorio assumere l'esistenza di un tale nuovo numero α?*

  No, non è contraddittorio. Si può fare!

Infatti:

- L'insieme dei *numeri α_i superreali* $\mathbb{R}(\alpha)$ si costruisce aggiungendo ad $\mathbb{R}$ il numero α e chiudendo per somme, prodotti, opposti e inversi.
- L'insieme numerico $\mathbb{R}(\alpha)$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{R}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{R}$, ed ha un ordine che estende quello di $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}(\alpha)$ è un *campo ordinato* dove esistono *numeri infiniti* e *numeri infinitesimi* non nulli.

Come dovevamo aspettarci in conseguenza del *teorema di unicità* dei numeri reali (cf. Teorema 3.3.2), nell'ampliamento da $\mathbb{R}$ ai numeri α_i superreali $\mathbb{R}(\alpha)$, qualcosa si perde. Visto che $\mathbb{R}(\alpha)$ *non* è archimedeo:

- Il campo ordinato $\mathbb{R}(\alpha)$ *non* è completo.

Ecco la definizione.

Definizione 3.5.1 L'insieme dei *numeri α-superreali* $\mathbb{R}(\alpha)$ è l'insieme delle espressioni del tipo

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b_m\alpha^m + \ldots + b_1\alpha + b_0}$$

dove i coefficienti $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, e il denominatore è non nullo (cioè $b_m \neq 0$). Le operazioni di somma e prodotto sono definite esattamente come tra espressioni polinomiali fratte.

Osserviamo che

- $\mathbb{R}(\alpha)$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{R}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{R}$.

Una domanda sorge spontanea:

- *Si può dare ai numeri α-superreali $\mathbb{R}(\alpha)$ una struttura di campo ordinato ?*

  Sì, si può fare!

Infatti, si definiscono prima i *numeri positivi* ponendo:

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b_m\alpha^m + \ldots + b_1\alpha + b_0} \succ 0 \iff \frac{a_n}{b_m} > 0\,.$$

Notiamo che il numero α-superreale $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$ è positivo se e solo se la corrispondente funzione reale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ è *definitivamente* positiva.[5]

L'ordine su $\mathbb{R}(\alpha)$ è poi definito ponendo:

$$\frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)} \succ \frac{P_2(\alpha)}{Q_2(\alpha)} \iff \frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)} - \frac{P_2(\alpha)}{Q_2(\alpha)} \succ 0\,.$$

Le seguenti proprietà si verificano direttamente a partire dalle definizioni.

- $\mathbb{R}(\alpha)$ è un *campo ordinato* dove esistono *numeri infiniti* e *numeri infinitesimi* non nulli.

- L'insieme numerico $\mathbb{R}(\alpha)$ è un'estensione "coerente" di $\mathbb{R}$, nel senso che ha operazioni di somma e prodotto che estendono quelle su $\mathbb{R}$, ed ha un ordine che estende quello di $\mathbb{R}$.

Notiamo che per ogni numero reale r si ha che $\alpha \succ r$; infatti la funzione $f(x) = x - r$ è definitivamente positiva. Di conseguenza, il numero α è infinito positivo e il suo reciproco $\frac{1}{\alpha} \neq 0$ è un infinitesimo non nullo.

Vediamo alcuni esempi sull'ordine dei numeri α-superreali.

- $\alpha^2 \succ \alpha$ perché la funzione $f(x) = x^2 - x$ è definitivamente positiva ;

- $\frac{1}{\alpha^2} \succ \frac{100}{\alpha^3}$ perché $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{100}{\alpha^3} = \frac{\alpha-100}{\alpha^3} \succ 0$;

- Il numero $\frac{\alpha-100}{\alpha^3}$ è infinitesimo perché $\frac{\alpha-100}{\alpha^3} \prec \frac{1}{\alpha^2}$, che è infinitesimo.

- $\frac{3\alpha^2}{2\alpha-1} \prec \frac{2\alpha^3+200}{\alpha^2}$ perché $\frac{3\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{2\alpha^3+200}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^4+2\alpha^3-400\alpha+200}{2\alpha^3-\alpha^2} \prec 0$.

[5] Cioè esiste M tale che per ogni $x > M$ si ha $f(x) > 0$.

In modo simile ai reali, anche per gli α-superreali vale un risultato di unicità.

Teorema 3.5.2 (di unicità) *A meno di isomorfismi, i numeri α-superreali $\mathbb{R}(\alpha)$ sono il più piccolo campo ordinato che estende i reali $\mathbb{R}$, cioè:*

- *Se $\mathbb{F}$ è un campo ordinato che estende $\mathbb{R}$, allora $\mathbb{R}(\alpha)$ è isomorfo ad un sotto-campo di $\mathbb{F}$.*

3.6 Presentazioni assiomatiche

Il modo più diretto di presentare i numeri reali è quello *assiomatico*.

Definizione 3.6.1 I *numeri reali* sono un campo ordinato completo.

Una possibile scelta didattica è quella di rinviare il problema dell'*esistenza* ed *unicità* dei reali, e sviluppare subito la teoria a partire dalle proprietà di campo ordinato completo. Dopo aver familiarizzato con i numeri reali e con la proprietà di *completezza*, un possibile percorso potrebbe prevedere lo studio dei *numeri infinitesimi* e *infiniti*.

Analogamente ai numeri reali, anche i numeri infiniti ed infinitesimi si possono introdurre direttamente in modo assiomatico.

Definizione 3.6.2 I *numeri superreali* sono un campo ordinato che estende il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ aggiungendo nuovi numeri infiniti ed infinitesimi.

Il problema dell'*esistenza* può essere facilmente risolto con la costruzione di $\mathbb{R}(\alpha)$, che richiede soltanto familiarità con le espressioni polinomiali fratte.

Attenzione! I numeri superreali *non* sono unici; i numeri α-iperreali $\mathbb{R}(\alpha)$ ne costituiscono solo un esempio.[6] Ma nello studio delle proprietà algebriche dei numeri infiniti ed infinitesimi, questo è irrilevante.

Se aggiungiamo anche un solo numero qualsiasi ai numeri reali in modo "coerente", otteniamo necessariamente l'esistenza di numeri infiniti ed infinitesimi non nulli.

Teorema 3.6.3 *In ogni campo ordinato che estende propriamente i numeri reali, esistono numeri infiniti e numeri infinitesimi non nulli.*

[6] Sono in effetti il più piccolo esempio possibile, visto il Teorema 3.5.2.

Dim. Prendiamo ξ un numero "nuovo", cioè tale che $\xi \notin \mathbb{R}$. Se ξ è infinito, abbiamo già trovato quello che cercavamo. Se invece ξ non è infinito allora, per la proprietà di *completezza* dei reali, possiamo definire

$$x = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \xi \leq r\}.$$

Usando la proprietà di *estremo inferiore*, si può verificare che il numero $\xi - x \neq 0$ è infinitesimo. □

Tra i numeri superreali, si distinguono tre classi di grandezza. Oltre ai numeri infinitesimi ed infiniti che abbiamo già introdotto, è utile considerare anche la classe dei numeri finiti.

Definizione 3.6.4

- Un numero Ω si dice *infinito positivo* se $\Omega > n$ per ogni naturale n; e Ω si dice *infinito negativo* se $\Omega < -n$ per ogni naturale n.
- Un numero ε si dice *infinitesimo* se $-\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n}$ per ogni naturale positivo n.
- Un numero ξ si dice *finito* se non è infinito, cioè se esiste un naturale positivo n tale che $-n < x < n$.

Chiaramente tutti i numeri infinitesimi e tutti i numeri reali sono numeri finiti, ma ci sono numeri finiti che non sono né infinitesimi né reali (ad esempio $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon \neq 0$ infinitesimo).

Raccogliamo qua sotto alcune delle principali proprietà che collegano numeri infinitesimi, infiniti e finiti rispetto alle operazioni di somma, prodotto, reciproco.[7]

Proposizione 3.6.5

1. *$\varepsilon \neq 0$ è infinitesimo se e solo se il suo reciproco $\frac{1}{\varepsilon}$ è infinito;*
2. *Se ξ e ζ sono entrambi infinitesimi, allora anche la somma $\xi + \zeta$ e il prodotto $\xi \cdot \zeta$ sono infinitesimi;*
3. *Se ξ e ζ sono entrambi finiti, allora anche la somma $\xi + \zeta$ e il prodotto $\xi \cdot \zeta$ sono finiti;*
4. *Se ξ è finito e ε è infinitesimo, allora il prodotto $\xi \cdot \varepsilon$ è infinitesimo;*
5. *Se Ω è infinito e ξ non è infinitesimo, allora il prodotto $\Omega \cdot \xi$ è infinito;*

[7] Si osservi che sono tutte proprietà che corrispondono direttamente ad analoghe proprietà dei limiti. Ad esempio (4) corrisponde al sequente risultato: "Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è limitata in un intorno di x_0, allora il prodotto ha limite $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = 0$".

6. *Se* $\varepsilon \neq 0$ *è infinitesimo e* ξ *non è infinitesimo, allora il rapporto* $\frac{\xi}{\varepsilon}$ *è infinito;*

7. *Se* Ω *è infinito e* ξ *è finito, allora il rapporto* $\frac{\xi}{\Omega}$ *è infinitesimo.*

Le dimostrazioni, che si ottengono tutte applicando direttamente le definizioni, possono costituire ottimi esercizi per familiarizzare con l'uso dei numeri superreali.

A titolo di esempio dimostriamo in dettaglio la proprietà (4). Fissiamo un qualunque naturale positivo n. Per ipotesi, ξ è finito e dunque esiste un naturale positivo k tale che $-k < \xi < k$. Per ipotesi, ε è infinitesimo, e dunque certamente $-\frac{1}{kn} < \varepsilon < \frac{1}{kn}$. Segue allora che $-\frac{1}{n} < \xi \cdot \varepsilon < \frac{1}{n}$. Questo vale per ogni n, e quindi $\xi \cdot \varepsilon$ è infinitesimo.

Grazie ai numeri infinitesimi è possibile formalizzare una nozione di "vicinanza".

Definizione 3.6.6 Due numeri ξ e ζ si dicono *infinitamente vicini* se $\xi - \zeta$ è infinitesimo. In questo caso scriviamo $\xi \sim \zeta$.

Come si verifica facilmente, $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Teorema 3.6.7 (Parte standard) *Ogni numero finito* ξ *è infinitamente vicino ad un unico numero reale* $r \sim \xi$.

Un tale numero r viene chiamato *parte standard* di ξ, e si scrive

$$r \;=\; \mathrm{st}(\xi).$$

Dunque ogni ξ finito si scrive in modo unico nella forma $\xi = r + \varepsilon$ dove $r \in \mathbb{R}$ e ε è infinitesimo. Se ξ è infinito positivo si pone $\mathrm{st}(\xi) = +\infty$, e se ξ è infinito negativo si pone $\mathrm{st}(\xi) = -\infty$.

Dim. Per l'esistenza basta verificare che $r = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid a < \xi\}$ è infinitamente vicino a ξ. L'unicità segue dal fatto che due numeri reali infinitamente vicini sono necessariamente uguali; infatti, $r, r' \sim \xi \Rightarrow r - r' \sim 0 \Rightarrow r - r' = 0$. □

La nozione di *parte standard* di un numero superreale è il corrispettivo del concetto classico di limite.

Proposizione 3.6.8 *Se* ξ *e* ζ *sono finiti, allora:*

- $\mathrm{st}(\xi + \zeta) = \mathrm{st}(\xi) + \mathrm{st}(\zeta)$ *;*
- $\mathrm{st}(\xi \cdot \zeta) = \mathrm{st}(\xi) \cdot \mathrm{st}(\zeta)$ *;*
- $\mathrm{st}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) = \frac{\mathrm{st}(\xi)}{st(\zeta)}$ *se* ζ *non è infinitesimo.*

Proposizione 3.6.9 (Le forme indeterminate) *Sia* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *fissato. Allora:*

- *esistono* ξ, ζ *con* $\mathrm{st}(\xi) = +\infty$, $\mathrm{st}(\zeta) = -\infty$ *e* $\mathrm{st}(\xi + \zeta) = \ell$;
- *esistono* ξ, ζ *con* $st(\xi) = st(\zeta) = \infty$ *e* $st\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) = \ell$;
- *esistono* ξ, ε *con* $\mathrm{st}(\xi) = \infty$, $\mathrm{st}(\varepsilon) = 0$ *e* $\mathrm{st}(\xi \cdot \varepsilon) = \ell$;
- *esistono* $\xi, \eta \neq 0$ *con* $\mathrm{st}(\xi) = \mathrm{st}(\eta) = 0$ *e* $\mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) = \ell$.

3.7 I numeri iperreali, assiomaticamente

Su ogni campo superreale si possono definire tutte le *funzioni razionali*, cioè tutte le funzioni f del tipo

$$f(x) \; = \; \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x) \neq 0$ sono polinomi a coefficienti reali. Infatti le funzioni razionali si definiscono a partire dalle sole operazioni di campo, cioè *somma*, *prodotto*, e *inverso*. Ma per sviluppare l'*analisi* occorre considerare una classe più ampia di funzioni, tra cui le seguenti funzioni *trascendenti*:

$$\sin(x), \; \cos(x), \; e^x, \; \log(x), \; \textit{ecc.}$$

Sorge così spontanea la domanda:

- *Esiste un campo superreale che contiene tutti i seguenti nuovi numeri?*

$$\sin(\alpha), \; \cos(\alpha), \; e^\alpha, \; \log(\alpha), \; \textit{ecc.}$$

Nei numeri α-superreali $\mathbb{R}(\alpha)$ abbiamo un numero $f(\alpha)$ per ogni funzione razionale f, cioè:

$$f(\alpha) \; = \; \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x) \neq 0$ sono polinomi a coefficienti reali. Dunque:

$$\mathbb{R}(\alpha) \; = \; \{f(\alpha) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ funzione razionale}\}.$$

Ma le funzioni razionali *non* ci bastano!

Anche in questo caso procediamo assiomaticamente, rinviando il problema dell'*esistenza*.[8]

[8] Le nozioni e i risultati presentati in questo §7, sono tratti da [?] e [?].

Definizione 3.7.1 *Un insieme dei numeri α-iperreali ${}^*\mathbb{R}_\alpha$ è un campo che estende i numeri α-superreali*

$$\mathbb{R}(\alpha) \;=\; \{f(\alpha) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ funzione razionale}\}$$

aggiungendo un numero $f(\alpha)$ per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$${}^*\mathbb{R}_\alpha \;=\; \{f(\alpha) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

in modo che valgano le due seguenti proprietà di coerenza:

- $f(\alpha) + g(\alpha) = (f + g)(\alpha)$ *;*
- $f(\alpha) \cdot g(\alpha) = (f \cdot g)(\alpha)$.

Vale il seguente risultato:

Teorema 3.7.2

1. *Esistono insiemi di numeri α-iperreali ${}^*\mathbb{R}_\alpha$.*
2. *Se vale l'*ipotesi del continuo[9], *a meno di isomorfismi esiste un unico insieme di numeri α-iperreali equipotente ad $\mathbb{R}$.*

Per dimostrare l'esistenza di numeri α-iperreali basta una costruzione algebrica:

- Si prenda l'anello $\mathcal{S}$ delle successioni di numeri reali (a_n).
- Si prenda un ideale massimale $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{i}$ di $\mathcal{S}$ che estende l'ideale

  $$\mathfrak{i} \;=\; \{(a_n) \mid \exists k \; \forall n \geq k \; a_k = 0\}$$

  delle successioni definitivamente uguali a zero.
- Il campo quoziente ${}^*\mathbb{R}_\alpha = \mathcal{S}/\mathfrak{m}$ è un insieme di numeri α-iperreali.

I numeri α-iperreali permettono di sviluppare l'*analisi nonstandard* in piena generalità.

Teorema 3.7.3 *Ogni insieme di numeri α-iperreali ${}^*\mathbb{R}_\alpha$ è un un insieme di numeri iperreali dell'analisi nonstandard, cioè:*

- *Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si estende ad una funzione ${}^*f : ({}^*\mathbb{R}_\alpha)^n \to {}^*\mathbb{R}_\alpha$;*

[9] Ricordiamo che l'*ipotesi del continuo* afferma che ogni insieme infinito di numeri reali è equipotente a $\mathbb{N}$ oppure a $\mathbb{R}$. Si tratta probabilmente della più famosa proprietà *indipendente*, cioè che non può essere dimostrata né confutata dagli usuali principi della matematica.

- *Ogni sottoinsieme* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *si estende ad un sottoinsieme*
  $^*A \subseteq (^*\mathbb{R}_\alpha)^n$

in modo che valga il

- **Principio di transfer (o Principio di Leibniz)**:
  Sia $P(S_1, \ldots, S_n)$ *una* proprietà "elementare" [10] *dell'analisi relativa a funzioni o insiemi* $S_1, \ldots, S_n$. *Allora:*

$$P(S_1, \ldots, S_n) \iff P(^*S_1, \ldots, {}^*S_n).$$

3.8 Conclusioni

- Con la definizione assiomatica di *numeri superreali* è possibile introdurre in modo diretto l'uso di *numeri infiniti* e *infinitesimi* e studiare le loro proprietà, senza scomodare l'intero apparato dell'*analisi nonstandard*.
- I *numeri superreali* possono essere utili strumenti per familiarizzare con le nozioni di "infinitamente piccolo" e "infinitamente grande", e come passo intermedio per introdurre l'*analisi* e il concetto di *limite*.
- In particolare, i *numeri superreali* sono adeguati per studiare le funzioni razionali con un uso diretto di quantità infinitesime ed infinite.
- Un esempio canonico di insieme di *numeri superreali* può essere costruito facilmente, grazie ai *numeri* α*-superreali*:

$$\mathbb{R}(\alpha) \;=\; \left\{ \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \;\middle|\; P \text{ e } Q \neq 0 \text{ polinomi a coefficienti reali} \right\}.$$

- I numeri α-superreali hanno una caratteristica di *unicità* perché a meno di isomorfismo sono il più piccolo campo ordinato che estende i numeri reali.
- Anche i numeri iperreali dell'analisi nonstandard possono essere introdotti assiomaticamente in modo semplice, grazie ai *numeri* α*-iperreali*:

$$^*\mathbb{R}_\alpha \;=\; \{f(\alpha) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

- I numeri α-iperreali hanno una caratteristica di *unicità* perché sotto l'*ipotesi del continuo*, a meno di isomorfismo c'è un unico campo α-iperreale equipotente ad $\mathbb{R}$.

[10] Per una definizione rigorosa di *proprietà elementare* occorre usare il linguaggio formale della logica del primo ordine.

Chiudiamo questo articolo con una considerazione sul concetto di continuità. La classica definizione ε-δ ci appare semplice e familiare dopo anni di studio; tuttavia si tratta in realtà di una nozione di notevole complessità logica. Per questo, non deve sorprendere che sia un tema didatticamente molto difficile da trattare.

Per evidenziare la difficoltà della definizione classica di continuità, può essere utile cercare di rispondere al *quiz* qua sotto.[11]

Definizione 3.8.1 Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *aunitnoc* nel punto x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x si ha:

$$|x - x_0| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Notiamo che, semplicemente scambiando ε e δ, la definizione di *aunitnoc* in x_0 coincide esattamente con quella di continuità in x_0. Si tratta quindi di una formula che ha esattamente la stessa complessità logica dell'usuale definizione di continuità.

- **Quiz:** Cosa significa che una funzione f è *aunitnoc*? Ad esempio, è vero o no che una funzione *aunitnoc* in x_0 è necessariamente continua in x_0?

Il lettore che abbia sempre ritenuto semplice e naturale la definizione di continuità, troverà altrettanto semplice e naturale rispondere a questo quiz.

In matematica non si capiscono le cose. Semplicemente ci si abitua.[12]

(J. von Neumann)

Risposta al quiz: Una funzione *aunitnoc* è una funzione *localmente limitata* in x_0, cioè tale che per ogni intorno limitato I di x_0, l'immagine $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ è un insieme limitato. Ne segue che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *aunitnoc* in un punto x_0 se e solo se è *aunitnoc* in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$. Una funzione *aunitnoc* può essere discontinua in ogni punto.

È interessante vedere come le definizioni nonstandard delle due nozioni appaiano più vicine all'intuizione.

- Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *continua* in x_0 se ogni punto ξ a distanza infinitesima da x_0 ha immagine ${}^*f(\xi)$ a distanza infinitesima da $f(x_0)$:

$$\xi \sim x_0 \implies {}^*f(\xi) \sim f(x_0).$$

- Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *aunitnoc* in x_0 se ogni punto ξ a distanza finita da x_0 ha immagine ${}^*f(\xi)$ a distanza finita da $f(x_0)$:

$$\xi - x_0 \text{ finito} \implies {}^*f(\xi) - f(x_0) \text{ finito}.$$

[11] Questo esempio è stato proposto da E. Nelson in [?].

[12] In mathematics you don't understand things. You just get used to them.

Bibliografia

[1] V. Benci, M. Di Nasso, Alpha-Theory: an elementary axiomatics for nonstandard analysis, *Expositiones Mathematicae*, **21** (2003), 355–386.

[2] V. Benci, M. Di Nasso, *How to Measure the Infinite – Mathematics with Infinite and Infinitesimal Numbers*, libro in preparazione.

[3] E. Nelson, Internal Set Theory: a new approach to nonstandard analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **83** (1977), 1165–1198.

[4] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1966. Traduzione italiana di F. Bedini: *Analisi non standard*, Aracne, 2013.

4

Condensatori: dall'esperimento all'equazione differenziale

Andrea Sellaroli

Per come sono usualmente scansionati i programmi scolastici è spesso difficile stabilire un collegamento proficuo tra matematica e fisica. Nonostante le fisica faccia uso del calcolo infinitesimale fin dalle origini della meccanica, nei corsi di matematica gli strumenti dell'analisi vengono introdotti solo negli ultimi anni. Grazie all'Analisi Non Standard verrà mostrato come è possibile anticipare alcuni importanti nodi concettuali della fisica, permettendo di fornire una spiegazione più profonda delle leggi fisiche. In questo modo si potranno apprezzare meglio fenomeni, come la carica di un condensatore, importanti sia per il ruolo teorico che rivestono sia per le notevoli applicazioni in campo tecnologico.

