IV. BIOMECHANIKA TKANIVA ORGÁNOV A ORGÁNOVÝCH ŠTRUKTÚR

IV.1 Úvod

Ako už bolo spomenuté biomechanika je študijný odbor zaoberajúci sa štúdiom mechanických zákonitostí a vlastností biomateriálov a biologických systémov.

Biomechanika analyzuje biologické reakcie živého organizmu na vonkajšie a vnútorné účinky z hľadiska všeobecnej mechaniky.

Vychádzame zo skutočnosti, že organizmus a jeho časti sú otvorený systém, ktorý smeruje k stavu pohyblivej rovnováhy. Otvorený systém nespadá do oblasti konvenčnej fyziky, pretože tá sa zaoberá výlučne systémom uzavretým, kde nedochádza k výmene hmoty s okolím.

Na druhej strane k najzákladnejšími vlastnosťami živého organizmu je príjem a výdaj hmoty jeho výstavba a degradácia.

Najpodstatnejšie znaky života sú schopnosť prispôsobiť sa vonkajším podmienkam t.j. homeokinestáza, reprodukcia a uchovanie informácie, t.j. musí neustále prebiehať výmena energie, hmoty a informácie s okolím.

Nutnou podmienkou pre živý organizmus, aby trvale vykonával prácu je aby bol otvorený

Aké sú vlastnosti biologických systémov? Bez nárokov na všeobecnosť sú to:

- výmena látok
- samoreprodukcia
- selekcia biochemických procesov
- mutácia
- cyklickosť živých procesov - ich vznik a zánik
- priestorová štruktúra
- účelnosť a prispôsobiť sa

Biologický svet existuje trvale v stavoch vzdialených od rovnováhy, čo je podmienkou existencie života a jeho dynamika je vždy nelineárna, teda evolúcia k vyšším kvalitatívnym štruktúram je pravdepodobnejšia než v neživom svete.

Teória vzniku nových štruktúr a jej rozpracovanie patrí najmä Prigogineovi (1947), Maixnerovi (1934) De Grootovi (1951), Nicolsovi (1977), Chueovi (1977). V súčasnosti sa tieto problémy preberajú v synergetike.

V nerovnovážnej lineárnej a nelineárnej termodynamike neživých systémov sa dokazujú určité princípy, ktoré prejavujú svoju platnosť aj v biologických systémoch.

Le Chatelierov princíp charakterizuje skutočnosť, že systém v okolí termodynamickej rovnováhy sa po poruche vracia spontánne do rovnovážneho stavu.

Pre oblasť nelineárnej nerovnovážnej termodynamiky platí Prigogineov princíp minimálnej produkcie entropie $\boxed{\frac{dS}{dt} \leq 0}$

kde S je výsledná produkcia entropie

Teda spontánny vývoj systému je charakterizovaný poklesom produkcie entropie a trvá tak dlho, kým sa nedosiahne minimálna produkcia entropie, čo odpovedá stacionárnemu stavu

Pre oblasť nerovnovážnej nelineárnej termodynamiky sa dokázala platnosť nerovnosti

$$\boxed{\frac{dS^*}{dt} \leq 0}$$

kde dS^* znamená zmenu produkcie entropie vyvolanej zmenou zovšeobecnených síl, ale nie zovšeobecnených tokov, t.j Prigogeneov-Glansdorfov princíp.
Nevratné procesy sú doprevádzané prenosom hmoty, tepla, el. prúdu, reakčnými rýchlosťami nazývame zovšeobecnené toky

Matematickým obrazom situácie pred vznikom a po vzniku nových kvalít sú stacionárne riešenia nelineárnych dynamických rovníc, ktoré popisujú evolúciu systému. Toto riešenie môže byť stabilné alebo nestabilné.

Nerovnovážna termodynamika je využívaná v biofyzike pri analýze aktívneho transportu, osmotickej rovnováhy, bioelektrických potenciálov

Poznatky sa rozvíjajú ďalej. Do hry vstupujú napr. matematické modely fyziologického procesu rastu zosilnenia kostného tkaniva [Cowin], biologická energia, miera využitia fyzikalnej a psychickej energie.

IV-2 Základné biomechanické problémy živého tkaniva

- Biologické materiály sú kvázirýchlostného typu a sú závislé na histórii deformácie, t.j. sú dedične závislé a podliehajú procesu stárnutia. Táto charakteristika materiálu je zrejmá najmä pre pojivové tkanivá.

- Tieto biomechanické vlastnosti sú charakterizované procesmi relaxácie a dotvarovania ale i hysteréznymi slučkami pri cyklickom zaťažení, závislosťami elastických modulov od rýchlosti deformácie, únavovými vlastnosťami, lomovou húževnatosťou, atď.

- Pri svalových tkanivách je závislosť napätie - deformácia ovplyvnená priebehom udalostí, ktoré nasledujú po podráždení, tzv. stimuláciou svalu.

- Biologické materiály majú anizotropnú štruktúru a celý rad týchto materiálov, z nich najmä mäkké tkanivo, nemá jednoznačne určený východzí stav (t.j. nemá jediný referenčný systém).

- Najväčšiu mechanickú pevnosť a tuhosť v živom tele má kostné tkanivo. Skelet zabezpečuje celkovú stabilitu tela spolu s príslušným systémom mäkkého tkaniva.

