Ottava giornata nazionale di Analisi Non Standard nelle scuole superiori

Atti del convegno

Firenze, 6 Ottobre 2018

La giornata di studio,
organizzata dall'associazione Mathesis sezione di Firenze, in collaborazione con il Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini" dell'Università di Firenze si è svolta Sabato, 6 Ottobre 2018.

A cura di *Bruno Stecca, Daniele Zambelli - Mathesis sezione di Verona*

info@matematicamente.it
ISBN 9788899988081
Aprile 2019

Indice

Presentazione **v**

1 Robinson non standard **1**

1.1 Metamatematica . . . 1
1.2 Hilbert e Artin . . . 3
1.3 La teoria dei modelli prima di Robinson . . . 5
1.4 La model completezza . . . 9
1.5 Completamenti e compagni . . . 14
1.6 Cantor e Robinson . . . 18
1.7 Tributo a Robinson . . . 20
1.8 Robinson in Italia . . . 21
Bibliografia . . . 22

2 Gli infinitesimi in Matematica tra Scienza e Filosofia **25**

2.1 I tre problemi della filosofia matematica . . . 25
2.2 Primo problema: come contare l'infinito . . . 26
2.2.1 I numeri cardinali . . . 29
2.2.2 I numeri ordinali . . . 32
2.2.3 Tre metodi per contare . . . 37
2.2.4 Somme transfinite . . . 38
2.2.5 Cardinali, ordinali e numerosità . . . 42
2.3 Secondo problema: la natura del continuo . . . 44
2.3.1 Il paradosso della bisezione del segmento . . . 44
2.3.2 Alla ricerca del continuo Euclideo . . . 45
2.3.3 La matematica non archimedea . . . 46
2.4 Terzo problema: i numeri infinitesimi . . . 47
2.4.1 Esistenza degli infinitesimi . . . 47
2.4.2 I numeri reali come arrotondamento dei numeri euclidei . . . 48
2.4.3 La nozione di derivata . . . 49
2.4.4 Gli infinitesimi in natura . . . 51
Bibliografia . . . 51

3 Delta Functions and Differentation of Discontinuous Functions **55**

3.1 Intuition . . . 55
3.2 Continuity . . . 56
3.2.1 Discontinuous functions . . . 56
3.3 Axioms . . . 57
3.4 Real numbers . . . 59
3.5 Induction, non Archimedean collections and internal sets . . . 59

3.5.1 Internal statements 60
3.5.2 Induction 60
3.6 External collections and proper numbers 61
3.7 The derivative 62
3.8 Continuity 62
3.9 Approximating non differentiable functions by $\mathcal{C}^\infty$ functions 63
3.9.1 When it is irrelevant how large is ultralarge 65
3.9.2 Asymmetrical delta functions 66
3.9.3 Delta functions 66
3.9.4 The Heaviside function can be approximated in many ways 67
3.10 Concluding remarks 67

4 Da Eudosso a Berkley a oggi: il pregiudizio sulle quantità trascurabili 69
4.1 Trascurabilità 69
4.2 Matematica greca 70
4.3 Aristotele 70
4.4 Zenone 71
4.5 Rifiuto dell'infinito anche potenziale? 71
4.6 Valore degli assiomi 71
4.7 Definizioni euclidee 72
4.8 Rapporto tra cerchi 74
4.9 Esaustione 74
4.10 Come indovinare il risultato? 75
4.11 Archimede 75
4.12 Velocità istantanea 77
4.13 Berkeley 78
4.14 Elementi separatori 79
4.15 Eliminazione degli infinitesimi 79
4.16 Che sono i numeri? 79
4.17 Proprietà 80
4.18 Peano 80
4.19 Robinson 81
4.20 Metaosservazione 82
Bibliografia 82

5 Calcolo integrale non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi 85
5.1 Introduzione 85
5.2 Premesse di calcolo differenziale 86
5.2.1 "Usurpare per eguali" 87
5.3 Il calcolo integrale 88
5.3.1 Integrali elementari di funzioni polinomiali 89
5.3.2 L'integrale di x^{-1} e la curva logaritmica 90
5.4 Le applicazioni del calcolo integrale 93

5.4.1 Le quadrature 94
5.4.2 Le rettificazioni 98
5.4.3 Le cubature, ovvero i volumi dei solidi di rotazione 99
5.4.4 L'integrale del logaritmo 101
5.4.5 Brevi note sull'integrale non standard 102
5.5 Conclusioni 102
Bibliografia 103

6 Percorso non standard per un Istituto Tecnico 105
6.1 Introduzione e presentazione del percorso 105
6.2 Il percorso: prima parte 106
6.3 Il percorso: seconda parte 110
6.4 Conclusioni 115
Bibliografia 115

7 Analisi alla maniera NSA o alla maniera di Cauchy Weierstrass? 117
7.1 Introduzione 117
7.2 La continuità 118
7.2.1 Percorso didattico 119
7.3 Derivate 119
7.3.1 La funzione quadratica e i polinomi 120
7.3.2 Il numero e e la funzione esponenziale 120
7.3.3 La derivata della funzione composta 122
7.4 Integrale definito 123
7.4.1 Percorso didattico 123
Bibliografia 124

8 Inserimento dell'Analisi Non Standard nel curriculum liceale 125
Bibliografia ragionata 131

9 Gli orologi di Fourier 133
9.1 Introduzione 133
9.2 Numeri complessi e lancette 134
9.3 Un rapporto notevole 139

10 Numeri iperreali in una classe terza 141
10.1 Nuovi numeri con cui giocare 141
10.2 Un'esplosione di numeri 142
10.3 Operazioni sui tipi 143
10.3.1 Classificazione e convenzioni 143
10.4 Numeri finiti e parte standard 144
10.5 Il confronto 144
10.6 Indistinguibili 145

10.6.1 Perché usare quantità trascurabili 146
10.6.2 Cosa posso trascurare e cosa no nei calcoli con gli iperreali? 146
10.6.3 Indistinguibilità e zero 147
Bibliografia 148

11 M. G. Agnesi: nuovi metodi di insegnamento dal passato 149
11.1 Maria Gaetana Agnesi 149
11.2 Il secondo volume delle Instituzioni Analitiche 151
11.3 Problema della tangente a una curva 152
11.4 Questione dei fondamenti dell'Analisi 153
11.5 Conclusioni 154
Bibliografia 155

12 Considerazioni sulla matematica presente nei monumenti fiorentini 157
Bibliografia 165

Presentazione

La Mathesis sezione di Firenze, per rispondere all'esigenza di diffusione di temi innovativi sorti e in atto sul territorio italiano per il miglioramento dell'insegnamento della matematica, ha realizzato in collaborazione con il Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini” dell'Università di Firenze, il Convegno nazionale “VIII Giornata di studio di Analisi Non Standard” per la Scuola Secondaria di secondo grado.

È ormai noto a tutti che la Mathesis, fondata nel 1895 da un piccolo gruppo di insegnanti di Scuola superiore, abbia assunto col tempo dimensioni sempre maggiori con l'aggiunta di illustri docenti universitari. Nei primi anni del Novecento, Guido Castelnuovo, allora Presidente dell'Associazione, chiamato a redigere i programmi della scuola, ritenne opportuno introdurre lo studio dell'analisi nel liceo moderno sostituito poi dal liceo scientifico. Oggi si sta affermando un nuovo approccio allo studio dell'analisi più funzionale all'insegnamento in quanto consente di distribuire i contenuti nel corso dell'intero triennio superiore anziché solo all'ultimo anno e al contempo permette al discente di riflettere maggiormente sui concetti basilari e di conseguire un'assimilazione più consapevole e convincente; la Mathesis fiorentina ha ritenuto doveroso far conoscere agli insegnanti il nuovo impianto dell'Analisi detta Non-Standard Analysis (NSA), opera di Abraham Robinson.