4.1 Motivazioni

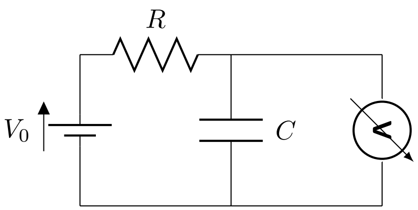
L'interdisciplinarità tra matematica e altre materie è spesso difficile nella scuola secondaria. Questa problematica è maggiormente presente con la fisica per cui, nei primi anni, la trattazione è meramente qualitativa. Volendo rispettare la scansione dei programmi scolastici l'analisi viene introdotta, nella migliore delle ipotesi, a metà del quarto anno e pertanto vari concetti come quello di velocità istantanea o lavoro per una trasformazione termodinamica vengono ignorati o spiegati superficialmente senza mantenere nessun legame con l'esperienza e l'esperimento. In questo quadro la fisica perde i necessari legami con la realtà tangibile, riducendosi ad un insieme di formule. In un testo di laboratorio di fisica[1], gli unici grafici che vengono fatti tracciare agli studenti dai risultati sperimentali sono quelli della proporzionalità diretta e inversa.

Cercare una funzione che soddisfi le condizioni di un problema e sia compatibile con i dati sperimentali è a mio parere una delle attività centrali della ricerca ed

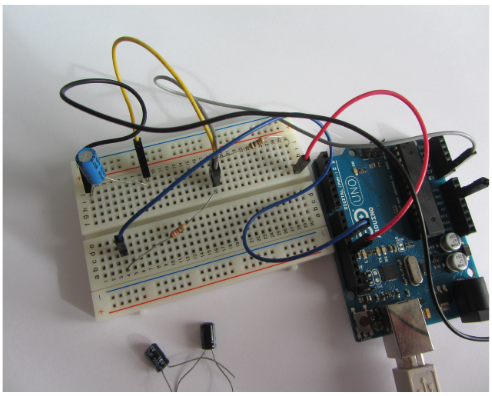
[1]S. Fabbri, M. Masini, **Phenomena, Laboratorio di Fisica**, 2011, SEI, Torino

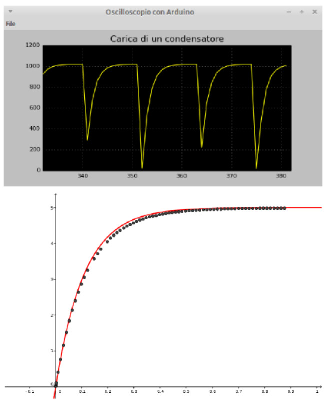
un esercizio stimolante. Lo studio del comportamento della carica di un condensatore rappresenta un caso emblematico che permette di affrontare un problema non banale. Tale attività è stata pensata immaginando una classe quarta di liceo scientifico, per cui dovrebbero essere note le leggi dell'elettrostatica e i principali risultati su logaritmi ed esponenziali.

4.2 L'esperimento



Senza entrare nei dettagli, per l'esperimento è stato utilizzato un apparato autocostruito sfruttando Arduino come data-logger. I costi molto contenuti di Arduino (circa 20 euro) e la facilità di utilizzo permettono agli studenti di costruirlo facilmente. Nello schema a lato è rappresentato il circuito; il voltmetro è realizzato con Arduino e vengono registrati su un PC circa 50 misurazioni al secondo. Un programma realizzato in Python permette di visualizzare graficamente tali risultati ma è anche possibile esportare i dati grezzi e importarli in un foglio di calcolo o in Geogebra. L'apparato sperimentale è stato completato con un circuito che scarica automaticamente il condensatore quando raggiunge il 99% della carica.





4.3 L'equazione differenziale

Vediamo adesso una serie di spunti che fanno uso dell'analisi non standard per analizzare i risultati dell'esperimento. Ho scelto di risolvere tali problemi presupponendo come prerequisiti le basi dell'analisi non standard (iperreali, microscopi e telescopi) ma evitando le definizioni esplicite di derivata e limite. Questo perché ritengo che la trattazione di molti problemi fisici possa avvenire senza ricorrere al formalismo dell'analisi permettendo comunque di cogliere gli aspetti essenziali.

La definizione di intensità di corrente

Un primo problema che va affrontato è la definizione di intensità di corrente. Ritengo tale aspetto molto interessante poiché la derivata viene spesso introdotta parlando di velocità, generando a mio giudizio la misconcezione che la cinematica sia l'unico campo di applicazione possibile dell'analisi. Tra l'altro, seguendo la scansione usuale nei licei scientifici, l'introduzione all'analisi e le leggi dell'elettrodinamica vengono di solito affrontate in parallelo. In realtà vari testi di fisica tentano di stabilire un collegamento tra intensità di corrente e derivata utilizzando, a mio parere, una simbologia molto più vicina a quella dell'analisi non standard che alla trattazione usuale con ε e δ. Seguendo quindi una strada comune a molti testi di fisica, se indichiamo con

$$\Delta q(t) = q(t + \Delta t) - q(t)$$

la carica che attraversa un conduttore nel tempo Δt allora l'intensità di corrente è definita come

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Con l'uso degli iperreali diventa abbastanza immediato distinguere tra intensità media (nel caso in cui Δt sia un numero finito) e intensità istantanea (nel caso in cui sia un infinitesimo non nullo). Dal punto di vista fisico a noi possono bastare intervalli di tempo finiti, nel caso dell'esperimento dell'ordine del decimo di secondo. Ma in questo caso stiamo cercando di ricavare teoricamente una formula che spieghi l'andamento dell'esperimento e quindi è necessario che si consideri qualsiasi intervallo di tempo, possibilmente anche infinitesimo. Risulta pertanto importante distinguere, anche nei simboli, quando l'incremento è un numero finito o un infinitesimo. A rigore sarebbe necessario, prima di procedere, introdurre il concetto di continuità, ma nel caso di esperienze fisiche ritengo che si possa soprassedere. Indicheremo quindi il differenziale di una funzione, usando la lettera d al posto di Δ che indica una differenza, come:

$$dq(t) = q(t + dt) - q(t)$$

dove dt rappresenta un iperreale non nullo.

La definizione di intensità di corrente diventa quindi:

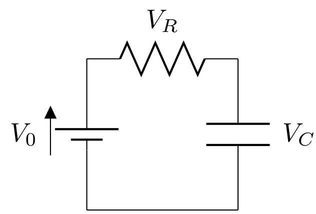
$$i(t) = st\Big(\frac{dq(t)}{dt}\Big) = st\Big(\frac{q(t+dt)-q(t)}{dt}\Big)$$

dove viene usata la funzione parte standard per riportare il ragionamento con gli infinitesimi nel campo dei numeri reali.

La formulazione dell'equazione differenziale

Con i primi elementi di elettrodinamica non dovrebbe essere difficile scrivere esplicitamente l'equazione differenziale. Dalla legge di Kirchhoff delle tensioni abbiamo

$$V_0 - V_R - V_C = 0$$



Grazie alla legge di Ohm $V_R = Ri$ e dalla definizione di capacità di un condensatore $C = \frac{q}{V_C}$ abbiamo

$$V_0 = V_R + V_C = Ri + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Il semplice esperimento della carica di un condensatore (almeno da 1 Farad) usando come resistenza una lampada ad incandescenza permette di comprendere come nella formula precedente q rappresenti una quantità variabile nel tempo. Possiamo scrivere quindi più propriamente

$$V_0 = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

Derivata

Un primo livello per affrontare il problema è quello di verificare che una soluzione è

$$q(t) = CV_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Tale verifica è possibile semplicemente usando la definizione di intensità di corrente. Infatti risulta[2]

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{q(t+dt)-q(t)}{t+dt-t} = \frac{CV_0(1-e^{-\frac{t+dt}{RC}}) - CV_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} =$$

[2]Nel seguito è stata tralasciata la funzione parte standard $\mathrm{st}()$ per non appesantire la lettura

$$= \frac{CV_0(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}+\frac{dt}{RC}}))}{dt} = \frac{CV_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \frac{(-1+e^{-\frac{dt}{RC}})}{-\frac{dt}{RC}}$$

Siamo giunti ad una formula del tipo

$$\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}$$

con ε infinitesimo. Sicuramente una formula di questo tipo non è affrontabile con le operazioni elementari sugli infinitesimi. Tuttavia si può risolvere agevolmente ricordando la definizione del numero di Eulero/Nepero, che viene generalmente proposta, a completamente della trattazione sui logaritmi, con la definizione

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Con l'uso degli infinitesimi tale definizione diventa particolarmente efficace. Possiamo scrivere e usando M iperreale infinito oppure ε infinitesimo in questo modo:

$$e = (1+\frac{1}{M})^M = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Dall'ultima uguaglianza possiamo ricavare

$$e^{\varepsilon} = 1+\varepsilon$$

e quindi risulta immediato calcolare la parte standard

$$\mathrm{st}\Big(\frac{CV_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \frac{(-1+e^{-\frac{dt}{RC}})}{-\frac{dt}{RC}}\Big) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Andando a sostituire nell'equazione differenziale di partenza otteniamo

$$V_0 = R\cdot\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{C}\cdot CV_0(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = V_0$$

Limite

Usando gli iperreali è facile calcolare il limite e verificare che coincide con i risultati sperimentali. Vediamo quindi cosa succede

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{t\to+\infty} CV_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

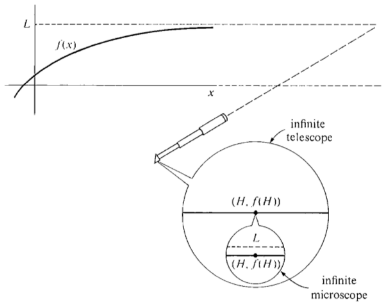
Sia H un iperreale infinito, il limite diventa

$$st\big(CV_0(1-e^{-\frac{H}{RC}})\big)$$

Usando la convenzione che ε indica un infinitesimo, M un infinito ed usando le operazioni elementari sugli iperreali risulta

$$L = \mathrm{st}\left(CV_0(1 - e^{-M})\right) = \mathrm{st}\left(CV_0(1 - \varepsilon)\right) = CV_0$$

.



Questa può essere una buona occasione per prendere confidenza con gli strumenti ottici dell'analisi non standard. L'immagine è tratta dal libro di H. Jerome Keisler, Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach (seconda edizione) e mostra l'uso di telescopi infiniti e microscopi infinitesimi.

Conclusioni

A questo punto viene da chiedersi se è possibile risolvere direttamente l'equazione differenziale senza disporre di tutto l'appartato dell'analisi. La mia risposta è negativa e non perché l'analisi non standard non fornisca strumenti adeguatamente semplici per risolvere un'equazione differenziale a variabili separabili. Però senza disporre di una precisa definizione di integrale e del teorema fondamentale del calcolo integrale provare a risolvere l'equazione differenziale rischia di diventare un mero esercizio di stile con scarse ricadute didattiche.

5

Percorsi, difficoltà, errori nell'uso della NSA nei licei

Paolo Bonavoglia

Sono ormai quindici anni che sperimento in maggiore o minore misura la NSA nell'insegnamento dell'analisi; all'inizio era essenzialmente un modo di ridurre il tempo dedicato all'analisi per ricavare il tempo scuola per altri argomenti come statistica, probabilità, calcolo numerico, ecc. E tutto sommato questo è rimasto il motivo principale per preferire l'approccio NSA. Dopo quindici anni sembra il caso di fare un bilancio; non ricordo chi definì l'esperienza come l'insieme degli errori commessi, e l'esperto come una persona che ha commesso molti errori (e, presumibilmente, li ha riconosciuti come tali ...).

Errori, dubbi, difficoltà sono insomma inevitabili quando si vuole sperimentare ovvero fare esperienza di qualcosa. In questa relazione espongo quindi difficoltà, dubbi ed errori nei quali mi sono imbattuto in quindici anni di sperimentazione NSA in un liceo classico. Sperimentare la NSA in un liceo era 15 anni fa ed è tuttora una sperimentazione per un verso minore (è solo un modo diverso di trattare un argomento previsto dai programmi ministeriali, ora indicazioni nazionali) per un altro verso sconvolgente (studiare derivate e integrali "senza limiti" suona appunto sconvolgente per chi ha studiato solo l'analisi classica, senza essersi mai imbattuto nella NSA).

Quattro dubbi che emergono usando la NSA in un liceo

In questa relazione analizzo quattro di questi dubbi/errori/alternative nelle quali mi sono imbattuto nel corso di questi quindici anni. Li propongo sotto forma di quesiti, quasi antinomie:

1. Anticipare derivate e integrali?
2. Limiti sì o no?
3. Storia della matematica sì o no?
4. Preoccuparsi o no dell'Esame di Stato?

5.1 Anticipare analisi? al III anno? al IV anno?

Una possibilità inaspettata della NSA è quella di anticipare una parte del programma di analisi, tradizionalmente considerata molto difficile e collocata all'ultimo anno di corso sia nei licei umanistici sia al liceo scientifico, al III o IV anno. In effetti i concetti di derivata e integrale usando gli infinitesimi possono essere introdotti con il solo prerequisito di una sufficiente conoscenza dell'algebra e della geometria cartesiana, cosa che gli studenti dovrebbero possedere all'inizio del III anno.

Metodo del delta vs metodo delle derivate

L'anticipo delle derivate lo ho spesso proposto al IV anno prima della trigonometria e prima delle funzioni esponenziali e logaritmiche. In questo modo l'introduzione alle derivate andava di pari passo con quella della velocità istantanea in Fisica, cosa che dopo il riordino Gelmini del 2010 con l'anticipo di Fisica al III anno, non avviene più. Diventa allora interessante un'altra possibilità, quella di anticipare le derivate direttamente al III anno, quando il programma prevede lo studio di funzioni e lo studio delle coniche in particolare della parabola.

Un punto di innesto per introdurre il concetto di derivata è quello della ricerca delle tangenti a una parabola, argomento trattato al III anno usando per lo più metodi algebrici come il metodo del delta, piuttosto macchinoso, o formulette meccaniche come quella dello sdoppiamento. In una impostazione NSA che senso ha insistere su questi metodi? Non sarebbe meglio cogliere l'occasione per introdurre il metodo degli infinitesimi e le derivate?

Vediamo un classico esempio: trovare la tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 5$ nel suo punto di ascissa $x = -2$; si calcola anche l'ordinata che risulta $y = 3$ quindi il punto di tangenza è $P(-2;\ 3)$. La retta tangente è quindi una retta del fascio proprio in P: $y - 3 = m(x + 2)$; il vero problema è allora quello di trovare il valore del coefficiente angolare m.

Il metodo usato tradizionalmente è quello puramente algebrico di imporre che il sistema tra parabola e fascio abbia una sola soluzione, che per le equazioni di secondo grado equivale a dire che il delta sia nullo: $\Delta = 0$. Spesso usata anche la formula dello sdoppiamento, classica formuletta meccanica che si applica senza sapere bene di che si tratti e da dove sia arrivata.

Usando il discriminante

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 5 \\ y - 3 = m(x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 5 \\ x^2 + 3x + 5 - 3 = mx + 2m \end{cases}$$

$$x^2 + (3-m)x + 2 - 2m = 0$$

$$\begin{cases} \Delta = (3-m)^2 - 4(2-2m) \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$9 - 6m + m^2 - 8 + 8m = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m = -1$$

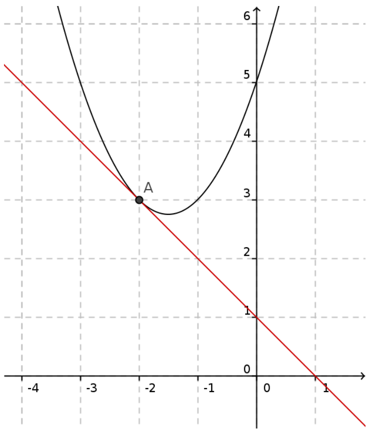
Usando la derivata

$$y = x^2 + 3x + 5$$

$$y' = 2x + 3$$

$$m = f'(x) = 2x + 3$$

$$m = f'(-2) = 2(-2) + 3 = -1$$



L'immagine e le formule qui sopra mostrano sulla sinistra il calcolo di m con il metodo del delta, sulla destra lo stesso calcolo usando le derivate; ovviamente il confronto è ingeneroso, il metodo delle derivate è chiaramente superiore non solo perché richiede un calcolo più breve e più semplice, ma perché dà un risultato molto più generale, una funzione invece di un numero; funzione che permette una volta per tutte di calcolare m per un qualsiasi valore di x.

Perché allora usare ancora il delta per trovare le tangenti? Come sempre in matematica nuove idee e nuovi strumenti permettono di abbreviare calcoli e dimostrazioni, ma ovviamente questi nuovi strumenti vanno prima studiati e assimilati e questo richiede tempo.

Il vantaggio della NSA è che si possono introdurre le derivate in breve tempo senza dover passare per il concetto di limite. Il monte ore per matematica in un liceo è limitato, quindi ogni risparmio di tempo è benvenuto. Resta quindi l'ultima domanda: perdendo il metodo del delta si perde qualcosa di essenziale? Un buon esercizio di algebra forse? Nei prossimi paragrafi riassumo pro e contro questo anticipo.

Anticipare derivate e integrali - i Pro

1. Diluire il calcolo infinitesimale in tre anni, dando allo studente il tempo di abituarsi all'analisi, ripercorrendo di fatto la storia dell'analisi.

2. Ritrovare il concetto di derivata mano a mano che si incontrano nuove funzioni, goniometriche, esponenziali ...

3. Possibile interazione con Fisica, non dimenticando che il calcolo è nato (Newton) anche per esigenze "fisiche": velocità istantanea, accelerazione istantanea ecc.ecc.

Anticipare derivate e integrali - i Contro

1. Conflitto con le indicazioni nazionali? Rimando al dubbio n. 4 per una breve disanima sulle indicazioni nazionali.

2. Conflitto con i libri di testo in uso? Questo è un problema serio al quale si sta cercando di mettere rimedio; i libri di testo finiscono spesso per sovrastare le stesse indicazioni nazionali; è vero che ci sono sempre stati docenti che insegnano la loro materia più con dispense o lucidi propri o appunti dettati in classe, ma questo richiede un notevole impegno da parte del docente e non è certo un incentivo all'adozione della NSA.

3. Conflitto con i commissari d'esame? Anche su questo rimando al dubbio 4.

Anticipare derivate e integrali: Una strategia possibile

La mia soluzione preferita negli ultimi anni:

1. All'inizio (3° o 4° anno) introdurre derivate e integrali solo per le funzioni polinomiali; in questo modo ci si concentra sul significato di derivata e integrale senza essere appesantiti da complicazioni di calcolo.

2. Visto che nei libri di testo del III anno è già presente un capitolo sulle funzioni, non appare irrealistico anticipare qualche semplice studio di funzione limitato a polinomi di 2° grado (parabola) e di 3° o 4° grado (parabole cubiche o quartiche).

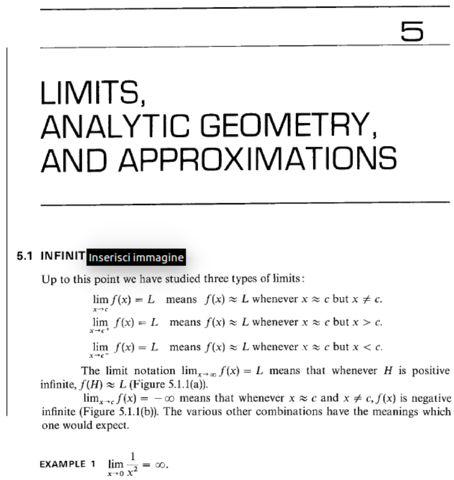
3. Un errore commesso in passato nella classe quarta fu quello di anticipare anche lo studio di funzioni algebriche fratte con asintoti; un modo di complicare e appesantire il percorso, provocando un grosso ritardo nel programma. Da evitare e rimandare all'ultimo anno.

5.2 Limiti sì o no?

L'analisi NSA non ha bisogno dei limiti; i numeri iperreali, infinitamente piccoli, limitati o infinitamente grandi sono alternativa sufficiente. E del resto la storia dell'analisi, da Leibniz, Newton, Eulero fino a Lagrange e Cauchy, basa i concetti di derivata e integrale sugli infinitesimi; la teoria rigorosa dei limiti nasce solo nell'Ottocento per aggirare le apparenti contraddizioni della nozione di infinitesimo.

In una trattazione NSA in un liceo ha allora senso usare ancora la parola limite? O è meglio usare solo la parola iperreale?

Prendiamo ad esempio quello che è probabilmente il testo più conosciuto di NSA in Italia, il Keisler: ha anche un capitolo sui limiti che lo fa a prima vista apparire molto simile a un trattato di analisi standard; anche se poi i limiti di Keisler sono definiti a partire dalla nozione di infinitamente vicino, non dagli epsilon-delta di Weierstrass. Il testo del Keisler è peraltro un trattato chiaramente pensato per un un corso universitario. Un approccio del genere potrebbe essere valido anche per un liceo? O rischia di rendere il programma ancora più pesante che con l'analisi classica?


5

LIMITS, ANALYTIC GEOMETRY, AND APPROXIMATIONS

5.1 INFINIT Inserisci immagine

Up to this point we have studied three types of limits:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{means} \quad f(x) \approx L \text{ whenever } x \approx c \text{ but } x \neq c.$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad \text{means} \quad f(x) \approx L \text{ whenever } x \approx c \text{ but } x > c.$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{means} \quad f(x) \approx L \text{ whenever } x \approx c \text{ but } x < c.$$

The limit notation $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ means that whenever H is positive infinite, $f(H) \approx L$ (Figure 5.1.1(a)).