- Mäkké tkanivo tvorí dôležitú zložku v systéme väzieb kĺbov, skeletu a vlastných spojov kostí navzájom. Mechanické vlastnosti jednotlivých tkanív zvýrazňuje ich štruktúra už na molekulovej úrovni.

- Epitel je tkanivo z buniek, ktoré k sebe úzko priliehajú a ktoré kryjú voľný povrch (krycí epitel), alebo vypĺňujú medzery, dutiny (epitel výstielkový). Epitelové bunky sú uložené (dosadajú) na tenkú membránu nachádzajúcu sa medzi epitelom a tkanivom orgánu. Pre epitel je charakteristické, že jeho bunky sú tesne spojené

- Svalové tkanivo sa skladá z pozdĺžnych svalových buniek, ktoré sú schopné sa zmrašťovať. V protoplazme svalových buniek t.j. sarkoplazme sa nachádzajú myofibrily, ktoré sú schopné zmrašťovať sa. Vyskytuje sa ako svalstvo hladké (v stenách čriev, priedušnici, prieduškách, v močovode, dĺžka 15–50 μm, ďalej ako svalstvo priečne pruhované (svalstvo kostry, hrtana, pečene), svalstvo priečne pruhované srdcové.

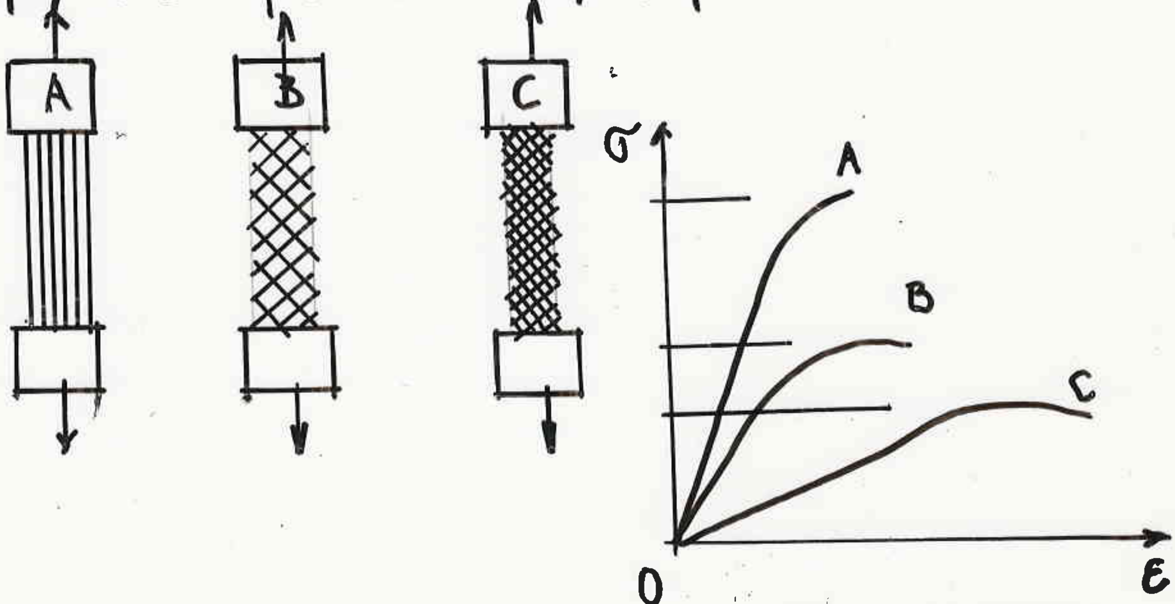
- Pojivá obsahujú okrem buniek ešte väčšie, alebo menšie množstvo medzibunečnej hmoty, ktorej veľkosť, zloženie a vlastnosti odpovedajú jednotlivým druhom pojiva. Medzibunečná hmota sa skladá z dvoch častí: zo základnej hmoty amorfnej a zo zložky vláknitej. Vláknitá zložka je vytvorená vláknami - fibrilami (kolagénnymi, elastickými a retikulárnymi). Pojivo sa na základe vlastností medzibunečnej hmoty sa môže vyvíjať ako väzivo, chrupavka a kosť.

• Vo väzivovom tkanive sú ďalej bunky stále (fixné) a bunky blúdiace. Každé z týchto buniek má svoju štruktúru a úlohu, napr. pohlcovať mikróby, alebo zabrániť zrážaniu krvi, atď.

• Väzivo funguje ako podporný systém. Udržuje po-hromade iné prvky tkaniva, tvorí pevné obaly výplne, pružné spoje, zabezpečuje tepelnú reguláciu, ale zúčastňuje sa pri látkovej výmene.

• Jednou zo základných fyziologických funkcií mäkkého tkaniva (napr. šlachy, väzy) je prenos síl v skelete a ochrana pred preťažením spoja.