Il convegno ha avuto luogo il 6 ottobre, giorno in cui ricorreva il centenario della nascita di Abraham Robinson, proprio per ricordare il fondatore di NSA, il matematico che, fra tanti e significativi importanti contributi, ha saputo recuperare in modo logicamente rigoroso gli infinitesimi e rielaborare un quadro coerente e completo dell'analisi infinitesimale concepita da Leibniz e dai suoi contemporanei, abbandonata poi negli ultimi decenni del 1800.

Per l'occasione è stata ideata una locandina in cui è raffigurata la città di Firenze con i suoi principali edifici, Palazzo Vecchio, il Campanile di Giotto e la Cattedrale di Santa Maria del Fiore e sopra di essi, nel cielo, immagini di analisi non standard in movimento verso il Duomo, con l'intento di coniugare l'aspetto culturale, artistico e ricreativo con quello serioso di studio, scoperta e apprendimento.

La VIII Giornata nazionale di Analisi Non Standard si è svolta presso il Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini"; tenuto aperto eccezionalmente di sabato con garantito il servizio di sorveglianza, grazie all'intervento del Direttore, Giorgio Maria Ottaviani. Hanno preso parte al convegno quasi ottanta persone, tra docenti e cultori di matematica, provenienti da varie parti di Italia oltre da zone limitrofe a Firenze.

La giornata si è articolata al mattino con quattro conferenze, la prima del prof. Carlo Toffalori (Università di Camerino) inerente alla figura di Abraham Robinson con particolare riferimento ai suoi contatti con gli illustri matematici del suo tempo e alla sua vasta produzione scientifica.

Successivamente il prof. Vieri Benci (Università di Pisa) ha presentato una trattazione dei numeri infinitesimi coniugando scienza e filosofia, fornendo una nuova visione dell'infinito e dei problemi ad esso collegati.

Il prof. Richard O' Donovan, partendo dalla critica al concetto di continuità, presenta le funzioni continue come approssimazioni a funzioni discrete, prosegue sviluppando considerazioni sulla funzione Delta e sulla differenziazione delle funzioni discontinue utilizzando metodi dell'analisi infinitesimale. Un lavoro interessante e complesso che il professore sta attuando presso il College André-Chavanne di Ginevra.

Infine analizzando la nozione di quantità trascurabile, il prof. Ruggero Ferro (Università Verona) mette in evidenza i pregiudizi che si sono presentati nello sviluppo storico del percorso che da Eudosso conduce a Berkley e che hanno impedito di considerare le quantità trascurabili.

Il pomeriggio è stato dedicato all'esposizione delle sperimentazioni attuate dagli insegnanti nelle proprie classi, esperienze significative svolte sia negli istituti tecnici che nei licei.

Al fine di fornire allo studente le motivazioni e gli strumenti per un efficace apprendimento della NSA, il prof. Pietro Cacciatore (Padova) ha motivato l'importanza di preparare il terreno per un suo inserimento nel curriculo liceale, avendo cura di introdurla in un contesto di conoscenze storicamente e logicamente collegate tra loro; si è quindi soffermato su due argomenti propedeutici, Infinito in Matematica e Geometrie non euclidee.

Un confronto tra esperienze didattiche alla maniera non standard, con le equivalenti alla maniera di Cauchy e Weierstrass sui concetti basilari dell'analisi è stato presentato dal prof. Paolo Bonavoglia, presidente della sezione Mathesis di Venezia.

Un'introduzione dei numeri iperreali, da affrontare in una classe terza di un liceo scientifico, strutturata in modo tale da far divenire questi numeri uno strumento in grado di semplificare l'approccio all'analisi matematica, è stata proposta dal prof. Daniele Zambelli (Verona).

Le professoresse Anna Pivi, Elena Bellandi, Anna Secreti, Gabriella Tosi, insegnando in un istituto tecnico, dove già al terzo anno si presenta la necessità di dover utilizzare elementi di analisi per le materie di indirizzo, hanno descritto l'esperienza di analisi alla maniera non standard che da alcuni anni stanno svolgendo nelle loro classi, introducendo prima il calcolo delle derivate e successivamente quello dei limiti.

Infine il prof. Roberto Zanasi (Modena) è partito da un video che disegnava dinamicamente (software Geogebra) una sorprendente curva chiusa mediante il metodi dei cicli ed epicicli (analisi di Fourier), poi si è chiesto come giustificare agli studenti perché i coefficienti della serie di Fourier sono ottenuti mediante integrali, e ha risposto evidenziando come i coefficienti corrispondano alle grandezze delle lancette dell'orologio di Fourier tenute ferme da contro rotazioni del sistema: poiché tali grandezze si ottengono in modo diretto come parte standard di somme di infiniti infinitesimi, cioè di integrali alla maniera non standard, risulta chiaro il legame con l'integrazione.

Vi sono state, inoltre, due presentazioni centrate sul possibile ed utile recupero dei contenuti di uno storico manuale di matematica, Istituzioni matematiche ad uso della gioventù italiana, opera di una brillante scienziata italiana del '700: Maria Gaetana Agnesi.

Le professoresse Paola Magnaghi e Tullia Norandi (Politecnico Milano) hanno rilevato come l'Agnesi, mossa dal suo intento strettamente didattico, abbia proposto un metodo di insegnamento del calcolo differenziale improntato più sulle proprietà intuitive delle quantità infinitesime che sul rigore logico, rifuggendo da un'impostazione astratta meno adeguata per chi entra per la prima volta a contatto con i nuovi temi dell'analisi; le due relatrici evidenziano la possibilità di trarre dai libri dell'Agnesi molti suggerimenti ed esempi da usare per l'insegnamento dell'analisi.

La relazione dei professori Bruno Stecca e Leonardo Aldegheri di Verona si è incentrata sulla seconda parte del manuale dell'Agnesi, relativa al calcolo integrale. Essi hanno messo in evidenza come il modello geometrico adottato dall'autrice a scopo didattico sia pienamente funzionale all'insegnamento odierno nella scuola superiore e hanno precisato le analogie e le differenze fra i contenuti dello storico manuale e gli elementi di analisi non standard connessi a quei contenuti.

Al termine delle relazioni, si è svolta una passeggiata tra i monumenti fiorentini, guidata dal prof. Giuseppe Conti dell'Università di Firenze, alla scoperta della geometria ivi nascosta, quella geometria che possiede in sé una bellezza astratta non percepibile da tutti, ma capace di generare una bellezza concreta apprezzabile da chiunque. Enorme la soddisfazione e l'entusiasmo mostrati dai convegnisti durante l'itinerario artistico.

Gli interventi dei relatori sono stati nella maggior parte di alto livello e alcuni originali investendo il campo dell'Analisi non standard in ogni suo aspetto sia per quanto riguarda i nodi fondanti sia per quanto riguarda le attività di classe presentate, facendo comprendere come questa nuova impostazione stia penetrando e inserendosi sempre di più nell'insegnamento secondario.

La buona riuscita del convegno è frutto di un armoniosa collaborazione tra il comitato organizzatore e il comitato scientifico il quale, pur non essendo composto esclusivamente da docenti fiorentini, ma animato da una forte passione per l'Analisi non standard ha lavorato al meglio, sfruttando al massimo le proprie competenze in materia.

