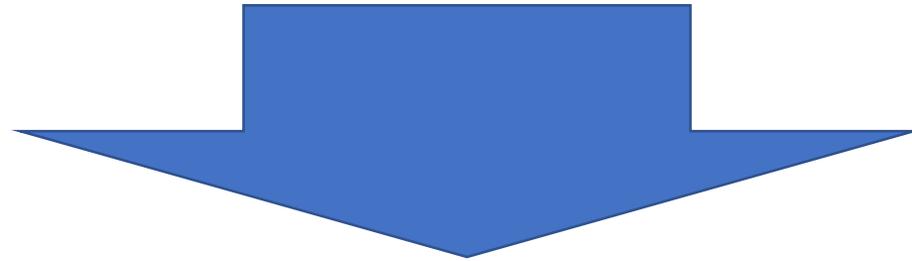


磁気リコネクション領域の 自動判定アルゴリズム 開発とその応用

千葉大学 宇宙物理研究室 学部4年
堀江真惟人
2018/03/20

動機

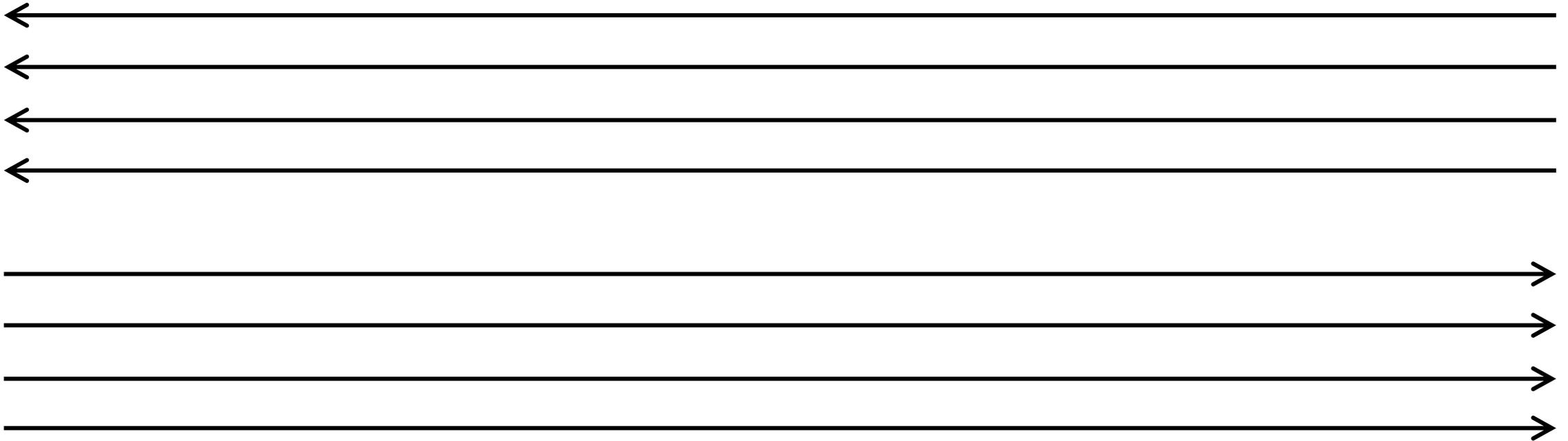
- 第3タームに飛騨天文台に行き、太陽観測の現場を見てきた。その際、データ解析ソフトを用いて、観測結果から温度や圧力など様々な情報を引き出していることに興味を持った。



- 太陽観測の場で使われるような解析ソフトを作りたい(目標)と思うようになった。

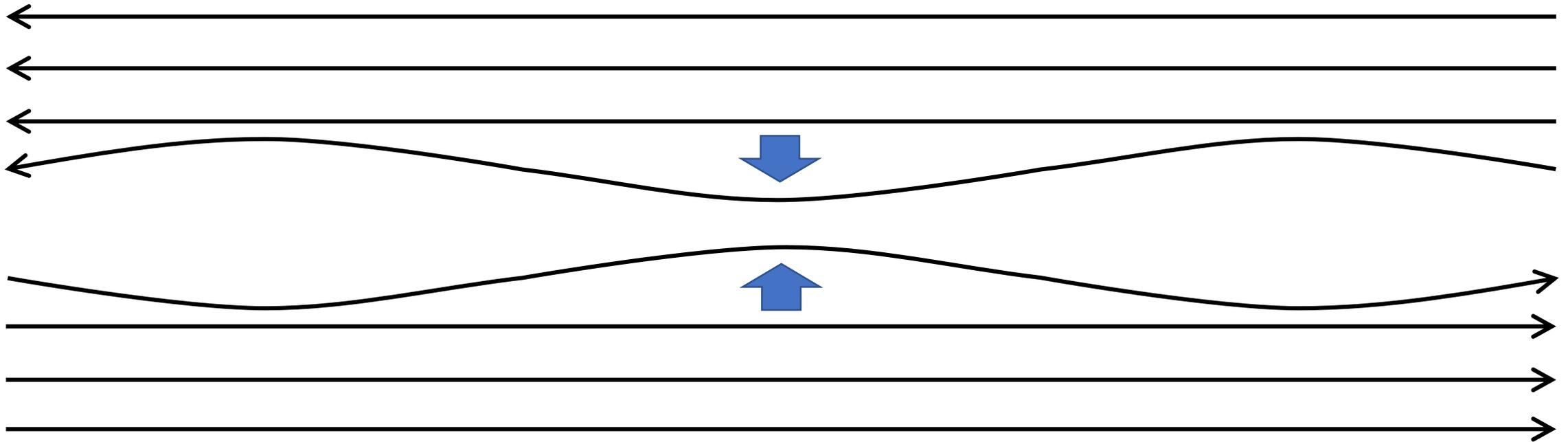
イントロダクション

磁気リコネクションと磁気島の発生



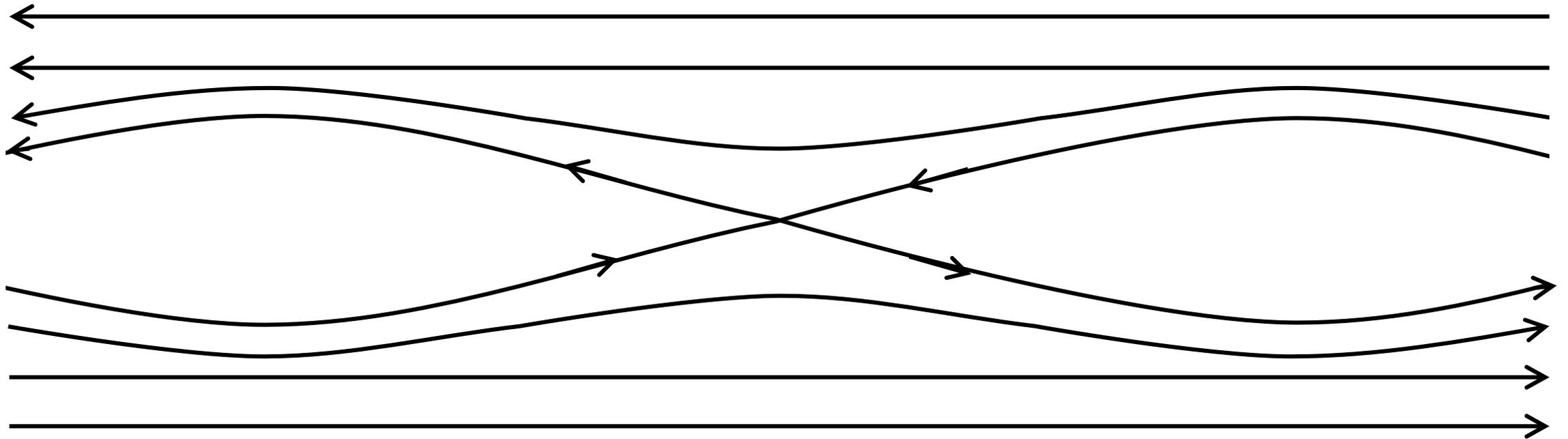
1. Shear磁場が存在する条件を考える。

磁気リコネクションと磁気島の発生



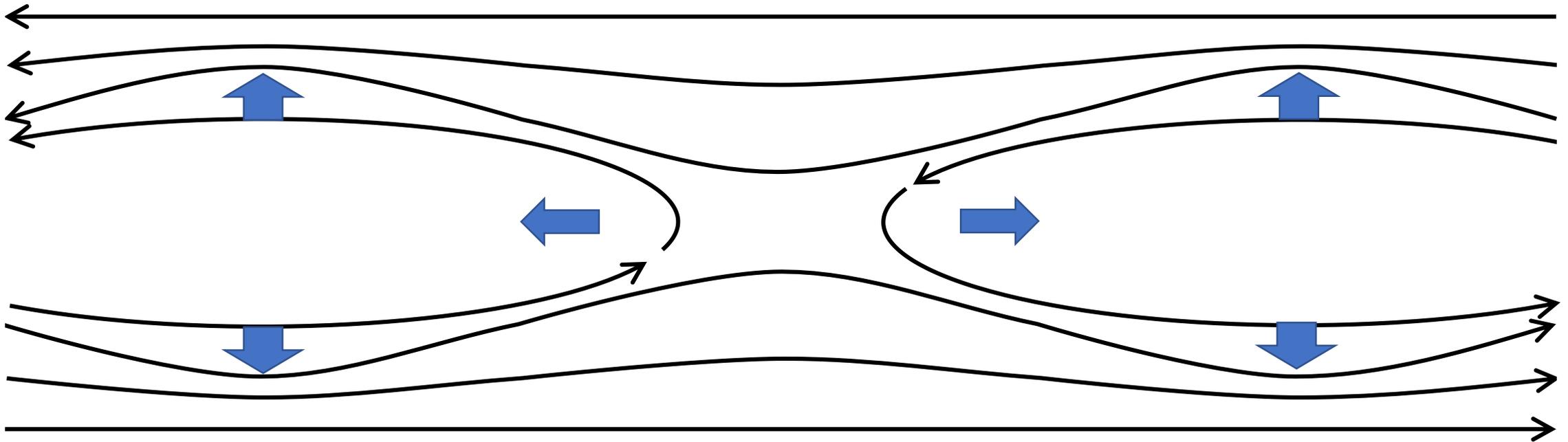
2. 何らかの原因によって、磁力線が乱れる。磁力線が近づくと、近づいた部分の電流が強くなり、抵抗が発生する。

磁気リコネクションと磁気島の発生



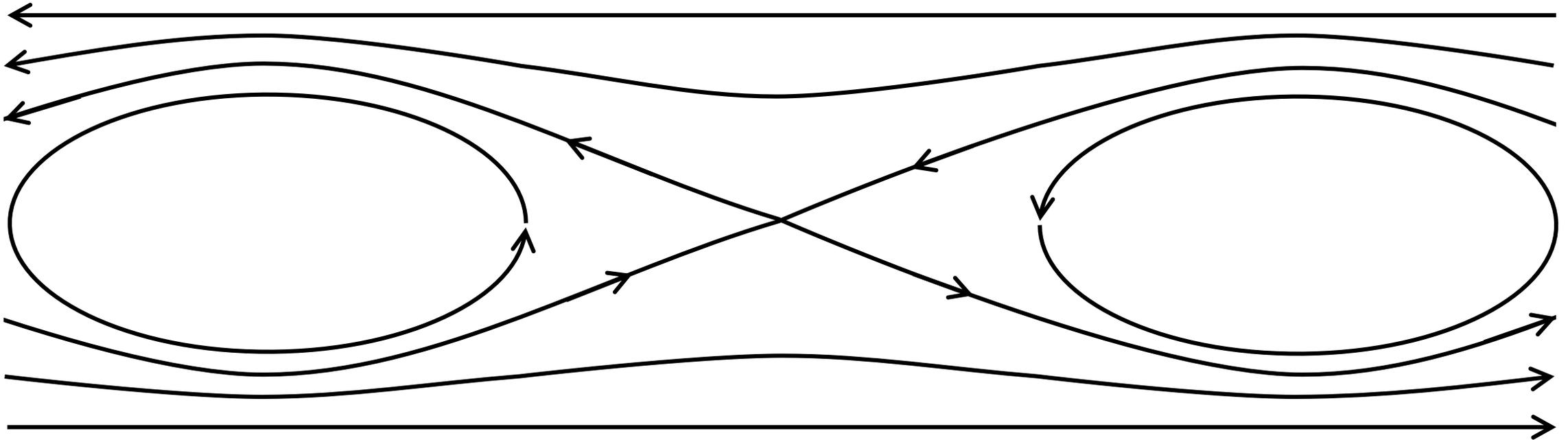
3. 乱れた磁力線がくっつき、磁気リコネクションが発生する。

磁気リコネクションと磁気島の発生



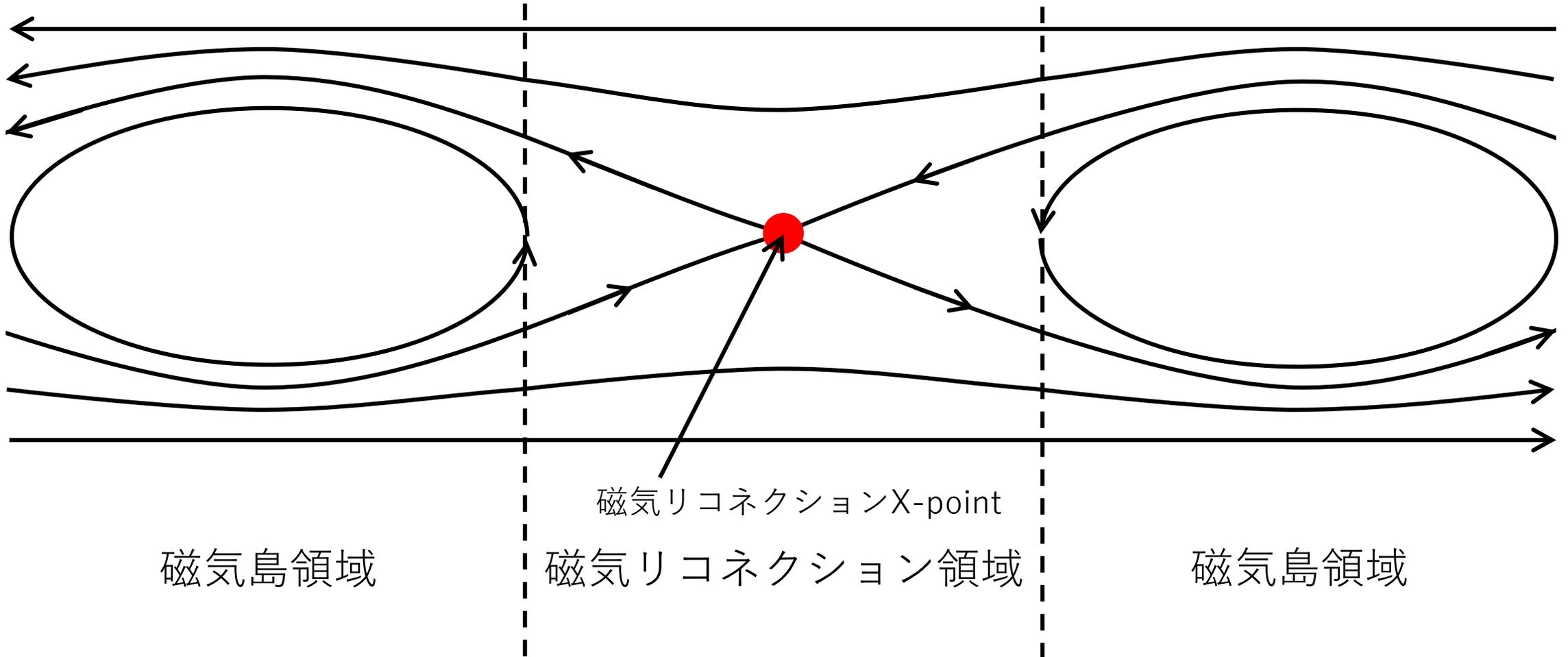
4. 磁気リコネクションによって、分断された磁力線は、磁力線がループする磁気島を形成する。磁気島は、表面張力の磁気張力によって、磁気リコネクション領域から追い出される。すると、磁気島の中心の圧力が高くなるので、磁気島の図の縦方向の幅も広くなる。