• Veľký význam pri popise mechanickej odozvy mäkkého tkaniva je ich geometrické usporiadanie čo vyplýva z experimentálnych pokusov

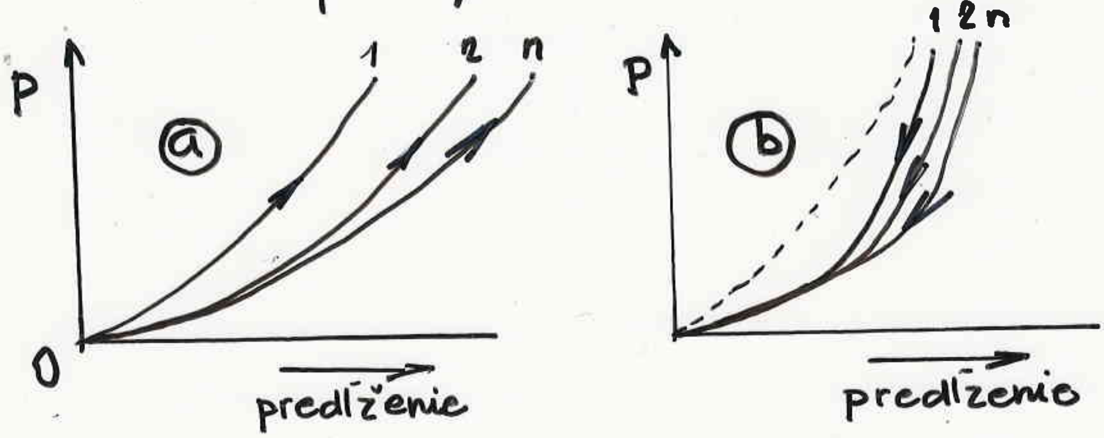


Teoretické usporiadanie tkaniva a výplne

(σ ~ ε) pri jednoosovom ťahu

- Pri jednoosovom cyklickom zaťažení a odľahčení sa najmä v okolí počiatku krivky ($\sigma \sim \varepsilon$) ukáže zložka viskózna a plastická

Krivka sa posúva do prava. Časť deformácie je vratná následkom dodatočných vlastností pružných



Cyklické zaťaženie : (a) - zaťažujúca vetva

(b) - vetva odľahčenia

IV-3 Popis vnútorných síl a deformácii

Väčsina živých tkanív a orgánov v priebehu stárnutia a patologických zmien podlieha veľkým posunutiam, rotáciam a konečným deformáciam. Pri cyklickom zaťažení sa tvoria hysterézne slučky.

Stárnutím sa cievy spevňujú a kostné tkanivo mäkne. Materiály majú väzkopružné vlastnosti

K mechanickej odozve živých tkanív je potrebné vychádzať z nelineárnej teórie mechaniky kontinua.

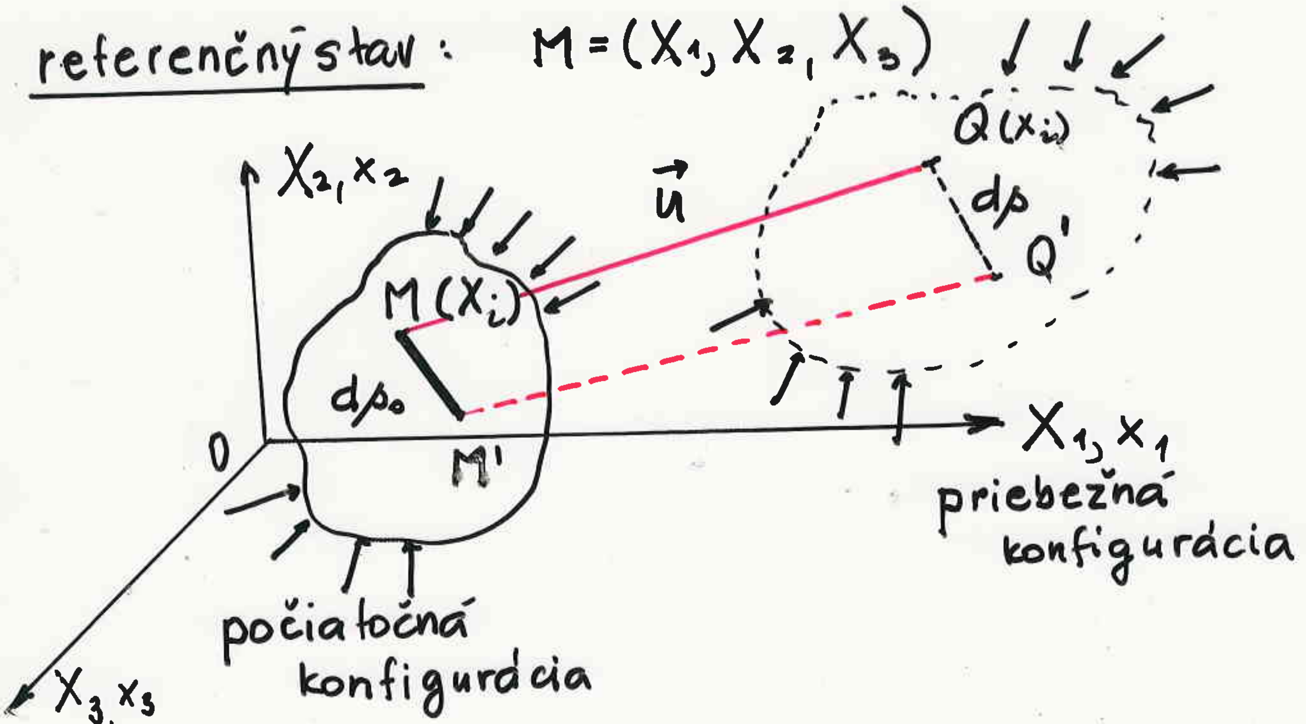
Používa sa tzv. Greenov prístup, kde konštitutívne rovnice tkaniva sa vyjadrújú pomocou hustoty deformačnej energie.