$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ means that whenever $x \approx c$ and $x \neq c$, $f(x)$ is negative infinite (Figure 5.1.1(b)). The various other combinations have the meanings which one would expect.

EXAMPLE 1 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

Limiti o iperreali?

Prendiamo come esempio la definizione del numero di Nepero, indicato tradizionalmente con la lettera e. Il numero può definirsi partendo dalla legge di capitalizzazione ad interesse composto:

$$C = C_0\,(1+t)^n$$

dove t è il tasso di interesse ed n il numero di periodi. Notoriamente aumentare il numero di periodi diminuendo in proporzione il tasso è vantaggioso per l'investitore. Supponendo, come esempio semplificato al massimo, di investire 1 euro al tasso del 100% per un periodo, il capitale iniziale raddoppierebbe alla fine del periodo; un interesse del 50% su due periodi darebbe un fattore 2,25; un interesse del 10% pagato su dieci periodi, si avrebbe un fattore di

$$C = (1+0,1)^{10} = 2,59374246$$

Ci si rende conto che aumentando il numero di periodi il vantaggio aumenta, ma aumenta sempre più lentamente tendendo a stabilizzarsi su un numero che comincia per 2,71828 ... Allora è naturale definire il numero e come il capitale dopo infiniti periodi

$$e = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

dove $\frac{1}{\omega}$ è il tasso infinitamente piccolo e ω, il suo reciproco, è il numero di periodi infinitamente grande.

Nell'analisi classica la definizione di e si fa con un limite:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

C'è naturalmente una differenza concettuale tra le due definizioni; la prima usa l'infinito attuale, ammette cioè l'esistenza di numeri infinitamente grandi o infinitamente piccoli; la seconda nega l'esistenza di tali numeri ed usa l'infinito potenziale; ma il paradosso è che nella definizione con il limite appare il simbolo di infinito! I manuali di analisi standard in proposito ammoniscono il lettore a considerare quel simbolo come un simbolo di comodo che nasconde la definizione epsilon-delta, ben più complessa:

$$\forall \varepsilon \quad \exists N : \quad \forall n > N \to \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} - e \right| < \varepsilon$$

E già quel persistente uso del simbolo di infinito in una impostazione basata sull'infinito potenziale suona artificioso e poco coerente ...

In qualche modo tutto questo mi ricorda il modello geocentrico, cicli ed epicicli, escogitato da Ipparco per evitare la disturbante idea di Aristarco, quella che la Terra si muovesse intorno al Sole; così si complicava tutto, ma il modello funzionava nel senso che permetteva di fare previsioni accurate delle effemeridi dei pianeti come con il modello eliocentrico.

Forme di indeterminazione

Altro esempio; nei manuali di analisi vengono elencate le forme di indeterminazione per esempio:

$$\frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \times \infty; \quad \infty - \infty$$

sempre accompagnate dal solito ammonimento che il simbolo di infinito è un mero simbolo di comodo per indicare un limite, come sopra. Con gli iperreali una forma infinito su infinito non è altro che una frazione tra numeri infinitamente grandi, per esempio

$$\frac{2\omega^2 - 2\omega + 1}{\omega^2 - 2}$$

è un quoziente tra numeri infinitamente grandi che può essere semplificato usando le ordinarie regole dell'algebra.

$$\frac{2\omega^2 - 2\omega + 1}{\omega^2 - 2} = \frac{\omega^2\left(2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2\right)}{\omega^2\left(1 - 2\varepsilon^2\right)} = \frac{2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon^2} \approx 2$$

Nessun bisogno di usare la notazione dei limiti, né di accompagnare il tutto con inquietanti moniti sull'uso del simbolo dell'infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2}$$

E in definitiva il calcolo di un limite come questo sui manuali di analisi si fa come sopra ma introducendo doppie frazioni, trascinandosi dietro il simbolo di limite insomma in modo molto più farraginoso.

In definitiva la forma di indeterminazione nella NSA è semplicemente un'espressione iperreale della quale non si conosce a priori se il valore sia finito, infinitesimo, infinitamente grande. In teoria in una trattazione NSA si possono anche saltare le forme di indeterminazione, e confesso che, anche per l'endemica mancanza di tempo, è quello che ho fatto molte volte.

Pro e contro

A favore di una sia pur breve trattazione dei limiti inserita in un approccio NSA gioca soprattutto lo spauracchio dell'Esame di stato. Ma di questo parlerò più estesamente nell'ultima parte.

L'altro fattore è quello dell'Università per chi prosegue gli studi scientifici; l'aver studiato l'analisi alla maniera NSA può danneggiare lo studente che si troverà nel 99% dei casi a studiare analisi alla maniera di Cauchy-Weierstrass e cioè con i limiti? Ci vorrebbe un monitoraggio completo degli studenti cosa che la scuola non è in grado di fare; l'unico ritorno che il docente ha è quello dei suoi ex-studenti ormai universitari che incontra per strada o a scuola. Non è certo un campione completo e non è detto che sia rappresentativo, ma da questo campione, al 99% dalla facoltà di Ingegneria, non ho avuto ritorni negativi, anzi qualche buon risultato ad Analisi I ed Analisi II; del resto all'Università comunque l'analisi si ricomincia da zero ed allora conoscerla da un punto di vista diverso costringe a fare qualche confronto che forse aiuta a capire meglio i concetti di base.

Contro la trattazione dei limiti in un approccio NSA vedo due fattori: a) innanzitutto il tempo, che è sempre la cosa più preziosa, sempre inferiore al desiderato. Aggiungere un capitolo sui limiti fa perdere molto tempo e rischia così di dissipare uno dei pregi principali di questo approccio. b) proporre il calcolo dei limiti usando la NSA, e cioè numeri iperreali e funzione parte standard, rischia di essere ancor più deleterio per l'esame di stato, rischiando di innescare malintesi. Il commissario può aspettarsi per esempio un calcolo di un limite fatto in maniera standard e trovare sbagliata o incomprensibile una soluzione con gli iperreali.

Le mie ultime esperienze mi spingono quindi a risolvere il dubbio in quest'ultimo senso: facciamo pure a meno dei limiti.

5.3 Ma la matematica ha una storia?

Nella trattazione tradizionale sia liceale sia universitaria, la matematica appare come una disciplina uscita così com'è dalla testa di Zeus. La storia della matematica si riduce a qualche noticina a piè di pagina o al massimo a qualche riquadro fuori testo.

Anche molte trattazioni NSA a partire dal Keisler seguono questo approccio. Pure la NSA potrebbe essere trattata come l'analisi vista nel corso della storia, da Zenone ad Archimede, a Leibniz, a Newton, a Eulero ... Guido Castelnuovo seguito poi in questo verso dalla figlia Emma aveva in proposito idee chiare:

> D'altra parte l'esperienza didattica mi ha insegnato come sia vantaggioso far percorrere alla mente degli allievi, per quanto è possibile, le stesse tappe attraverso a cui è passata la scienza nel suo sviluppo.
>
> Guido Castelnuovo – Lezioni di Geometria analitica – Soc. Ed. Dante Alighieri 1935 pag. VII

Proprio ad Emma Castelnuovo in collaborazione con Daniela Valenti e Claudio Gori Giorgi si deve uno dei pochi manuali di matematica per le scuole superiori che abbiano seguito questo approccio, libro che purtroppo non ha avuto il successo meritato ed è ormai fuori commercio.

Nelle pagine seguenti tre schemi molto molto sommari su come presentare in modo storico l'analisi.

La storia delle derivate

Si comincia con il terzo paradosso di Zenone che porta al problema della velocità istantanea e dal problema della tangente affrontato alla maniera di Lebniz (e di Newton) tramite infinitesimi. L'infinitesimo è definito alla maniera di Leibniz come numero diverso da zero ma minore di ogni numero reale. All'inizio si seguirà Leibniz anche nella sua disinvoltura nello sbarazzarsi degli infinitesimi alla fine dei calcoli (o degli infinitesimi del secondo ordine come fa Leibniz in molti suoi scritti). Il rigore deve essere un punto di arrivo, non di partenza.

La storia degli integrali

Un buon punto di partenza è il metodo di esaustione di Archimede; in classe ho proposto il metodo di Archimede per approssimare l'area del cerchio, suddividendolo in tanti triangoli con vertice nel centro e base inscritta in un arco; di qui a parlare di somma di infiniti triangoli infinitesimi il passo è breve; generalizzare il concetto in quello di integrale un po' meno breve. Per esempio sarebbe possibile poi parlare di Cavalieri ed introdurre almeno la formula dei trapezi per poi passare da trapezi sottili a trapezi infinitesimi: si arriva così all'integrale di Leibniz e poi al teorema fondamentale dell'analisi.

La storia degli iperreali (limiti?)

Il primo paradosso di Zenone, quello del segmento, si traduce facilmente in due [1]

strada percorsa da A: $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{15}{16}, \quad \frac{31}{32}, \quad \ldots 1-\delta \approx 1$

strada mancante a B: $\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \ldots \delta \approx 0$

Un altro buon esempio è quello della legge di capitalizzazione:

$$C = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad 1; \quad 2,25; \quad 2,370; \quad \cdots \approx e$$

che ci porta ad introdurre il numero e.

Un altro esempio interessante preso dalla storia della matematica è quello del metodo di Eulero per calcolare il numero e applicando il binomio di Newton a alla potenza $e = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

La sequenza dei numeri naturali dà l'idea di numeri infinitamente grandi; per esempio la sequenza: $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \cdots = \omega$ rappresenta un numero infinitamente grande e la sequenza $2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \cdots = 2\omega$ rappresenta un altro numero infinitamente grande doppio del precedente; la cosa è ragionevole visto che la sequenza cresce a un ritmo doppio del precedente.

Sempre la storia della matematica ci introduce un'altra possibilità di arrivare agli iperreali partendo dalla famosa vicenda pitagorica della incommensurabilità del rapporto tra diagonale e lato del quadrato, ovvero della radice quadrata di due. Se questo numero si può solo approssimare per esempio cercando sequenzialmente le approssimazioni per difetto (quelle il cui quadrato non supera due), si produce la sequenza

$$1;\ 1,1;\ 1,2;\ 1,3;\ 1,4;\ 1,41;\ \cdots \approx \sqrt{2}$$

In questo modo si potrebbe procedere in parallelo definendo radice di due come la classe di equivalenza delle sequenze che approssimano radice due, classi che possiamo chiamare numeri iperrazionali, lo zero come classe di equivalenza dei numeri infinitamente piccoli, ecc.

[1] Qui e nel seguito uso una notazione semplificata; per esempio ω è la sequenza infinita di naturali $< 1;\ 2;\ 3;\ \cdots >$, il numero iperreale è piuttosto la classe di equivalenza di tutte le sequenze "quasi dappertutto uguali" ad ω e si indica con la notazione $[\omega]$ oppure ω ; qui per semplicità si è riportata la sequenza più significativa come rappresentante il numero iperreale.

5.4 L'esame di stato

Alla fine del corso di studi incombe uno spauracchio:

l'esame di stato!

Il commissario di matematica nella maggior parte dei casi non conosce la NSA e le reazioni possono essere diverse.

Nei licei umanistici c'è solo la prova orale, occasionalmente un quesito nella terza prova, quindi il problema è meno serio che allo scientifico dove c'è sempre la prova scritta di matematica. Occorre quindi chiarire bene la cosa nel documento del 15 maggio che il commissario è tenuto a leggere e presentare un programma ben dettagliato. In generale di fronte all'esame di stato sono possibili diverse strategie; qui ne identifico due opposte.

Adattarsi all'esame di stato

Maometto va alla montagna

Prima soluzione: cercare di adattarsi alla commissione d'esame. Ma come? La commissione non è nota in anticipo ed è difficile immaginare che atteggiamento possa avere il commissario di matematica di fronte a un programma con approccio NSA.

Per esempio si può dedicare a fine anno qualche lezione sui limiti (vedi dubbio n.2) e sull'analisi classica; una buona idea sarebbe quella di fare un confronto in parallelo, tipicamente tra definizione di derivata con i limiti e definizione con gli infinitesimi; oppure mostrare la definizione "epsilon-delta" di limite e confrontarla con i numeri iperreali. Per esperienza però posso dire che questi confronti possono essere di indubbio interesse culturale ma nella prospettiva dell'esame di stato non sembrano poi molto utili. Poi c'è da considerare che programmare un argomento per la fine dell'anno comporta il consistente rischio di non avere poi il tempo di trattarlo bene. In questo senso rischia di essere un rimedio peggiore del male.

Meglio allora questi confronti tra NSA e analisi classica nel corso dello svolgimento del programma. Ma come detto sopra questo può essere pericoloso per l'esame di stato, nel senso che se il commissario vede per esempio la parola "Limiti" nel programma può sentirsi autorizzato a interrogare sull'argomento alla maniera standard creando situazioni imbarazzanti. La verità è che per adattarsi e prevenire ogni rischio e imprevisto al 100% si dovrebbe senz'altro rinunciare alla sperimentazione NSA!

Ma rischi e imprevisti si verificano anche senza sperimentazione NSA! E allora? In francese c'è un detto: "qui ne risque rien n'a rien" = "Chi non rischia nulla, non ottiene nulla". E allora si può considerare l'alternativa opposta.

Ignorare l'esame di stato

La montagna va a Maometto?

Una mia insegnante di liceo, si parla degli anni Sessanta, molto competente e valida, a proposito dell'esame di maturità diceva spesso:

> Il mio compito di insegnante termina con lo scrutinio. L'esame di maturità è un'altra cosa.

Non sono sicuro se quell'insegnante avesse un'opinione totalmente negativa dell'esame, ma il tono lo lasciava pensare. In ogni caso non c'è dubbio che la cosa che dovrebbe preoccupare maggiormente l'insegnante non è tanto l'esame di stato ma quel che viene dopo, gli studi universitari o il lavoro. È soprattutto lì che si dovrebbe valutare la validità degli studi liceali.

Allora non è poi tanto insensata e trasgressiva la strategia di ignorare l'esame di stato o quanto meno di non farsene troppo condizionare. Quindi nel nostro caso la strategia è quella di andare avanti tranquillamente con il programma impostato alla maniera NSA. Il commissario dovrà adattarsi al programma. Questa strategia potrebbe per esempio tradursi così: ignorare del tutto i limiti, e altri argomenti non strettamente necessari in una trattazione NSA, parlando solo di iperreali; questo sia nello svolgimento delle lezioni e soprattutto nel programma presentato alla commissione.

Resterebbe il dubbio: ma così non si sta disattendendo il programma ministeriale? In realtà da anni anzi da decenni i programmi ministeriali vengono applicati con molta elasticità un po' in tutte le materie e spesso i docenti più che al programma ministeriale si attengono al libro di testo adottato; anche in matematica per decenni si sono fatte cose al di là dei programmi, per esempio le coniche in prima liceo mentre buona parte del programma ministeriale di geometria veniva di fatto dimenticato. E si sono dimenticati in parte o del tutto argomenti previsti da quei programmi, per esempio la geometria euclidea.

Già in questo quadro ignorare i limiti mi pare peccato più lieve in confronto all'ignorare in gran parte se non del tutto la geometria euclidea Ma con l'attuale ordinamento non esistono più i vecchi programmi ministeriali ma solo le indicazioni nazionali è già il termine indicazione appare meno prescrittivo di programma. Riporto a titolo di esempio le indicazioni nazionali per l'analisi all'ultimo anno del liceo classico:

> Lo studente approfondirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici. Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale – in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le

problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già studiate, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici. L'obiettivo principale sarà soprattutto quello di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. In particolare, si tratterà di approfondire l'idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi ambiti.

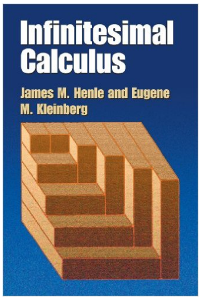
C'è appena un cenno ai limiti, molto maggiore l'accento su derivate e integrali. In definitiva l'insegnante che sostituisca i limiti con gli iperreali fa una deviazione tutto sommato molto lieve dalle indicazioni nazionali, molto lieve in confronto ad altre deviazioni che possono apparire meno importanti solo perché sono ormai inveterate. La deviazione più grossa è quella relativa ai libri di testo in uso.

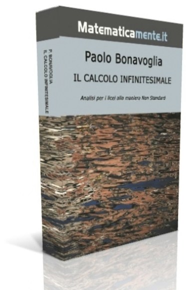
Quindi sono propenso a risolvere questo dubbio in questo secondo senso. Come detto nel senso di *"non farsi condizionare troppo dall'esame di stato"*.

5.5 Link e libri

http://nsa.liceofoscarini.it (il mio sito NSA surrogato del libro di testo per gli studenti, ancora in fase di revisione e reimpostazione grafica) http://www.math.wisc.edu/ keisler/calc.html (Il libro di Keisler disponibile in PDF non digitalizzato)

La citazione del mio libro, ormai fuori stampa da anni, ma scaricabile gratuitamente dal sito di matematicamente.it la faccio più che altro come impegno a pubblicarne una nuova edizione riveduta e corretta in tempi non troppo lunghi.





La citazione del manualetto, in inglese, di Henle e Kleinberg la faccio perché è soprattutto su quel libro scritto in modo molto accessibile che ho cominciato ad imparare qualcosa sulla NSA, qualcosa che andasse al di là dell'infarinatura fornita da altri testi. Per chi vuole approfondire maggiormente l'argomento iperreali, ho trovato molto utile il volume R. Goldblatt, Lectures on the Hyperreals, Springer, ovviamente a livello di corso universitario, e sempre in inglese.

6

La NSA nel vivo della didattica: una terza via

Sergio Casiraghi [1]

Nel corso dell'ultimo lustro si è cercato di affrontare il debole impatto della NSA sulla formazione e, grazie anche alle fruttuose giornate di studio ad essa dedicate che hanno preceduto questo Convegno, è cresciuto l'interesse verso l'approccio Non Standard nella didattica dell'Analisi Matematica nelle scuole superiori (e non solo). Aumentano anche in Italia gli insegnanti impegnati a ridefinire i loro piani di lavoro improntandoli alla NSA. In questi ultimi anni l'esperienza nei corsi di formazione per neoimmessi in ruolo mi ha dato modo di osservare, sostenere e mettere a confronto diverse impostazioni sviluppate con immaginazione e creatività. La convenienza e il timore, a volte, di andare oltre con altre notazioni, superando le Colonne d'Ercole di quanto tradizionalmente appreso a Scuola (e all'Università), ha frenato la convinzione di essere sulla strada giusta. Malgrado ciò, attraverso il confronto su varie proposte didattiche seguite, si è fatta viva la ricerca di una 'terza via' tra l'approccio classico legato alla teoria dei modelli (alla Robinson) e quelli assiomatici per un'efficace didattica dell'Analisi Non Standard che allarga la mente e rende più comprensibile la tradizionale Analisi e il Calcolo.

≪Il maestro ... se davvero è saggio, ... vi guida alla soglia della vostra mente≫
(**Il Profeta** di Gibran Kalil Gibran)

[1]**Group Leader & Mentor DIDASforce – Task Force for Innovation in Education**
e-Tutor Master DIDASCA – The First Italian Cyber Schools for Lifelong Learning – Sondrio
[`http://didasca.eu`]

6.1 Cinque buone ragioni per insegnare l'Analisi Non Standard

1. **Superare** alcune ben note difficoltà dell'insegnamento-apprendimento che spesso incontriamo nell'Analisi Matematica, ma che riguardano anche altri ambiti relativi al Calcolo, come l'Analisi Numerica, l'Analisi Complessa o la teoria degli errori e altri particolari aspetti in ambito computazionale.

2. **Limitare** l'eccessiva complicazione e formalizzazione di concetti essenziali e delle dimostrazioni connesse attraverso la logica, facendo uso dell'intuizione e della visualizzazione.

3. **Enfatizzare** l'aggettivo nella denominazione di "Analisi infinitesimale" che storicamente caratterizza la disciplina, cercando di riproporla in termini di "Calcolo" ovvero come "Calcolo Sublime".

4. **Integrare** gli elementi fondamentali del "Calcolo" con altri contenuti rilevanti presenti in varie discipline che vanno dall'informatica alla filosofia passando per la fisica, la lingua e la letteratura.

5. **Ricercare** un approccio innovativo che avveri la profezia espressa nel 1973 da Kurt Gödel, famoso matematico del XX secolo, il quale in una conferenza affermò: "*ci sono buoni motivi per credere che l'Analisi non standard in una versione o in un'altra sarà l'Analisi del futuro*". In pratica vuol dire cercare di superare la routine e far entrare la ricerca più avanzata nell'usuale pratica didattica, assumendo l'impegnativo ruolo di *insegnanti-ricercatori*.

Già, ma quali metodologie è possibile seguire e quale cura dei contenuti occorre per avviare alla NSA le nuove generazioni? Forti dei nostri buoni motivi, vedremo alcune proposte che, in un'ampia visione culturale incentrata su rigore, pertinenza e impegno, possono offrire delle utili indicazioni per avviare o migliorare le attività di formazione, diffusione e divulgazione della NSA nelle sue varie forme e versioni. Risultano utili le esperienze di accompagnamento nella formazione dei docenti in servizio interessati all'introduzione e sperimentazione di contenuti innovativi nella pratica didattica organizzata in modo creativo e indipendente, ma sempre rigoroso. Eppure non sono bastati un lustro di Convegni Nazionali annuali (come queste giornate di studio), corsi e incontri su richiesta, libri e articoli vari per far avverare la citata profezia di Kurt Gődel. Far conoscere questo approccio all'Analisi Matematica è stato un obiettivo costante in tutti questi anni, tenacemente perseguito da gruppi di volonterosi insegnanti di matematica e anche di altre discipline, che lo propongono offrendosi al confronto e suggerendo diverse vie. La profezia non si è ancora avverata, seppure appaia particolarmente valida sotto l'aspetto didattico. Cosa abbiamo imparato, cosa è mancato e soprattutto cosa manca ad esperienze di questo genere, rientranti nella lunga storia di innovazione "dal basso" delle pratiche didattiche? Per rispondere, bisogna considerare anche quali approcci e usi vengono fatti degli sviluppi delle Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione (TIC).