磁気リコネクションと磁気島の発生



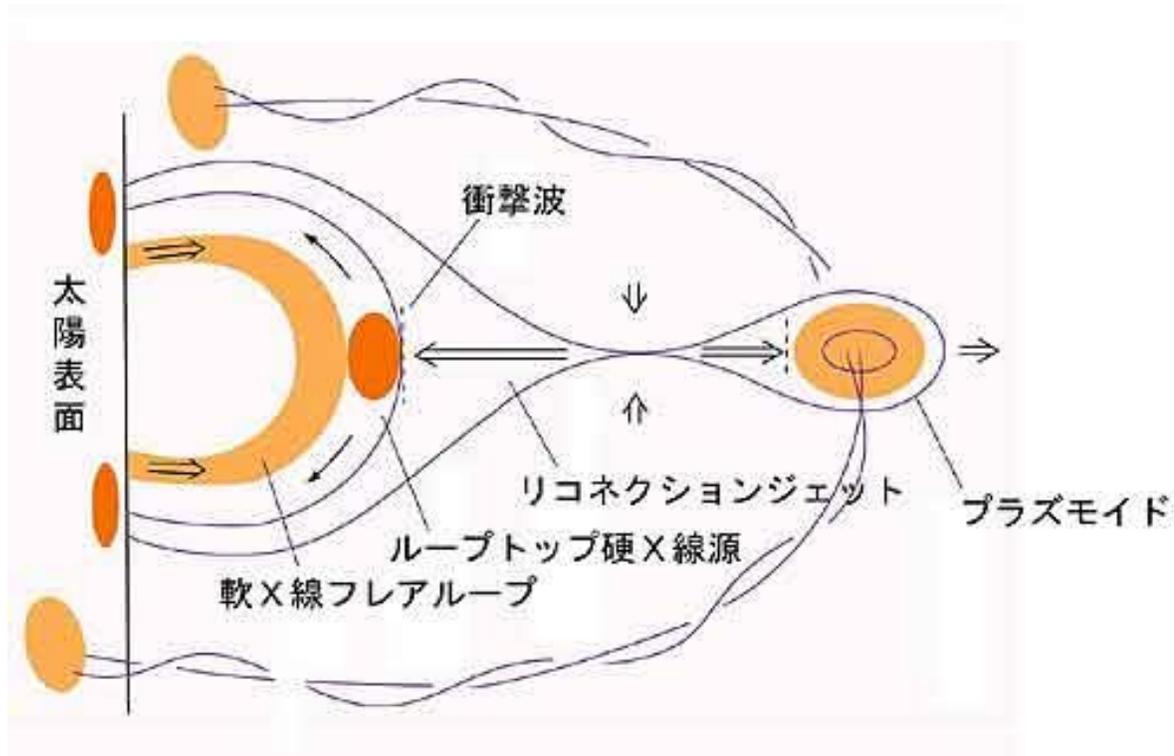
5. 磁力線同士の斥力によって、磁気島の磁力線が磁気リコネクション領域から追い出されると、あとに続く磁力線がそれに引き込まれるようにして、次から次へと磁気リコネクションが起こっていき、磁気島が成長していく。

磁気リコネクションと磁気島の発生



どうして、磁気リコネクションの同定が大切なのか？

太陽フレアの磁気リコネクションモデル



- Carmichael(1964);
- Sturrock(1966);
- Hirayama(1974);
- Kopp& Pneuman(1976)

- コロナの磁気エネルギー

磁気リコネクション

- プラズマの熱・運動エネルギー

寺澤 敏夫著「ISASニュースNo.262(2003年1月号)」より引用

PHOTO BY NASA/SDO/GSFC

研究目的

- 流体の渦の自動判定の技術を応用して、磁気リコネクションおよび磁気島領域の自動判定を行うアルゴリズムを開発する。
- シミュレーションデータを解析して、本手法の有用性を検証する。

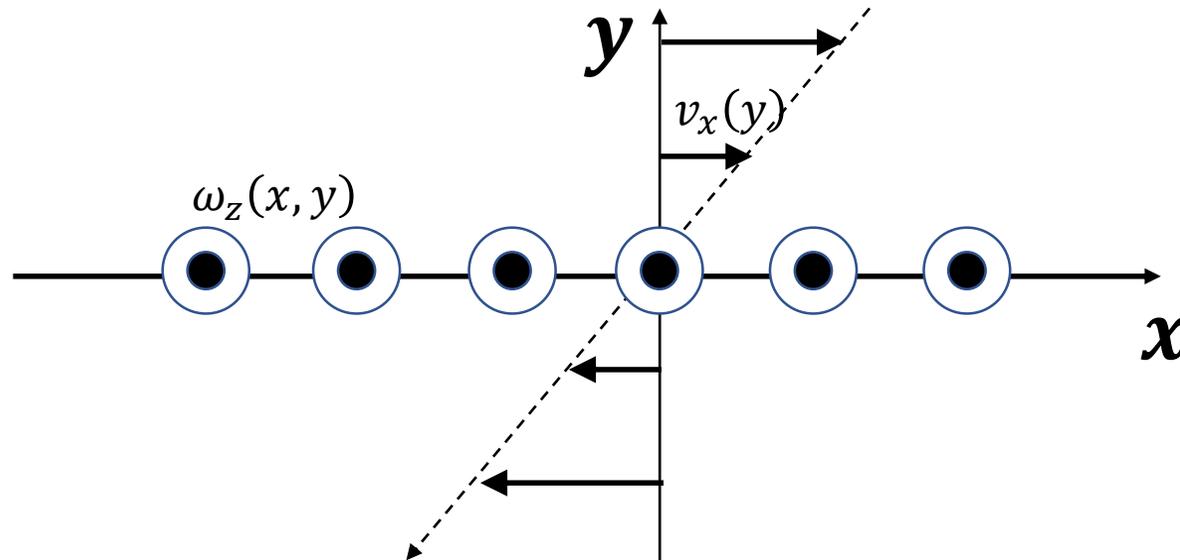
渦の自動判定1 (渦度を使った判定法)

- 渦度は、

$$\omega = \nabla \times v$$

で定義される。

- しかし、これには、shear流による渦度も含まれている。

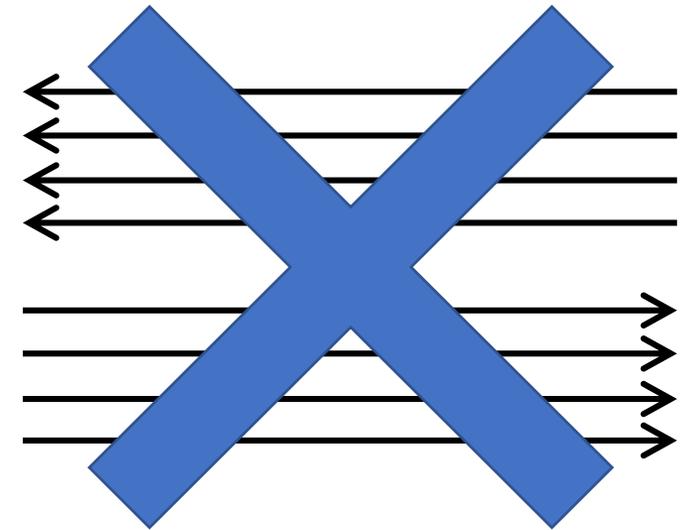
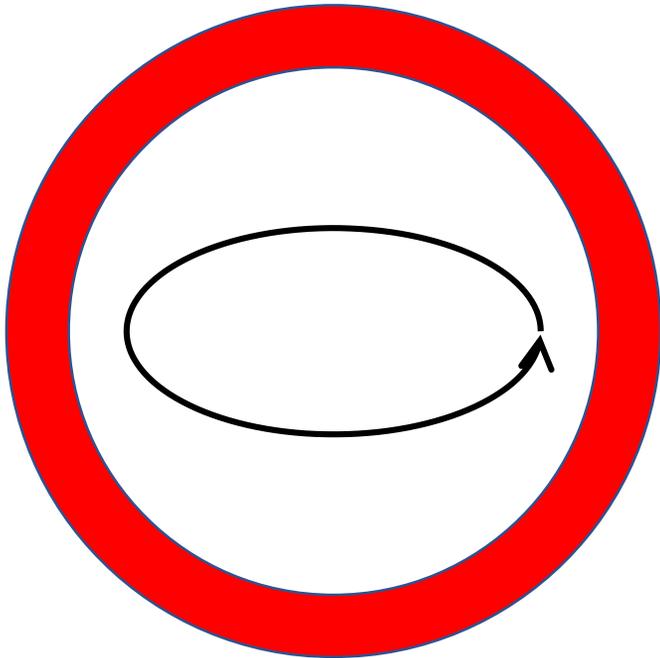


この場合、渦度は求まるが、渦が発生しているわけではない。

図1：shear流により発生する渦度

この研究で要求している渦の定義

- 渦は、ラグランジュ的に見て、流線に沿って速度ベクトル（または位置ベクトル）の2つの成分が正負に振動しないといけない。



渦の自動判定2 (Vorticity Strengthを使った判定法)

- shear流と純粋な渦を区別するために、ベクトル勾配テンソルの固有値から導出したVorticity Strengthを渦の判定条件とする方法が提案されている。(cf. Kato & S.Wedemeyer A&A 2017 and references therein)
- ここでベクトル勾配テンソルは、

$$\bar{V} = \{\bar{V}_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix}$$

で定義される。

2次元の場合

- 固有値を λ とすると、

$$\det[\bar{V} - \lambda I] = 0$$

$$\lambda^2 - (\text{tr}\bar{V})\lambda + \det\bar{V} = 0$$

- したがって固有値は、

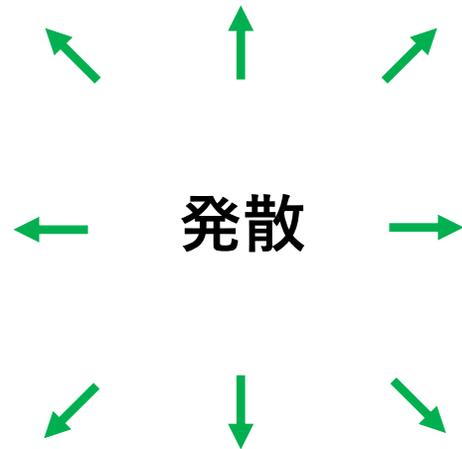
$$\lambda_{\pm} = \frac{(\text{tr}\bar{V}) \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$(D = (\text{tr}\bar{V})^2 - 4\det\bar{V})$$

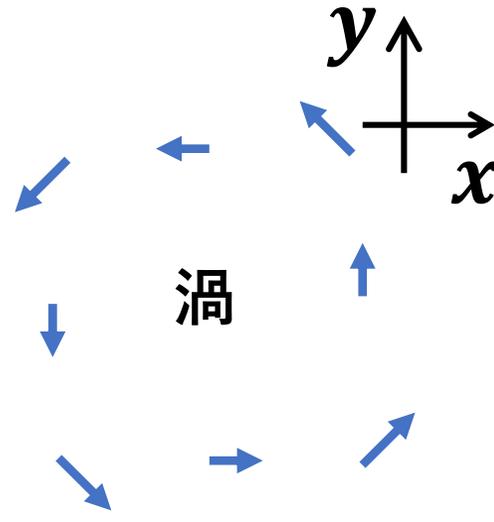
となる。

流体構造の分類

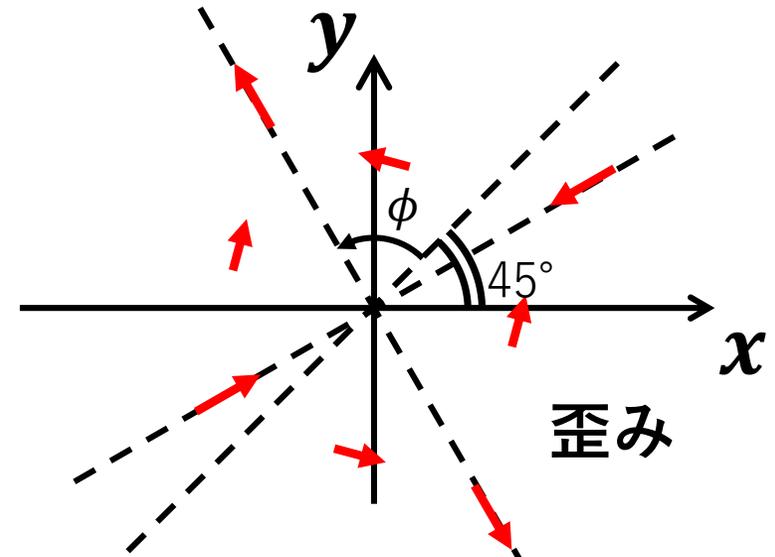
- ベクトル勾配テンソルから同定される流体の構造には、発散、渦、歪みがある。



$$\bar{v} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$



$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ q & 0 \end{pmatrix}$$



$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -s \sin 2\phi & s \cos 2\phi \\ s \cos 2\phi & s \sin 2\phi \end{pmatrix}$$