Hanno fatto parte del comitato organizzatore il prof. Andrea Colesanti (Università Firenze), la prof.ssa Silvana Bianchini (Presidente Mathesis sezione di Firenze), la prof.ssa Rosalia Velardi (Tesoreria di Mathesis sezione di Firenze) e del comitato scientifico i professori Ruggero Ferro (Università Verona), antesignano della didattica della NSA in Italia, Antongiulio Fornasiero (Università Firenze), Mauro Di Nasso (Università Pisa) e Bruno Stecca (Verona).

La stesura degli atti del convegno è stata curata dai professori Bruno Stecca e Daniele Zambelli. Essi hanno convenuto di riproporre fedelmente gli interventi redatti dai singoli oratori, con l'intento di riportare l'esigenza didattica di determinare fino a che punto discostarsi dal rigore per semplificare le delicate nozioni matematiche al fine di coglierne un'essenza comunicabile agli allievi: durante il convegno sono emerse varie posizioni, dal mantenere l'assoluto rigore grazie alla maggior semplicità dell'approccio non standard, al sorvolare, anche in una presentazione non standard, su alcune questioni delicate. I curatori lasciano così al lettore critico la valutazione delle posizioni emerse.

Concludo con una riflessione personale. L'attiva partecipazione dei convegnisti, rimasti incollati ai propri posti sino al termine dei lavori, mi ha condotto a comprendere che c'è tanto bisogno di approfondire ed impegnarsi per la diffusione dell'insegnamento dell'Analisi non standard. Mi sono resa conto che i docenti, sommersi dalla mole dei programmi, che ultimamente sono andati sempre più ad aumentare, da affrontare con studenti i più non motivati allo studio, sentono l'esigenza di attuare metodologie di insegnamento innovative che mirino al recupero del senso degli oggetti matematici, alla semplificazione dei contenuti e al coinvolgimento attivo e concreto del discente.

Aprile 2019

Silvana Bianchini
Presidente Mathesis sezione di Firenze

1

Robinson non standard

Carlo Toffalori [1]

1.1 Metamatematica

Tra i suoi anniversari, il 2018 appena trascorso ci ha consegnato il centenario della nascita di Abraham Robinson, avvenuta il 6 ottobre del 1918. Non ho mai avuto l'onore di incontrare Robinson. Quando lui scomparve prematuramente, nel 1974, io frequentavo il secondo biennio dell'Università e seguivo il primo corso elementare di Logica Matematica. Ma chi lo conobbe me lo descrive come "*persona squisita, di cultura* ***incantevole***" – un aggettivo che impressiona e intriga se accostato alla cultura. Evoca fascino, vastità e infinitamente di più. Tuttavia, se alla vastità vogliamo restringerlo, allora dobbiamo riconoscere che, pur essendo Robinson famoso soprattutto per l'analisi non standard, il suo apporto alla matematica va mirabilmente oltre. Stupisce per esempio, in chi come lui è ritenuto principalmente un logico, il gran numero di lavori, incluso un libro, dedicati all'aerodinamica subsonica e supersonica, alla teoria alare, alla meccanica strutturale e alle onde d'urto: legati sì alle sue personali peripezie durante la seconda guerra mondiale e al suo impegno nell'esercito britannico, tuttavia rilevanti e pregevoli anche a giudizio degli esperti. Viene allora in mente l'ammirato ricordo che di Robinson fa Simon Kochen in [YKKR]: "*anche come logico matematico, il suo punto di vista fu quello di un matematico applicato nel senso originario e migliore di questa espressione, ovvero nel senso dei matematici dei secoli 18° e 19°, che usavano problemi e osservazioni del mondo reale (ovvero la fisica) per sviluppare idee matematiche*". Una tale ricchezza di interessi, così come il connubio di teoria e prassi, logica e aerodinamica, matematica pura e applicata, non meravigliano più di tanto in un

[1] Sezione di Matematica, Scuola di Scienze e Tecnologie, Università di Camerino, carlo.toffalori@unicam.it.

grande matematico. Scriveva anzi David Hilbert in Problemi matematici [Hi]: "*Su questo gioco, alterno e sempre rinnovantesi, tra pensiero ed esperienza si basano – mi pare – quelle numerose e sorprendenti analogie, e quella apparente armonia prestabilita, che il matematico percepisce così spesso nelle problematiche, nei metodi e nei concetti dei diversi settori della conoscenza.*"

Troviamo allora tra i lavori di Abraham Robinson, e a prescindere dall'analisi non standard, oltre a contributi non sorprendenti alla filosofia, altri articoli dedicati alla didattica della matematica, alla sua storia, e poi alle equazioni differenziali, alla matematica economica eccetera. Ma soprattutto alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra. E' proprio di questo tema che vorrei parlare, dunque del Robinson "*non standard*", che poi nel suo caso corrisponde all'esatto contrario, cioè a non "*non standard*", estraneo almeno in apparenza al suo argomento più celebrato, ma non per questo meno meritevole d'attenzione.

Per introdurre il mio discorso, prendo spunto dall'intervento che Robinson tenne durante l'International Congress of Mathematicians ICM del 1950 ad Harvard, venerdì primo settembre, durante la Sezione VI, *Logica e filosofia*. Robinson parlava subito dopo il suo omonimo Raphael, marito di Julia Bowman, e a precederlo in quello stesso giorno c'era stato anche un contributo di Wanda Szmielew e Alfred Tarski. Colpisce che il programma della sezione lo presenti come affiliato al College of Aeronautics di Cranfield, UK. Ma il titolo del suo intervento recita *On the application of symbolic logic to algebra*, e la versione scritta include un brano che è rimasto celebre, quasi un programma dichiarato di ricerca: "*La logica simbolica può fornire utili strumenti agli sviluppi della matematica corrente, più in particolare dell'algebra e, sembrerebbe, della geometria algebrica. Questa è la realizzazione di un'ambizione [...] espressa da Leibniz in una lettera a Huygens già nel 1639*". S'asserisce quindi il ruolo della logica come sostegno dell'algebra, della geometria e della matematica nel suo complesso, in quanto visione "superiore" delle cose – superiore non perché migliore, ma perché più astratta e quindi più capace di cogliere le "*sorprendenti analogie*" e le "*armonie*" auspicate da Hilbert.

Robinson ribadirà il suo proposito all'inizio del suo libro *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra* [Ro4] del 1963 – "*il primo manuale della teoria dei modelli*". Vi leggiamo infatti che "*la metamatematica dell'Algebra ha come obiettivo l'analisi e lo sviluppo dell'algebra attraverso i metodi della logica matematica*". Segue un'altra frase che non manca di stupire, specie se comparata con certi indirizzi ultra-specialistici della matematica e della scienza dei nostri giorni: "*tracciare precise linee di confine all'interno della matematica è divenuto notoriamente difficile*". Opinione, peraltro, perfettamente in linea col parere di Hilbert sopra riferito, e ancor prima con l'esperienza dei grandi matematici dei secoli 18° e 19°.

E' giusto però spiegare a questo punto che si debba intendere per metamatematica dell'algebra e per teoria dei modelli. Nel primo caso, credo che l'etimologia parli da sola. Resta semmai da chiarire quale utilità possa trarre l'algebra da un simile approccio. Quanto alla teoria dei modelli, ci affidiamo per presentarla alle descrizioni, o meglio agli slogan, che ne forniscono due dei libri più famosi che la trattano, altrettante bibbie dell'argomento, seppure separate tra loro da oltre vent'anni. In ambedue i casi la teoria dei modelli è raffigurata con metafore aritmetiche, basate rispettivamente su addizione e sottrazione: secondo il manuale di Chang e Keisler del 1973 [CK], come

- algebra universale + logica;

stando invece a Wilfrid Hodges e ai suoi *Model Theory* [Ho2] e *A shorter Model Theory* [Ho1] degli anni novanta, come

- geometria algebrica – campi.