Ak ide o adiabatický dej alebo izotermický dej a nedochádza k prenosu iného typu energie, potom dokonale pružné tkanivo využije celú deformačnú energiu na zvýšenie svojej vnútornej energie.

Tkanivá sú ovšem pseudoelastické materiály (krivky zaťaženia a odľahčenia sa odlišujú) - potom hovoríme o tzv. pseudoelastickej energii

IV-3.1 Konečné deformácie. Greenov, Almansiho a Cauchyho tenzor deformácie

Poloha ľubovolného bodu v priebehu deformacie vzhľadom k jeho počiatočnej konfigurácii (referenč. stavu) referenčný stav : $M = (X_1, X_2, X_3)$



M - hmotnostná častica

M' - blízka hm. častica

$M' = (X_1 + dX_1, \ldots, X_3 + dX_3)$

po pretvorení $M \to Q \quad M' \to Q'$

$Q = (x_1, x_2, x_3) \to Q' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$

$$(1) \qquad \left\{ x_i = x_i(X_1, X_2, X_3);\ X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) \atop i = 1, 2, 3 \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ deformácia telesa je týmito vzťahmi jednoznačne určená

Posun častice $M \to Q$ zavedieme vzťahom

$$(2) \qquad \boxed{x_i = X_i + u_i}$$

Vzdialenosť $\overline{QQ'}$: (pre priebežnú konfiguráciu)

$$(3) \qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i dx_i = \boxed{\delta_{ij} dx_i dx_j}$$

Vzdialenosť $\overline{MM'}$: (pre referenčný stav)

$$(4) \qquad \boxed{ds_0^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j}$$

Potom pre rozdiel štvorov elementárnych úsekov (po deformácii a pred deformáciou)

(5) $(\overline{QQ'})^2 - (\overline{MM'})^2 \Rightarrow ds^2 - ds_0^2 = \delta_{ij}(dx_i dx_j - dX_i dX_j)$

Zo vzťahov (1) ďalej máme

(6) $$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \, , \quad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k$$

kde $\partial x_i / \partial X_k$ sú prvky matice gradientu deformácie F'.

Dosadením (6) do (5) dostaneme

(7) $$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_l} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} - \delta_{lk} \right) dX_l dX_k$$

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{lk} - \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) dx_l dx_k$$

čo môžeme prepísať do tvarov z hľadiska rôznych tenzorov deformácie

(8) $$ds^2 - ds_0^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j = 2 e_{ij} dx_i dx_j$$

kde

(9) $$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

čo sú zložky Greenovho tenzora deformácie

Podobne dostaneme

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) =$$

(10) $$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

čo sú zložky Almanziho tenzora deformácie

Z uvedeného vyplýva, že len štvorce rozdielov vzdialeností častíc po deformácii a pred deformáciou môžme takto jednoducho vyjadriť.

Vzťah $ds - ds_0$ je pre ďalšie použitie nevhodný.

Ak predpokladáme malé deformácie a to v zmysle infinitezimálnych hodnôt derivácii

$$\partial u_0/\partial X_j \text{ a } \partial u_i/\partial x_j$$

potom ich druhé mocniny vo vzťahoch (9) a (10) môžeme zanedbať, t.j potom

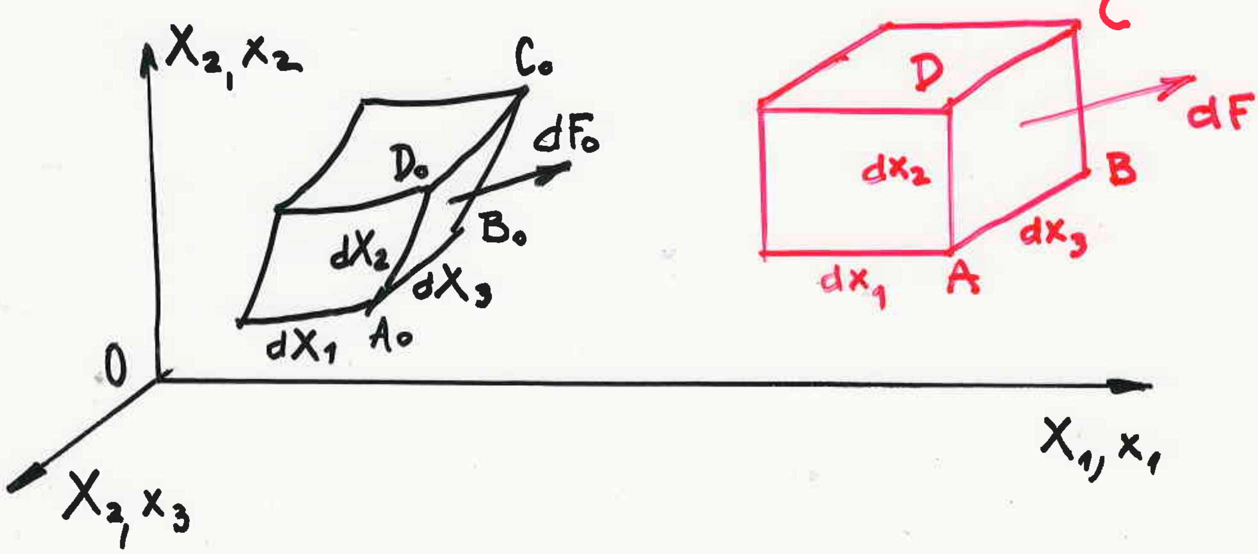
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Teda

$$E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}$$

IV-3.2 Cauchyho, Lagrangeov a Kirchhoffov tenzor napätia



- Uvažujme prvok, ktorý po deformácii má tvar kvádra. Pred deformáciou (stav referenčný) má tvar deformovaný
- Nech na povrchu ABCD pôsobí sila dF
- Vo východzej polohe mu odpovedá povrch $A_0B_0C_0D_0$ s príslušným vektorom dF_0.