固有値がどのように表わせるか。

- これらのベクトル勾配テンソルを組み合わせることで、任意のベクトル勾配テンソルは以下のように表すことができる。

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_x & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - s \sin 2\phi & -q + s \cos 2\phi \\ q + s \cos 2\phi & p + s \sin 2\phi \end{pmatrix}$$

- よって、その行列式と固有値は、

$$\det(\bar{V}) = p^2 - s^2 + q^2$$
$$\lambda_{\pm} = p \pm \sqrt{s^2 - q^2}$$

となる。

Vorticity Strength λ_q と Strain Strength λ_s の定義

- したがって、Vorticity Strength λ_q は、

$$\lambda_q = \begin{cases} 0 & (s \geq q) \\ \sqrt{q^2 - s^2} & (s < q) \end{cases}$$

となることがわかった。 ($0 \leq \lambda_q \leq |q|$)

- Strainに対して同様に定義すれば、Strain Strength λ_s :

$$\lambda_s = \begin{cases} \sqrt{s^2 - q^2} & (s > q) \\ 0 & (s \leq q) \end{cases}$$

を得る。 ($0 \leq \lambda_s \leq s$)

固有値がどのように表わせるか。

- Vorticity Strength λ_q と Strain Strength λ_s は、どちらも0以上で、互いに一方が0のとき、もう片方は、0以上となるので、

$$\lambda_s - \lambda_q = \begin{cases} \sqrt{s^2 - q^2} & (s > q) \\ 0 & (s = q) \\ -\sqrt{q^2 - s^2} & (s < q) \end{cases}$$

- $\lambda_p = p$ とすれば、

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} \lambda_p \pm \lambda_s & (s > q) \\ \lambda_p & (s = q) \\ \lambda_p \pm i\lambda_q & (s < q) \end{cases}$$

Vorticity Strength λ_q の物理的な意味

図のような楕円形の渦を考える。

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(\theta(t)), y(\theta(t))) \\ &= (a \cos \theta(t), b \sin \theta(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v_x(\theta), v_y(\theta)) &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} (x(\theta), y(\theta)) \\ &= \dot{\theta} (-a \sin \theta, b \cos \theta)\end{aligned}$$

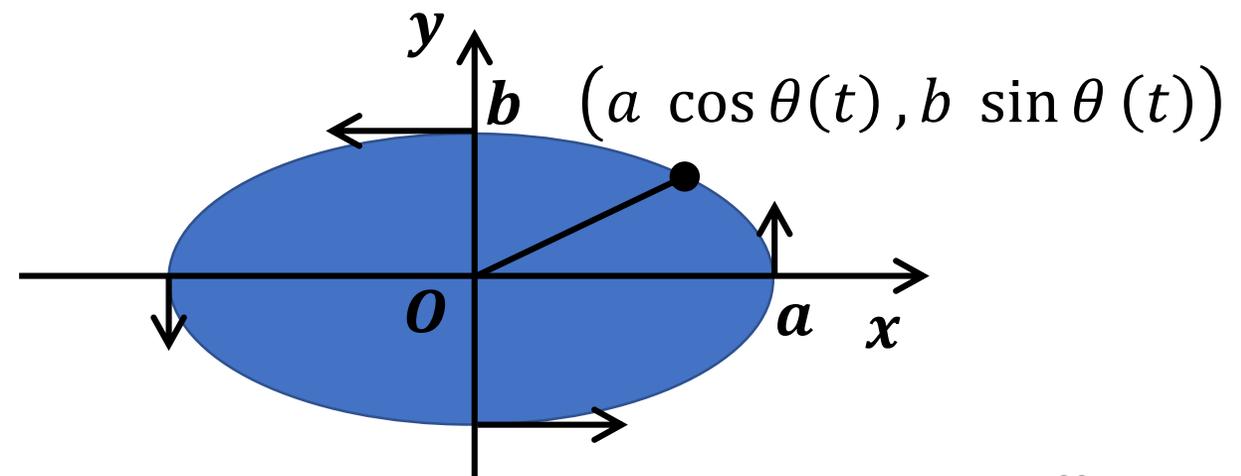
$$\begin{aligned}\bar{V} &= \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{tr } \bar{V} = 0, \det \bar{V} = \dot{\theta}^2$$

よって Vorticity Strength λ_q は、

$$\lambda_q = |\dot{\theta}| = \frac{|(\vec{r} \times \vec{v})|}{ab}$$

λ_q は角振動数の大きさと一致した。

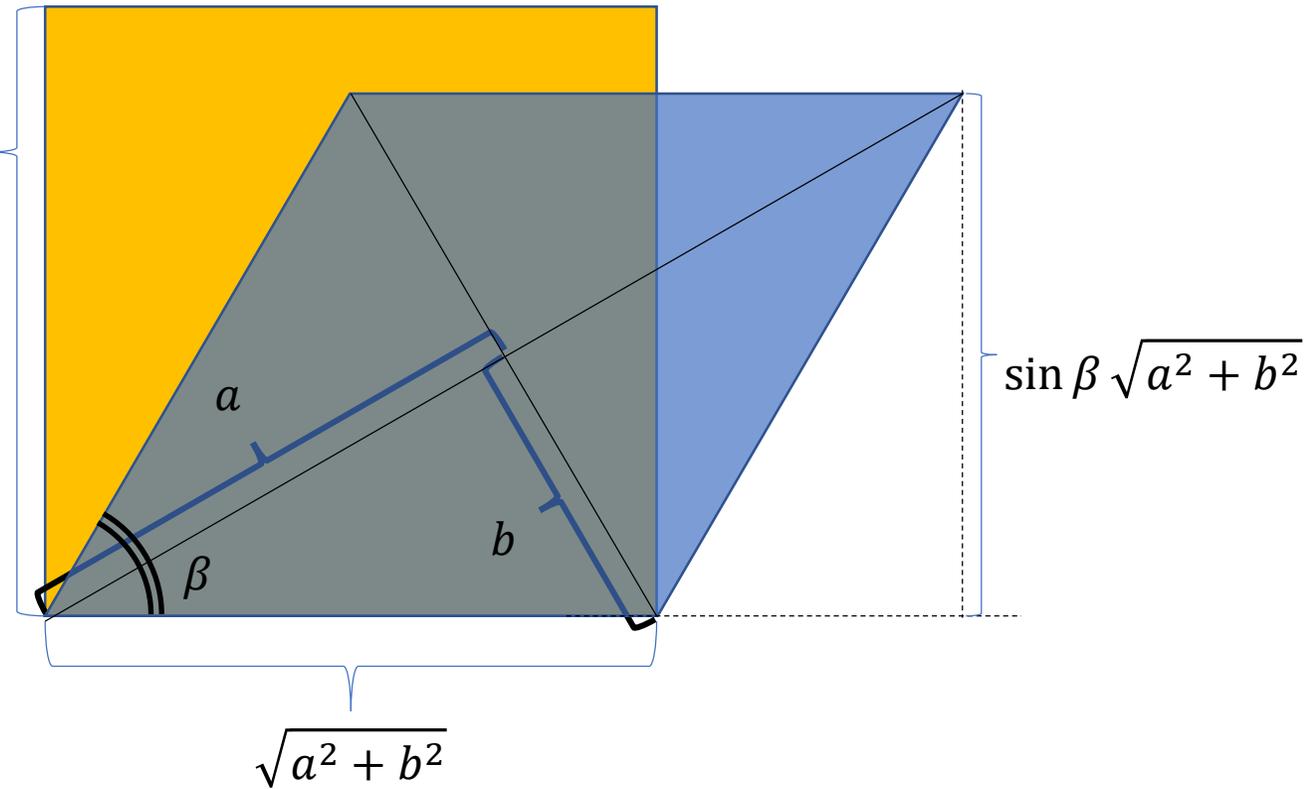


Vorticity & Vorticity Strength の比 $\lambda_q/|q|$

$$q = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \dot{\theta}$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{2ab} \dot{\theta}$$
$$\frac{\lambda_q}{|q|} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin \beta$$

- a と b は、それぞれ楕円の長径と短径だったから

$\lambda_q/|q|$ によって、渦の形状を調べることができる。



歪みを表す物理量の定義

- Strain Strength

$$\lambda_s = \frac{\sqrt{D}}{2} (D > 0)$$

$$(D = (tr(\bar{V}))^2 - 4\det(\bar{V}))$$

- 歪み

$$s = \sqrt{-\det(\vec{s})}$$

\vec{s} は、tracelessな速度歪みテンソル ($\vec{s} = \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}^T) - \frac{1}{2}tr(\bar{V}) I$)

Strain Strength λ_s の物理的な意味

図のような双曲線形の歪みを考える。

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x(\theta(t)), y(\theta(t))) \\ &= (a \cosh \theta(t), b \sinh \theta(t)) \\ (v_x(\theta), v_y(\theta)) &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} (x(\theta), y(\theta)) \\ &= \dot{\theta} (a \sinh \theta, b \cosh \theta) \\ &= \dot{\theta} \left(\frac{a}{b} y, \frac{b}{a} x \right)\end{aligned}$$

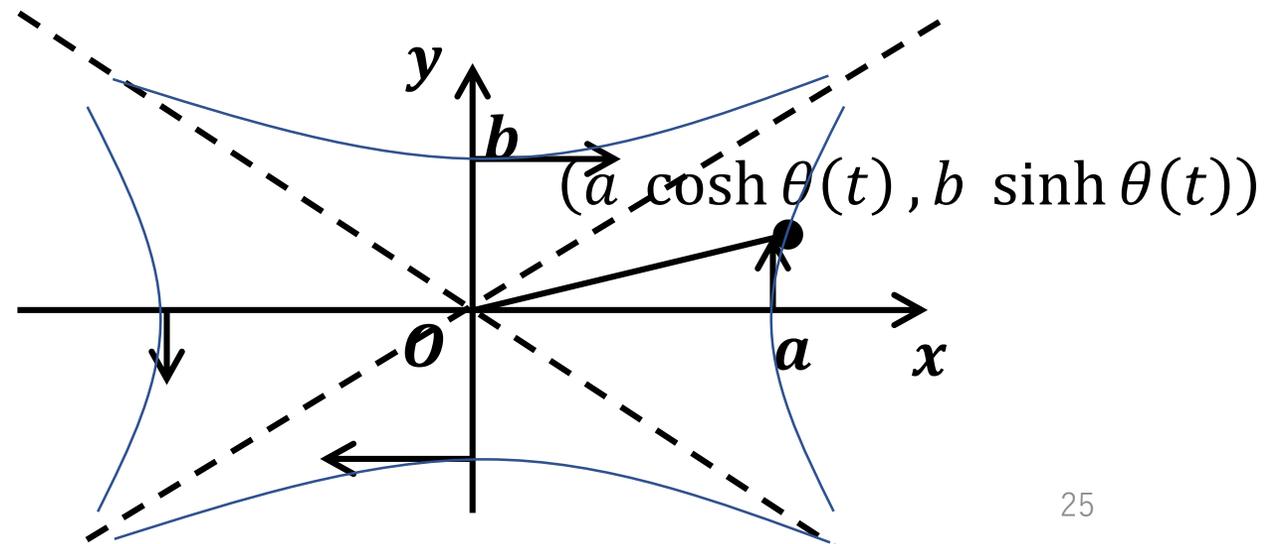
$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr } \bar{V} = 0, \det \bar{V} = -\dot{\theta}^2$$

よって、Strain Strength λ_s は、

$$\lambda_s = |\dot{\theta}| = \frac{|(\vec{r} \times \vec{v})|}{ab}$$

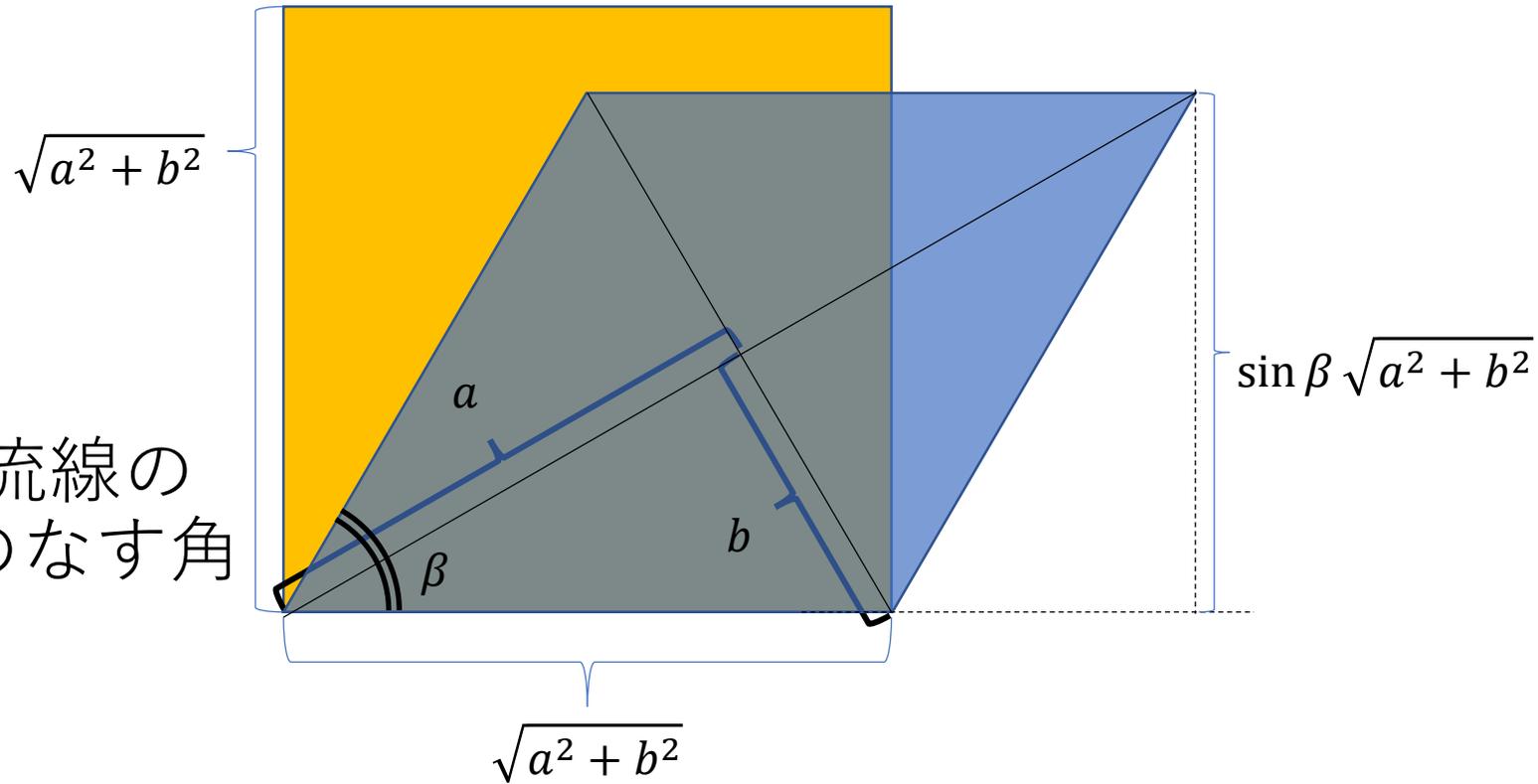
となった。



Strain & Strain Strengthの比 λ_s/s

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) |\dot{\theta}| \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{2ab} |\dot{\theta}| \\
 \frac{\lambda_s}{s} &= \frac{2ab}{2ab} \frac{|\dot{\theta}|}{\frac{a^2 + b^2}{2ab} |\dot{\theta}|} \\
 &= \frac{2ab}{a^2 + b^2} \\
 &= \sin \beta
 \end{aligned}$$