Nel "**Quadro di riferimento delle Competenze per i Docenti sulle TIC**" dell'UNESCO, si legge: *Gli insegnanti di oggi devono essere preparati a fornire ai loro studenti opportunità di apprendimento supportate dalla tecnologia. Tale abilità è diventata oggi indispensabile nel repertorio professionale di ogni insegnante. Gli insegnanti devono essere preparati a formare i ragazzi in modo che questi possano partecipare dei vantaggi che derivano dall'uso delle tecnologie. Le scuole e le classi, sia reali sia virtuali, devono avere insegnanti dotati di risorse e competenze tecnologiche, che li mettano in grado di trasmettere i contenuti disciplinari, le abilità e i concetti chiave della tecnologia. Le simulazioni interattive al computer, le risorse educative digitali o i sofisticati strumenti di raccolta e analisi dei dati, sono solo alcuni degli strumenti che ora consentono agli insegnanti di fornire opportunità in precedenza inimmaginabili per la spiegazione dei propri contenuti didattici..*

(`http://competenzedocenti.it/chisiamo.html`, `https://code.org`, `http://fablabsondrio.it`).

6.2 Nuovi orizzonti nella formazione su siti web aperti

Se non riusciamo ad entusiasmare e raccogliere l'interesse dei nostri allievi, abbiamo un problema serio da affrontare proprio nel rapporto tra pratica didattica e ricerca educativa o nel confronto fra il livello della Scuola Superiore e l'Università. È necessaria una compiuta riflessione in tal senso su come anticipare gli elementi di studio sulla NSA e insieme riportare le difficoltà incontrate dal gruppo di docenti e studiosi impegnati nelle sperimentazioni dell'Analisi Non Standard (NSA) a scuola. Aprire nuovi spazi virtuali di confronto dovrebbe servire a trovare le strategie migliori per dispiegare il potenziale educativo di cui siamo convinti. Le riflessioni che emergeranno dai percorsi di apprendimento proposti verranno rilanciate anche nel dibattito internazionale dopo questa V Giornata di Studio NSA. Si è quindi pensato di seguire la strada già tracciata dalla nuova rivista EDiMaST (`http://edimast.it`)per promuovere la NSA a livello nazionale e raccogliere i link ai materiali disponibili, in modo da sostenere il confronto e contribuire a migliorare la qualità della formazione matematica. Un sito con segnalazioni e informazioni sui siti analoghi, per favorire i gemellaggi o promuovere altre iniziative quale può essere la produzione di nuovi testi a partire dal repository su `https://bitbucket.org` di Bruno Stecca e Daniele Zambelli `https://bitbucket.org/zambu/nsa` già presentato a Vicenza, o quanto viene riportato da siti di Università e Scuole (`http://nsa.liceofoscarini.it`). Un portale che faccia da hub e rimandi ad altri siti gratuiti, progettato per consentire insieme ad insegnanti e studenti di tutto il mondo di imparare, cercando la propria via verso la NSA e sul quale costruire dinamiche comunità di apprendimento online. Non è certo un'utopia, ma una proposta che può far tesoro di esperienze già maturate con successo quale DIDASpedia (`http://DIDASpedia.it`) basata sull'idea di Scuol@3.0. Questo è il nuovo modello didattico sperimentato da Didasca, dove tutti i verbi volti all'educazione - come istruire, formare e aggiornare - vengono declinati secondo il paradigma dello *School & Home Cloud Learning*. Un ambito del tutto nuovo dove rientra anche il percorso appena delineato per la NSA con cui guardare a delle possibili azioni da compiere sul Sistema Educativo Nazionale.

Va posto l'accento sulla conoscenza e l'utilizzo di strumenti di cura dei contenuti esposti in Internet (Content Curation) che sono più adatti a sostenere l'innovazione e a disseminare le migliori sperimentazioni o pratiche didattiche. La scelta selettiva di argomenti, problemi e metodi da sola può definire la materia che si va a proporre, ma il modo in cui si scelgono e s'imparano ad usare strumenti digitali per illustrare la disciplina è purtroppo lasciato spesso al caso o alla curiosità dei singoli. Basta pensare all'uso che si può fare oggi dei Sistemi di Algebra Computazionale (CAS) con strumenti come `http://www.wolframalpha.com` a supporto della didattica. Se per una dimostrazione si riempiva la lavagna, oggi si va in Rete. Il Prof. Tullio De Mauro ha riproposto "*l'innovatore ben temperato*", nella Rubrica "Scuole" (del 12 giugno 2015) che tiene su Internazionale, basandosi sul racconto "**Learning (re)imagined**" di un viaggio fatto da Roger Brown-Martin attraverso le scuole dei più diversi paesi del mondo. Sappiamo tutti bene che i sistemi educativi sono troppo complessi e operano in condizioni ambientali assai diverse per poter ammettere soluzioni universali passe-partout. Questa osservazione è sufficiente, anche nel nostro sistema scolastico, per andare ad offrire semplici suggerimenti basati su alcune pratiche che paiono avere buoni risultati nell'apprendimento. Una linea di lavoro e proposta che facciamo nostra in quanto gli aspetti didattici della NSA visti sul campo hanno tutti certamente quel carattere citato di innovazioni educative. Un successo è quindi poter resocontare casi di passaggio alla NSA nel nostro paese, mettendo l'accento sulle proposte di flipped classroom (`http://InternetForThings.it`), che pare funzionare bene per gli alunni di tutti i segmenti dell'istruzione e dalla quale si può forse trarre un certo vantaggio nel riproporre dei percorsi di successo in NSA. Infatti, sbagliare è un'opzione, ma avere paura no, e per superarla va creato uno spazio sicuro per l'apprendimento su cui poter confidare.

Le linee guida nella creazione dei percorsi formativi si riconducono al desiderio di trasmettere una percezione delle idee e dei concetti matematici accessibile a tutti, semplice e attuale. In modo ancora molto tradizionale è ciò che si fa al Politecnico di Milano con il Progetto "*In Action with Math*" (`http://www.inactionwithmath.polimi.it`) che risponde così alla domanda "Quale Matematica?" da proporre a scuola:

"Fino alla metà del XX secolo le discipline matematiche più conosciute, come la Geometria, l'Analisi Matematica, il Calcolo delle Probabilità, la Teoria dei Numeri,

trovavano naturale applicazione principalmente nell'ambito della Fisica. Da allora, nuovi settori della matematica, quali per esempio la Biomatematica, l'Ecologia Matematica, l'Economia o la Finanza Matematica e altri ancora, si sono sviluppati in forte sinergia con le scienze applicate e l'ingegneria. La matematica del XXI secolo, pur mantenendosi fedele alle sue caratteristiche di astrazione, è in grado di intervenire nelle sfide che la tecnologia e la maggior parte delle scienze applicate presentano, fornendo soluzioni, strumenti di predizione e controllo o chiavi di lettura/interpretazione". In questa prospettiva il Laboratorio FDS prepara incontri e attività dedicate agli insegnanti e ai loro studenti, da condividere con colleghi di tutte le discipline!

Possiamo anche noi organizzare (gratuitamente) qualcosa di questo genere che sia basato su sviluppi utili a diffondere la didattica della Matematica come NSA? Per questo dovremmo tutti quanti conquistare una maggiore *intraprendenza e leadership* (`http://edtechreview.in/digital-leadership`).

Capacità e fiducia non mancano al Prof. Yaroslav Sergeyev dell'Università della Calabria, noto inventore del "Grossone", su cui avremo modo di tornare più avanti trattando di "Aritmetica dell'infinito" e Infinity Computer , dopo la più recente indagine di Gabriele Lolli sulla Teoria del Grossone e il Sistema dei Numerali proposto da Sergeyev, posta in relazione e che qualche tempo fa veniva ancora messa in contrapposizione alla NSA (`http://mathforum.org`).

È una questione su cui cimentarsi e riflettere nel risolvere i problemi scelti, con soluzioni e dimostrazioni da discutere o condividere. Si impara di più insegnando!

ITiCSE2015, `http://analisinonstandard.blogspot.it`,
`http://analisinonstandard.it`

Seguono alcuni dei problemi affrontati al Convegno con gli strumenti della NSA+.

6.3 Problemi riproposti con soluzione rapida in NSA+ riferiti a EASSS

(Episodi di Apprendimento Situato in occasioni Strane, Serie e Standard)

1. Proposta social G+ all'incrocio con sciami meteorici delle Perseidi (13/8/15)
   In NSA: $\zeta \equiv k - x$ infinitesimo e $k \neq 0$ si ha $\mathrm{st}(L) = \mathrm{st}\left(\frac{sk^2y\zeta}{k\zeta}\right)$=**sky**, ma se $k = 0$
   In NSA+①: $\mathrm{st}(L) = st\left(\frac{s\zeta^2 y(-\zeta)}{0(-\zeta)}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{sy\zeta^2}{0}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{sy\zeta}{0\cdot①}\right)$, con $\zeta = \frac{1}{①}$,
   $$0 \cdot ① = 0, \quad \mathrm{st}(L) = \mathrm{st}\left(\frac{sy\zeta}{0}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{sy}{0\cdot①}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{sy}{0}\right) = \omega$$
   La verifica è automatica (G+ per discussioni) nel tempo di una "stella cadente".

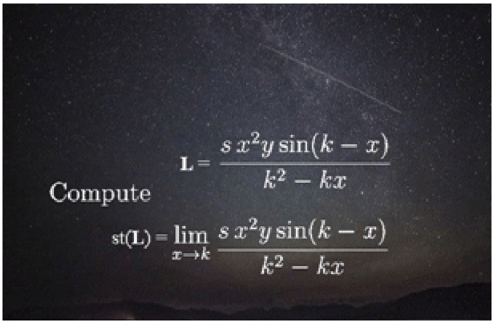


Figura 6.1: `http://spikedmath.com`

2. **L'ordine di Infinito di ln(x) è ≪infinitesimo≫** [dal Numero 1 della rivista mensile della sezione veronese di Mathesis, Luigi Marigo, gennaio-febbraio 1998]

   In NSA+①: $\frac{\ln ①}{①^\alpha} = \varepsilon \ln ① = \ln ①^\varepsilon \approx \ln ①^0 = \ln 1 = 0$
   dove $\alpha > 0$, $\varepsilon = \frac{1}{①^\alpha}$ e $①^0 = 1$

3. **Approssimazioni sul numero ≪e≫** [dal Numero 205 di MatematicaMente, rivista mensile della sezione veronese di Mathesis, gruppo NSA, 01-10-2015]

   In NSA+①: $e_0 = \left(1 + \frac{1}{①}\right)^{①} = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$

   con $\varepsilon = \frac{1}{①}$ è $\ln e_0 = \frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$, $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$, dunque

   $e_0 = e = \left(1 + \frac{1}{①}\right)^{①} = (①^0\, ①^{-1})^{①}$.

   qui diversi **sistemi numerali**, usati come strumenti matematici, esprimono con più precisione le **grandezze finite, infinite e infinitesime**.

4. **Il limite seguente**, calcolato con la NSA per il CodeWeek 2015 (`http://events.codeweek.eu/view/3759/nsa-in-action`), viene verificato in Scratch con la tricotomia illustrata in Figura 2.

$$\forall x \text{ sia } Y = \left(x + \frac{1}{N}\right)^N = x^N \left(1 + \frac{1}{xN}\right)^{\left(\frac{xN}{x}\right)} =$$

$$= x^N \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{\frac{M}{x}} = x^N \left[\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right]^{\frac{1}{x}} = x^N e^{\frac{1}{x}},$$

da cui

$$\ln Y = N \ln x + \frac{1}{x} \approx N \ln x$$

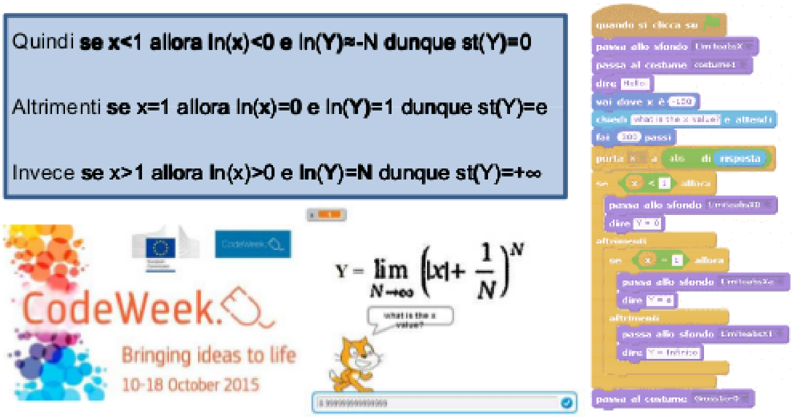


Figura 6.2: Esempio usato per esprimere lo "zero macchina", quindi la precisione, e distinguere il calcolo numerico dall'analisi simbolica.
[`https://scratch.mit.edu/projects/81839536`]

5. **L.100 ≪Mr.APOLLINAX visita New York≫.** Ritorno su numerali, cardinali e ordinali transfiniti dell'esempio, già presentato a Vicenza per NSA 2014, ricontando tutto con il GrossONE, per rispondere alla domanda: *quanti numeri ci saranno nel vaso a mezzogiorno*?

   Sia $N = \{1, 2, 3, ..., ① -3, ① -2, ① -1, ①\}$ il numero dei numeri tolti dal vaso a mezzodì, dove $① = \#(\mathbf{N})$. Tutti i numeri inseriti fin lì diciamo che sono stati in totale $M = \{1, 2, 3, ..., 1 + 10 * (① -1), ..., 10 * ①\}$ e quindi quelli effettivamente rimasti nel vaso erano ancora davvero Tanti.

   Tanti $= 10① - ① = 9① > ①$ a mezzogiorno. Ma non c'è rimasto nessun numero naturale finito: $n < ①$. [2]

[2]Atti del convegno di Vicenza, IV Giornata di studio NSA, Matematicamente.it

Le prove d'esame

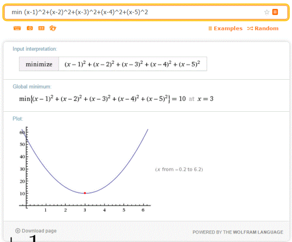
Passiamo ora al calcolo in NSA di quanto proposto nella II Prova di Matematica all'Esame di Stato 2015 del Liceo Scientifico ai punti 6 e 7 del Questionario. [3]

Lo studente medio potrebbe aver svolto così:

Punto 6. $n = 5, minf(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-i)^2, x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^2 - 2ix + i^2) =$$

$$= 5x^2 - 2x\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} i^2.$$



$$\sum_{i=1}^{5} i = 5 \cdot \frac{5+1}{2} = 15 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{5} i^2 = 5(5+1)\frac{2\cdot 5+1}{6} = 5 \cdot 11 = 55.$$

$$f(x) = 5x^2 - 30x + 55 = 5(x^2 - 6x + 11)$$

Parabola con minimo nel vertice: $\bar{x} = 3$ e $f(\bar{x}) = 5(9 - 18 + 11) = 10$.

Resta il dubbio: qualora esposto alla NSA, il candidato avrebbe differenziato o forse risolto diversamente il quesito? Ad esempio così :

$$f(\bar{x} + \varepsilon - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{5}\left[(\bar{x} + \varepsilon - i)^2 - (\bar{x} - i)^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{5}(\bar{x}^2 + 2\varepsilon\bar{x} + \varepsilon^2 - 2i\bar{x} - 2i\varepsilon + i^2 - \bar{x}^2 + 2i\bar{x} - i^2) =$$

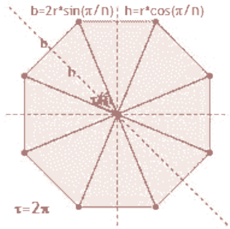
$$= 2\varepsilon\sum_{i=1}^{5}(\bar{x} - i) = 2\varepsilon(5\bar{x} - 15) = 0$$

con $\varepsilon > 0$ e perciò $5\bar{x} - 15 = 0$, oppure $\text{st}\left[\frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon}\right] = 10\bar{x} - 30 = 0$, da cui $\bar{x} = 3$.

[3] Una soluzione standard è stata proposta da Luigi Tomasi sul n° 47 Vol. XV I del PROGETTO ALICE 2015, M557.

Punto 7.

Verifica che $A(n) = nr^2 \sin \frac{\tau}{n}$ **è due volte l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio** C **di raggio** r**, dove** $\tau = 2\pi$**, e calcolare** $\mathrm{st}\,[A(N)]$.



L'area di uno spicchio del poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r è

$$\frac{bh}{2} = r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{r^2}{2}\sin\frac{\tau}{n},$$

quindi $A(n) = nr^2 \sin\frac{\tau}{n}$ [si può verificare anche per via induttiva].

$$\mathrm{st}\,[A(N)] = \mathrm{st}\left(Nr^2 \sin\frac{\tau}{N}\right) = \mathrm{st}\left(N\frac{\tau}{N}\right) r^2 = \tau r^2$$

Così se fosse stato esposto alla maniera della NSA.

Si trovano problemi di ottimizzazione con massimi, minimi e flessi del genere nel testo composto da Bruno Stecca e Daniele Zambelli di "Analisi non standard" dove vengono ripresi i lavori del *Prof.Apotema*, alias Giorgio Goldoni.

Questi problemi contingenti, affrontati e risolti in qualche maniera alla NSA, già rendono bene l'idea delle problematiche didattiche che possono accompagnare le risoluzioni in modi insoliti. Tralasciando certi aspetti divulgativi sui social network, che pure possono dare luogo ad *Episodi di Apprendimento in Situazioni Serie, ma Strane* (EASSS), la vera domanda da porsi è se i quesiti dati alla "maturità" sono davvero più facilmente abbordabili in NSA, tenendo conto di chi poi li correggerà.

Sui Social Network si rincorrevano commenti di questo genere: *"Quest'anno il compito di matematica del Liceo Scientifico è stato diverso dagli anni precedenti. Nel gergo dello 'scuolese', i quesiti sembrano impostati in modo da 'verificare le competenze' ossia verificare se lo studente è in grado di applicare le conoscenze e le abilità a situazioni 'reali'. Tutto bene ovviamente, ma nasce subito una polemica: il ministero sostiene che le competenze lo studente le raggiunge se gli insegnanti semplicemente cambiano il loro modo d'insegnare la matematica. Molti insegnanti invece sostengono che insegnare la capacità di 'dematematizzare', per utilizzare il termine utilizzato da mau, significa aggiungere qualcosa per passare a un livello superiore nell'insegnamento della matematica e così l'obiettivo non è raggiungibile senza aumentare le ore d'insegnamento, gli strumenti didattici, ridurre il numero degli alunni per classe ecc. Non essendo io insegnante non so se dematematizzare richieda effettivamente più impegno e quanto ne richieda (perché fare imparare le formule a memoria non è che sia poi così banale). Sicuramente non si può pretendere che gli insegnanti cambino modo di insegnare la matematica se non fai loro una formazione adatta.*

Per affrontare questo tipo di problemi serve più fisica, non più matematica. Immagino che per questo sarebbe utile che il docente di matematica e fisica fosse *sempre lo stesso almeno nel triennio. Nella mia limitatissima esperienza mi sembra agli studenti non manchino le competenze matematiche per affrontare l'esame, ma l'elasticità mentale per la traduzione italiano-matematica e viceversa. Tutte queste competenze non servono a nulla (tranne passare gli esami...) se non hai elasticità."*

A tali commenti, che potete trovare su `http://www.ilpost.it`, seguono delle Analisi metamatematiche che evidenziano la necessità di insegnare ad usare la matematica applicandola onde evitare molti pregiudizi nei confronti della stessa disciplina. Questo ci dice che dobbiamo prendere in seria considerazione la NSA e darle spazio aumentando le opportunità di apprendimento. La NSA risulta, per chi deve insegnare o imparare la matematica, un approdo sempre più valido ed evoluto, oltre che sostenuto dall'intuizione quando venga applicata alle situazioni reali. Se pure scontando le eventuali ingenuità, l'adattamento della NSA alla pratica didattica si dimostra molto vantaggioso, assai più intuitivo e semplice di qualunque approccio tradizionale che solitamente parte dai limiti, ma soprattutto è in grado di stimolare i successivi approfondimenti che possono arrivare a toccare anche le altre discipline.

Dobbiamo svincolare la scuola dall'ossessione nozionistica con contenuti sempre disponibili, concentrarci sull'apprendimento che si produce affrontando con creatività problemi interessanti e valorizzare la tecnologia come supporto alle attività nei lavori individuali e di gruppo. Metodologie di questo genere risultano efficaci e motivanti in quanto riconosciute da comunità di apprendimento costruite intorno alla scuola che potranno sostenere e certificare quanto realizzato. Un ruolo rilevante è riservato alle associazioni professionali di insegnanti che, come la **Mathesis** nei suoi 120 anni di storia, offrono occasioni di documentazione, confronto, dibattito e disseminazione delle idee senza pari.

6.4 Due, tre o più vie per portare la NSA nella pratica didattica

Un percorso didattico in NSA è caratterizzato dall'approccio che viene assunto in questo settore dell'Analisi collegato a tecniche di Logica Matematica e Calcolo.

Due impostazioni sono il classico approccio di Abraham Robinson [6-10-1918; 11-4-1974] con la teoria dei Modelli, dove i *numeri naturali non standard* (IN*) costituiscono una "superstruttura" che attraverso gli ultrafiltri si dimostra consistente logicamente, e l'approccio assiomatico quale estensione conservativa della Teoria degli Insiemi di Zermelo Fraenkel con l'aggiunta dell'Assioma di Scelta (ZFC). Con quest'altro approccio, proposto da Joseph Edward Nelson [4-5-1932; 10-9-2014] definendo la Teoria degli Insiemi Interni (o Internal Set Theory: IST), con una versione ben assiomatizzata, si disporrà di un *algoritmo di traduzione* dall'NSA all'Analisi classica.