? Aká je vzájomná závislosť medzi dF a dF_0 ?

Toto môžeme odvodiť niekoľkými pravidlami

a) Lagrangeovo pravidlo

Keď dF je bezo zmeny veľkosti, smeru a orientácie prenesený z ABCD na $A_0B_0C_0D_0$ (na nedeformovaný povrch)

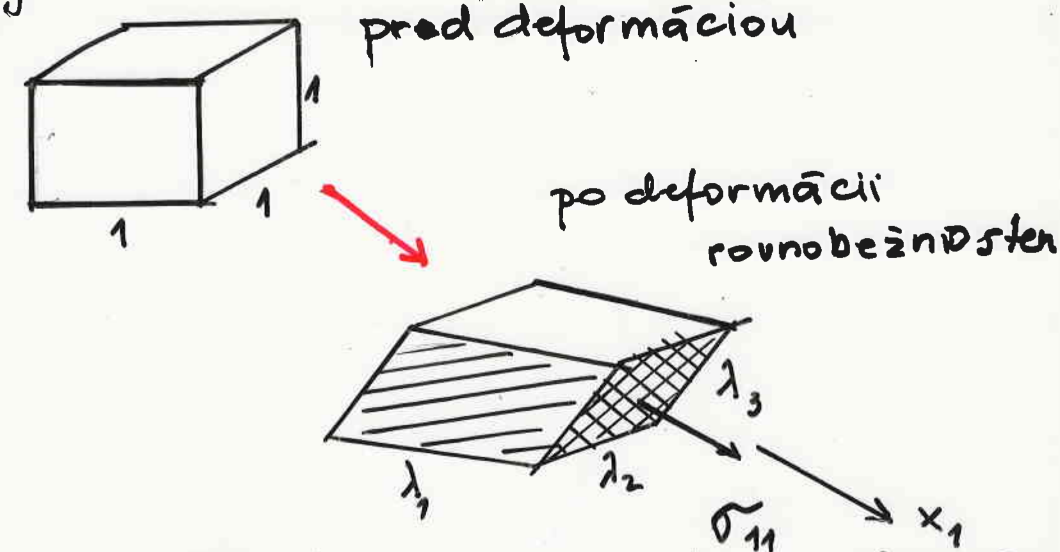
$$dF_0^{(L)} = dF$$

b) Kirchhoffovo pravidlo

Keď vektory dF_o a dF sú viazané pravidlom, akým sa riadi transformácia dĺžky prvku, t.j. zmena veľkosti a smeru sily dF je nasledujúca

$$dF_{oi} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, dF_j$$

Uvažujme elementárny prvok jednotkovej kocky



Cauchyho napätie σ_{11} v smere osi x_1 pôsobí na prvok deformovaného telesa. Výsledná sila bude

$$T_{11} = \sigma_{11}\lambda_2\lambda_3$$

K odvodeniu Kirchhoffovho napätia, združeného z východzej kocky je potrebné pretransformovať silu $\sigma_{11}\lambda_2\lambda_3$ k východziemu povrchu kocky podľa

$$dF_{oi} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, dF_j$$

(z deformácie vyplýva

$$x_1 = \lambda_1 X_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \lambda_1^{-1}$$

Odpovedajúca plocha v stave '0' je rovná 1
z toho potom

$$S_{11} = \sigma_{11} \lambda_2 \lambda_3 \frac{1}{\lambda_1} = T_{11}/\lambda_1$$

(pre nestlačiteľný materiál $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$

$$S_{11} = \sigma_{11} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \sigma_{11}/\lambda_1^2$$

Nech vektor sily dF pôsobí na povrch dA deformovaného telesa, ktorý má jednotkovú vonkajšiu normálu $\vec{n}$.
Vektor sily dF_0 pôsobí na povrch dA_0 vo východzej konfigurácii s jednotkovou vonkajšou normálou $\vec{n}_0$.
Na základe Cauchyho vzťahu a vzťahu $dF_0^{(L)} = dF$ platí

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dA = T_{ij} n_{0j} dA_0 = dF_{0i}$$

Na základe rovnice

$$dF_{0i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dF_j \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} dF_\alpha = S_{ji} n_{0j} dA_0$$

$$S_{ji} = \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} T_{j\alpha}$$

$$T_{j\alpha} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} S_{ji}$$

T_{ij} - Lagrangeove napätie pretransformované k originálu kocky

S_{ij} - Kirchhoffove napätie viazané k deformovanému tvaru kocky

σ_{ij} - Cauchyho napätie

IV-3.3 Rovnice rovnováhy v Lagrangeovej forme

Uvažujme kontinuum, ktoré zaberá v deformovanom stave oblasť V s povrchom A, čomu odpoveda v referenčnom stave V_o, A_o.

Teleso je v priebežnej konfigurácii (Eulerov popis) zaťažené vektorom vonkajšej sily P (vztiahnuté na jednotku povrchu). V Lagrangeovom popise je definovaná objemová sila F_o vztiahnutá na jednotku hmotnosti telesa.