このとき β は、歪みの流線の双曲線の2つの漸近線のなす角となる。



物理量の定義(2次元の場合)

- 以下のように、 Strain(歪み): s , Strain Strength: λ_s , Vorticity Strength: λ_q , 角度 α を定義した。

$$s := \sqrt{-\det(\vec{s})} \quad [\vec{s} \text{ は、 traceless な速度歪みテンソル } (\vec{s} = \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}^T) - \frac{1}{2}\text{tr}(\bar{V})I)]$$

$$\lambda_s := \frac{\sqrt{D}}{2} \quad (D > 0)$$

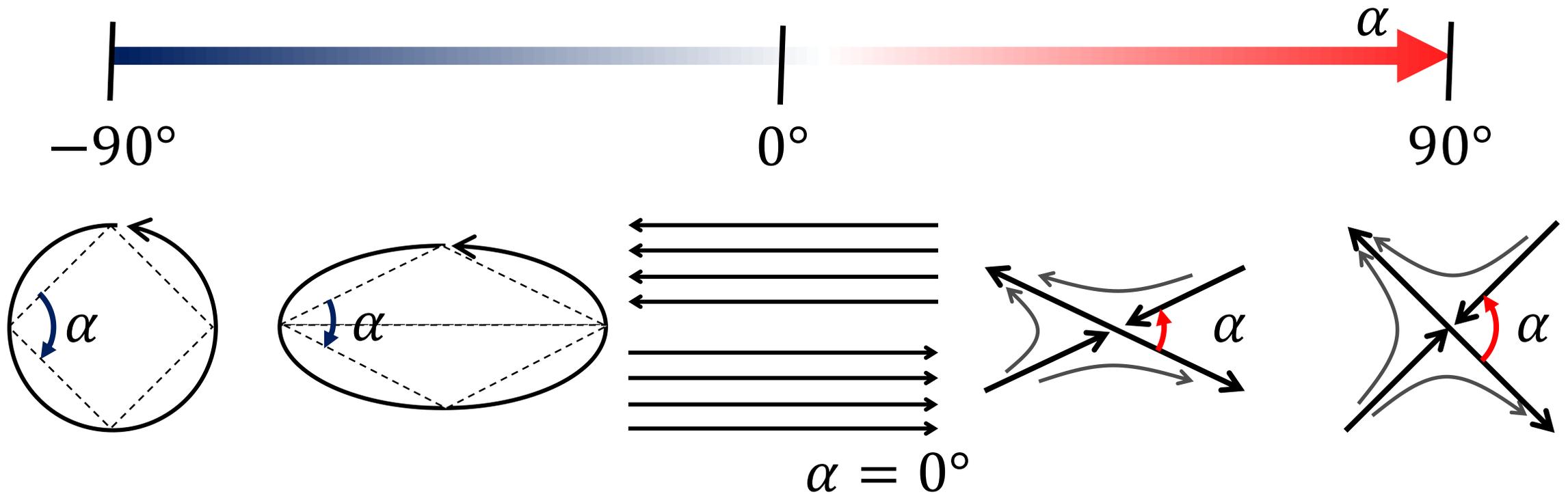
$$\lambda_q := \frac{\sqrt{-D}}{2} \quad (D < 0) \quad (\text{ただし、 } D \text{ は判別式: } D = (\text{tr}(\bar{V}))^2 - 4\det(\bar{V}))$$

$$\alpha := \text{Arcsin} \left(\frac{\lambda_s}{s} - \frac{\lambda_q}{|q|} \right) = \begin{cases} \text{Arcsin} \left(\frac{\lambda_s}{s} \right) & (s > q) \\ 0 & (s = q) \\ -\text{Arcsin} \left(\frac{\lambda_q}{|q|} \right) & (s < q) \end{cases} \quad \left(q = \frac{1}{2} \text{rot } v \right)$$

角度 α と流線の関係

• Vorticity Strength(渦) λ_q が観測される。

• Strain Strength λ_s が観測される。



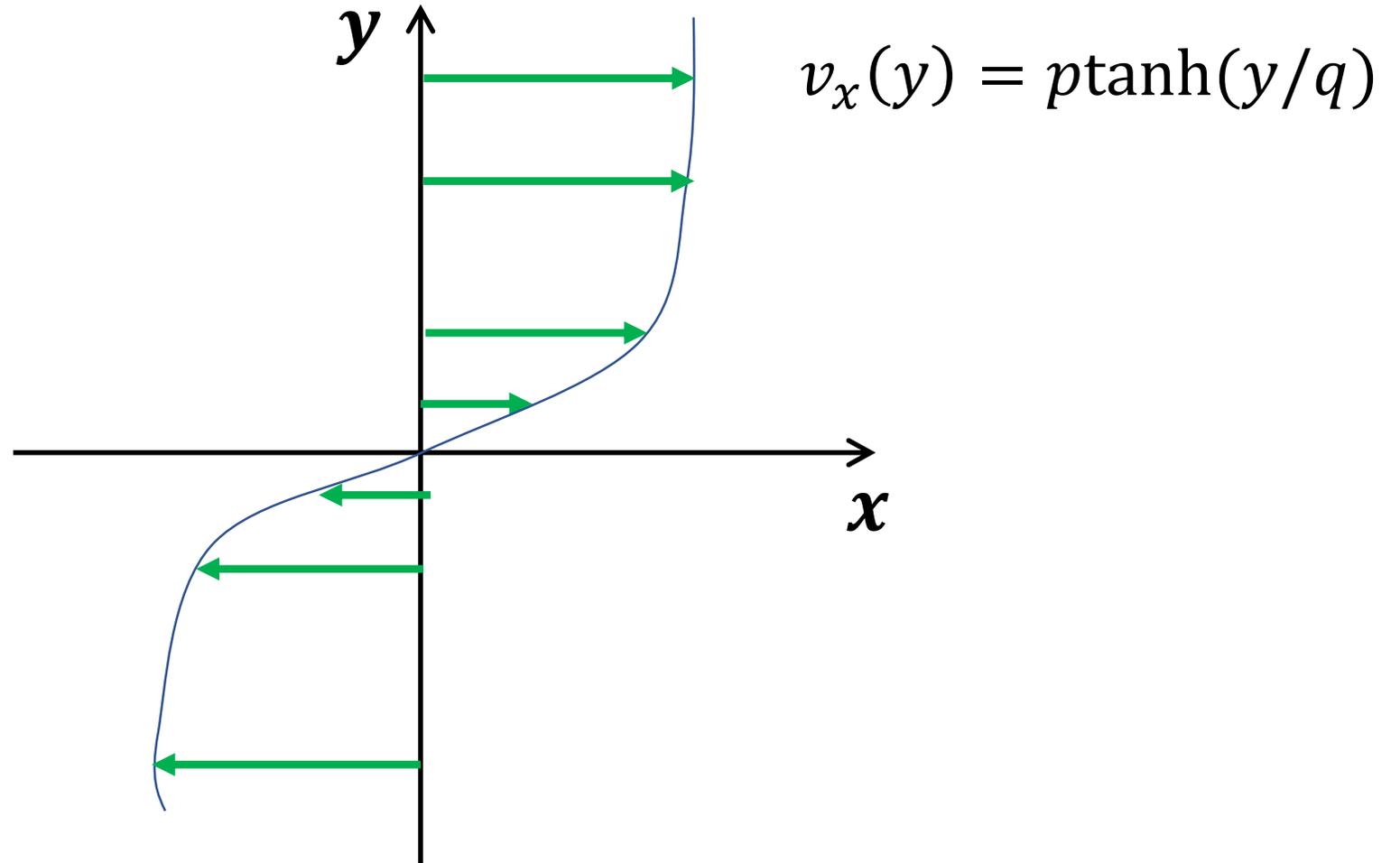
解析

以上の理論を踏まえた解析を行った。

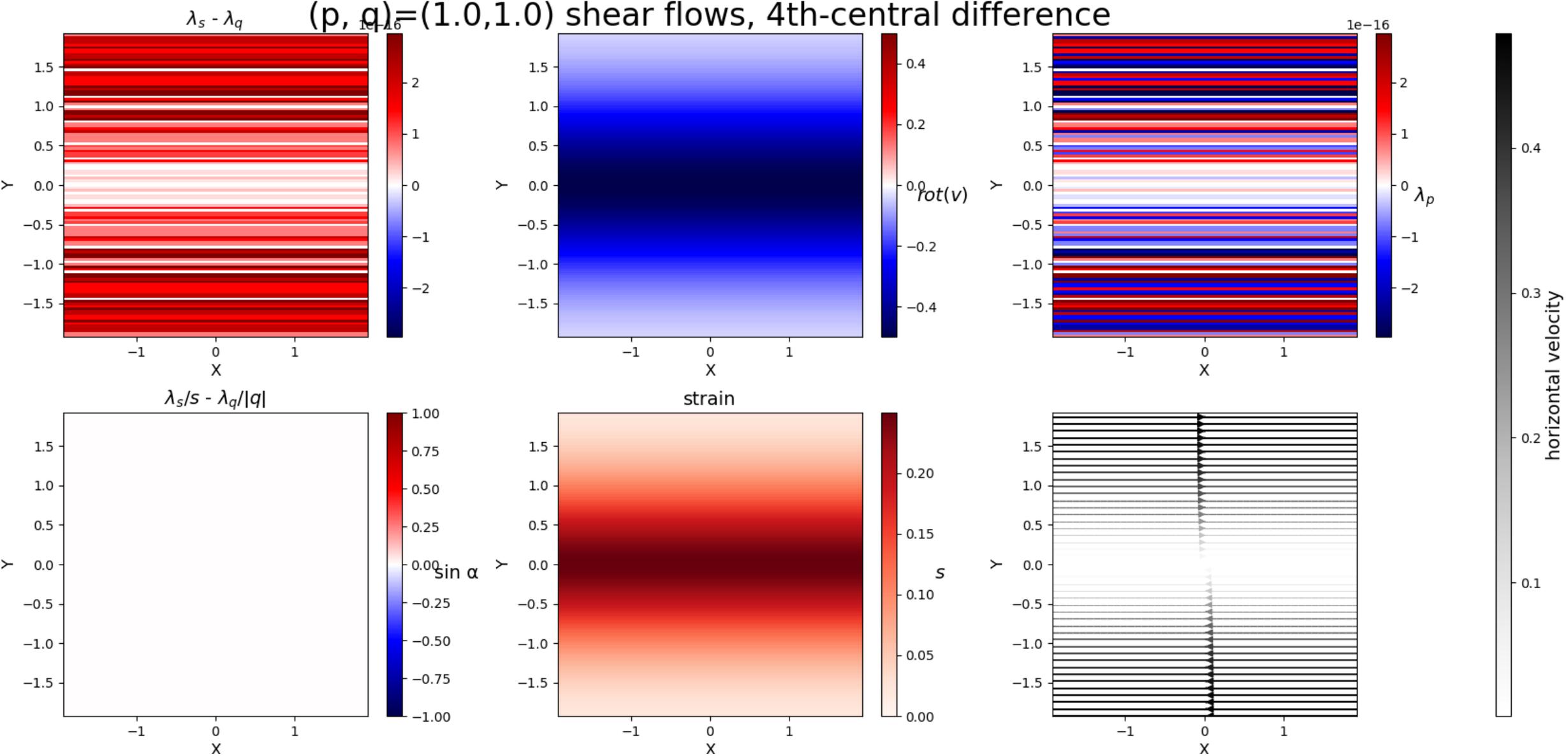
解析方法

1. 流速や磁場のベクトル場を元に物理量を計算した。
(Fortran90を使用)
 1. ベクトル場をフィルターにかけた。
 2. Strain, Vorticity, Strain Strength, Vorticity Strength, $\sin \alpha$ を計算した。
2. 物理量をもとにして、グラフを作成した。(Pythonを使用)
 1. 物理量の分布を表すヒストグラムを作成した。
 2. それぞれ極大、極小となる座標と極大値、極小値を求めた。
 3. 渦や磁気リコネクションの同定をした。(開発途中 (2/22))