La seconda definizione, più vicina del tempo, allude anche alla critica maggiore che alla Teoria dei Modelli, e alla Logica Matematica in generale, viene rivolta, specie da quelli che non le conoscono: di carpire cioè idee e risultati brillanti e profondi di algebra e geometria, rivestirli di una patina d'astrazione e poi di rivenderli come nuovi e originali. Proposito di questo articolo è anche di smentire questi pregiudizi. Geometria algebrica senza campi, si diceva. E tuttavia, per illustrare e apprezzare il contributo di Robinson è indispensabile richiamare qualche breve premessa sui campi.

1.2 Hilbert e Artin

Partiamo dai campi algebricamente chiusi. Il così detto *teorema fondamentale dell'algebra* assicura che ogni polinomio di grado positivo $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$. Si dice *algebricamente chiuso* ogni campo che condivide con $\mathbb{C}$ la stessa proprietà. Un'analisi di queste strutture risale a un secolo fa, sviluppata da Ernst Steinitz. Da essa apprendiamo, tra l'altro, che ogni campo $\mathfrak{F}$ possiede estensioni algebricamente chiuse e, tra queste, una in qualche modo ottimale, ovvero la chiusura algebrica $\tilde{\mathfrak{F}}$ di $\mathfrak{F}$: un minimo ampliamento algebricamente chiuso (unico a meno di isomorfismi che fissano $\mathfrak{F}$ punto per punto). Ricordiamo poi il *teorema degli zeri* di Hilbert (il *Nullstellensatz*), che in una formulazione debole, ma utile per i nostri propositi, afferma:

se $\mathfrak{F}$ è un campo algebricamente chiuso, ogni sistema (finito o infinito) di equazioni a coefficienti in F, in un qualunque numero di indeterminate, se trova soluzione in qualche estensione di $\mathfrak{F}$, allora la ha già in $\mathfrak{F}$.

L'altro famoso *teorema della base* di Hilbert assicura che, se infinito, il sistema si può ridurre a uno equivalente e finito, così che diventa lecito assumere per semplicità a suo riguardo l'ipotesi di finitezza. La definizione stessa di campo algebricamente chiuso, o meglio la proprietà evidenziata dal teorema fondamentale dell'algebra si può poi vedere come un caso particolare del Nullstellensatz, quando

il sistema si riduce a un unico polinomio di grado positivo in una sola indeterminata: infatti l'algebra elementare ci insegna come ampliare il campo dei coefficienti in modo "semplice", aggiungendo una radice di quel polinomio e costruendo un ampliamento in cui quell'unica equazione ammette soluzione.
Passiamo ai campi ordinati reali chiusi. L'occasione ci viene fornita ancora da Hilbert, e stavolta da H17, il diciassettesimo dei suoi 23 problemi matematici del 1900. Esso si riferisce alle funzioni razionali a coefficienti reali – i quozienti di polinomi – definite ovunque nel campo reale $\mathbb{R}$, salvo che nei poli, cioè negli zeri del denominatore. Chiede di provare:

ogni funzione razionale $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}(\vec{x})$ semidefinita positiva (che assume cioè valore non negativo in ogni punto del suo dominio) è una somma finita di quadrati in $\mathbb{R}(\vec{x})$.

La questione fu risolta positivamente da Emil Artin e Otto Schreier in lavori degli anni 1926-27. La loro indagine si allarga però ai campi ordinati, ossia a quei campi dotati di una relazione d'ordine compatibile con la struttura algebrica, tale quindi che somme e prodotti di elementi positivi restino positivi. Tanto vale per $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, ma non per $\mathbb{C}$. È infatti proprietà basilare di qualsiasi campo ordinato che ogni somma di quadrati di elementi non nulli è positiva. Ma in $\mathbb{C}$ si ha che $i^2 + 1^2 = 0$. Artin e Schreier introdussero allora il concetto di *campo ordinato reale chiuso*: un campo ordinato $\mathfrak{F}$ che condivide con $\mathbb{R}$ (ma non con $\mathbb{Q}$!) le proprietà che

- ogni elemento non negativo è un quadrato,
- ogni polinomio di $\mathfrak{F}[x]$ di grado dispari ha almeno una radice in $\mathfrak{F}$.

E' questo, almeno, uno dei possibili modi di definire la nozione. Ma nella sostanza, e in termini molto più grossolani, un campo reale chiuso si può ritenere come "algebricamente chiuso" il più possibile, compatibilmente con la struttura di campo ordinato. Per esempio i reali non contengono radici quadrate di -1, e cioè soluzioni del polinomio $x^2 + 1 = 0$. Ma questa è l'unica ostruzione a che siano algebricamente chiusi, tant'è che basta ampliarli con i per arrivare all'intero campo complesso $\mathbb{C}$.
Anche stavolta si può introdurre per ogni campo ordinato $\mathfrak{F}$ *una chiusura reale* $\hat{\mathfrak{F}}$, ovvero un minimo ampliamento reale chiuso (unico a meno di isomorfismi che agiscono identicamente su $\mathfrak{F}$).
Il *teorema di Artin-Schreier* si applica poi a tutti i campi ordinati reali chiusi, affermando:

in ogni tale campo $\mathfrak{F}$, ogni $f(\vec{x}) \in \mathfrak{F}(\vec{x})$ semidefinita positiva è una somma finita di quadrati in $\mathfrak{F}(\vec{x})$.

In vista degli sviluppi futuri, e prima di concludere questa breve parentesi sui campi ordinati, rammentiamo pure la caratterizzazione che Hilbert fornì del campo reale $\mathbb{R}$ tra tutti i campi ordinati: a meno di isomorfismi è l'unico ***archimedeo*** (tale cioè che ogni elemento positivo è superato da qualche multiplo intero dell'unità) e ***completo*** (cioè tale che ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ha minimo confine superiore). I razionali condividono la prima di queste proprietà, ma non la seconda.

1.3 La teoria dei modelli prima di Robinson

Il 2018 ha commemorato anche il centenario della scomparsa di Georg Cantor, un grande della matematica e della logica, e il padre riconosciuto dell'aritmetica transfinita e della teoria degli insiemi. Si può allora ritenere che il 1918 abbia segnato una sorta di passaggio di testimone da Cantor a Robinson, un altro grande della logica e della matematica e probabilmente il massimo artefice della teoria dei modelli. In verità, tra i due le differenze abbondano. Torneremo a parlarne. Per ora ci limitiamo a sottolineare la seguente. Nell'aritmetica transfinita, Cantor non ebbe precursori e, si potrebbe aggiungere, neppure troppi collaboratori; seguì la sua strada rivoluzionaria inaugurando nuove impensabili e feconde prospettive di ricerca matematica. Al contrario Robinson contò nella teoria dei modelli i suoi anticipatori (oltre a sostenitori e rivali).
Leopold Löwenheim anzitutto, e soprattutto Thoralf Skolem, che concepì i primi modelli non standard dell'aritmetica e rimarcò così, per una stessa "teoria", la gran varietà dei mondi che la realizzano.
Ulteriori presagi in merito si colgono in quel teorema di compattezza che vide la luce nel 1930, dedotto da Gödel come corollario dell'altro suo teorema di completezza – attenzione: completezza, non incompletezza, che di Gödel è il risultato di gran lunga più celebre, e di cui tratteremo tra breve. Tornando al teorema di compattezza, esso si rivelò negli anni che seguirono uno strumento formidabile per la ricerca di nuovi impensabili mondi matematici (precisamente, "non standard"). A darne ulteriore dimostrazione, estesa a linguaggi più che numerabili, e ad applicarlo all'algebra, per esempio alla teoria dei gruppi, fu Anatoly Maltsev negli anni quaranta del secolo passato. Ma la sua prova più famosa, che si estende poi anche alla completezza, è quella di Leon Henkin del 1949. Del resto perfino il nome con cui il teorema è oggi noto è ben successivo al 1930, proposto da Tarski con motivazioni topologiche.
Appunto, Alfred Tarski. I prodromi della teoria dei modelli includono anche il metodo dell'*eliminazione dei quantificatori*, da lui sviluppato per provare teoremi famosi, come