ρ_o, ρ - sú odpovedajúce hustoty

Potom platí:

$$\rho\, dV = \rho_o\, dV_o \,; \quad F_{oi} = F_i \ (\text{obj. sily})$$

Ak uvažujeme objemové sily (objem sa nemení) Potom pri statickej rovnováhe pre oblasť V a V_o platí

$$\int_V F_i \rho\, dV = \int_{V_o} F_{oi}\, \rho_o\, dV_o$$

Výsledné sily na povrchu A alebo A_o telesa:

$$\int_A P_i\, dA = \int_A \sigma_{ij}\, n_j\, dA = \int_{A_o} T_{ij}\, n_{oj}\, dA_o$$

Keď aplikujeme Gaussovu teorému platí

$$\int_{A_o} T_{ij}\, n_{oj}\, dA_o = \int_{V_o} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \right) dV_o$$

Potom máme

$$\int_A P_i \, dA = \int_{V_0} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \right) dV_0$$

V prípade statickej rovnováhy bude

$$\int_{V_0} \left[\rho_0 F_{0i} + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \right) \right] dV_0 = 0$$

čo znamená, že súčet objemových a povrchových síl je rovný nule.

Nakoľko V_0 je ľubovolná oblasť, musí platiť

$$\boxed{\rho_0 F_{0i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} = 0}$$

Keď túto rovnicu vyjadríme pomocou Kirchhoffovho tenzora napätia, dostaneme

$$\boxed{\rho_0 F_{0i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) = 0}$$

V priebežnej konfigurácii (v deformovanej) platí známa rovnica z teórie pružnosti

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0}$$

$$\left(\sigma_{ij,j} + \rho F_i \right) = 0$$

kde σ_{ij} sú zložky Cauchyho tenzora napätia

IV-3.4 Väzkopružnosť živého tkaniva

Pre popis hysterézie, relaxácie a dotvarovania sa s výhodou používajú mechanické modely. Sú to zvlášť modely Kelvinov, Maxwellov, Voigtov a modely zložené z lineárnych pružín a tlmičov.

Predpokladáme, že okamžitá deformácia pružiny je priamoúmerná zaťaženiu.

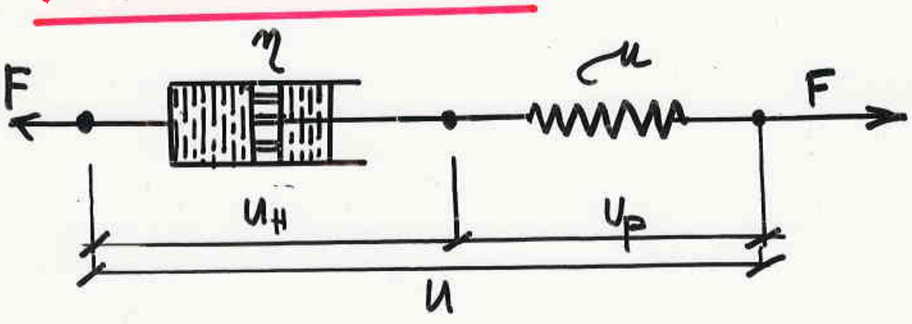
V tlmiči (je rýchlosť pohybujúceho sa piestu v kvapaline - napr. tlmič podvozku lietadla - úmerná pôsobiacej sile, t.j.

$$F = \mu u \quad \text{- pre pružinu}$$

$$F = \eta \dot{u} \quad \text{- pre tlmič}$$

kde μ - pružinová konštanta (tuhosť pružiny)
η - súčiniteľ viskozity

Maxwellov model



Vznikne rôzne posunutie (u_H, u_P) kvôli rôznym tuhostiam základných elementov

$$u = u_P + u_H \quad \text{- celkové posunutie}$$

$$\dot{u} = \dot{u}_P + \dot{u}_H \quad \text{- celková rýchlosť}$$

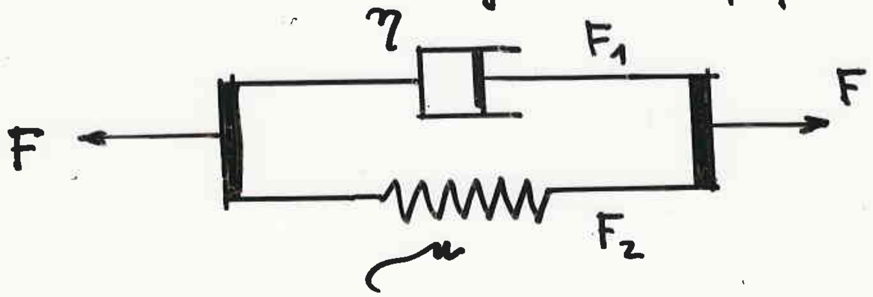
$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{\mu} + \frac{F}{\eta}$$

Ak pôsobí sila F v čase $t=0$ (v tvare jednotkovej skokovej funkcie) => pružina sa okamžite predĺži o $u(0) = F(0)/\mu$, ale okamžitý posuv tlmiča je nulový, pretože nebol čas k jeho aktivovaniu. Teda počiatočná podmienka pre diferenciálnu rovnicu má tvar

$$u(0) = \frac{F(0)}{\mu}$$

Voigtov model

Pružina a tlmič majú rovnaký posun u.