Shear流の解析

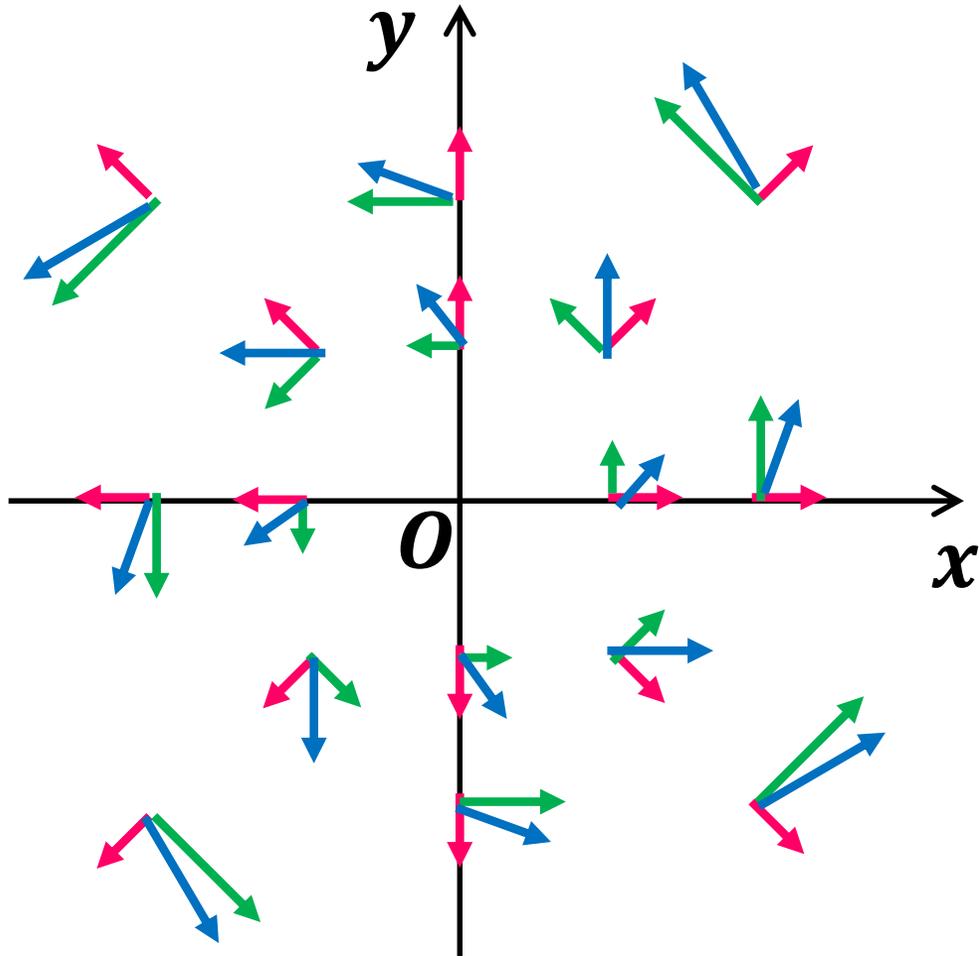


(p, q)=(1.0,1.0) shear flows, 4th-central difference



試作の渦の解析

例： $v_r = p, v_\theta = rq$ としたとき、 (p, q は定数)



- 赤矢印は、 v_r
- 緑矢印は、 v_θ
- 青矢印は、 その合成をそれぞれ表している。

図2：このときのベクトル場

例 : $v_r = p, v_\theta = rq$ としたとき、 (p, q は定数)

- ベクトル場は、

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{px}{r} - qy \\ \frac{py}{r} + qx \end{bmatrix}$$

- ベクトル勾配テンソルは、

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \frac{px}{r^2} & -q \\ q & \frac{py}{r^2} \end{bmatrix}$$

- 固有値は、

$$\lambda_{\pm} = \left(\frac{p(x+y)}{2r^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{p(x-y)}{2r^2} \right)^2 - q^2}$$

$q = 0$ のとき

$$\lambda_+ = \frac{px}{r^2}$$

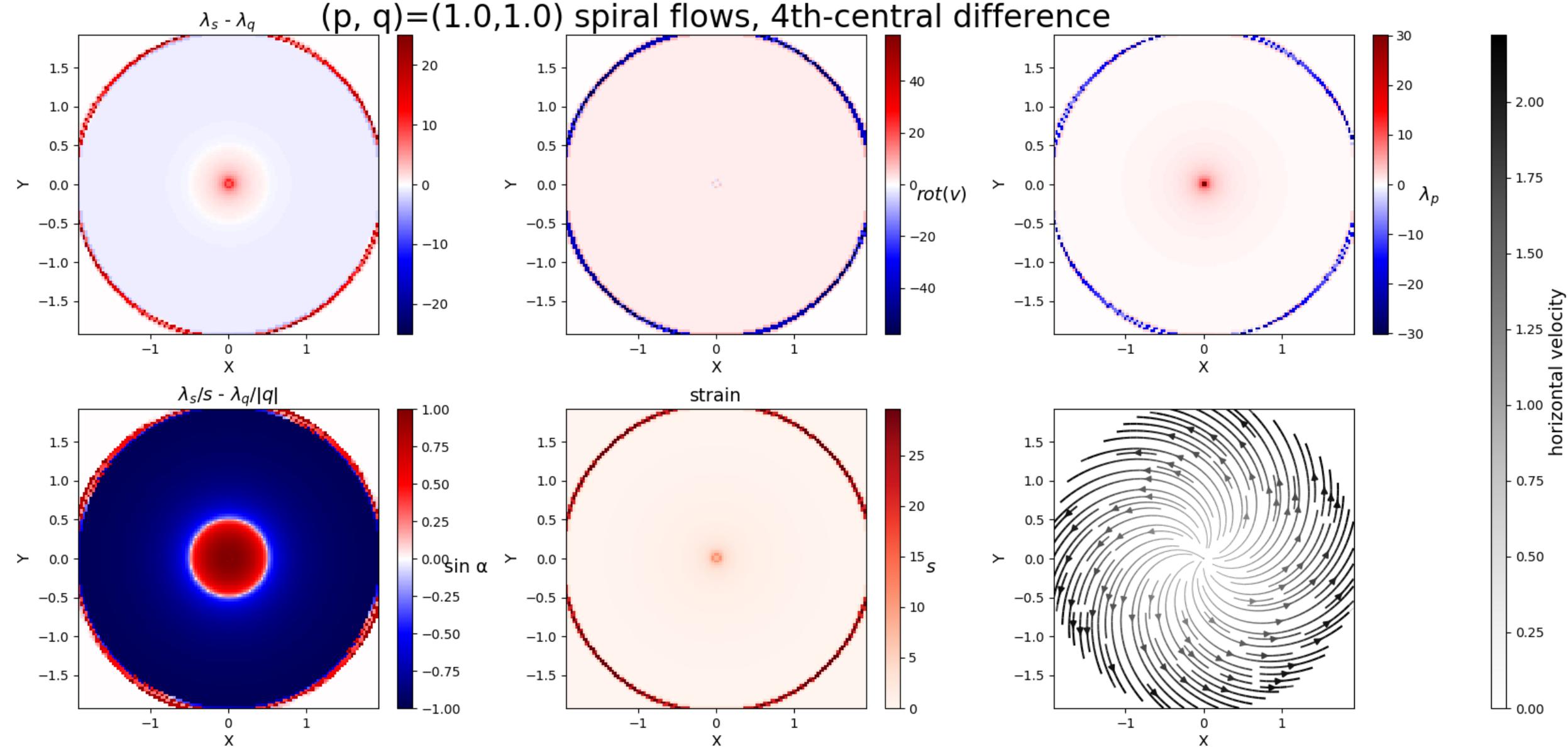
$$\lambda_- = \frac{py}{r^2}$$

$p = 0$ のとき

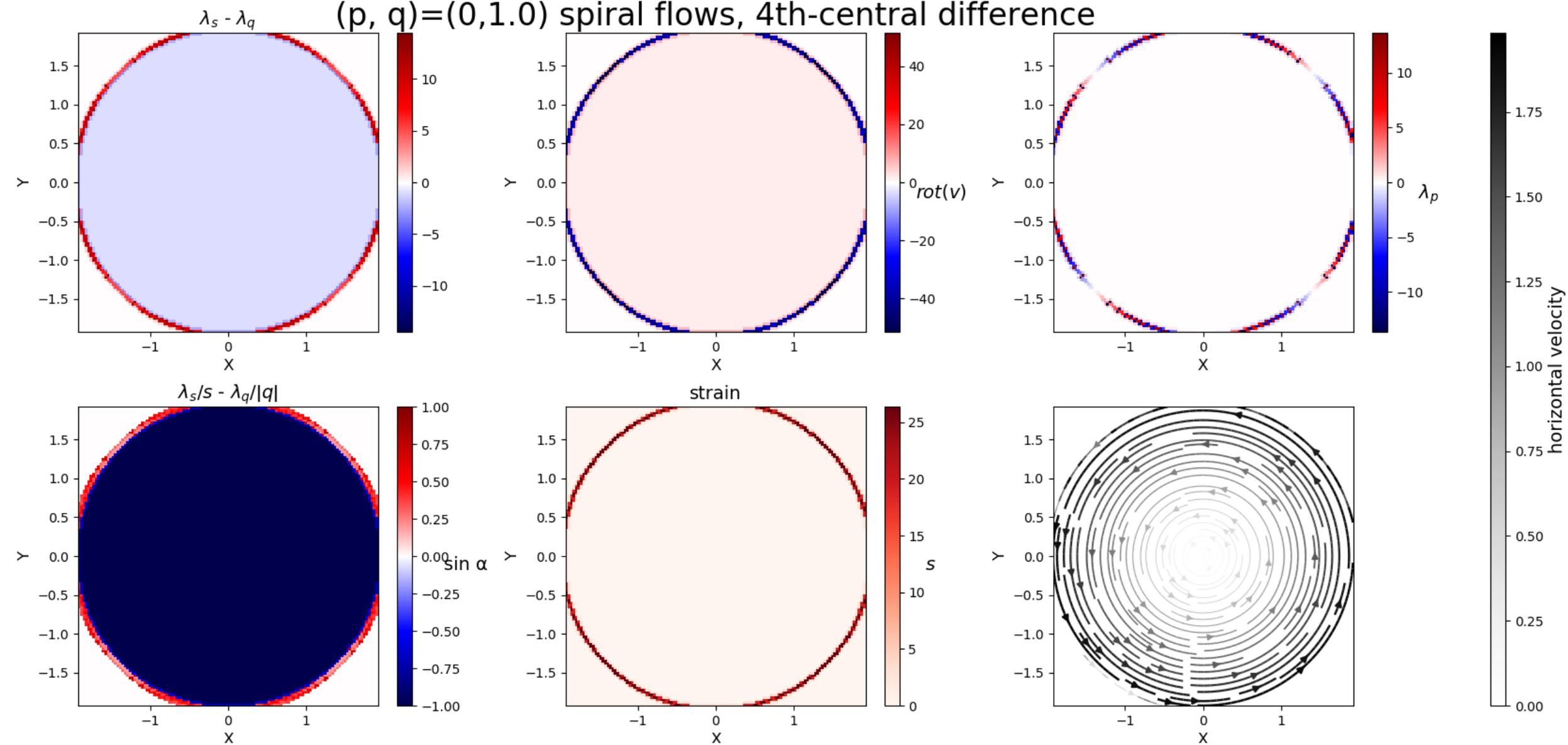
$$\lambda_+ = iq$$

$$\lambda_- = -iq$$

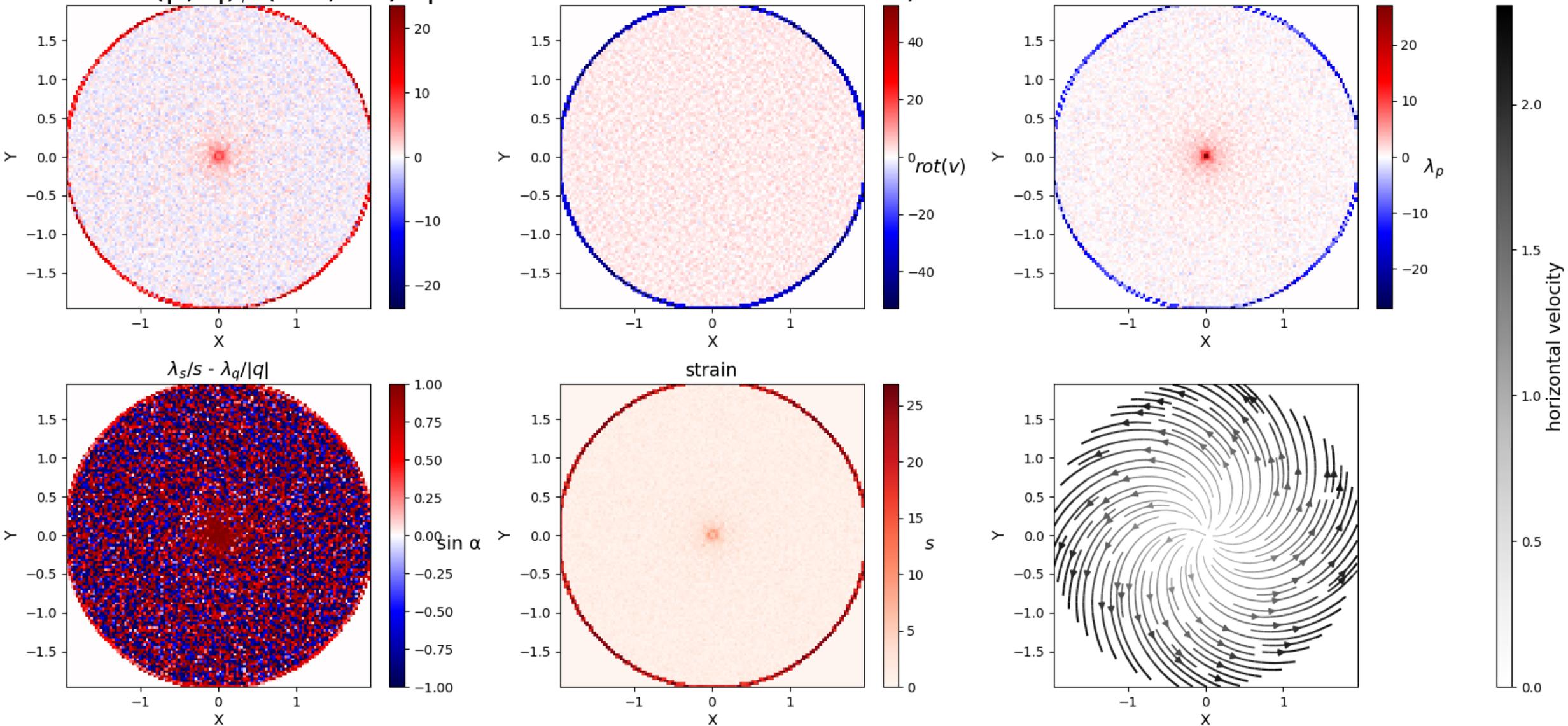
$(p, q) = (1.0, 1.0)$ spiral flows, 4th-central difference