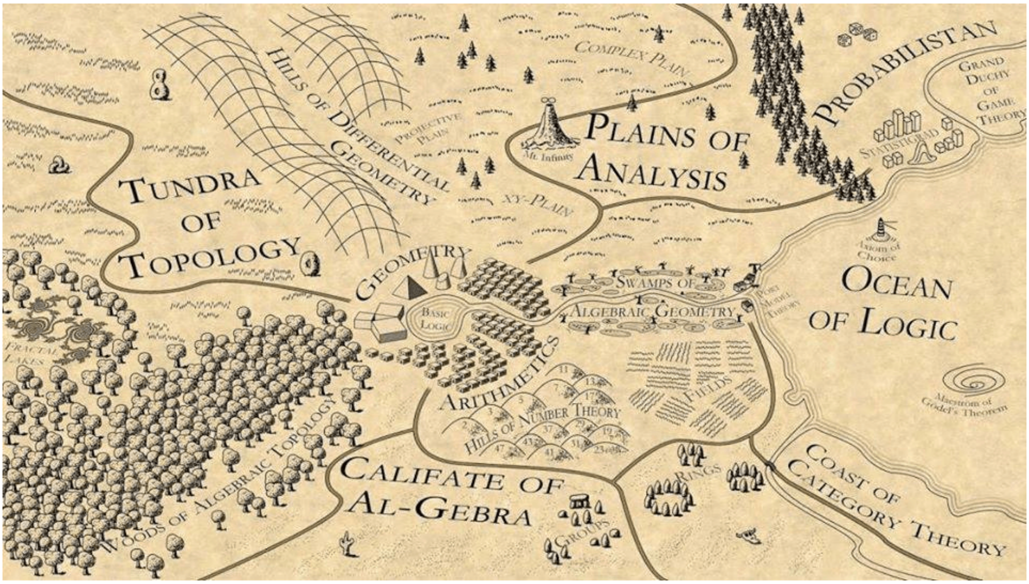


Figura 6.3: (https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_non_standard)

Una variante è la *Teoria Alpha* (α-*theory*) di *Vieri Benci* e *Mauro Di Nasso*, in cui i numeri non standard (iperreali e ipernaturali) vengono introdotti direttamente.

Le principali differenze tra teoria-α e normale analisi non standard sono due:

- la Teoria-α non necessita del linguaggio (o conoscenze) di logica simbolica;
- non distingue gli universi matematici in standard e non standard.

Un'altra intrigante possibilità è quella di procedere in qualche modo al contrario, seguendo la *Teoria del "Grossone"* di *Yaroslav Sergeyev* che, seppure non sia in rapporto diretto con la nostra NSA, può servire a veicolarne i concetti e allargare immediatamente le prospettive con relativa semplicità. Un'assiomatizzazione della teoria del Grossone di Sergeyev è stata proposta recentemente da **Gabriele Lolli** che, nel rispetto dei principi metodologici su cui si basa, ha portato a *un'estensione conservativa dell'aritmetica di Peano*. La differenza principale di questo approccio rispetto alle già citate teorie di analisi non-standard è dovuta al forte carattere computazionale, capace di aprire delle nuove strade nella teoria e nella pratica del calcolo, tant'è che è già in corso lo sfruttamento per realizzare l'Infinity *Infinity Computer* (http://www.theinfinitycomputer.com). Sergeyev assicura infatti di non voler limitare la matematica tramite un'impostazione assiomatica, ma intende piuttosto "fornire un insieme di regole generali per eseguire i calcoli, lasciando la porta aperta a sviluppi o modifiche suggerite dall'uso". Si potrà forse usarla nei ragionamenti informali e in certi modelli di calcolo automatico su un sistema di numerazione posizionale con una base infinitamente grande, il grossone: ①. Uno degli obiettivi del pensiero critico è proprio quello di ridurre i problemi solitamente complicati a una sequenza di equivalenti problemi più semplici, ben sapendo che la complessità è la semplicità difficile a farsi e qualche volta anche a dirsi, ... partire dall'infinità dei 'numerali' nella scuola superiore, mantenendo le intuitive proprietà dei numeri naturali che si ha con questa metodologia portando il calcolo nel *transfinito* (non alla Cantor), sarà un elemento di discussione interessante. Non è solo questa la via da percorrere, per un principiante gli approcci assiomatici vanno quasi meglio (ma ciò è da verificare).

6.5 La disponibilità di libri di testo e approcci pedagogici in NSA

La cosa curiosa è che sono sorti contrasti riguardanti soprattutto l'utilizzo della NSA nella didattica, non gli aspetti teorici. Le controversie sono nate su questioni di pedagogia della matematica, là dove la differenza la facevano i libri di testo adottati. Passiamo perciò in rassegna brevemente proprio questo delicato aspetto. Riconosciamo validi contributi dati da *Ruggero Ferro*, pioniere della NSA in Italia, con la traduzione del libro di *Keisler* [4] e il suo costante impegno anche nel campo della Didattica della Matematica, quelli di *Mauro Di Nasso* del quale è appena stata citata la α-*theory* , di *Giorgio Goldoni* con la sua ampia collana "*Il professor Apotema insegna ...*", di *Paolo Bonavoglia* con "*Il Calcolo Infinitesimale*" che introduce l'Analisi per i licei alla maniera Non Standard, e tutti gli altri illustri Relatori presenti anche al Convegno. Ricordo del 1994 il lavoro di *Santi Valenti* per l'introduzione graduata all'analisi non standard "*Dall'intero all'iperreale*" e altri testi.

Studi datati, come quello di K. Sullivan nelle scuole della zona di Chicago che risale agli anni '70, fatti per analizzare l'introduzione del calcolo non standard in aula, hanno mostrato che gli studenti che avevano seguito un corso NSA erano in grado di interpretare meglio il senso del formalismo matematico del Calcolo rispetto ad un gruppo di controllo che aveva seguito un programma standard. Questo è stato notato in seguito anche da Dauben (1988); Artigue (1994) e Chihara (2007) e altri.

È ora di riprendere questi studi trasversali con strumenti e possibilità nuove sulla base di Percorsi, tipo quelli introdotti dal "Piano d'Azione delle 5 'C': "*Comunicare e Collaborare per Creare e Condividere la Conoscenza*" promosso da Didasca che sono ospitati nell'abbecedario polimorfico DIDASpedia (`http://didaspedia.it`), aprendo altre piste di studio e di ricerca a partire da quelle indicate qui di seguito nei punti A e B, entrambe nate dalla Ricerca Operativa.

[4] Keisler, H. J., Elementary Calculus, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976

- A. Per rendere più significativo il passaggio e insieme richiamare alla memoria il contributo alla NSA lasciato da *Jacob (Jaap) Ponstein*, che è stato professore di Ricerca Operativa presso l'Università di Groningen, propongo una libera traduzione in italiano del suo '*A Naive Way to the Infinitesimals (an unorthodox treatment of Nonstandard Analysis)*', un libro che è il risultato dei suoi studi. Lo concluse nell'estate del 1995, ma sfortunatamente non riuscì a pubblicarlo: morì il 22 novembre 1995. Venne poi pubblicato postumo dalla facoltà di Economia dell'Università di Groningen nel 2001. Una prima bozza di traduzione verrà proposta agli interessati per correggerla e raffinarla.

- B. Proporre la storia a fumetti di Zicchino e Grossone sulla falsariga delle tre novelle di Bertoldo, Bertoldino e Cacasenno per rispiegare la NSA da zero.

La scuola è un ambiente che deve fornire ai più giovani, insieme alle basi del patrimonio culturale, anche gli strumenti per vivere nella società del futuro in modo consapevole e costruttivo. È indispensabile che l'apprendimento possa avvenire attraverso processi di condivisione e di collaborazione, sia tra pari che con gli insegnanti e gli altri adulti. Lo stesso orientamento alla condivisione di risorse, che di sicuro migliora la qualità delle proposte in DIDASpedia, si ritrova anche nel progetto europeo "open education 2030" dove l'obiettivo è quello di ideare e realizzare un ampio repertorio di risorse didattiche aperte, di offrire un panorama sulla didattica in rete accessibile a tutti, e di creare standard europei condivisi con linee guida per l'educazione aperta (EU-Store) e dare la voce agli studenti (`http://google.com/edu`).

La scuola è principalmente una comunità sociale formata da insegnanti e alunni, fisicamente o virtualmente presenti, che sviluppano conoscenze proprio attraverso la condivisione, la cooperazione e lo scambio continuo. Dobbiamo tenere presente tutto questo se vogliamo che il metodo della NSA si diffonda un po' ovunque e sia riconosciuto come buona pratica didattica.

6.6 Miscellanea per progetti di passaggio alla NSA

Le dinamiche di insegnamento/apprendimento che si vanno diffondendo con le metodologie delle "*classi rovesciate*" (*flipped Classroom*) richiedono all'insegnante di farsi facilitatore predisponendo gli elementi di repertorio a cui si può fare riferimento. A ciò contribuiscono i video, le citazioni di volumi appena pubblicati, recensioni di testi, siti, post, schede, esercizi sviluppati in unità di apprendimento o altri elementi ricavati da unità formative capitalizzabili, purché facilmente rintracciabili su Web.

Come esempi provo a indicare qui in maniera specifica:

1. Un libro per formalizzare la NSA "*Il mondo ipereale e l'analisi nonstandard*" di *Rodolfo Guidotti*, pubblicato nel 2015 dall'Autore sul sito `http://IlMioLibro.it`

2. Una nuova edizione del testo "*Analisi matematica non standard – 1*" che si accompagna agli "*Esercizi di Analisi matematica non standard – 1*" di *Lorenzo Orio*, nel 2015 dall'Autore sul sito `http://IlMioLibro.it`

3. La recensione al nuovo libro di *Giorgio Goldoni* "*Il linguaggio degli insiemi e dei predicati*", pubblicato nel 2015 dall'Autore sul sito `http://IlMioLibro.it`

4. Materiali del Corso di "*Analisi Non Standard*" tenuto nell'a.s. 2014-2015 da Lucia Rapella e raccolto sul sito dell'ITCGS "Saraceno" di Morbegno (So)

5. Un particolare Problema di rappresentazione presentato in vari Post sul blog (`http://sperimentata.blogspot.it/2015/08/il-problema-dei-quattro-quattro.html`)

6. Il libro divulgativo "*Arithmetic of Infinity*" di *Yaroslav Sergeyev* (su `Amazon.it`) suggerito per seguire la metodologia introdotta dalla teoria del "**grossone**".

7. L'articolo "*Un semplice modo per trattare le grandezze infinite e infinitesime*" di *Yaroslav D. Sergeyev*, che si trova su La Matematica nella Società e nella Cultura , Rivista dell'UMI, Serie I, Vol. VIII, Aprile 2015, 111-147

6.7 Conclusione del passaggio a Nord-Ovest

Figura 6.4: Passaggi a Nord-Ovest

Lavorando per introdurre la NSA nella pratica didattica della Scuola Secondaria Superiore mi è capitato di osservare e confrontare i risultati, ancora parziali, che suggeriscono però l'idea dell'esistenza di un passaggio a nord-ovest, ovvero una rotta che passa su territori contesi da stabilire tra NSA e Non Standard Calculus (NSC), stando alle necessità dell'insegnante in base alla classe su cui si regola, aprendo il confronto con i colleghi di altre discipline per utili scambi e fruttuose collaborazioni.

Alla ricerca di un equilibrio tra l'intuizione e il formalismo per chi inizialmente si avvicina all'astrazione dell'Analisi, fra la **teoria dei modelli** e **l'approccio assiomatico** con la **teoria degli insiemi interni** e le sue varianti, possiamo indicare almeno una terza via: quella di lasciar sciogliere i ghiacci polari con un approccio disincantato e libero nella discussione sulla strada da prendere! Potete esservi fatti guidare fin qui dalle applicazioni della teoria del "grossone" di Sergeyev,per focalizzare meglio gli infiniti, o aver usato un trattamento formale non ortodosso nel seguire la via ingenua agli infinitesimi che ci ha lasciato in eredità Jaap, o chissà che altro (NSBoh). In ogni caso, la strada che si apre richiede di saper coniugare lo sviluppo dell'Analisi con il Calcolo anche attraverso il "**pensiero computazionale**" che ha ovunque un grande successo. Infatti, si avvia qui insieme la **settimana europea della programmazione** (`http://codeweek.eu`) con qualche piccolo contributo indirizzato alla divulgazione e diffusione di diverse forme di *Analisi Non Standard nel vivo della didattica*.

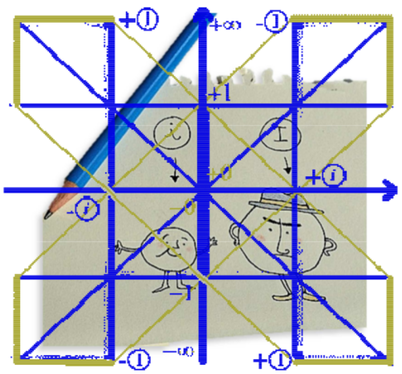


Figura 6.5: telaio per NSA+①

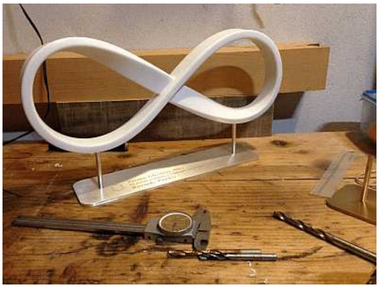


Figura 6.6: inFin

Infine, la ripresa della **NSA** illustrata per via digitale nei **FabLab** (`http://fablabsondrio.it`) aiuterà la diffusione e l'uso di strumenti dell'Analisi Non Standard in contesti sociali più ampi. Questo allargamento del nostro raggio d'azione contribuirà a rovesciare gli approcci didattici, ad approfondire la teoria e a sviluppare la pratica **NSA**, offrendo nuovi orizzonti con la discutibile aggiunta di uno **Zicchino** quale inverso del già citato **Grossone**.

7

Problemi di massimo e minimo

Andrea Centomo

Nello studio delle funzioni reali di variabile reale che siano derivabili in un intervallo, la ricerca dei punti di estremo relativo prende spesso le mosse dalla ricerca delle soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. Per il teorema di Fermat le soluzioni dell'equazione possono individuare punti di estremo relativo per f. In questo intervento analizzeremo da un punto di vista storico le origini del teorema di Fermat evidenziando il ruolo svolto dagli infinitesimi nella deduzione di questo risultato.

7.1 Le botti di Keplero

La storia dei problemi di massimo e minimo è molto antica, ma il primo contributo che apre ai moderni metodi dell'Analisi matematica è dovuto a Keplero. Keplero pubblicò un lavoro sui volumi delle botti di vino in un'opera che egli diede alle stampe nel 1615, intitolata *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Il libro di Keplero contiene una trattazione sistematica del calcolo di aree e volumi con tecniche di calcolo basate su ragionamenti geometrici e infinitesimali.

La stesura della *Nova Stereometria* fu ispirata da un episodio accaduto nel 1613 quando, in concomitanza del suo secondo matrimonio a Linz, Keplero acquistò una botte di vino. Il metodo usato dai mercanti per misurare il volume delle botti, e quindi per quantificarne il prezzo, sorprese negativamente Keplero in quanto potenzialmente truffaldino. Il metodo consisteva nell'inserimento di un bastone nel tappo della botte (punto A) in modo che esso andasse a finire in un punto opportuno alla base della botte (punto B) come rappresentato in Figura 7.1 e nello stabilire il volume di vino sulla base della lunghezza s del segmento di estremi A e B.

Se immaginiamo che la botte sia un cilindro di altezza $h > 0$, avente come basi due cerchi di raggio $r > 0$, e che il tappo sia posizionato esattamente a metà

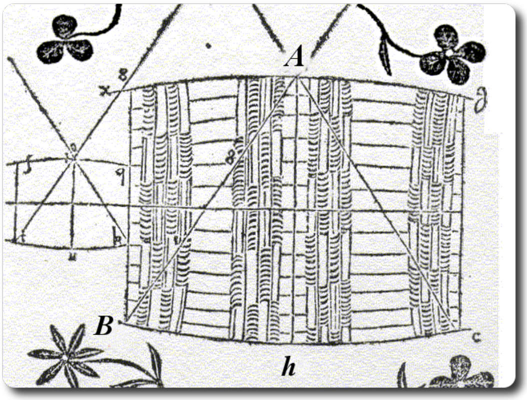


Figura 7.1: Metodo per il calcolo del volume

dell'altezza allora, per il teorema di Pitagora avremo

$$s^2 = (2r)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 4r^2 + \frac{1}{4}h^2$$

da cui

$$r^2 = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{16}h^2.$$

Il volume V della botte

$$V(h) = \pi\left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{16}h^2\right)h$$

dipende da h e ciò costituisce un problema in quanto, ad una prefissata lunghezza s, corrispondono botti di volume più o meno capiente. Da questo punto di vista l'idea di porre in relazione la lunghezza di s con il volume del vino contenuto nella botte – e quindi con il prezzo – non è *a priori* corretta.

Ricorrendo a impegnativi ragionamenti geometrici [5], Keplero è riuscito a dimostrare che, fissato un valore di $s > 0$, la botte di volume massimo che corrisponde a tale valore di s ha un'altezza data da

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}s.$$

Da ciò segue che

$$s = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$

e

$$r^2 = \frac{3}{16}h^2 - \frac{1}{16}h^2 = \frac{1}{8}h^2 \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{4}h \approx \frac{1}{3}h$$

da cui si evince che una botte cilindrica contiene la quantità massima di vino quando il raggio del fondo è circa un terzo della sua altezza. A conclusione dei suoi calcoli Keplero commentava il suo risultato in questo modo[1]:

> *From this it is clear that, when making a barrel, Austrian barrelmakers, as if guided by common and geometric sense, take as the radius of a bottom a third of the length of a stave.*
>
> *When this is done, the cylinder constructed in the mind between two bottoms will consist of two halves, each of which will... thus have maximal capacity even if one deviated somewhat from the exact rules during the making of the barrel, because figures closed to the optimal change their capacity very little... This is so because near a maximum the decrements on both sides are in the beginning only imperceptible.*

Supponenendo per comodità $s = 10$ e quindi cercando di determinare il massimo della cubica

$$V(h) = \pi\left(25h - \frac{1}{16}h^3\right).$$

quello che Keplero osserva in questo passaggio è che se tabuliamo i valori di $V(h)$ vicino ai valori in cui il volume assume il valore massimo, quindi tra 11 e 12, le variazioni di volume sono "piccole" e quindi il valore del volume stesso tende a stabilizzarsi (Vedi tabella 7.1). Come vedremo questa idea sarà alla base del ragionamento che Pierre de Fermat farà per giungere alla formulazione del teorema che lega gli estremi di una funzione agli zeri della sua derivata prima.

h	$V(h)$
8	527,8
9	563,7
10	589,0
11	602,6
12	603,2
13	589,6
14	560,8
15	515,4

Soluzione standard del problema di massimo

Prima di procedere, anche se è noto a tutti, vediamo come uno studente di liceo risolverebbe il problema della determinazione del massimo della funzione

$$V(h) = \pi\left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{16}h^2\right)h,$$

[1] Da ciò appare chiaro che i costruttori di barili austriaci sono guidati dalla geometria quando prendono come raggio della botte un terzo dell'altezza delle doghe. Così facendo il cilindro ideale avente per base i fondi sarà fatto di due metà ciascuna delle quali avrà... capacità massima anche se nel procedimento costruttivo si commette qualche imprecisione, in quanto vicino ad un estremo la capacità cambia molto poco... perché vicino a un punto di massimo i decrementi da entrambe le parti sono inizialmente impercettibili.

con $s > 0$ fissato e definita in $D = (0, +\infty)$. Dopo aver calcolato la derivata prima della funzione

$$V'(h) = \pi \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{16}h^2 \right)$$

se ne studia il segno risolvendo la disequazione

$$\pi \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{16}h^2 \right) \geq 0$$

le cui soluzioni in D sono

$$0 < h \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}s$$

da ciò, per un corollario del teorema di Lagrange, si conclude che la funzione $V(h)$ cresce per i valori di h appartenenti all'intervallo $\left(0;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}s\right)$, raggiunge il valore massimo in corrispondenza del punto

$$h_M = \frac{2\sqrt{3}}{3}s$$

e quindi decresce. In modo alternativo, ricorrendo al teorema di Fermat, si individuano i punti candidati ad essere estremi di $V(h)$, che sono le soluzioni dell'equazione

$$\pi \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{16}h^2 \right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4s^2 = 3h^2$$

ed essendo $h > 0$, in D si ha un'unica soluzione

$$h_M = \frac{2\sqrt{3}}{3}s.$$

Per stabilire che il punto h_M è effettivamente di massimo si può ricorrere al test della derivata seconda e osservare che

$$V''(h_M) = -\frac{3\pi}{8}h_M < 0.$$

La soluzione di questo semplice problema ha diversi prerequisiti! Lo studente "standard" deve aver affrontato in precedenza lo studio dei limiti, per approdare al concetto di derivata; deve quindi saper calcolare la derivata di un polinomio ed essere consapevole di come il segno della derivata prima sia legato alla monotonia e ai punti di estremo di una funzione. Alternativamente l'ultima parte dell'esercizio può essere sostituita dalla conoscenza del teorema di Fermat e del test della derivata seconda. Ai fini pratici della soluzione del problema non è richiesta una conoscenza teorica particolarmente approfondita e rigorosa degli argomenti. Anzi, sulla base dell'esperienza didattica, possiamo dire che molti studenti del quinto anno di liceo scientifico sanno risolvere facilmente il problema precedente anche se non sono completamente consapevoli del perché il loro metodo risolutivo funzioni.