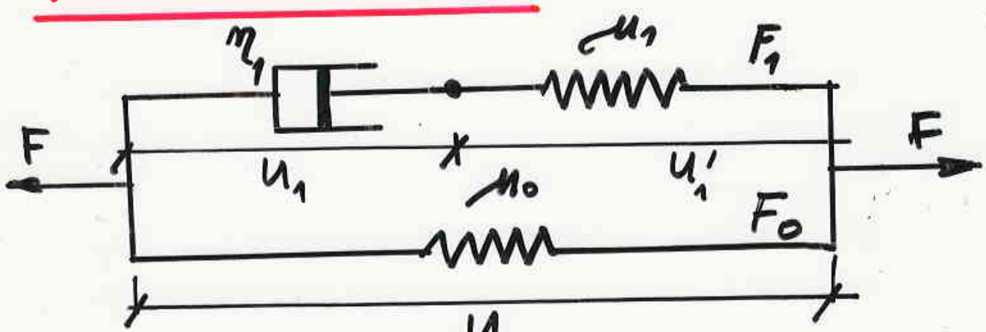


$$F = F_1 + F_2 = \eta \dot{u} + \mu u$$

Pri skokovom zaťažení silou F je začiatočná podmienka

$$u(0) = 0$$

Kelvinov model



Podľa obrázku:

a) $u = u_1 + u_1'$

b) $F = F_0 + F_1$

c) $F_0 = \mu_0 u$

d) $F_1 = \eta_1 \dot{u}_1 = \mu_1 u_1'$

Vzhľadom na zaradený Maxwellov model do systému máme

$$\eta_1 \dot{u} = F_1 + \left(\frac{\eta_1}{\mu_1}\right) \dot{F}_1$$

Silu F_1 (zo vzťahu b) vyjadríme a dostaneme reláciu medzi (F a F_0)

$$\eta_1 \dot{u} = F + \left(\frac{\eta_1}{\mu_1}\right) \dot{F} - \left[F_0 + \left(\frac{\eta_1}{\mu_1}\right) \dot{F}_0\right]$$

a zo vzťahu (c) dosadíme za F_0 a dostaneme

$$\boxed{F + \left(\frac{\eta_1}{\mu_1}\right) \dot{F} = \mu_0 u + \eta_1 \left[1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_1}\right)\right] \dot{u}}$$

Túto rovnicu môžeme zavedením parametrov upraviť

$$\boxed{F + \tau_\varepsilon \dot{F} = E_R \left(u + \tau_\sigma \dot{u}\right)}$$

kde

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta_1}{\mu_1}; \quad \tau_\sigma = \left(\frac{\eta_1}{\mu_0}\right)\left[1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_1}\right)\right]; \quad E_R = \mu_0$$

Pri skokovom zaťažení silou $F(0)$ a odpovedajúcemu posunu $u(0)$, pre začiatočnú podmienku máme

$$u(0) = u_1'(0) \text{ lebo } u_1 = 0 \text{ (vlastnosť tlmiča)}$$

$$F(0) = \mu_0 u(0) + \mu_1 u_1'(0) = (\mu_0 + \mu_1) u(0)$$

a $$F(0) + \tau_\varepsilon (\mu_0 + \mu_1) \dot{u}(0) = \mu_0 u(0) + \mu_0 \tau_\sigma \dot{u}(0)$$

Pri skokovej zmene zaťaženia je $\dot{u}(0) \to \infty$, takže

$$\tau_\varepsilon (\mu_0 + \mu_1) = \mu_0 \tau_\sigma; \quad (\mu_0 + \mu_1) = \frac{F(0)}{u(0)}$$

Konštanta τ_ε – relaxačný čas pri konštantnej deformácii. τ_σ – relaxačný čas pri konštantnom napätí.

Ak $F(t) = \text{konšt} = F(0)$ pôsobí v čase $t=0$; potom riešením vzhľadom k $u(t)$ → dostávame $u_c(t)$ t.j. tzv. creepovú funkciu (funkciu dotvarovania)

Pre jednotlivé modely potom z riešenia rovníc (obyčajné lineárne diferenciálne nehomogénne rovnice) máme:

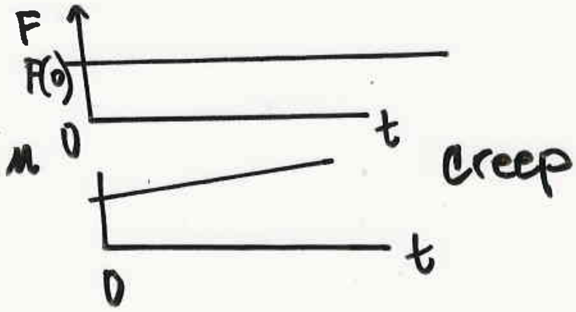
Maxwellovo teleso

pre $F = \text{konšt}$.

$$u_c(t) = t\,\frac{F}{\eta} + C \; ; \quad u_c(0) = C$$

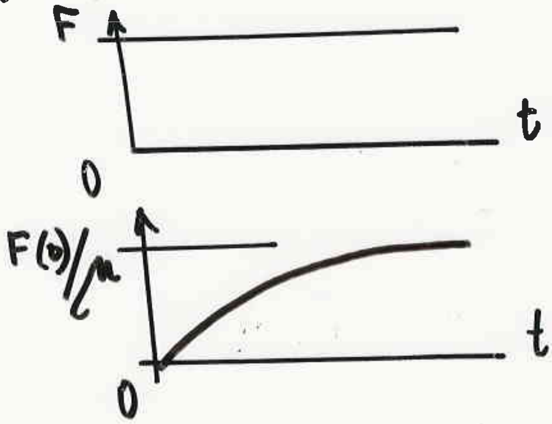
$$u_c(t) = u_c(0) + t\,\frac{F(0)}{\eta}$$