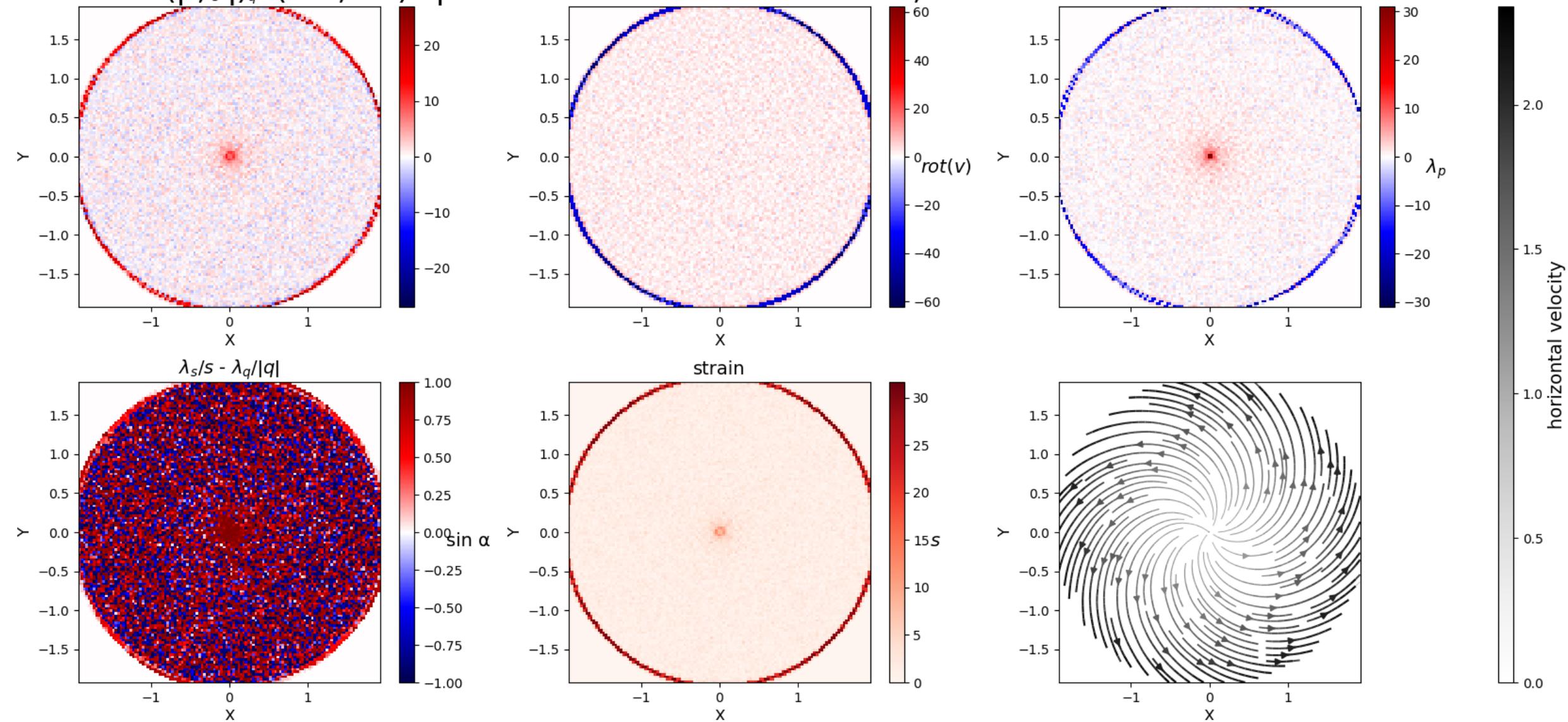
(p, q)=(0,1.0) spiral flows, 4th-central difference



$(p, \lambda_s, \lambda_q) = (1.0, 1.0)$ spiral flows with noise $\sigma = 0.05$, 2th-central difference



$(p, \lambda_s, q) = (1.0, 1.0)$ spiral flows with noise $\sigma = 0.05$, 4th-central difference

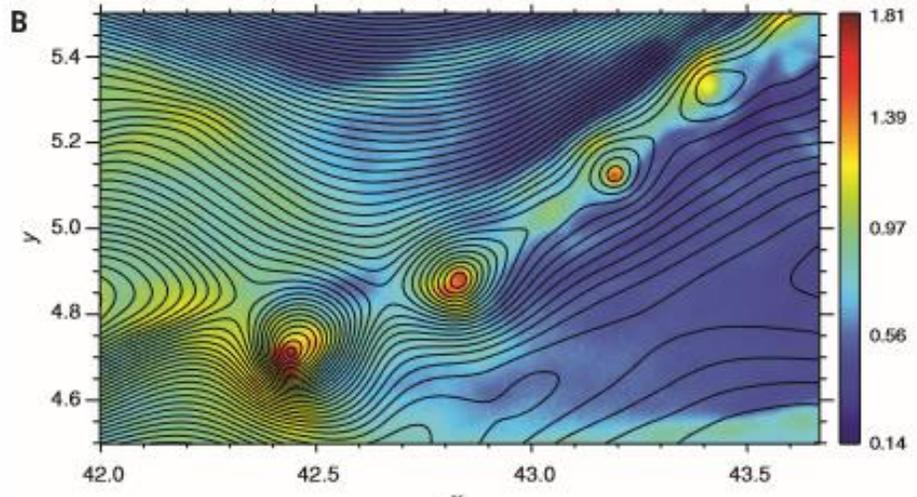
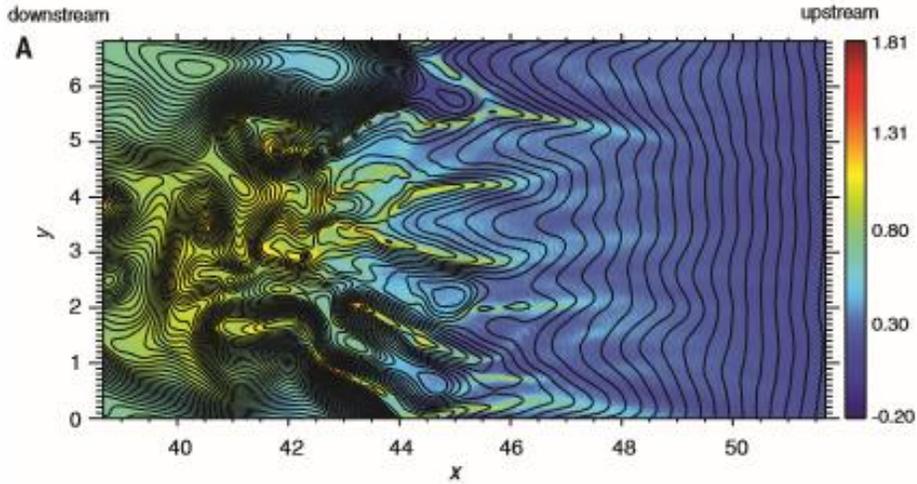


磁場の解析

磁場の解析

- 流体の構造を調べる Strain, Vorticity, Strain Strength, Vorticity Strength, $\sin \alpha$ を磁場に対して応用した。
- 流体の速度ベクトル \boldsymbol{v} を \boldsymbol{B} に対応させた。
 - Strain Strength $\lambda_s > 0 \iff$ 磁気リコネクション領域
 - Vorticity Strength $\lambda_q > 0 \iff$ 磁気島領域
 - Vorticity $\text{rot } \boldsymbol{v} \iff \text{rot } \boldsymbol{B} = \epsilon\mu\partial_t \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{j}$

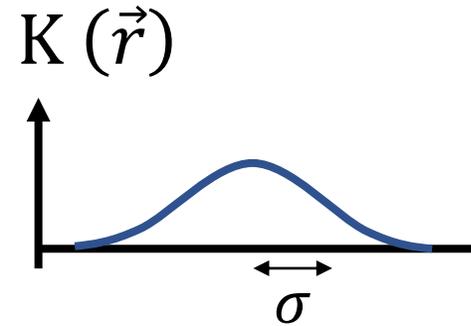
研究で使うデータの説明



- 2次元のプラズマ粒子シミュレーションによる衝撃波の計算
- 今回は磁場のデータだけを解析した。

(cf. Matsumoto et al., Science, 2015)

平滑化フィルタについて



- $\vec{v}(\vec{r})$ を以下のようにスムージングする。

$$\vec{v}'(\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r}$$

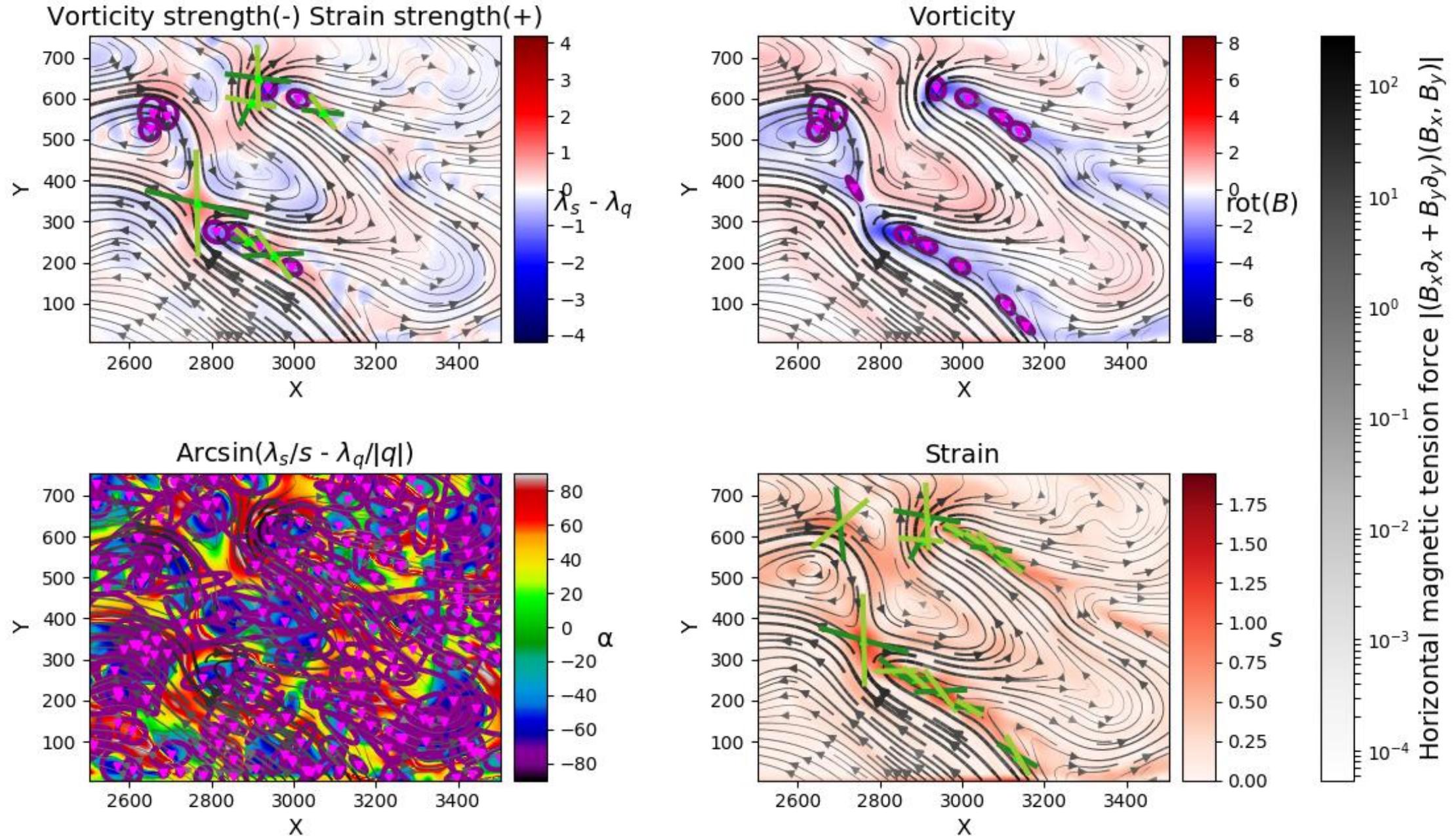
- ただし、カーネル $K(\vec{r})$ は、以下のようなガウシアンを使った。

$$K(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

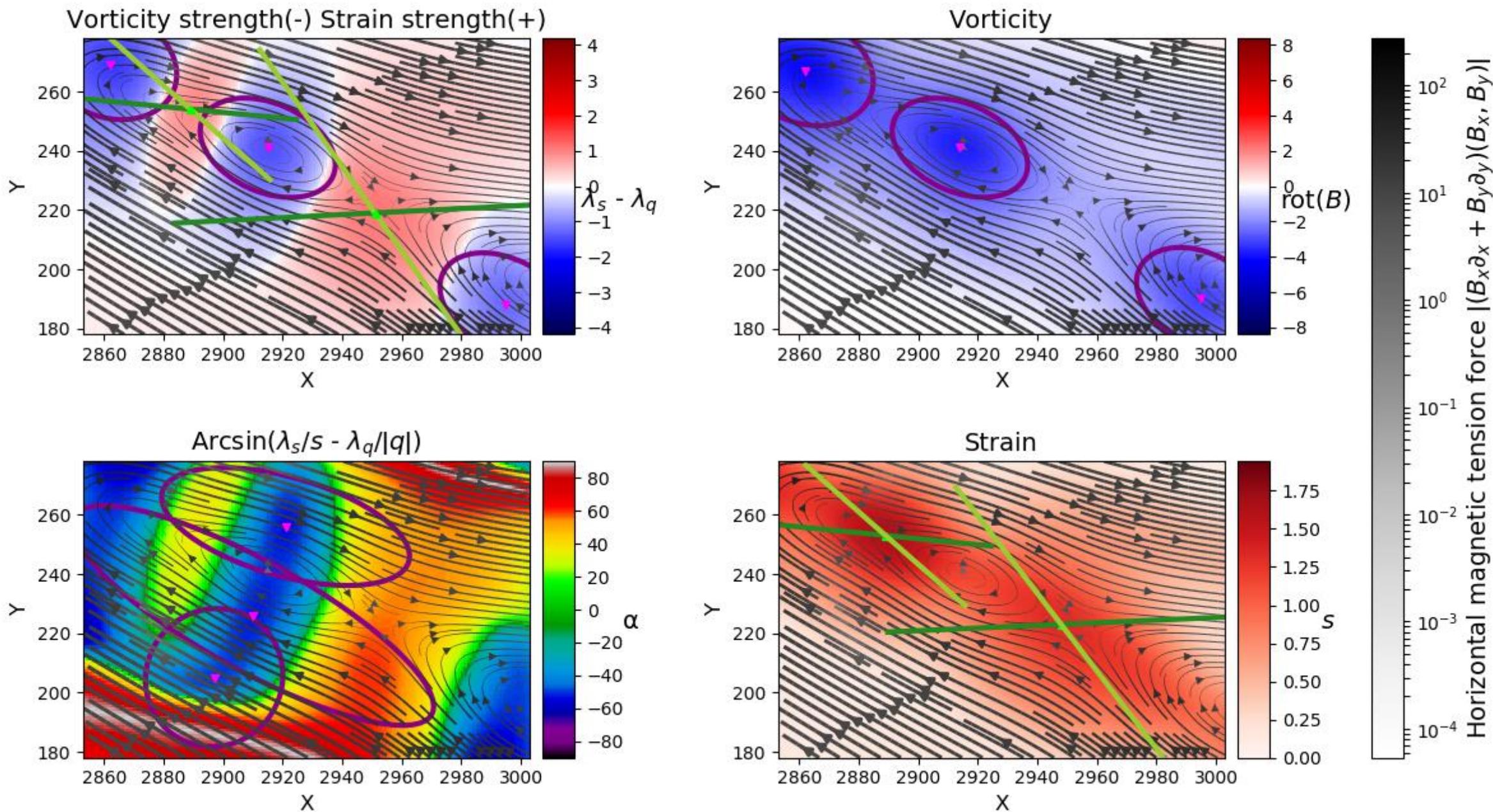
- 実際には、シミュレーションのデータは離散的であり、さらに全領域を積分するのは時間がかかるので、以下のようにした。

$$\vec{v}'(\vec{r}') = \sum_{\substack{(-m\sigma < x-x' < m\sigma) \\ (-m\sigma < y-y' < m\sigma)}} K(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}(\vec{r}) dx dy$$