- la decidibilità della teoria dei campi algebricamente chiusi, e del campo complesso $\mathbb{C}$,
- la decidibilità della teoria dei campi ordinati campi reali chiusi, e del campo reale $\mathbb{R}$,

dunque procedure che sanno decidere, per ogni enunciato su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$ che sia formulabile nel linguaggio del primo ordine per campi ordinati, o per campi, se questo

enunciato è o no vero in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Della logica del primo ordine e delle sue teorie parleremo tra un attimo. Aggiungiamo poi, per scrupolo, che Tarski elaborò il suo procedimento solo per i reali, e non per i complessi, ma che un adattamento a $\mathbb{C}$ è agevole, e anzi molto più semplice.
Sulla scia di questi risultati, altri interrogativi emergono in maniera naturale, proposti dallo stesso Tarski. Sta tra questi la domanda su analoghe procedure di decisione per la teoria di $(\mathbb{R}, \exp)$ dove $\exp(x) = e^x$ per ogni reale x, dunque dell'allargamento del campo ordinato dei reali con la funzione esponenziale. Sappiamo cogliere i fondamenti algebrici chiave di questa struttura, quando i polinomi da esaminare si allargano a quelli esponenziali?
Ancora Tarski e Maltsev, con Birkhoff e altri, contribuirono poi all'algebra universale, che Chang e Keisler identificano come basamento della futura teoria dei modelli.
Quest'ultima prende finalmente corpo negli anni cinquanta del secolo scorso. Scrive Tarski nel 1954 [Ta]: "*Negli ultimi anni, un nuovo ramo della metamatematica si è andato sviluppando. Si chiama teoria dei modelli e può essere visto come una parte della semantica delle teorie formalizzate.* ***I problemi studiati nella teoria dei modelli riguardano le mutue relazioni tra gli enunciati delle teorie formalizzate e i sistemi matematici in cui questi enunciati sono veri***" – i loro *modelli*. L'enfasi in neretto, qui come sotto, è mia.
Abraham Robinson ribadirà il concetto nell'incipit di [Ro4]: "*La teoria dei modelli si occupa delle relazioni tra le proprietà di* ***enunciati****, o di insiemi di enunciati, formulati all'interno di un* ***linguaggio formale*** *e le* ***strutture****, o classi di strutture, matematiche che rendono veri tali enunciati* [...] ***la teoria dei modelli e la metamatematica dell'algebra rappresentano l'una il naturale complemento dell'altra***".
Forse è il caso di aprire una breve parentesi per spiegare meglio ai lettori meno familiari con l'argomento il *gioco della logica*, ossia il contesto comune delle due citazioni. Ci riferiamo specificamente alla *logica del primo ordine*, che Hilbert sviluppò con suoi collaboratori come Bernays e Ackermann e che, seppure non "impeccabile", può tuttavia ritenersi, nel senso che vedremo, la "*migliore possibile*". Ora, l'itinerario già prospettato da Robinson e Tarski, che del resto lo organizzò in un suo famoso lavoro del 1935, consiste in questo:

- si sceglie anzitutto un linguaggio formale, che comprende i simboli necessari al nostro studio (quindi per l'uguaglianza, l'addizione e la moltiplicazione se si tratta di campi, uno in più per la relazione d'ordine se si passa ai campi ordinati) e si compongono con regole opportune le formule e gli enunciati che si intendono esaminare (a questo stato, una mera stringa di geroglifici),
- si determinano le strutture che devono valutare queste formule, specificando il contesto in cui esaminarle e assegnandovi a ogni simbolo la sua interpretazione,
- si definisce finalmente un concetto di verità, intesa come relazione tra strut-

ture e formule, per consentire una tale valutazione e conseguentemente l'assegnazione di un etichetta "vero" oppure "falso" a ogni formula in ogni struttura.

La logica del primo ordine consente di comporre formule

- usando simboli per relazioni (inclusa $=$), operazioni ed elementi chiave delle strutture da investigare e componendo così equazioni, disequazioni, eccetera;
- negando, congiungendo, disgiungendo, implicando, dunque adoperando i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e costruendo, per esempio, sistemi finiti, cioè congiunzioni, di equazioni e disequazioni;
- quantificando finalmente con $\forall$ e $\exists$, ma ***solo*** su variabili v per gli elementi delle strutture in esame ($\forall v, \exists v$);

impedisce però di

- quantificare su variabili per i sottoinsiemi, o per le funzioni etc. di tali strutture.

Per intendersi, a proposito del campo ordinato $\mathbb{R}$, è lecito costruire formule come

- $v^2 + 1 = 0$, l'equazione che poi genera la radice quadrata immaginaria di -1,
- oppure $\forall v(v \geq 0 \rightarrow \exists w(v = w^2))$ a significare a posteriori che ogni reale non negativo ha una radice quadrata,

impossibile esprimere la completezza alla Hilbert ("***ogni insieme*** *superiormente limitato ha un minimo confine superiore*") o lo stesso principio di Archimede. Sono comunque formulabili tramite un'infinità di enunciati dell'opportuno linguaggio:

- gli assiomi di campo algebricamente chiuso (di ogni caratteristica),
- gli assiomi di campo ordinato reale chiuso.

Aggiungiamo un tecnicismo, a scanso di equivoci: chiamiamo qui *enunciato* una formula, come $\forall v(v \geq 0 \rightarrow \exists w(v = w^2))$, in cui ogni variabile compare sotto la portata di un quantificatore che la riguarda.

Il sacrificio espressivo che così si richiede pare tuttavia rilevante: perché limitarsi a quantificare su elementi, e non su sottoinsiemi e funzioni, come del resto logiche più potenti consentono? Esiste per esempio una logica del secondo ordine che ammette esplicitamente questa facoltà. Allora perché non preferirla? C'è tuttavia un teorema di Per Lindström della così detta *teoria astratta dei modelli* – la metametamatematica dell'algebra – il quale garantisce che, come si preannunciava, la logica del primo ordine è al di là dei suoi impedimenti *la migliore possibile*. Essa dispone infatti, oltre che di un concetto di *verità* di una formula in una struttura, anche di una nozione di *dimostrabilità* di una formula tale che, per ogni insieme T di enunciati (presi come ipotesi) e per ogni enunciato E (da intendersi come possibile conseguenza), E si dimostra da T se e solo se E è vero in tutti i modelli di T. E' anzi questa una possibile versione del *teorema di completezza* di Gödel di cui si parlava poco fa. A livello rozzo di slogan, la proprietà diventa: nella logica del primo ordine "*vero = dimostrabile*", ciò che si prova è vero e cioè ch'è vero