⇒ nevhodný model



Voigtove teleso

$$u_c(t) = \frac{1}{\mu}\left(1 - e^{-(\mu/\eta)t}\right) F(0)$$



Kelvinovo teleso (pre $F = \text{konšt}$)

$$u_c(t) = C e^{-(1/\tau_\sigma)t} + \frac{F}{E_R}$$

Pre $t=0^+$ platí

$$u_c(0)=u(0)=C+\frac{F(0)}{E_R}$$

kde $u(0)$ určíme z počiatočnej podmienky

$$\tau_\varepsilon(\mu_0+\mu_1)=\mu_0\tau_\sigma \qquad (\mu_0+\mu_1)=\frac{F(0)}{u(0)}$$

$$\tau_\varepsilon\frac{F(0)}{u(0)}=\mu_0\tau_\sigma\,; \qquad \frac{\tau_\varepsilon F(0)}{\mu_0\tau_\sigma}=u(0)$$

$$\frac{\tau_\varepsilon F(0)}{\mu_0\tau_\sigma}=C+\frac{F(0)}{E_R}$$

$$C=-\left(1-\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)F(0)$$

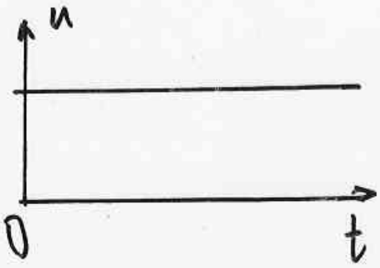
potom

$$\boxed{u_c(t)=\left(\frac{1}{E_R}\right)\left[1-\left(1-\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)e^{-(t/\tau_\sigma)}\right]F(0)}$$

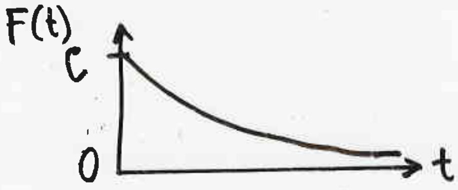
Keď vymeníme $F\longleftrightarrow u$ dostaneme retardačnú funkciu pre $u=\text{konšt.}=u(0)$

Maxwellovo teleso

$$F(t)=Ce^{-(\mu/\eta)t}, \qquad \dot{u}=0$$



pre $t=0^+$ $\quad C=F(0)=\mu\, u(0)$



potom

$$\boxed{F(t)=\mu\, e^{-(\mu/\eta)t}u(0)}$$

podobne sa dá odvodiť

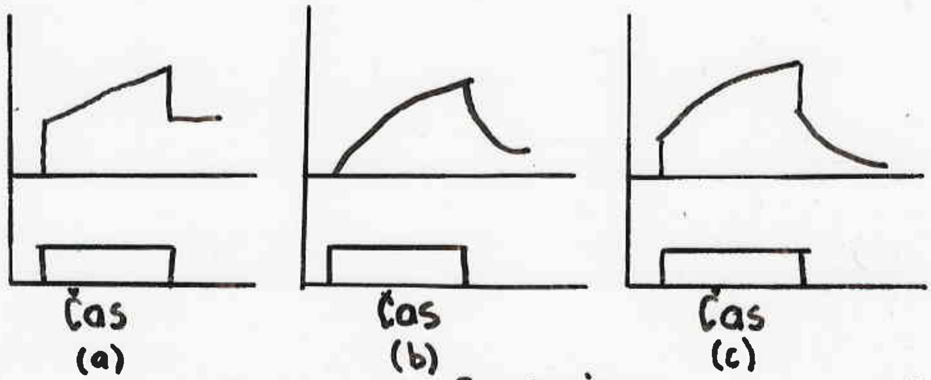
Voigtove teleso

$$F(t)=\mu\, u(0)$$ => toto teleso neretarduje

Kelvinove teleso

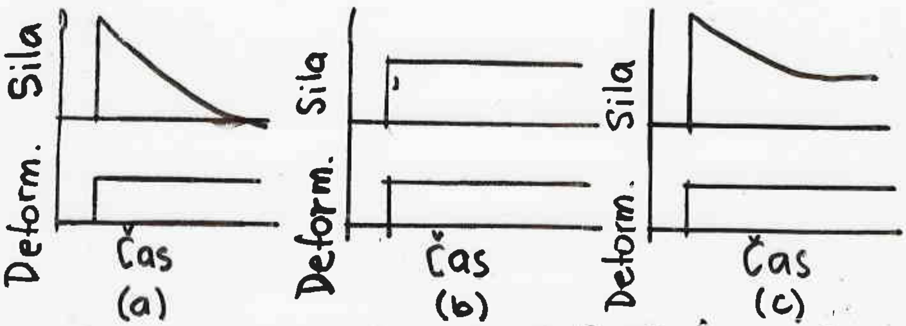
$$F(t)=E_R\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)e^{-(t/t_\varepsilon)}\right]u(0)$$

Priebehy relaxácie a retardácie (creep) pre jednotlivé telesá



Creepové funkcie

Maxwellova Voigtova Kelvinova



Relaxačné funkcie

Maxwellova Voigtova Kelvinova