The analysis of magnetic field ($\sigma = 10$)



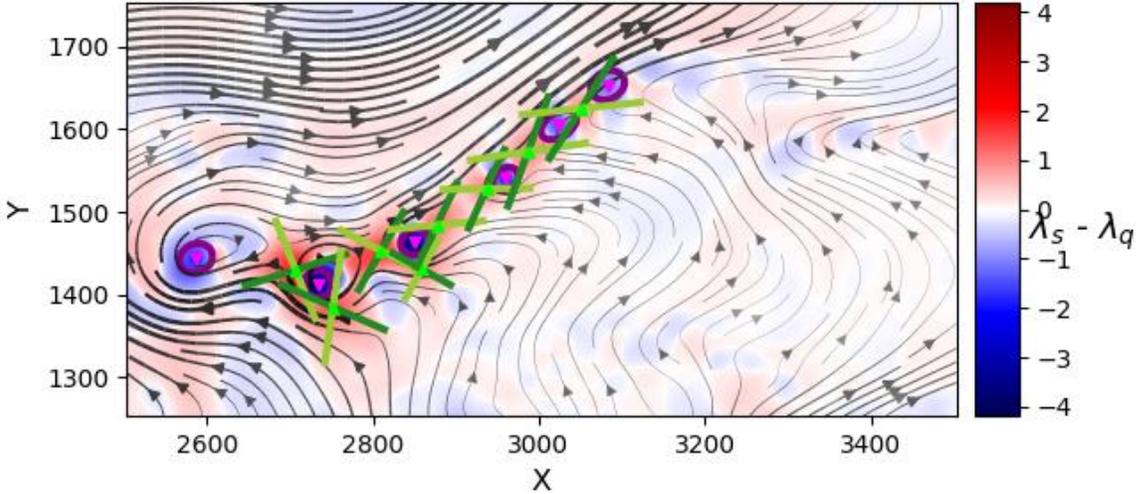
The analysis of magnetic field ($\sigma = 10$)



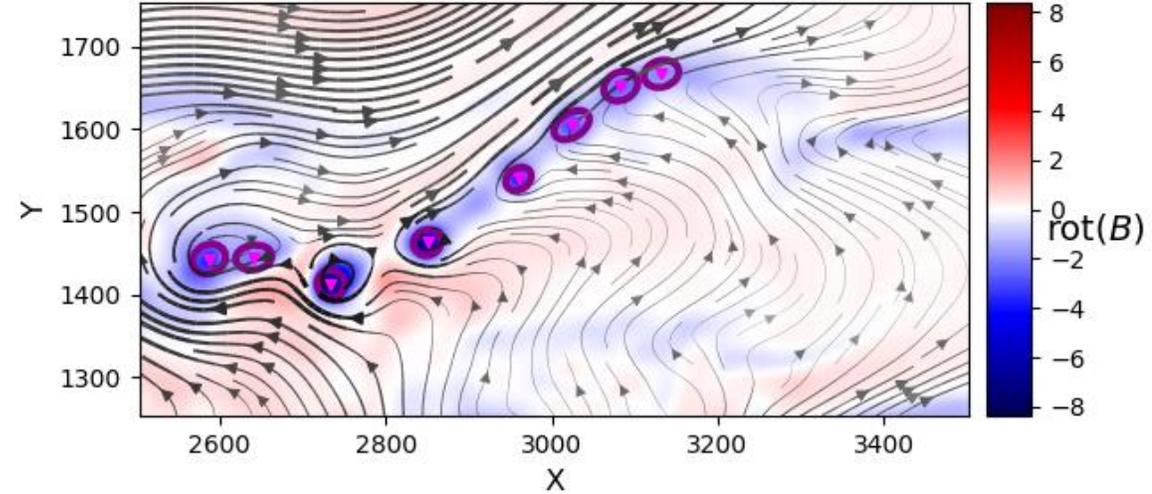
別の領域でもやってみた。

The analysis of magnetic field ($\sigma = 10$)

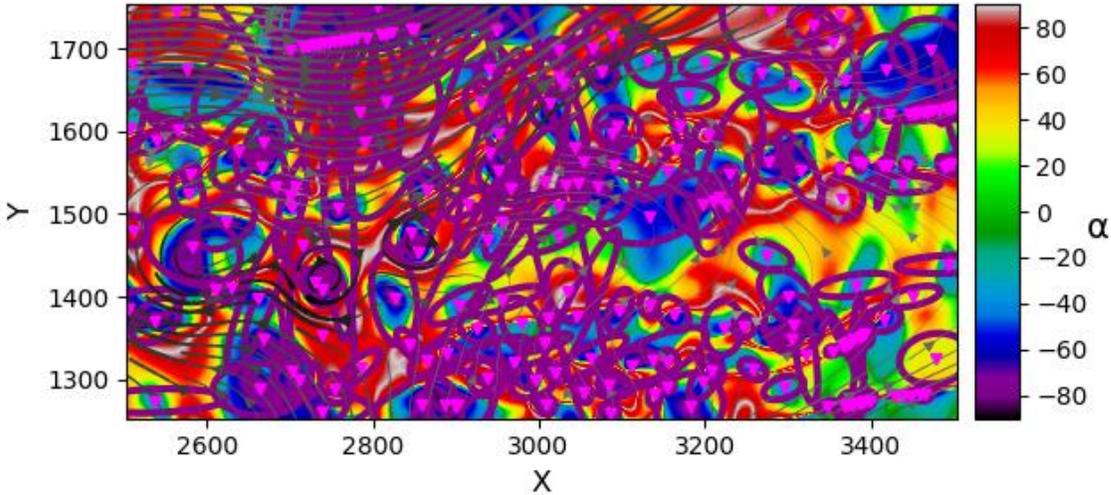
Vorticity strength(-) Strain strength(+)



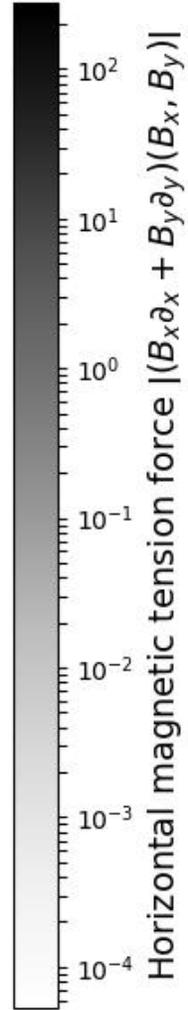
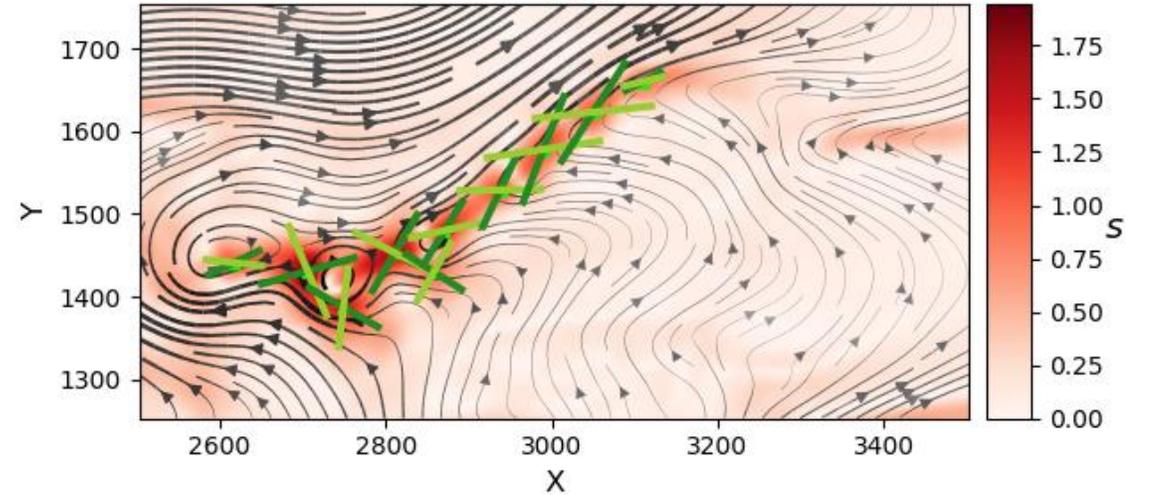
Vorticity



$\text{Arcsin}(\lambda_s/s - \lambda_q/|q|)$



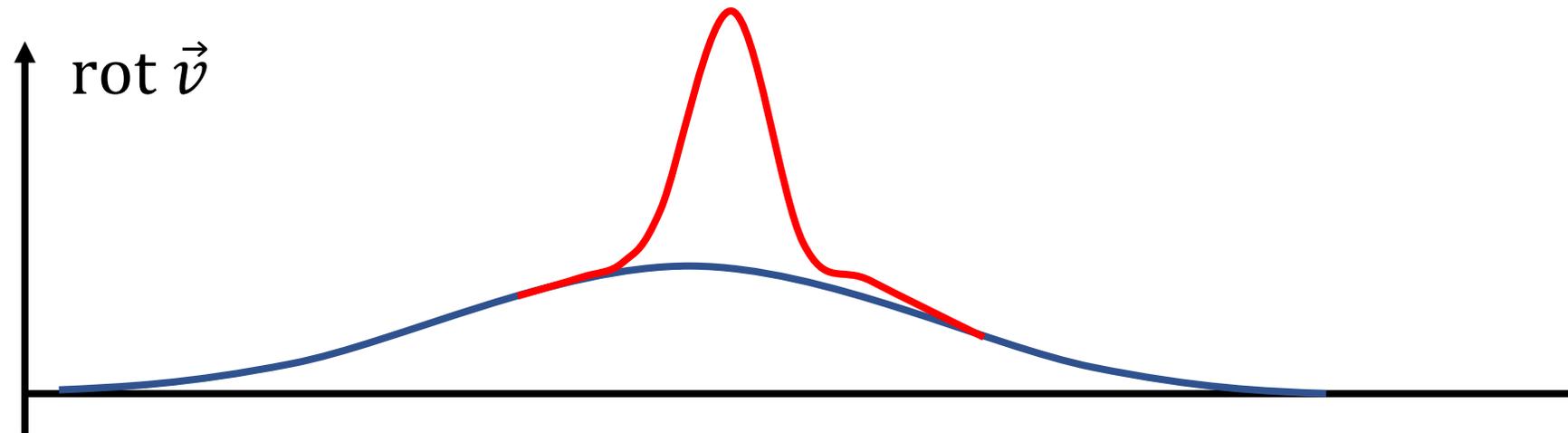
Strain



考察

問題点

- 小さくて強い渦は同定できたが、大きい渦は同定できなかった。
- ベクトル場から同定済みの強い渦の差をとり、大きい渦を同定する。



渦をガウシアンでフィッティングした。

- $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x y \exp(-ax^2 - by^2) \\ A_y x \exp(-ax^2 - by^2) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(-2axy) & A_x(1 - 2by^2) \\ A_y(1 - 2ax^2) & A_y(-2bxy) \end{pmatrix} \exp(-ax^2 - by^2)$
- $\begin{cases} s = (A_x + A_y)/2 \\ q = (-A_x + A_y)/2 \end{cases} = \begin{cases} A_x = s - q \\ A_y = s + q \end{cases}$ 注意：本当は、 $s = |A_x + A_y|/2$
- $\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s - q)(-2axy) & (s - q)(1 - 2by^2) \\ (s + q)(1 - 2ax^2) & (s + q)(-2bxy) \end{pmatrix} +$
 $o(x^2, xy, y^2)$

渦をガウシアンでフィテイングした。

- このベクトル勾配テンソルを対称部分と反対称部分に分けると、

$$\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_x \\ A_y & 0 \end{pmatrix} - xy(aA_x + bA_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -(aA_x - bA_y)xy & -2bA_x y^2 \\ -2aA_y x^2 & (aA_x - bA_y)xy \end{pmatrix}$$

- 磁場の場合、発散は0なので、 $aA_x + bA_y = 0$
- $a, b > 0$ より、 A_x, A_y は、異符号。つまり、Vorticityしかこのやり方でフィテイングできない。Strainは、Vorticityをこのやり方でフィッチングして消していけば、消えていくのかもしれない。

渦をガウシアンでフィッティングした。

• $aA_x + bA_y = 0$ から、 $\frac{b}{a} = -\frac{A_x}{A_y} = B$, $\frac{a}{A_y} = -\frac{b}{A_x} = C$ とすると、

$$\bullet \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \sqrt{-D} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{B} \\ \frac{1}{\sqrt{B}} & 0 \end{pmatrix} - 2DC \begin{pmatrix} -xy & -By^2 \\ \frac{1}{B}x^2 & xy \end{pmatrix}$$

• $X = \frac{1}{\sqrt{B}}x$, $Y = \sqrt{B}y$, $(\cos \gamma, \sin \gamma) = \left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right)$ とすると、

$$\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \sqrt{-D} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{B} \\ \frac{1}{\sqrt{B}} & 0 \end{pmatrix} - DC(X^2 + Y^2) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin 2\gamma & \cos 2\gamma \\ \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \end{pmatrix} \right\}$$

研究成果と今後の研究計画

- 研究成果

- 流体の渦の自動判定の技術を応用して、磁場の磁気リコネクションなどの流体の構造を自動判定することができた。
- 衝撃波の2次元シミュレーションで発生する磁気リコネクション領域と磁気島を自動判定することができた。