si prova. Ma questa proprietà essenziale si perde nelle altre logiche più espressive: effetto anche dell'altro teorema più famoso di Gödel, l'incompletezza.
Un'altra parentesi, dedicata a un'ulteriore pignoleria: in logica si definisce *teoria* un insieme di enunciati che sia chiuso per "conseguenze" e inoltre coerente, cioè privo di contraddizioni, cioè ancora dotato di un qualche modello.
E' poi giusto sottolineare nuovamente il legame strettissimo che intercorre tra il teorema di completezza e l'altro già ricordato, e ugualmente valido al primo ordine: il *teorema di compattezza*, che finalmente formuliamo. Esso afferma che, *se T è una teoria e ogni sua porzione finita ha un suo modello, allora T ha modello*. Sarà bene sottolinearne il contenuto e le potenzialità applicative: se ogni porzione finita di T ammette un suo personalissimo modello, buono per lei ma non necessariamente per le altre, allora l'intera T ha complessivamente un modello. Per esempio: il campo $\mathbb{R}$ è archimedeo, pur tuttavia ammette elementi positivi maggiori di ogni intero, o insieme finito di interi, prefissato; dunque, per il teorema di compattezza esistono altri modelli della teoria del campo ordinato $\mathbb{R}$, e anzi sue estensioni, che includono elementi maggiori di ogni intero, cioè infiniti – conseguentemente anche elementi infinitesimi, come inversi di questi infiniti. E' questo il primissimo germe dell'analisi non standard, che poi dovrà tener conto non solo di elementi, ma anche di sottoinsiemi e funzioni meno connaturati con la logica del primo ordine.
Si costruiscono proprio così i *modelli non standard*, spesso stupefacenti ed esotici, di molte teorie. Tra questi stanno anche i modelli così detti *pseudofiniti*. Infatti, sempre per il teorema di compattezza, una teoria che possiede modelli finiti di cardinalità arbitrariamente grande – e tanto vale per quella dei *gruppi finiti*, o dei *campi finiti* – ammette anche modelli infiniti. Li si chiamano, appunto, pseudofiniti, e si pone il problema, caso per caso, di caratterizzarli algebricamente.
Quanto ai modelli infiniti, deriva ancora dal teorema di compattezza generalizzato a linguaggi più che numerabili il seguente risultato, noto come *teorema di Löwenheim-Skolem* perché presente implicitamente nelle ricerche dei due, ma frutto principalmente della rielaborazione di *Tarski*: *se una teoria ha un modello infinito, allora ha modelli di ogni cardinalità infinita*.
Così esistono:

- modelli dell'aritmetica (al primo ordine) che hanno *la potenza del continuo*,
- oppure modelli *numerabili* della teoria di tutti gli enunciati veri nel campo ordinato $\mathbb{R}$ (il campo ordinato dei reali algebrici, e non solo quello).

Emergono due chiare direzioni di ricerca nella nascente teoria dei modelli.

1. E' data una struttura $\mathfrak{U}$ (come il campo complesso $\mathbb{C}$ o il campo ordinato reale $\mathbb{R}$), o una classe $\mathfrak{K}$ di strutture (come i campi finiti), e si vuole descrivere la teoria di $\mathfrak{U}$, o di $\mathfrak{K}$, e quindi l'insieme degli enunciati veri in $\mathfrak{U}$, o in tutte le strutture di $\mathfrak{K}$.
2. Viceversa, è data una teoria *T*, presentata ordinatamente con i suoi enunciati, e si vogliono *classificare* i suoi modelli.

La seconda corrisponde perfettamente alle finalità della teoria dei modelli, come illustrate da Tarski e Robinson. Ma, a suo proposito, si pone un ovvio interrogativo preliminare, e cioè: che significa *classificare*?

- Il criterio in genere seguito dall'algebra è: a meno di *isomorfismo* $\simeq$.
- Ma c'è un secondo criterio suggerito dalla logica e basato sul concetto di *elementare equivalenza* $\equiv$. Due modelli si dicono elementarmente equivalenti se condividono la stessa teoria, cioè soddisfano gli stessi enunciati. Una classificazione si può allora ricercare anche su questo fondamento, ritenendo indistinguibili due modelli legati da $\equiv$.

Ora, è facile dimostrare che $\simeq$ implica $\equiv$. Non vale tuttavia il contrario: $\equiv$ non implica $\simeq$, come già assicura il teorema di Löwenheim-Skolem laddove prevede strutture che soddisfano gli stessi enunciati ma stanno in cardinalità diverse e quindi non ammettono biiezioni, tanto meno isomorfismi, che le collegano.
La classificazione delle strutture, o meglio dei modelli di una data teoria, a meno di $\simeq$ è l'obiettivo del formidabile programma di Saharon Shelah dagli anni Settanta, un capitolo emozionante della teoria dei modelli dopo Abraham Robinson.
Noi però ci concentriamo qui sull'altro possibile criterio dell'elementare equivalenza. Classificare le strutture a meno di $\equiv$ corrisponde a individuare i *completamenti* di una teoria, cioè le sue estensioni *complete*. Si chiamano infatti *complete* le teorie i cui modelli sono tutti elementarmente equivalenti tra loro, e che quindi coincidono con la teoria di ogni loro modello. Ne sono esempi, provati da Tarski proprio col metodo dell'eliminazione dei quantificatori,

- la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0, che quindi coincide con quella di $\mathbb{C}$,
- la teoria dei campi ordinati reali chiusi, che quindi è la stessa di $\mathbb{R}$.

Si noti che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica arbitraria, pur ammettendo l'eliminazione dei quantificatori nel linguaggio dei campi, non è tuttavia completa, potendosi distinguere tra i suoi modelli esempi di caratteristica 2, nei quali vale $1 + 1 = 0$, e altri, come il campo complesso, che smentiscono questa uguaglianza. L'eliminazione dei quantificatori assicura però che questo è l'unico ostacolo alla completezza. In altre parole i completamenti della teoria si ottengono specificando la caratteristica.
Ma è giunto finalmente il momento di descrivere il contributo di Abraham Robinson a queste problematiche.

1.4 La model completezza

Il quale contributo lambisce perfino la teoria astratta dei modelli. Esiste infatti un *teorema di consistenza* di Robinson, che compare in [Ro4], si collega a due risultati analoghi ottenuti in quegli anni, rispettivamente il *Lemma di interpolazione* di William Craig e il *Teorema di definibilità* di Evert Beth e si occupa nel dettaglio

della seguente situazione.
E' data nel primo ordine una teoria T di un linguaggio L. La si allarga in due linguaggi L_1, L_2 che estendono L indipendentemente, intersecandosi in L o in un suo sottoinsieme. Si ottengono così due teorie T_1, T_2 che espandono T in L_1, L_2 rispettivamente. La domanda è se T_1, T_2 sono conciliabili, nel senso che l'unione $T_1 \cup T_2$ è ancora una teoria coerente, dotata quindi di modelli. La risposta è sì, purché T sia completa – e c'è chi si è preoccupato di studiare in quali logiche una simile proprietà si conserva.
Non c'è fin qui nessuna traccia evidente di algebra, per quanto l'interesse di Robinson per la questione muova proprio da queste motivazioni. In effetti la novità di gran lunga più rilevante delle idee di Robinson sta nel collegamento tra teoria dei modelli e, appunto, algebra. Il concetto chiave da lui elaborato in questo ambito è quello di *model completezza*. Lo troviamo sviluppato non solo in [Ro4], ma anche in precedenza, nel 1956, in *Complete Theories*, un altro dei suoi libri famosi [Ro1]. Per introdurlo, occorre un'altra piccola digressione sul concetto di *estensione*. Si tratta di nozione largamente adoperata, per esempio, tra i campi, quando si parla di ampliamenti e sottocampi. Allo stesso modo si introducono tra i campi ordinati gli ampliamenti ordinati, o i sottocampi ordinati. L'algebra universale e la logica matematica consentono di generalizzare e studiare le estensioni anche tra strutture $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di una stessa classe, o tra i modelli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di una teoria T. Tra queste estensioni $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ce ne sono alcune con proprietà particolari.