7.2 Soluzione non standard e metodo di Fermat

In un lavoro del 1629 intitolato *Methodus ad disquirendam maximam et minima*, Pierre de Fermat trasformò l'osservazione di Keplero sui punti di estremo in un metodo generale per la loro individuazione. Un metodo che Fermat è stato in grado di applicare solo a funzioni polinomiali [2]. Per dare l'idea di come funziona questo metodo lo applichiamo per risolvere il problema della determinazione del massimo per la funzione

$$V(h) = \pi \left(\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{16} h^2 \right) h.$$

Il metodo di Fermat è poi quello che uno studente che conosca un po' di analisi non standard userebbe e consiste in questo. Prima si calcola la quantità

$$V(h + dh) = V(h) + \pi \left(\frac{s^2}{4} - \frac{3}{16} h^2 \right) dh - \frac{3\pi}{16} h d^2 h - \frac{\pi}{16} d^3 h$$

e quindi la *differenza*

$$V(h + dh) - V(h) = \pi \left(\frac{s^2}{4} - \frac{3}{16} h^2 \right) dh - \frac{3\pi}{16} h d^2 h - \frac{\pi}{16} d^3 h.$$

Nonostante non sia chiaro il significato attribuito da Fermat alla quantità dh è indiscutibile che se si vuole che il ragionamento che a breve vedremo funzioni, essa deve essere "piccola" e se riguardata dal punto di vista dell'analisi non standard rappresenta un infinitesimo non nullo. L'idea kepleriana che nei punti "vicini" al punto di massimo le variazioni di volume sono "piccole" equivale secondo Fermat a porre uguale a zero il coefficiente di dh ossia a porre

$$\pi \left(\frac{s^2}{4} - \frac{3}{16} h^2 \right) = 0$$

da cui ritroviamo la condizione

$$h_M = \frac{2\sqrt{3}}{3} s.$$

Osserviamo ancora che se il coefficiente di dh è nullo allora

$$V(h_M + dh) - V(h_M) = -\frac{3\pi}{16} h_M d^2 h - \frac{\pi}{16} d^3 h < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3h_M - dh < 0$$

da cui possiamo concludere che h_M è effettivamente un punto di massimo. Per lo studente "non standard" la vita, almeno dal punto di vista intuitivo, è molto più semplice di quella dello studente "standard". Con qualche conoscenza sui numeri iperreali e avendo chiara la definizione di massimo, egli può risolvere agevolmente un problema con pochissimi prerequisiti. Il metodo è così semplice che per le funzioni polinomiali fino al terzo grado si potrebbe proporre già al terzo anno di liceo insieme alla tecnica per la determinazione della tangente al grafico di funzioni quadratiche.

Osserviamo di passaggio che essendo il volume una funzione *continua*, la differenza

$$dV = V(h + dh) - V(h)$$

relativa all'incremento infinitesimo non nullo dh è un infinitesimo. Inoltre, essendo la funzione derivabile, avremo

$$V'(h) = \mathrm{st}\left(\frac{dV}{dh}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\pi s^2}{4} - \frac{3\pi}{16}h^2 - \frac{3\pi}{16}hdh - \frac{\pi}{16}d^2h\right) = \pi\left(\frac{s^2}{4} - \frac{3}{16}h^2\right) = 0$$

da cui si riottiene l'idea che in corrispondenza del punto di massimo la derivata prima si annulla.

7.3 Lattine di birra

Analizziamo adesso un problema di minimo che coinvolge una funzione razionale in modo da evidenziare una situazione in cui l'approccio non standard visto in precedenza, per essere applicato, richiede maggiore cautela. Immaginiamo di avere una lattina di birra cilindrica, di alluminio, che per comodità assumiamo di volume unitario. Vogliamo determinare raggio e altezza della lattina in modo da minimizzare la spesa nell'acquisto dell'alluminio che serve per costruirla. Indicato con $x > 0$ il raggio della lattina, sapendo che il volume è unitario, avremo

$$V = \pi x^2 h = 1$$

da cui possiamo concludere che l'altezza della lattina è $h = 1/\pi x^2$. La superficie totale della lattina sarà allora

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{1}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2}{x} + 2\pi x^2.$$

La spesa minima si avrà per il valore di x che minimizza $S(x)$. Se ragioniamo in modo non standard possiamo iniziare calcolando la differenza

$$dS(x) = S(x + dx) - S(x) = \frac{2}{x + dx} + 2\pi(x + dx)^2 - \frac{2}{x} - 2\pi x^2 =$$

$$= -\frac{2dx}{x(x + dx)} + 4\pi x dx + 2\pi d^2 x$$

e osservare che

$$dS(x) \sim \left(-\frac{2}{x^2} + 4\pi x\right) dx$$

da cui possiamo concludere che il minimo si ha quando

$$-\frac{2}{x^2} + 4\pi x = 0$$

ossia se

$$x_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Il punto delicato riguarda la conferma che effettivamente si tratta di un punto di minimo. Infatti sarebbe errato considerare solo il termine del secondo ordine $2\pi d^2 x$ in quanto dobbiamo prima quantificare la differenza

$$-\frac{2dx}{x(x+dx)} + 4\pi x dx - \left(-\frac{2}{x^2} + 4\pi x\right) dx = \frac{2d^2 x}{x^2(x+dx)}$$

da cui

$$dS(x) = \left(-\frac{2}{x^2} + 4\pi x\right) dx + \frac{2d^2 x}{x^2(x+dx)} + 2\pi d^2 x$$

e in corrispondenza di x_m si ha

$$dS(x_m) = \frac{2d^2 x}{x_m^2(x_m+dx)} + 2\pi d^2 x > 0$$

da cui solo ora possiamo concludere che x_m è effettivamente un punto di minimo.

7.4 Leibniz e la legge della rifrazione

Fermat non è stato in grado di estendere il suo metodo al caso delle funzioni irrazionali. Ad esempio, nonostante egli sia riuscito a dedurre la legge della rifrazione di Snell, è a Leibniz che dobbiamo l'applicazione del metodo di Fermat per questo scopo [4]. Come vedremo, il metodo di Leibniz non è altro che l'estensione del metodo di Fermat al caso appunto delle funzioni irrazionali. Con riferimento alla Figura 2 avremo che il tempo impiegato da un raggio di luce per percorrere l'intero cammino ottico è dato dalla funzione

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

dove v_1 e v_2 indicano le velocità della luce nei due mezzi attraverso cui essa viaggia. Calcoliamo la differenza

$T(x + dx) - T(x) =$

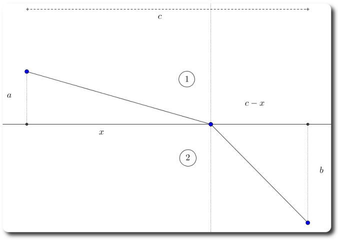


Figura 7.2:

$$= \frac{\sqrt{(x+dx)^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x-dx)^2}}{v_2} - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2} =$$

$$= \frac{2xdx+d^2x}{v_1\left(\sqrt{(x+dx)^2+a^2}+\sqrt{x^2+a^2}\right)} + \frac{-2(c-x)dx+d^2x}{v_2\left(\sqrt{b^2+(c-x-dx)^2}+\sqrt{b^2+(c-x-dx)^2}\right)}$$

dove dx è un infinitesimo non nullo. La differenza è infinitesima e

$$T(x+dx)-T(x) = dT(x) \sim \left(\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right)dx$$

da cui possiamo concludere che il tempo minimo corrisponde alla situazione in cui

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0$$

condizione che può anche essere riscritta come

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

dove θ_1 e θ_2 sono rispettivamente gli angoli di incidenza e di rifrazione. Per avere la conferma diretta che si tratta effettivamente di un minimo, mimando il procedimento non standard visto in precedenza, si devono affrontare calcoli laboriosi.

7.5 Il rigore nell'approccio standard e non standard

Se rimaniamo fermi agli esempi precedenti è abbastanza chiaro che il punto di vista non standard è intuitivamente molto potente e richiede un numero inferiore di pre-requisiti rispetto a quello standard. Tuttavia, come abbiamo visto, non è facilmente generalizzabile e l'esigenza di giungere a metodi che permettano di affrontare lo studio dei problemi di massimo e minimo in modo generale e di motivare questi metodi in modo rigoroso richiede un'ulteriore riflessione.

Se tralasciamo il caso particolare delle funzioni polinomiali, il metodo generale per affrontare un problema di massimo e minimo consiste nello studio del segno della derivata prima della funzione da massimizzare o minimizzare e quindi si fonda in ultima istanza sul teorema del valor medio di Lagrange.

Theorem 7.5.1 (di Lagrange) *Sia $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a;\ b]$ e derivabile in $(a;\ b)$. Esiste un punto $c \in (a;\ b)$ tale che $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Questo teorema si dimostra facilmente ad esempio applicando il teorema di Rolle alla funzione

$$g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A sua volta il teorema di Rolle

Theorem 7.5.2 (di Rolle) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b)$. Esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

si dimostra sfruttando il teorema di Weierstrass, che garantisce l'esistenza di massimo e minimo per una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, e il teorema di Fermat sui punti di estremo.

Nella didattica liceale del teorema di Weierstrass di solito non si propone una dimostrazione, in quanto piuttosto delicata, e forse meno evidente di quanto non sia nell'analisi non-standard. Mentre si dimostra il teorema di Fermat. Che poi un insegnante scelga il percorso standard o quello non standard la strada per giungere al teorema di Lagrange è esattamente la stessa. L'unica differenza tra standard e non standard è dunque rappresentata dal percorso didattico con cui si approda al teorema di Fermat. Di questo ora discuteremo in dettaglio.

Punto di vista standard

Iniziamo ricordando che

Definition 1 *Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione e $c \in D$ un punto di accumulazione per D. Diremo che c è un punto di massimo locale se esiste un intorno $U_c = [c-\delta;\ c+\delta]$, $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \leq f(c)$$

per ogni $x \in U_c$. Il massimo locale si dice stretto se $f(x) < f(c)$ per ogni $x \in U_c$.

Una definizione analoga viene data per i minimi locali e i minimi locali stretti, invertendo le disuguaglianze. Come ben noto, nella ricerca dei punti di estremo locale sono molto utili il concetto di derivata e il seguente lemma [1].

Lemma 7.5.3 *Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione e $c \in D$ un punto di accumulazione per D. Allora*

- *minimi locali: sia c un punto di minimo locale; la derivata sinistra $f'_-(c)$, se esiste, è minore o uguale a zero, e quella destra $f'_+(c)$, se esiste, è maggiore o uguale a zero;*
- *massimi locali: sia c un punto di massimo locale; la derivata sinistra $f'_-(c)$, se esiste, è maggiore o uguale a zero, e quella destra $f'_+(c)$, se esiste, è minore o uguale a zero.*

Proof Se c è un punto di minimo locale di accumulazione per D allora esiste un intorno $[c-\delta;\ c+\delta]$, $\delta > 0$, tale che

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \text{ per ogni } x \in [c-\delta;\ c) \cap D$$

e

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \text{ per ogni } x \in (c;\ c+\delta] \cap D$$

.

Passando al limite (se esiste) e utilizzando il **teorema del confronto** si ha la tesi per i minimi locali. La dimostrazione, per i massimi locali, è del tutto analoga.
□

Segue immediatamente da questo Lemma il seguente:

Theorem 7.5.4 (di Fermat) *In un punto di estremo locale interno al dominio di una funzione la derivata di tale funzione, se esiste, è nulla.*

Nella didattica liceale, in modo particolare negli indirizzi a maggior vocazione scientifica, il teorema di Fermat è ben noto nella veste di procedura per individuare i punti che sono candidati ad essere estremi locali di una funzione. Anche l'enunciato del teorema e la sua dimostrazione sono nel complesso noti. Tuttavia ci sono tre punti sui quali vogliamo soffermare la nostra attenzione:

1. il teorema viene presentato dopo lo studio dei limiti;
2. la dimostrazione si appoggia ad un importante teorema sui limiti: il teorema del confronto;
3. il modo in cui viene presentato il teorema nasconde il ragionamento che storicamente è stato fatto inizialmente per giungere a questo risultato.

Lo studio dei limiti rappresenta da sempre un grosso problema nella didattica liceale. Lo studente medio si ferma all'idea intuitiva di limite che comprenderà più approfonditamente nel futuro, se seguirà un percorso universitario in cui l'Analisi viene ristudiata. Allo stesso tempo il capitolo limiti, soprattutto alla luce delle nuove Indicazioni Nazionali, è un capitolo a cui — a dispetto della sua difficoltà — deve essere concesso uno spazio limitato per poter approdare il prima possibile al calcolo differenziale e alle sue applicazioni. La scarsa aderenza tra il modo di presentare il teorema e la sua storia non costituiscono veramente un problema. Tuttavia, come abbiamo visto in precedenza, la breve panoramica storica su come si è giunti al teorema di Fermat, partendo dall'osservazione di Keplero, sarebbe interessante e facilmente comprensibile per chi sceglie il cammino non standard.

Approccio non standard

Il Lemma che abbiamo visto in precedenza, da cui discende direttamente il teorema di Fermat, funziona anche nell'Analisi non standard. Una dimostrazione che si potrebbe proporre a livello di liceo è la seguente.

Lemma 7.5.5 *Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione e $c \in D$ un punto di accumulazione per D. Allora*

- *minimi locali: sia c un punto di minimo locale; la derivata sinistra $f'_-(c)$, se esiste, è minore o uguale a zero, e quella destra $f'_+(c)$, se esiste, è maggiore o uguale a zero;*
- *massimi locali: sia c un punto di massimo locale; la derivata sinistra $f'_-(c)$, se esiste, è maggiore o uguale a zero, e quella destra $f'_+(c)$, se esiste, è minore o uguale a zero.*

Proof Se c è un punto di minimo locale di accumulazione per D allora esiste un intorno $[c-\delta;\ c+\delta]$, $\delta > 0$, tale che per ogni *infinitesimo positivo* dx si ha

$$\frac{f(c-dx)-f(c)}{-dx} \leq 0$$

e

$$\frac{f(c+dx)-f(c)}{dx} \geq 0.$$

Se la derivata sinistra esiste si ha[2]

$$f'_-(c) = \mathrm{st}\left(\frac{f(c-dx)-f(c)}{dx}\right) \leq 0$$

analogamente se la derivata destra esiste

$$f'_+(c) = \mathrm{st}\left(\frac{f(c+dx)-f(c)}{dx}\right) \geq 0$$

[2]Se $g(dx) \geq 0$ per ogni $dx > 0$ e se per assurdo fosse $\mathrm{st}(g(dx)) < 0$ avremo che $g(dx) = \mathrm{st}(g(dx)) + o(dx) \geq 0$ e $o(dx) \geq -\mathrm{st}(g(dx))$ il che non può essere essendo $-\mathrm{st}(g(dx))$ un reale positivo.

□

Si tratta di una dimostrazione **non** rigorosa, che come vedremo nasconde dei fatti importanti di cui l'insegnante che usa approcci non standard dovrebbe essere consapevole, ma l'esperienza didattica ci insegna che ogni tentativo di eccessiva rigorizzazione dell'Analisi a livello liceale — standard o non standard — è destinato al fallimento. Una volta maturata questa convinzione è chiaro che, soprattutto negli indirizzi liceali in cui lo spazio concesso alla matematica è poco, l'approccio non standard dovrebbe essere preso in seria considerazione. Il lettore interessato alla rigorizzazione della dimostrazione precedente è rinviato a [3] dove avrà modo di apprezzare soprattutto il ruolo giocato dal principio di transfer in questo contesto.

7.6 Conclusioni

Nelle trattazioni elementari dell'Analisi che siano fondate sull'intuizione l'analisi non standard appare uno strumento potente, che può essere proposto agli studenti gradualmente nel corso del triennio e che dunque merita tutta la nostra attenzione. Ciò anche da un punto di vista del recupero di un vasto insieme di risultati storicamente interessanti, che essendo fondati su procedimenti di calcolo con gli infinitesimi, di fatto restano quasi sempre esclusi dalla didattica dell'analisi standard.

Bibliografia

[1] G. De Marco, *Analisi Uno*, Edizioni Decibel, Padova, 1996.

[2] M. G. Katz, D. M. Schaps, S. Shnider, Almost equal: the method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond, Perspectives on Science 21 (3), arXiv 1210.7750.

[3] H. J. Keisler, Foundations of Infinitesimal Calculus, disponibile online.

[4] J.K. McDonough, Leibniz on natural teleology and the laws of optics. Philosophy and Phenomenological Research 78 (3): 505-544, 2009.

[5] V. M. Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society, 1990.

8

Sui teoremi del calcolo integrale

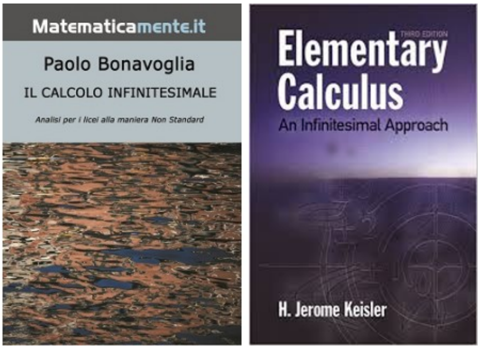
Lucia Rapella

Sviluppare il calcolo integrale a partire dal problema concreto dell'area di una figura a contorno curvilineo, approssimarla con la somma di rettangoli e poi utilizzare rettangoli con base infinitesima dx. Giungere in modo intuitivo ma rigoroso al concetto di integrale come somma di infiniti infinitesimi. Definire la funzione integrale e infine dimostrare con pochi semplici passaggi il teorema fondamentale dell'analisi.

8.1 Introduzione

Questo è il terzo anno che seguo l'approccio non standard per l'analisi. Ne sono venuta a conoscenza attraverso il testo di Paolo Bonavoglia, distribuito da matematicamente.it: dopo una lettura e un anno di meditazioni ho contattato Paolo per chiedergli se potevo adattare il suo testo, pensato per un liceo, a studenti dell'istituto tecnico. La licenza del testo infatti necessitava di un'autorizzazione per la modifica, poichè vi viene prevista l'opzione 'Non opere derivate'; ho fatto tali modifiche ad uso esclusivo dei miei studenti e, a seguito dell'approvazione successiva di Paolo, ho reso visibile le dispense. Negli istituti tecnici analisi si inizia in quarta e per tale classe non ho modificato un gran che dell'impianto teorico. Ho aggiunto molti esercizi, per evitare di far acquistare un eserciziario ai miei studenti. Questo è il primo anno scolastico in cui le dispense sono ufficialmente il libro di testo per la classe quarta. In quinta si prosegue con l'analisi e il calcolo integrale è uno degli argomenti più impegnativi. Non mi è mai piaciuto l'approccio utilizzato per il calcolo integrale che ho visto in molti testi: partono dall'integrale indefinito e poi come appendice, molto velocemente, accennano alle applicazioni del calcolo integrale. Mi piace partire dal problema: il calcolo delle aree e poi risalire all'integrazione, scoprendo alla fine del discorso teorico col teorema di Torricelli Barrow che si deve fare l'operazione inversa della derivata. Il bello del calcolo integrale nei tecnici è che si presta a numerose applicazioni utili, anche nel campo delle discipline tecniche. Per esempio ai geometri, dove insegno, gli integrali servono a ricavare in scienze delle costruzioni i diagrammi di taglio e momento.

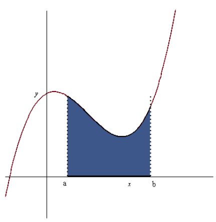
Mi sono resa conto che, sugli integrali, ci volevano molte più informazioni di quelle presenti nel nel testo di Bonavoglia, pensato per i licei. Ho trovato un buon approccio consultando il Keisler, testo che si potrebbe benissimo utilizzare alle superiori in numerose sue parti, se gli studenti non avessero così paura di leggere un manuale in inglese.

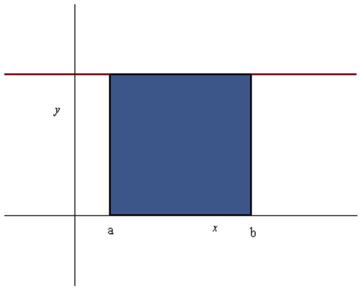


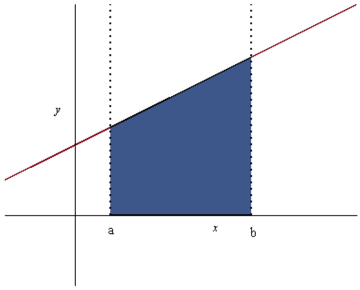
Per stendere questa relazione ho utilizzato anche un altro testo di Keisler: 'Foundations of infinitesimal calculus', consigliatomi dagli organizzatori di questa giornata. A tal proposito ringrazio il gruppo organizzatore di questo convegno che mi ha supportato e consigliato nell'elaborazione dell'intervento. Mi sono dunque messa a costruire una dispensa secondo quello che mi sembrava un percorso adatto ai miei studenti. La dispensa è a disposizione di tutti, sia in formato web che scaricabile in pdf, all'indirizzo https://sites.google.com/site/profrapella/home/analisi-infinitesimale/calcolo-in tegrale Queste pagine sono in continua evoluzione, anche grazie al contributo di queste giornate in cui preparando l'intervento ho dovuto chiarire concetti, innanzitutto a me stessa.

8.2 L'integrale

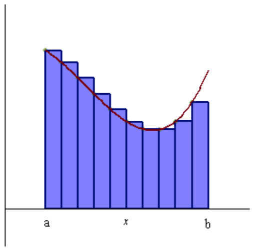
Parto dal problema del calcolo dell'area della regione di piano sotto una funzione positiva e continua in un intervallo [a,b], facendo notare agli studenti che non si tratta di un'area calcolabile mediante una formula come quelle imparate alle scuole elementari. Solo nei casi più semplici si può ricorrere a queste formule: funzione costante o lineare. Si devono rispettivamente calcolare le aree di un rettangolo e di un trapezio.