- 今後の研究計画

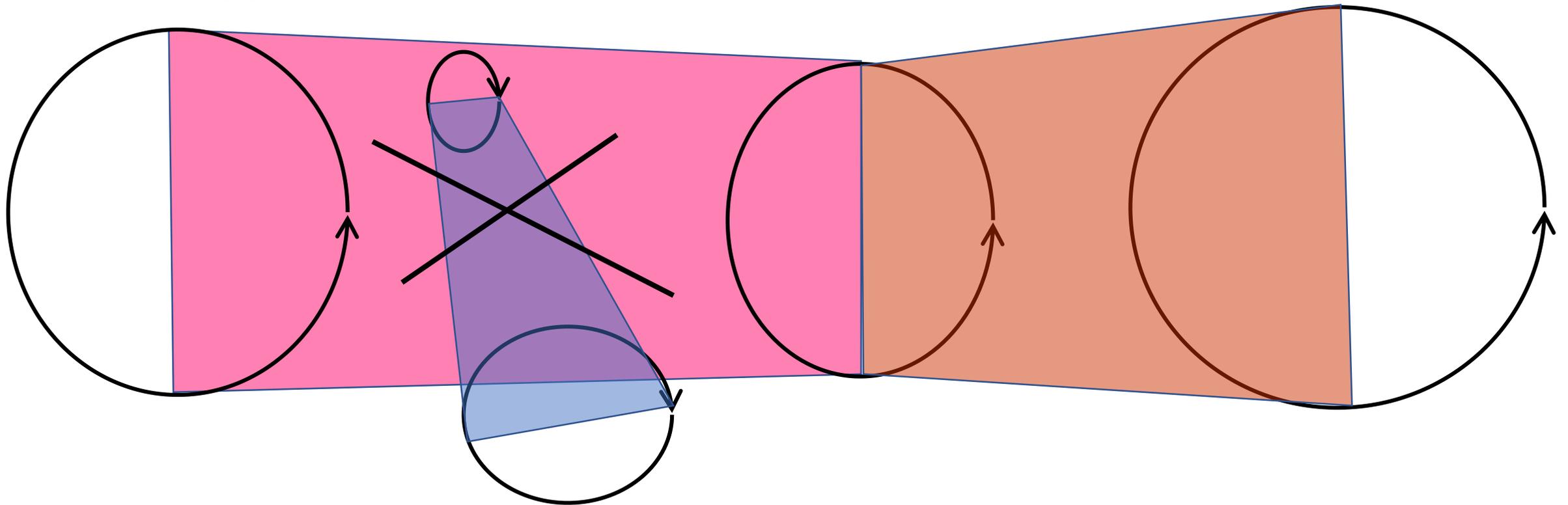
- 磁気島の大きさを求め、渦や磁気リコネクションを同定する。
- 時間発展するデータを解析し、磁気リコネクションの発生予測に貢献できないかを検討したい。
- 3次元の磁気流体中の渦や磁気リコネクションを同定する。

まとめ

- 今回のVorticity Strength, Strain Strengthを使った手法を用いることによって、磁気島と磁気リコネクションが交互に並んだ構造が容易に確かめられることがわかった。
- さらに、それらの構造を強さや α で分類し、ヒストグラムを作ることに成功した。
- α を見ることによって、それがどの程度純粋なVorticityか Strainか見極めることができた。

磁気島領域に挟まれる領域

- 以下のように同じ方向にループしている磁気島領域を線で結んでそれらに挟まれる領域に磁気リコネクションがないかどうかを探す



議題

渦の表現方法および同定方法

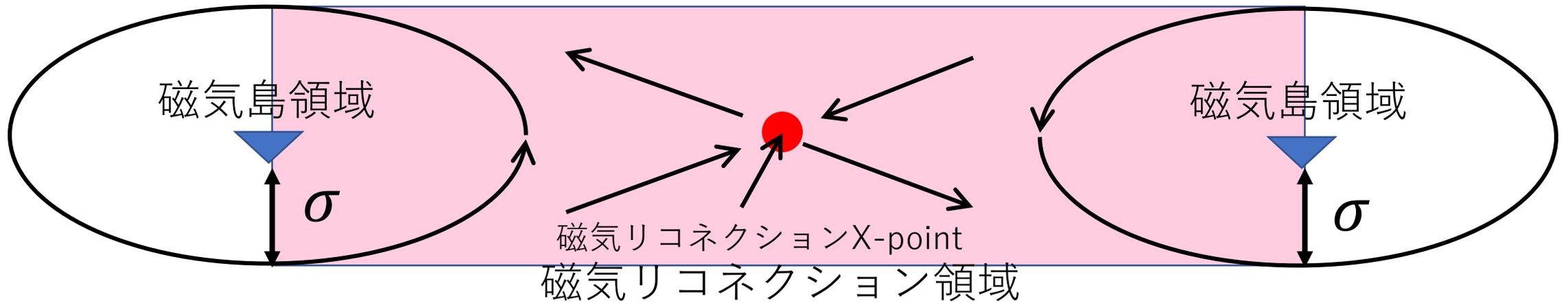
• 松本案

- 同定した渦の λq の等高線を描く。
- λq 1つで完結させた方がわかりやすい。
- λq で差分をとって渦の同定をする。その方が早い

• 堀江案

- λq は、あくまでも渦の同定に使用する要素である。
- 最終的に λq の図に同定した渦を重ね書きすることを考えていなかった。
- ベクトル場で差分をとる。

ベチェックモデルの磁気リコネクションの同定



- 磁気島領域に挟まれる領域に磁気リコネクション領域の極大値が1つだけ存在するとき、この磁気リコネクションは、ベチェックモデルの磁気リコネクションと同定した。

スイートパーカーモデルの磁気リコネクションの同定



- もし磁気島領域に挟まれる領域に磁気リコネクション領域の極大値が2つ存在するとき、この磁気リコネクションは、スイートパーカーモデルの磁気リコネクションと同定した。

ご清聴ありがとうございました。

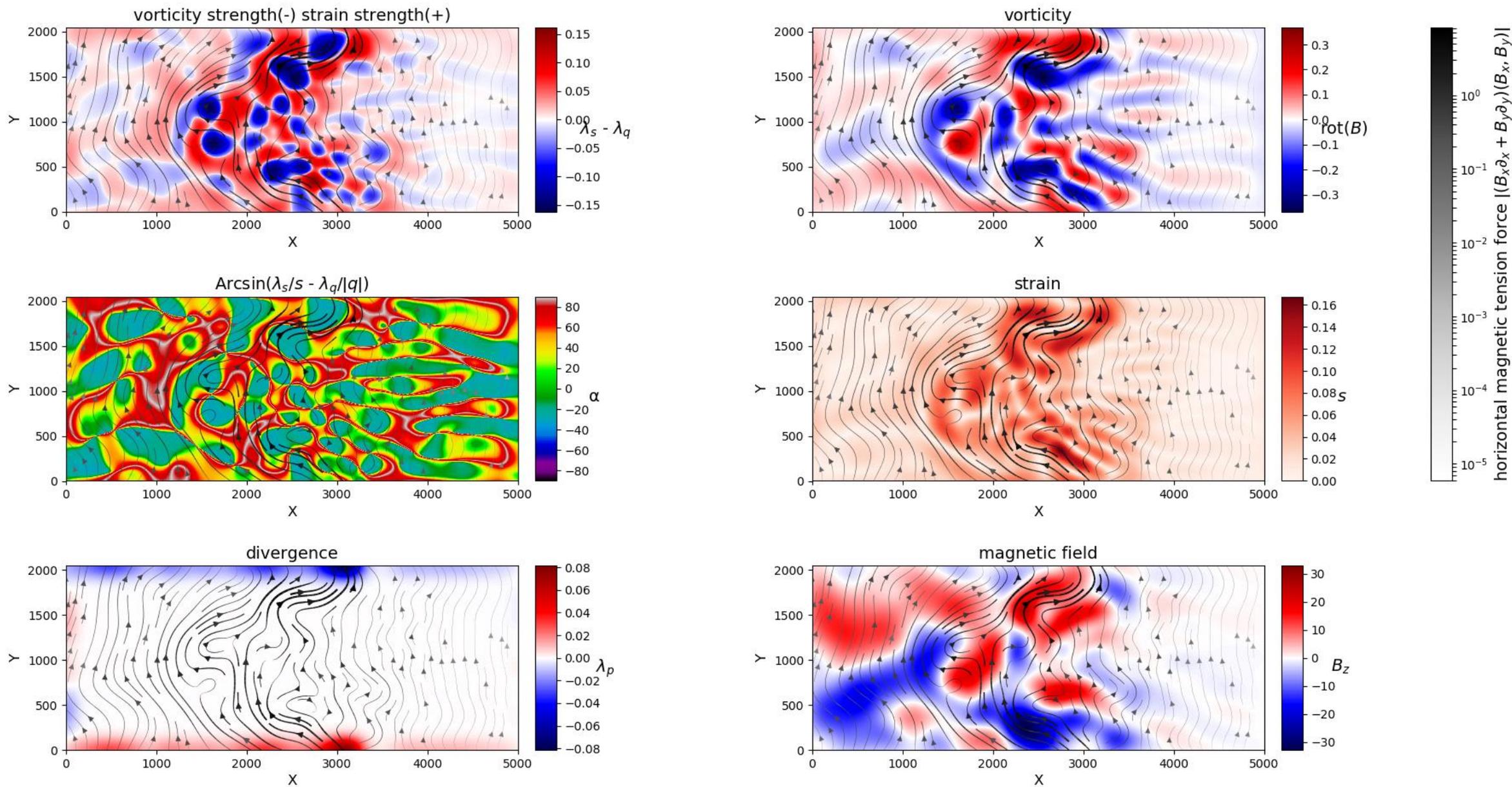
疑問点

- 流体の場合：ラグランジュ的に考えることで、ガリレイ不変的な物理量を定義することができた。
- 磁場の磁力線を流体の流線としてみた場合：ラグランジュ的に考えることは、相対論的に考えて、磁場を打ち消すような系で、磁場を見るというふうな考えになる。
- これでは、系ごとに磁気リコネクションX-pointの位置が変わってしまうが、それでもいいのだろうか？
- ベクトル場がnullであることもX-pointであることの条件に入れた方がよいか？

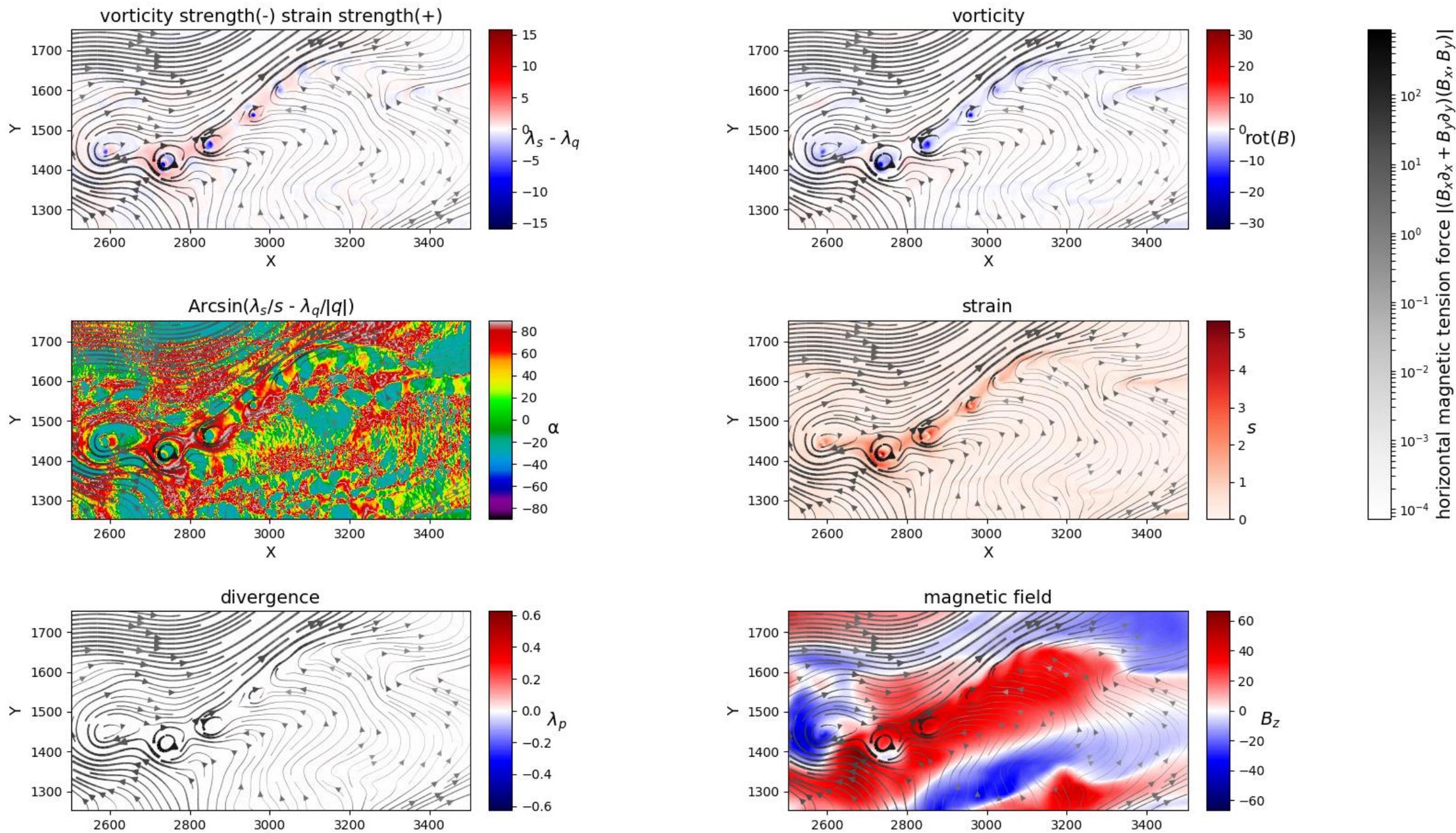
宿題（優先順位を決めたい）

- 千葉大の計算機のデータを移送する。
- 柴山さんのデータの解析
- 2次元の場合ベクトルポテンシャルで磁力線を表現する。
- オリジナルなカラーマップを作成する。
- スイートパーカーとベチェックの同定のプログラムを作成する。
- 閾値を求める際に、渦の λq の体積によって決めたいからそのためのプログラムを作成する。

The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0100)



The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0001)



The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0100)