- Quelle *esistenziali* anzitutto, ispirate in qualche modo dal Nullstellensatz di Hilbert. In esse ogni enunciato esistenziale che in $\mathfrak{A}$ si propone, nel senso che ammette *parametri* di A, e che in $\mathfrak{B}$ è soddisfatto, è di conseguenza vero anche in $\mathfrak{A}$. Nel caso dei campi algebricamente chiusi si ha infatti, in forma sostanzialmente equivalente: ogni sistema di polinomi a coefficienti in A che ha radice in un ampliamento $\mathfrak{B}$ la ha di conseguenza anche in $\mathfrak{A}$.
- Poi le estensioni *elementari*, per le quali $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ soddisfano esattamente gli stessi enunciati a parametri in A, esistenziali e non.

Una teoria T si dice *model completa* se ogni estensione di suoi modelli è elementare, o equivalentemente, come proprio Abraham Robinson dimostrò, se ogni estensione di suoi modelli è esistenziale. (In verità questa denominazione italiana *model completa* non si trova sui dizionari della lingua, a meno che non si intenda *model* come troncamento poetico di *modello*; è quindi, più che altro, una sorta di neologismo, derivato dall'assonanza con l'inglese *model complete*; ha il pregio dell'immediatezza, tanto più se confrontata con traduzioni grammaticalmente più corrette e sensate, come *teoria completa rispetto ai modelli*; come che sia, è ormai entrata nell'uso degli addetti ai lavori).
Non è difficile provare che una teoria con l'eliminazione dei quantificatori è conseguentemente model completa. Di conseguenza tutti i risultati di Tarski sull'eliminazione dei quantificatori, in particolare quelli che riguardano tanto i campi algebricamente chiusi quanto i campi ordinati reali chiusi, si trasmettono automaticamente alla model completezza. Ma l'approccio di Robinson si rivela ugualmente

innovativo, e anzi più nitido e diretto nelle sue applicazioni. Consideriamo per esempio il caso dei campi algebricamente chiusi, ove si ha:

Teorema. *La teoria dei campi algebricamente chiusi (di qualsiasi caratteristica) è model completa*.

Un corollario del teorema di eliminazione di Tarski, si diceva, anche se, lo ribadiamo, Tarski non trattò mai specificamente i campi algebricamente chiusi. Tuttavia la dimostrazione tarskiana, quale si desume dall'analisi del caso reale chiuso, non evita un uso diffuso di strumenti tecnici riguardanti campi e polinomi. Quella di Robinson, al contrario, è sobria e trasparente nella sua architettura. I suoi ingredienti chiave sono:

- la chiusura algebrica di un campo $\mathfrak{F}$;
- l'unicità del tipo di isomorfismo di un'estensione semplice trascendente $\mathfrak{F}(t)$ di un campo $\mathfrak{F}$;
- finalmente un concetto logico ideato proprio da Robinson, quello di **diagramma** di una struttura, nella fattispecie di un campo $\mathfrak{F}$, che è un insieme di enunciati a parametri in quella struttura adatto a caratterizzarne le estensioni.

Gli stessi strumenti, con i necessari adattamenti, si applicano al caso reale chiuso, stavolta trattato in dettaglio pure da Tarski.

Teorema. *La teoria dei campi ordinati reali chiusi è model completa*.

Tarski adopera metodi alla Sturm per l'individuazione del numero delle radici reali dei polinomi a coefficienti reali. Robinson si appoggia invece sui fondamenti già evidenziati:

- la chiusura reale di un campo ordinato;
- il ricorso al diagramma;
- la caratterizzazione degli ampliamenti ordinati semplici trascendenti $\mathfrak{F}(t)$ di un campo ordinato reale chiuso $\mathfrak{F}$, che stavolta sono individuati a meno di isomorfismi dalla sezione che l'elemento trascendente t determina sull'insieme ordinato F.

Ci sono criteri che dalla model completezza deducono la completezza e si applicano proprio alle teorie dei campi algebricamente chiusi (di fissata caratteristica) e dei campi ordinati reali chiusi. Ma, soprattutto, ci sono le *applicazioni della model completezza all'algebra* che già si esaltavano, a cominciare da una nuova, elegante dimostrazione del Nullstellensatz di Hilbert nella sua formulazione più classica. Essa sostiene:

siano $\mathfrak{F}$ un campo algebricamente chiuso, $f(\vec{x})$ un polinomio di $\mathfrak{F}[\vec{x}]$, I un ideale di $\mathfrak{F}[\vec{x}]$, con $\vec{x}$ stringa di indeterminate di lunghezza n arbitraria; sono allora equivalenti le affermazioni:

(a) *$f(\vec{x})$ si annulla in tutti gli elementi $\vec{a} \in F^n$ in cui si annullano tutti i polinomi di I ($f(\vec{x})$ annulla cioè la varietà algebrica generata da I)*;
(b) *qualche potenza $f^m(\vec{x})$ di $f(\vec{x})$, con m intero positivo, sta in I ($f^m(\vec{x})$ sta cioè nel radicale di I)*.

La prova dell'implicazione (a) $\Rightarrow$ (b) [quella più impegnativa] procede per assurdo, evolvendosi come segue.

- Sia I un controesempio massimale per inclusione (l'esistenza è garantita dal lemma di Zorn, e quindi si affida all'assioma della scelta).
- Allora I è un ideale primo (come si dimostra sfruttando la negazione di (b)).
- Dunque $\mathfrak{F}[\vec{x}]/I$ è un dominio di integrità che estende $\mathfrak{F}$ e contiene una radice $\vec{x}+I$ di tutti i polinomi di I, ma non di $f(\vec{x})$.
- Attenzione: $\mathfrak{F}[\vec{x}]$ è Noetheriano, e dunque I ha un insieme finito di generatori. Annullare questi generatori equivale ad annullare tutti i polinomi di I.
- Passando prima al campo dei quozienti di $\mathfrak{F}[\vec{x}]/I$ e poi alla sua chiusura algebrica troviamo un campo algebricamente chiuso che estende $\mathfrak{F}$ e contiene una radice dei generatori di I ma non di $f(\vec{x})$ (una proprietà esprimibile al primo ordine con l'uso di parametri di F – i coefficienti dei polinomi coinvolti – dato che questi ultimi sono in numero finito).
- A motivo della model completezza, altrettanto vale per $\mathfrak{F}$, e questo contraddice (a).

Abraham Robinson ottiene inoltre una nuova, semplice dimostrazione della soluzione positiva di H17 e quindi del già citato *teorema di Artin-Schreier*:

per ogni campo ordinato reale chiuso $\mathfrak{F}$, ogni frazione algebrica $f(\vec{x}) \in \mathfrak{F}(\vec{x})$ semidefinita positiva è una somma finita di quadrati in $\mathfrak{F}$.

E' notevole che nel suo *Basic Algebra* del 1974, una delle trattazioni più autorevoli dell'algebra astratta [Ja2], Nathan Jacobson, a riguardo della teoria di Artin e Schreier, adotti proprio l'approccio di Abraham Robinson, risalente al 1955 e quindi giovane di neppure venti anni, sostituendolo a quello più classico da lui seguito nella precedente opera *Lectures in Abstract Algebra* [Ja1].
La prova di Robinson procede nuovamente per assurdo. Sia quindi $f(\vec{x}) \in \mathfrak{F}[\vec{x}]$ un possibile controesempio.