Partiamo proprio dal rettangolo per sviluppare la teoria: suddividiamo l'intervallo in n parti e calcoliamo l'area degli n rettangoli che hanno come base $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e come altezza uno dei valori che la funzione assume nell'intervallo di pertinenza. Nel disegno si considera il valore che la funzione assume nell'estremo sinistro degli intervalli, ma il discorso non cambierebbe se si prendesse l'estremo destro, il punto medio, il massimo, il minimo oppure ancora un punto random.



(Con questa introduzione sarà immediato, per chi volesse affrontare l'argomento, introdurre i metodi approssimati per il calcolo di aree dell'analisi numerica.) Dunque l'area del plurirettangolo si esprime come

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + ... + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

Si può considerare l'area del plurirettangolo come un'approssimazione dell'area sottesa alla curva. Poiché gli intervalli Δx_i hanno tutti la stessa lunghezza Δx, possiamo trasformare la formula precedente e usare il simbolo di sommatoria per una scrittura più compatta:

$$(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

In questa formula la lunghezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del sotto intervallo è un sottomultiplo dell'intervallo [a,b]. Per evitare questo vincolo, conviene costruire i sotto intervalli in un altro modo, a partire da un'ampiezza Δx prefissata sufficientemente piccola, che consenta di fissare i punti x_i, estremi dei sotto intervalli:

$$[a, x_1 = a + \Delta x], [x_1, x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x], ..., [x_{n-1}, x_n = a + n\Delta x], [x_n, b]$$

(dove l'ultimo sotto intervallo è più piccolo dei precedenti). Possiamo dunque ridefinire la somma precedente in modo ancora più sintetico

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(b - x_n)$$

il che indica che la somma, una volta fissati a, b e f, dipende solo da Δx. Chiamiamo questa somma:

$$S(\Delta x) = \sum_a^b f(x)\Delta x$$

e le attribuiamo il significato di area approssimata della regione piana sottesa al grafico di f nell'intervallo $[a, b]$.

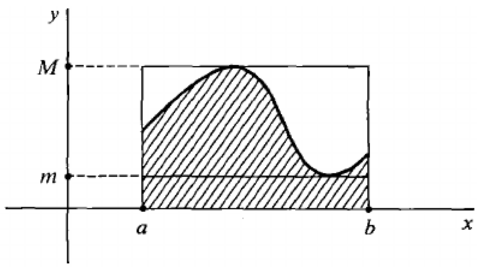
Con una suddivisione più fine dell'intervallo $[a, b]$, quindi con intervalli di lunghezza Δx minore, sembra plausibile pensare che il risultato del calcolo di $S(\Delta x)$ sia più vicino al valore esatto dell'area cercata. Pertanto sembra naturale passare a **intervalli infinitesimi di lunghezza dx** e quindi considerare sommatorie infinite:

$$S^*(dx) = \sum_a^b f(x)dx$$

$S^*(dx)$ è un numero iperreale. Se aggiungiamo l'ipotesi che $f(x)$ sia continua, in $[a, b]$, $S^*(dx)$ è un iperreale finito. Infatti:

$$m \leq f(x) \leq M$$

dove m e M sono minimo assoluto e Massimo assoluto (di f in $[a, b]$), che esistono sempre per una funzione continua in un intervallo chiuso. Dunque vale:



$$m(b - a) \leq \sum_a^b f(x)\Delta x \leq M(b - a)$$

Passando agli iperreali e sfruttando il principio di di trasferimento, anche $\sum_a^b f(x)dx$ è finito e possiamo calcolare la sua parte standard. Dunque definiamo:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x)dx\right)$$

Chiamo il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ **integrale definito di** f **su** $[a, b]$ e questa è l'area che cerchiamo.

8.3 Le proprietà e i teoremi

Ora che è stato messo a fuoco agli studenti il significato dell'integrale, si procede per lavorare da un punto di vista un po' più operativo. Presento le proprietà.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
$$\int_a^b g(x)dx \quad \textbf{con} \quad f(x) = -g(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Solitamente in classe mi limito a una giustificazione tramite l'osservazione di un grafico e vorrei evitare di puntualizzare anche adesso questa parte. Preferirei concludere il discorso con il teorema fondamentale.

Introduco dunque la funzione integrale, definendola come

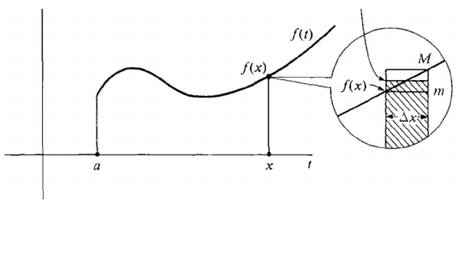
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Anche in questo caso elenco brevemente le proprietà:
$F(x)$ è continua
$F(a) = 0$
$F(b) = \int_a^b f(t)dt$

Scrivendo che $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ho una formula valida per un qualsiasi altro punto c usato per definire la funzione integrale , cioè: $F(x) = \int_c^x f(t)dt$.

Dimostrare la continuità di $F(x)$ ci introdurrà agevolmente anche alla dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow. Calcoliamo dunque due valori di $F(x)$ per x infinitamente vicine:

$$F(x+dx) - F(x) = \int_a^{x+dx} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt$$



Per le proprietà appena esposte possiamo scrivere

$$\int_a^{x+dx} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

L'espressione rappresenta l'area infinitesima della strisciolina avente base dx.

Vale la relazione:

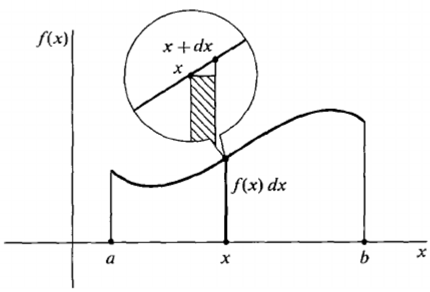
$$m \cdot dx \leq \int_x^{x+dx} f(t)dt \leq M \cdot dx$$

dove m e M sono minimo e Massimo nell'intervallo dx. Ma nell'intervallo dx m, M e $f(x)$ sono indistinguibili, pertanto possiamo scrivere che

$$F(x+dx) - F(x) \approx f(x)dx$$

cioè $F(x+dx)$ e $F(x)$ sono valori infinitamente vicini e dunque $F(x)$ è continua. Questa relazione permette di dimostrare il teorema di Torricelli Barrow. Infatti dividendo per dx si deduce che la derivata di $F(x)$ è la funzione di partenza $f(x)$.

Rivediamo ora il teorema di Torricelli Barrow attraverso il calcolo della derivata col procedimento di Leibniz.



$$\begin{aligned} y &= F(x) \\ y + dy &= F(x+dx) \\ F(x) + dy &= F(x+dx) \\ dy &= F(x+dx) - F(x) \end{aligned}$$

ma, osservando il disegno, è evidente che vale $F(x+dx) - F(x) \approx f(x) \cdot dx$ e quindi segue che:

$$dy = f(x) \cdot dx$$

A questo punto lo studente sa che deve affrontare il problema di fare l'operazione inversa della derivata e tramite il teorema fondamentale può calcolare l'area. Dunque procedo con le varie tecniche di integrazione e contestualmente utilizzo tali risultati per il calcolo di aree.

Mi resta anche parecchio tempo per le altre applicazioni come i volumi, la lunghezza di una curva e qualche applicazione legata alle discipline di indirizzo.

9

Materiali didattici per l'insegnamento dell'Analisi Non Standard

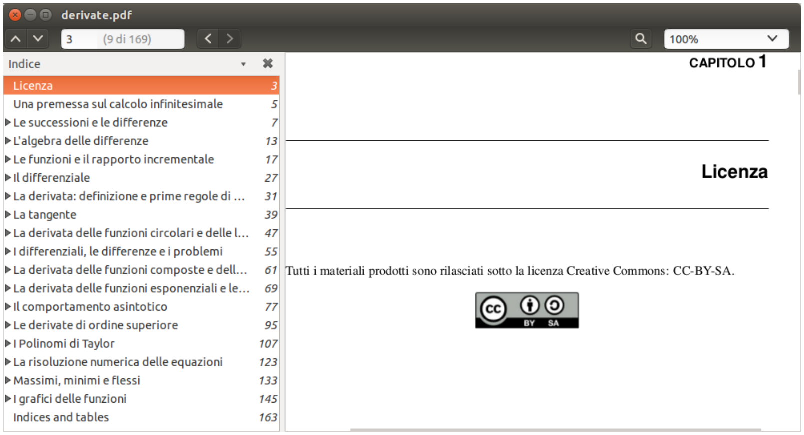
Bruno Stecca, Daniele Zambelli

Gli insegnanti alfabetizzati che si propongono di inserire la NSA nel curricolo hanno due immediate esigenze: trovare occasioni di riflessione, di studio e di approfondimento in itinere trovare un testo che accompagni i loro sforzi. La presentazione che segue vuole contribuire a realizzare questi due obiettivi. L'opera che presentiamo è un manuale in costruzione. Propone un curricolo completo di analisi, ad un buon livello di approfondimento teorico. Si basa direttamente sui libri del prof.Apotema (Giorgio Goldoni), sui suoi numerosi anni di esperienza didattica che lo portano a fare un ampio uso dell'intuizione costruendo a partire da questa gli strumenti concettuali e di calcolo. Il testo può essere usato com'è, ma ha soprattutto l'intento di sviluppare la collaborazione fra i docenti impegnati (anche con gli alunni), che possono proporre revisioni, aggiunte, modifiche e utilizzarle liberamente o condividerle, nei termini previsti dalla licenza CC-BY-SA. È un testo non completo, manca (ancora) della parte relativa agli integrali e manca di un corpus adeguato di esercizi; è consultabile in rete e scaricabile nei formati pdf, epub e html all'indirizzo nsa.readthedocs.org; il sorgente (scritto in Sphinx) è scaricabile dal sito bitbucket.org/zambu/nsa.

9.1 Presentazione

L'immagine seguente riporta l'indice del file Derivate.pdf, secondo volume dell'opera sul calcolo differenziale. Il primo volume, Iperreali, fu già presentato un anno fa, alla 4a Giornata Nazionale di Analisi Non standard, a Vicenza. I due volumi sono navigabili all'indirizzo nsa.readthedocs.org, sito dal quale si possono liberamente scaricare, in vari formati.

Il libro, come il precedente, è una riedizione, in forma di manuale, dell'opera di Giorgio Goldoni su questi temi, per sua gentile e generosa concessione. Ne



scorreremo brevemente il contenuto, allo scopo di mostrare che copre una parte del tutto "standard" del programma di analisi di scuola superiore che i contenuti vengono costruiti gradualmente, facendo ricorso il più possibile all'intuizione, a partire dalle basi elementari fino alla definizione dei contenuti esatti e non banali, passando il più possibile attraverso costruzioni grafiche e ragionamenti non difficili. Il prerequisito specifico per la comprensione è la familiarità con i numeri iperreali, i calcoli con gli infiniti e gli infinitesimi.

Nel cercare di dare un'idea di come i contenuti vengono proposti, percorriamo una pista le cui tracce sono disseminate lungo un centinaio di pagine, nei capitoli 3, 5, 6, 7, 8, 15, fra ragionamenti, definizioni, teoremi, esempi, regole di calcolo, esercizi svolti e proposte di esercizi (...che in buona parte attendono di essere scritte). Le illustrazioni e le formule che seguono sono quelle contenute nel libro.

9.2 La derivata standard e il suo significato geometrico

Prendete in esame il percorso standard che porta a definire la derivata (consideriamo $f(x)$ derivabile in a, poniamo $\Delta x = x - a$):

1. $r_a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ definisce il rapporto incrementale in a e anche il coefficiente angolare della secante di equazione $y = r_a(\Delta x) + f(a)$;

2. $\lim_{\Delta x \to 0} r_a = f'(a)$ definisce la derivata in a. Riducendo a zero Δx, la secante diventa la tangente, di equazione $y = f'(a)\Delta x + f(a)$;

3. Le notazioni per la derivata sono varie: $f'(x)$, y', $Df(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\dot{y}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Da notare l'ultima: serve a convincere che la derivata non è un rapporto, ma un operatore.

9.3 La derivata non standard nel percorso del prof.Apotema

Si procede con maggiore gradualità, e i dettagli che si incontrano sono significativi. Con l'obbiettivo di imparare a gestire il rapporto fra differenze infinitesime, il primo passo è di esaminare le regole sulle differenze finite.

a. Le differenze

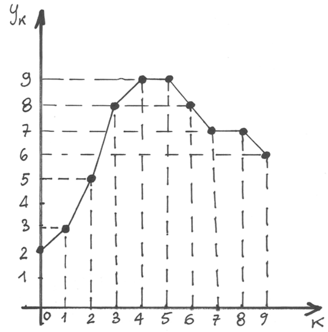
Data una successione, costruita elencandone i valori, le sue differenze si calcolano in modo elementare, fra le coppie dei suoi termini consecutivi

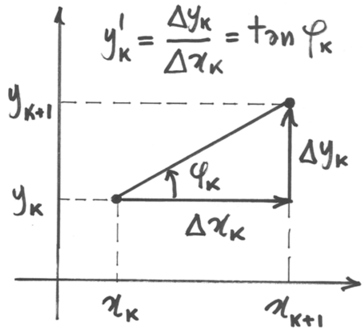
Per le successioni i cui termini sono il risultato di una funzione (per esempio: $y_k = 2k + 1$), le differenze si possono anche calcolare manipolando l'espressione della successione con semplici passaggi. Fra queste, sono notevoli le formule delle differenze legate alle progressioni geometriche, sulle quali il testo si sofferma in dettaglio.

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_K	2	3	5	8	9	9	8	7	7	6
Δy_K	1	2	3	1	0	-1	-1	0	-1	

Anche nelle funzioni a dominio discreto $y_k = f(x_k)$, definite per punti, le differenze sono numeri finiti. $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ è la differenza fra due successivi valori della funzione. Anche in questo caso, con semplici passaggi algebrici, si costruisce la formula che esprime la differenza in una funzione a dominio discreto. Infine le differenze hanno un'algebra: è facile definire attraverso formule come si calcola la somma (o il prodotto) fra differenze e il loro prodotto per una costante.

Il grafico di una successione, disegnato per punti, visualizza i diversi incrementi che la funzione subisce, attraverso le pendenze che uniscono coppie di punti successivi. Il testo specifica che i segmenti non appartengono al grafico della funzione: si disegnano per rendere evidente il crescere più o meno brusco dei suoi valori.





b. Il rapporto fra le differenze

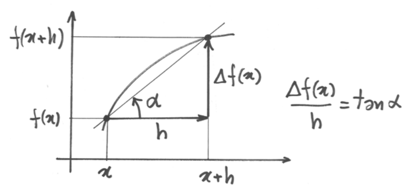
$r_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = y'_k$ è il rapporto incrementale . Esprime il tasso medio di variazione della funzione fra i punti (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}). Graficamente y' corrisponde al coefficiente angolare del segmento che unisce i due punti. Per calcolare il rapporto incrementale basta usare le regole per le differenze, definite in precedenza.

c. Le funzioni a dominio continuo

Per queste funzioni, le differenze si esprimono con: $\Delta f(x)$.

Per esempio, per la funzione identica $f(x) = x$ si ha, rispetto a $x = a$:

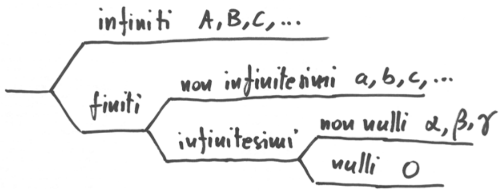
$\Delta f(x) = x - a = \Delta x$ e la notazione indica una differenza finita. Anche per queste funzioni si definisce il rapporto incrementale y', che ha la stessa espressione e lo stesso significato geometrico rispetto all'analisi standard.



d. Le funzioni continue

Nelle funzioni continue, le differenze possono essere finite oppure infinitesime: $\Delta f(x), \Delta x$ sono numeri di tipo diverso rispetto a $df(x), dx$. Questi ultimi sono numeri iperreali. I tipi di iperreali sono elencati nello schema ad albero.

/	inn	fni	I
inn	?	inn	inn
fni	I	fni	inn
I	I	I	?



e. Il rapporto differenziale

È il rapporto fra le differenze infinitesime. Dato che f è continua, df è infinitesimo. $f(x+dx)$ e $f(x)$ appartengono alla stessa monade, cioè sono numeri infinitamente vicini, e lo sono anche $x+dx$ e x. Il rapporto fra infinitesimi $\frac{df(x)}{dx}$ è un numero iperreale, il cui tipo non è a priori determinabile. Infatti, come si vede nella tabella precedente, il rapporto fra due numeri infinitesimi non nulli è una forma indeterminata. Si tratta di un vero rapporto, di una divisione: esprime quante volte dx è contenuto in $df(x)$, cioè esprime l'idea di voler misurare $df(x)$ in unità dx. Per calcolare il rapporto differenziale di una funzione si possono applicare le regole sulle differenze già apprese, tenendo conto però che le differenze sono ora espresse in infinitesimi.

f. Il rapporto differenziale e la derivata

Se il rapporto differenziale è finito e indipendente da dx, si ottiene $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)+\varepsilon$, che corrisponde all'espressione di un generico iperreale finito $a+\varepsilon$. Quindi, a rigore, vale $\frac{df(x)}{dx} \approx f'(x)$ e non $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$. L'uso del segno $=$ è solo una comoda approssimazione, che va sottolineata alla classe. In sostanza, la derivata non è il rapporto differenziale, ma la sua parte standard: $f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$. La derivata è quindi un numero reale.

Il manuale contiene in dettaglio il calcolo delle derivate fondamentali attraverso il rapporto differenziale delle funzioni e dimostra tutte le regole di derivazione che si trovano nei manuali classici. Quindi lo svolgimento degli esercizi che si trovano nei manuali tradizionali non comporta alcuna difficoltà per chi studia sul nostro libro. In questi esercizi lo studente applica la derivata come se coincidesse con il rapporto differenziale, in pratica trascurando la parte infinitesima.

9.4 Tener conto della parte infinitesima

Esaminiamo questa parte residua più in dettaglio. Dall'espressione del rapporto differenziale si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} df(x) &= f'(x)dx + \varepsilon dx \\ f(x+dx) - f(x) &= f'(x)dx + \varepsilon dx \\ f(x+dx) &= f(x) + f'(x)dx + \varepsilon dx. \end{aligned}$$

Come si è detto, l'ultimo termine abitualmente si trascura perché infinitesimo di ordine superiore: infatti è il prodotto di due infinitesimi. Per esempio nella monade di a (= tutti i numeri a distanza infinitesima da a, che pensiamo per semplicità positivo) avremo:

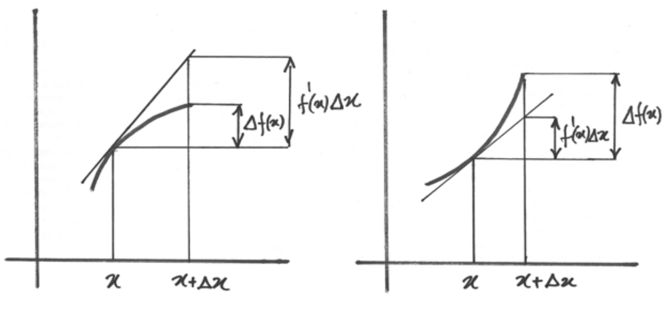
$$(*) f(a + x - a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon \cdot (x - a)$$

che potremmo riscrivere $y \approx y_a + f'(a)(x-a)$, tornando così ad approssimare la tangente in a, con un'equazione che in realtà rappresenta, approssimata, la secante per due punti infinitamente vicini.

Riprendiamo l'espressione del differenziale (*) che è esatta, nel senso che è correttamente approssimata, e confrontiamo le scritture:

Standard	Non Standard
$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$	$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon \cdot (x - a)$

L'ultimo termine, infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x - a)$, è la differenza (infinitesima) fra l'espressione del differenziale NSA e quella del differenziale SA. È una differenza infinitesima, ma visto che si ragiona di infinitesimi, non è una differenza trascurabile. Si visualizza con microscopi non standard. Se riportata alle differenze finite, la diversità di significato delle due espressioni appare esaltata, come si vede nella prossima figura.



L'equazione Standard precedente esprime l'incremento lungo la tangente per $x = a$, che invece in analisi classica viene definito differenziale della funzione. Su questa incomprensibile definizione, che per ragioni storiche ha deformato l'idea corretta di differenziale come differenza infinitesimale dei valori della funzione, trasformandolo in differenza dei valori di una sua tangente, si veda (2).

Cosa si guadagna a tener conto di $\varepsilon \cdot (x-a)$?

Anche per il seguito, conviene mettere in evidenza la dipendenza di ε da x: $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e cerchiamo di capire quanto vale.

Riscriviamo: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)+\varepsilon(x)$ è il rapporto differenziale nella monade di a. Il rapporto fra questi infinitesimi esprime un'idea: valutare la differenza fra due valori infinitamente vicini di f in una scala di misure infinitesime, di unità $(x-a)$. Cioè: quante volte $(x-a)$ è contenuto in $f(x)-f(a)$? La risposta corretta è $f'(a)+\varepsilon(x)$.

Fra esercizi, esempi, regole e teoremi, il lettore del manuale a questo punto si trova a pagina 56. Per esaminare gli ulteriori sviluppi del discorso che abbiamo iniziato, facciamo un salto di circa 70 pagine. Cerchiamo di definire con maggiore precisione $\varepsilon(x)$, cioè cerchiamo di darne una misura, con lo stesso criterio usato a proposito del rapporto differenziale. Quanto vale $\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)}$?

$$\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}.$$

In quanto rapporto fra infinitesimi, si tratta di una forma indeterminata. La sciogliamo con l'aiuto della Regola di de L'Hôpital,

$$\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \sim \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} = \frac{df'(x)}{2dx} = \frac{f''(a)}{2}+\varepsilon_2(x).$$

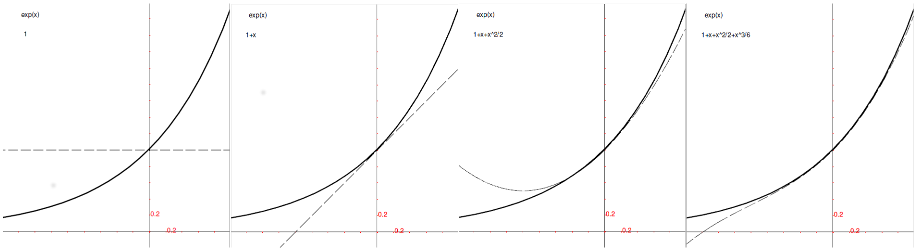
Ricostruendo, da (*) siamo arrivati a:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2(x-a)^2}+\varepsilon_2(x)(x-a)^2$$

Abbiamo quindi ottenuto un'espressione di $f(x)$ meglio approssimata: l'approssimazione di primo grado avveniva grazie all'espressione della tangente, ora abbiamo un'approssimazione di secondo grado, più fine, che si esprime grazie all'equazione di una di una parabola.

Poiché permane un infinitesimo (di ordine superiore al precedente), si può iterare il procedimento di misura. Potremmo cercare di valutare $\varepsilon_2(x)$ rispetto a $(x-a)$. Nell'espressione risultante resterà da valutare un $\varepsilon_3(x)$, e così via. Alla fine, arriveremmo a scrivere il Polinomio di Taylor di ordine n.

Nel manuale questi calcoli si svolgono effettivamente, in relazione a tante funzioni fondamentali. In più, a pag.118, una serie di grafici visualizza il procedimento. Fra questi riportiamo l'approssimazione grafica della funzione esponenziale.



9.5 Il grado di accuratezza

Quale è il contenuto formativo di fondo sotteso ai ragionamenti e alle attività legate al calcolo differenziale in NSA, che abbiamo cercato di rendere evidente in questo breve percorso? Secondo noi è legato al concetto di grado di accuratezza. Il calcolo con gli infinitesimi in NSA, per confronto, mette in luce l'imprecisione della maniera standard nel percorso della scuola superiore.

In questa breve carrellata, vorremmo suggerire l'idea di come in NSA, anche senza ostiche formalizzazioni, si possano rendere fertili alcuni concetti elementari, per arrivare ad una conoscenza dell'analisi di buon dettaglio e profondità.

9.6 Il progetto del libro

Abbiamo iniziato a scrivere questo manuale pensando ad una dispensa di rapida consultazione per la classe e l'insegnante. In effetti, la fonte dei materiali è così ricca e così profondamente strutturata da non consentire tagli sbrigativi e sintesi troppo rapide. Ben presto ci siamo trovati a gestire i contenuti di un vero libro, che accompagna nei dettagli un corso completo di analisi. La stesura del testo, con le sue varie difficoltà, i progressi e i ripensamenti, ci ha confermato un'idea che era già dichiarata fin dall'inizio: cimentarsi nella scrittura dei contenuti didattici è il miglior modo per approfondirne la conoscenza e migliorarne l'efficacia. Se non si è in grado di produrre una stesura originale, il primo passo, comunque utile, è modificare un percorso che si trova già tracciato. Modificare solo dettagli o interi passi, ma l'importante è intervenire in proprio, adattare il corso alle proprie esigenze, alla propria classe, alla propria visione. Nel fare questo, e nel confronto con chi condivide l'esperienza, si cresce insieme.

9.7 Come collaborare

Per questo l'accesso ai contenuti è libero: possono essere scaricati dal sito

http://nsa.readthedocs.org, pagina che contiene anche le indicazioni per accedere ai file modificabili (si trovano raccolti in un repository, su bitbucket). I file sono scritti in Sphinx, un linguaggio che rende la stesura di testi matematici più agevole di LaTex. Con Sphinx si può intervenire liberamente sui contenuti, che vengono poi compilati per ottenere, a scelta, un pdf, un html, un epub. Per l'accesso ai contenuti in modalità di modifica, scrivete a daniele.zambelli@gmail.com.

Il testo che vi abbiamo presentato prevede una licenza di utilizzo. Si può modificare in proprio e riutilizzare, o distribuire anche a pagamento, rispettando i termini della licenza.

La licenza è CC-BY-SA: permette di distribuire, modificare, creare opere derivate dall'originale, anche a scopi commerciali, a condizione che venga riconosciuta la paternità dell'opera all'autore e che alla nuova opera vengano attribuite le stesse licenze dell'originale (www.creativecommons.it/3.0).

Note

[1] G.Goldoni, Il professor Apotema insegna... Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale . Ilmiolibro.it

[2] G.Goldoni, Il differenziale alla Robinson in uno o più variabili, Atti della 4a Giornata di Analisi non Standard. Vicenza 2014. Matematicamente.it

10

Il piè veloce Achille e la ipertartaruga

Roberto Zanasi

Partendo dal paradosso di Zenone su Achille e la Tartaruga si trattano le serie numeriche e, attraverso alcune costruzioni geometriche che stimolano l'intuizione, si perviene al concetto di serie convergente. Si analizza il concetto di numero decimale illimitato periodico, si studiano le serie geometriche e la serie armonica, si trattano i criteri di convergenza per le serie, le serie a termini di segno alterno e la convergenza assoluta.

> Un mobile più lento non può essere raggiunto da uno più rapido; giacché quello che segue deve arrivare al punto che occupava quello che è seguito e dove questo non è più (quando il secondo arriva); in tal modo il primo conserva sempre un vantaggio sul secondo.
>
> Aristotele (secondo Wikipedia)

10.1 Il paradosso di Zenone

In questo intervento vorrei proporre un possibile approccio allo studio delle serie numeriche, per il quale la presentazione del paradosso di Zenone potrebbe essere un buon punto di partenza. Oltre a quello citato all'inizio di questo paragrafo — quello cosiddetto di Achille e la tartaruga, in cui si mostra come sia "impossibile" per Achille raggiungere, in una gara di corsa, una tartaruga alla quale è stato concesso un leggero vantaggio — è utile citare anche il cosiddetto paradosso della freccia, secondo il quale una freccia scagliata da un arciere non potrà mai raggiungere il bersaglio, perché per poter percorrere tutta la strada che la separa, appunto, dal bersaglio, essa dovrà percorrere prima di tutto almeno metà strada. Ma per percorrere quella metà, la freccia dovrà prima percorrerne la metà della metà, e ancora per poter percorrere quel tragitto, prima dovrà percorrerne ancora metà, e così via all'infinito. E dunque la freccia in realtà non si muove, e quello che noi percepiamo è solo un'illusione di movimento.

Si racconta che una prima obiezione al paradosso venne presentata da Diogene che, a un certo punto, si alzò in piedi, si mise a camminare, e infine si rimise a sedere, senza dire nulla.

Anche se l'evidenza è contraria alle affermazioni di Zenone, non è però evidente il motivo per cui il ragionamento presentato dal filosofo sia sbagliato. Eppure descrizioni simili a quella dei paradossi già enunciati possono essere realizzate anche con semplici immagini.

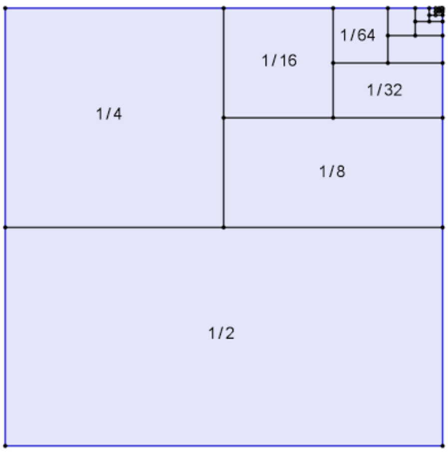


Figura 10.1: Una serie convergente

Ad esempio, il disegno in figura 10.1 mostra come, sommando infiniti rettangoli ognuno dei quali ha un'area uguale alla metà del precedente, si possa arrivare a riempire il quadrato grande. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Un altro esempio: in figura 10.2 un quadrato viene suddiviso in tre rettangoli, successivamente il rettangolo centrale viene suddiviso in tre quadrati, e poi il quadrato centrale viene suddiviso in altri tre rettangoli, e così via. Questa rappresentazione mostra che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = 1,$$

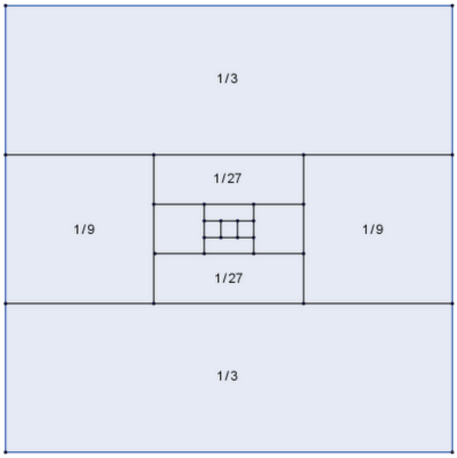


Figura 10.2: Un'altra serie convergente

e cioè che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Anche i numeri decimali periodici costituiscono un esempio di somma che si conclude dopo infiniti passi. Per esempio

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n}.$$

Dunque che cosa significa il paradosso di Zenone? Perché arriva a conclusioni così strane e lontane dal senso comune?

Il problema risiede nel fatto che la somma è una operazione binaria: si possono sommare soltanto due numeri alla volta. Per sommarne tre, devo sommare i primi due e, poi, sommare il terzo al risultato ottenuto. Se si pensa di poterne sommare infiniti, ci si accorge che servirebbe un tempo infinito per farlo.

Come è possibile, allora, dare un significato matematico alla descrizione data da Zenone del percorso della freccia, o della gara di corsa tra il piè veloce Achille e la tartaruga, che ci permetta di concludere che, sì, in effetti anche se la freccia deve percorrere infiniti segmenti, arriva a colpire il bersaglio in un tempo finito e calcolabile? E che, sì, Achille certamente arriverà a raggiungere e, finalmente, superare la tartaruga?

10.2 La definizione di serie numerica

È possibile impostare e analizzare il calcolo di una somma infinita di numeri reali utilizzando i numeri iperreali nel modo seguente: un passo alla volta.

Data una successione di numeri reali a_n, la successione s_n così definita:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ \dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

che, in forma compatta, può essere scritta come

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

è una somma finita, che viene detta *successione delle somme parziali*.

Se N è un ipernaturale infinito, allora

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$$

è l'estensione iperreale della formula precedente; studiare il carattere di una serie significa quindi studiare il comportamento asintotico della sua successione delle somme parziali s_n.

Possono verificarsi i seguenti casi:

- se la parte standard di s_N esiste e non dipende da N (ipernaturale infinito), la serie si dice *convergente* e $s = \mathrm{st}(s_N)$ viene detta *somma* della serie;
- se, comunque si scelga N (ipernaturale infinito), si ha che s_N è un infinito positivo, la serie si dice *divergente positivamente*;
- se, comunque si scelga N (ipernaturale infinito), si ha che s_N è un infinito negativo, la serie si dice *divergente negativamente*;
- in ogni altro caso la serie viene detta *oscillante*.

10.3 Esempi

Una serie convergente

Si consideri la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

La sua successione delle somme parziali è:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) \\
s_2 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
\dots \\
s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Si osserva che è possibile semplificare tutti i termini che compaiono nella somma, tranne il primo e l'ultimo; quindi risulta:

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Si può allora applicare il principio di trasferimento per passare a un indice N ipernaturale infinito, e concludere che

$$s_N = 1 - \frac{1}{N+1} \approx 1.$$

Dunque la serie converge, e la sua somma s è uguale a 1.

Una serie divergente

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n.$$

La sua successione delle somme parziali è data da:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + 2 \\
\dots \\
s_n &= 1 + 2 + \dots + n.
\end{aligned}$$

Applicando la formula che dà la somma dei primi n numeri naturali si ottiene

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Passando ora a indici infiniti si ha che

$$s_N = \frac{N(N+1)}{2}$$

è un infinito per ogni N ipernaturale infinito, e dunque la serie diverge (positivamente).

Una serie oscillante

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.$$

La sua successione delle somme parziali è

$$\begin{aligned}
&s_0 = 1\\
&s_1 = 1-1 = 0\\
&s_2 = 1-1+1 = 1\\
&\dots\\
&s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi, passando a indici infiniti, si ha

$$s_N = \begin{cases} 1 & N \text{ ipernaturale pari} \\ 0 & N \text{ ipernaturale dispari} \end{cases}$$

La parte standard di s_N esiste, ma dipende da N: la serie è oscillante.

10.4 Condizione necessaria di convergenza

Svolgendo i calcoli relativi agli esempi presentati precedentemente si è notato che il termine generale della successione s_n può essere espresso come $s_n = s_{n-1} + a_n$, da cui si ottiene che $a_n = s_n - s_{n-1}$. Passando a indici infiniti, si ha la relazione

$$a_N = s_N - s_{N-1}.$$

Supponendo di essere in presenza di una serie convergente si avrà che $s_N \approx s$ per ogni N ipernaturale infinito, e quindi anche $s_{N-1} \approx s$. Ma allora

$$a_N = s_N - s_{N-1} \approx s - s = 0.$$

Si può quindi concludere che vale il seguente teorema, detto *condizione necessaria di convergenza*: se una serie converge allora il termine generale, con indice infinito, è infinitesimo.

Quando si deve risolvere un esercizio che richiede di trovare il carattere di una serie non si sa, naturalmente, se si è in presenza di una serie convergente: dunque la condizione necessaria di convergenza non potrà essere usata nella formulazione detta sopra. Si può però efficacemente utilizzare l'enunciato contronominale, che dice: se il termine generale di una serie, con indice infinito, non è infinitesimo, allora la serie non converge.

10.5 Serie a termini positivi

Una serie si dice *a termini positivi* se il suo termine generale è maggiore o uguale a zero per ogni valore di n.

Per questo tipo di serie è possibile enunciare alcuni criteri che permettono di studiarne il carattere. Dato che se $a_n \geq 0$ allora la successione delle somme parziali s_n è monotona non decrescente, una serie di questo tipo può essere solo convergente o divergente. Quindi la condizione necessaria di convergenza diventa, in effetti, un criterio per la divergenza: se il termine generale di una serie a termini positivi, con indice infinito, non è infinitesimo, allora la serie diverge.

Per esempio, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$ ha il termine generale che, per indici infiniti, è infinito, e quindi diverge.

Proprietà valide definitivamente

Si osservi che una serie può essere "spezzata" come indicato di seguito:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}_{\text{serie}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n}_{\text{finito}} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n}_{\text{serie}}.$$

Si ha quindi una prima somma finita, per gli indici che vanno da 0 a k, e poi una serie vera e propria, per gli indici che vanno da $k+1$ in poi. È facile osservare che il carattere della serie a primo membro e quello della serie a secondo membro devono essere uguali, perché la somma finita presente a destra dell'uguale non può influire su di essi. Si può quindi enunciare il seguente teorema: se si altera un numero finito di termini di una serie, si ottiene una serie avente lo stesso carattere della prima.

Dunque quando, nelle ipotesi di un qualunque teorema sulle serie, è richiesta una certa proprietà, si intende in realtà che quella proprietà sia valida *definitivamente*, cioè "da un certo punto in poi".

La serie geometrica

Si definisce serie geometrica una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

La sua successione delle somme parziali è

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1. \end{aligned}$$

Per trovarne il carattere, si deve studiare

$$s_N = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1},$$

con N ipernaturale infinito.

Se $q > 1$ si ha che s_N è sempre un infinito positivo, e quindi la serie diverge.

Se $q = 1$ si ha che $s_N = N + 1$, ancora un infinito positivo: la serie diverge anche in questo caso.

Se $-1 < q < 1$ si ha che $q^{N+1} \approx 0$, quindi la serie converge a $\dfrac{1}{1-q}$.

Se $q < -1$ si ha che q^{N+1} è un infinito, positivo se N dispari e negativo se N pari, quindi la serie oscilla.

Una applicazione della serie geometrica

Si vuole calcolare la frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico. Per esempio: quale frazione genera $0.333\ldots$?

$$
\begin{aligned}
0.333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \ldots \\
&= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \ldots\right) \\
&= \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Il periodo 9

Nello studio delle serie utilizzando i numeri iperreali mi sono imbattuto in un problema classico la cui risposta è nota a tutti, ma che può essere proficuamente analizzato anche da un punto di vista non standard[1]. Il problema è il seguente: quanto fa $0.999\ldots$?

Utilizzando il procedimento appena visto per il calcolo della frazione generatrice di un numero periodico si ha:

$$
0.999\cdots = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1,
$$

risultato, come dicevo, ben noto. A questo punto può capitare che qualche studente, ormai avvezzo ai calcoli con i numeri iperreali, domandi: "$0.999\ldots$ e 1 non differiscono per un infinitesimo?"

Una possibile risposta può essere la seguente: $0.999\ldots$ è un numero reale, non può differire per un infinitesimo da un altro numero reale. Se poi l'immaginario studente affermasse "allora sono due numeri reali diversi", l'insegnante potrebbe concludere con la domanda: "E cosa c'è in mezzo?".

È possibile dare una risposta più articolata, che permette anche di comprendere meglio la struttura dei numeri iperreali.

Sia $d(x, n)$ la funzione che restituisce l'n-esima cifra dopo la virgola del numero reale x. Per esempio, $d(1/3, 42) = 3$, o $d(5, 3) = 0$. A partire da questa funzione è possibile definirne l'estensione iperreale $d^*(x, n)$, con x iperreale e n ipernaturale: si ha quindi che $d(1/3, n) = 3$ per ogni n naturale o ipernaturale infinito.

[1]Gran parte di questo approfondimento deriva dalla lettura di A. H. Lightstone, *Infinitesimals*. Queen's University.

È quindi possibile scrivere un numero decimale illimitato periodico come $0.333\ldots$ in questo modo:

$$\frac{1}{3} = 0.\underbrace{333333\ldots}_{\text{posizioni finite}};\underbrace{\ldots 333333\ldots}_{\text{posizioni infinite}}.$$

Si faccia attenzione, comunque, a non confondere questo tipo di scrittura con la proprietà dei numeri iperreali finiti di essere composti da una parte standard e una parte infinitesima: per ogni $x \in \mathbb{R}^*$, finito, esistono un numero reale r e un infinitesimo ε tale che

$$x = r + \varepsilon.$$

Ma, nella seguente scrittura del numero x

$$x = a.\underbrace{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots}_{\text{non è la parte standard}};\ldots d_N d_{N+1}\ldots$$

la parte precedente il punto e virgola non è la parte standard. Vediamo in dettaglio il perché.

Se H è un ipernaturale infinito, si consideri ora, come esempio, il numero 10^{-H}, che è un infinitesimo e può essere scritto come

$$0.000\ldots;\ldots 00100\ldots,$$

in cui la cifra 1 occupa la posizione di indice H: ogni infinitesimo ammette una scrittura di questo tipo, ma non tutte le scritture di questo tipo sono infinitesimi. Anzi, non tutte sono numeri iperreali.

Per esempio:

$$0.000\ldots;\ldots 999\ldots$$

non è un numero iperreale. Infatti, se lo fosse, dovrebbe essere un infinitesimo. Ma se ad esso si somma 10^{-H} (con H ipernaturale infinito), si ottiene una catena di riporti che danno come risultato un numero finito, e questo è impossibile.

Non è solo un problema del periodo 9: anche la scrittura

$$0.000\ldots;\ldots 333\ldots$$

non rappresenta un numero iperreale: se lo si moltiplica per 3 si ottiene $0.000\ldots;\ldots 999\ldots$.

Quindi l'idea intuitiva che un numero iperreale finito, che in forma decimale si può scrivere come

$$a.d_1 d_2 d_3\ldots;\ldots d_H\ldots$$

possa essere spezzato in questo modo

$$a.d_1 d_2 d_3\ldots;\ldots 0\ldots + 0.000\ldots;\ldots d_H\ldots,$$

con $a.d_1d_2d_3\ldots;\ldots 0\ldots$ parte standard e $0.000\ldots;\ldots d_H\ldots$ un infinitesimo, è sbagliata.

Come si può rispondere allora, in maniera più precisa, alla domanda "ma allora $0.999\ldots$ e 1 distano o no di un infinitesimo?" — domanda che, in termini più pittoreschi, può diventare: "ma allora Achille raggiunge o no la tartaruga?"

La difficoltà che si ha nel dare la risposta dipende dalla confusione che si fa tra *procedimento* di calcolo e *risultato*. Cioè tra s_N e s.

Dunque, per concludere, si può dire questo: se H è un ipernaturale infinito, il numero

$$1-\frac{1}{10^H}=0.\underbrace{999\ldots;\ldots 999}_{H \text{ cifre}}000\ldots$$

è un numero non standard, minore di 1, infinitamente vicino a esso. Quindi

$$\sum_{n=1}^{H}\frac{9}{10^n}<1, \quad \text{per ogni } H.$$

Ma la sua parte standard

$$\mathrm{st}\left(\sum_{n=1}^{H}\frac{9}{10^n}\right)=1, \quad \text{per ogni } H.$$

E, infine,

$$0.999\ldots \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{st}\left(\sum_{n=1}^{H}\frac{9}{10^n}\right)=1.$$

Quindi, grazie ai numeri iperreali, è possibile tradurre in linguaggio matematico l'idea che il numero composto da un numero H infinito di cifre 9 dopo la virgola sia minore di 1 e infinitamente vicino a esso, ma questo numero *non* è il numero decimale periodico $0.999\ldots$. Quest'ultimo numero è invece un numero reale, ed è uguale a 1.