- Si prende dapprima atto che $\mathfrak{F}(\vec{x})$ estende $\mathfrak{F}$ almeno come campo, a prescindere cioè da ogni ordinamento, e inoltre è *formalmente reale*, nel senso che una somma di quadrati è nulla se e solo se la base di ogni singolo addendo è nulla.
- Si usa adesso un risultato di Artin e Schreier, secondo cui si può dotare $\mathfrak{F}(\vec{x})$ di una relazione binaria $\geq$ che fa di $\mathfrak{F}(\vec{x})$ un campo ordinato e rende $f(\vec{x}) < 0$.

- A questo punto la prova di Robinson procede in modo del tutto originale, rilevando che esiste in $\mathfrak{F}(\vec{x})$ una stringa di elementi, $\vec{x}$ appunto, che rende la funzione razionale $f(\vec{x})$ negativa – condizione esprimibile come un enunciato del primo ordine a parametri in F, corrispondenti ai coefficienti di $f(\vec{x})$.
- Altrettanto vale di conseguenza nella chiusura reale $\widehat{\mathfrak{F}(\vec{x})}$ di $\mathfrak{F}(\vec{x})$.
- La restrizione della relazione di ordine di $\widehat{\mathfrak{F}(\vec{x})}$ a F rende $\mathfrak{F}$ un campo ordinato.
- Siccome $\mathfrak{F}$ è un campo reale chiuso, l'unico ordinamento di campo ordinato per $\mathfrak{F}$ è quello in cui gli elementi non negativi coincidono con i quadrati. Perciò la restrizione della relazione di ordine a F coincide con l'ordine originario.
- Quindi $\widehat{\mathfrak{F}(\vec{x})}$ estende $\mathfrak{F}$ anche come campo ordinato.
- Grazie alla model completezza, si conclude che pure $\mathfrak{F}$ contiene una stringa di elementi che rende $f(\vec{x})$ negativo, e questo contraddice l'ipotesi.

La conseguenza più famosa e celebrata dell'approccio di Robinson è tuttavia costituita dal teorema di Ax, Kochen ed Eršov che risolve un'altra congettura di Artin. Ci limitiamo a brevi cenni a suo proposito. Infatti il contesto è, stavolta, ancora più impegnativo, riguardando i campi $\mathbb{Q}_p$ dei numeri p-adici al variare di p tra i numeri primi. Nella formulazione più adatta per i nostri propositi la *Congettura di Artin* sostiene:

*per ogni scelta di interi positivi n, d con $n > d^2$ e per **ogni** primo p, qualsiasi polinomio $f(\vec{x}) \in \mathbb{Q}_p[\vec{x}]$ omogeneo di grado d e in n indeterminate ha almeno una radice non nulla in $\mathbb{Q}_p$.*

Ogni sua istanza, per p, n, d fissati, si formula come un enunciato dell'opportuno linguaggio del primo ordine. Il teorema provato da James Ax e Simon Kochen e, indipendentemente, da Yuri Eršov negli anni 1965-66 garantisce una soluzione positiva in forma asintotica, affermando:

*per ogni scelta di interi positivi p, n con $n > d^2$ e per **quasi ogni primo** p (cioè per tutti i primi p, salvo al più un numero finito), qualsiasi polinomio $f(\vec{x}) \in \mathbb{Q}_p[\vec{x}]$ omogeneo di grado d e in n indeterminate ha almeno una radice non nulla in $\mathbb{Q}_p$.*

Si tratta peraltro della migliore risposta possibile, perché un controesempio di Guy Terjanian del 1966 fornisce valori di p, n, d che smentiscono la congettura nella sua forma assoluta, per ogni p. La dimostrazione del teorema usa tecniche di ultraprodotti, ma fa anche uso basilare delle idee di Robinson. Lui stesso, del resto, aveva considerato in [Ro1] l'ambito dei campi valutati, che è quello della congettura, introducendo la teoria dei campi algebricamente chiusi valutati, dimostrandone la model completezza in un linguaggio appropriato e classificandone tutti i completamenti.

A riguardo di James Ax, è giusto menzionare, prima di completare il capitolo, la caratterizzazione da lui fornita nel 1968 dei *campi pseudofiniti*, ovvero dei modelli infiniti $\mathfrak{F}$ della teoria dei campi finiti. Questi si descrivono come segue:

- $\mathfrak{F}$ è perfetto (ovvero $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^p$ se $\mathfrak{F}$ ha caratteristica prima p),
- a meno di isomorfismi $\mathfrak{F}$ ha esattamente un'estensione di ogni possibile grado finito positivo,
- ogni varietà assolutamente irriducibile su $\mathfrak{F}$ ha almeno un punto in $\mathfrak{F}$ (una sorta di Nullstellensatz).

La dimostrazione usa nuovamente gli ultraprodotti, ma anche i nuovi concetti e metodi di Robinson.

1.5 Completamenti e compagni

Prendiamo ancora spunto da campi e campi ordinati. A riguardo dei primi abbiamo già constatato che:

(i) un campo algebricamente chiuso è ovviamente un campo, e viceversa ogni campo ha una qualche estensione algebricamente chiusa, quale la sua *chiusura algebrica*;
(ii) ogni estensione di campi algebricamente chiusi è esistenziale, e perfino elementare (la model completezza).

Ne segue facilmente che:

(*) *ogni estensione di un campo algebricamente chiuso $\mathfrak{F}$ a un campo $\mathfrak{F}'$ è esistenziale* (tramite la chiusura algebrica $\widetilde{\mathfrak{F}'}$ di $\mathfrak{F}'$, grazie appunto a (i) e (ii)).

Anzi, un campo $\mathfrak{F}$ soddisfa questa proprietà (*), nel senso che ogni sua estensione a un campo è esistenziale, se e solo se $\mathfrak{F}$ è algebricamente chiuso.
Analoghe considerazioni valgono per campi ordinati e campi ordinati reali chiusi.
Come generalizzare? Abraham Robinson affronta dal 1963 in poi la questione, proponendo i concetti di *model compagno* e di *model completamento* di una teoria.
Eccone la definizione. Il contesto è quello astratto di due teorie T, T^*, di uno stesso linguaggio, come appunto quelle di campi e campi algebricamente chiusi, o di campi ordinati e di campi ordinati reali chiusi. Si dice che T^* è *model completamento* di T se

(i) ogni modello di T ammette un modello di T^* come estensione e viceversa;
(ii) T^* è model completa;
(iii) vale un'ulteriore condizione, che riproduce in qualche modo la situazione della chiusura algebrica di un campo e della chiusura reale di un campo ordinato e richiede specificamente che, per ogni modello $\mathfrak{U}$ di T, l'unione di T^* e del diagramma di $\mathfrak{U}$ sia completa (dunque che l'estensione di $\mathfrak{U}$ a un modello di T^* sia unica a meno di $\equiv$).

Se invece valgono solo (i) e (ii), T^* si chiama un model compagno di T.
Sulla base delle precedenti considerazioni, si verifica che:

- la teoria dei campi algebricamente chiusi è il model completamento della teoria dei campi,
- la teoria dei campi ordinati reali chiusi è il model completamento della teoria dei campi ordinati, ma si riduce al solo model compagno se si rinuncia a un simbolo per la relazione d'ordine.

Si mostra poi che un model compagno, se esiste, è unico. Si forniscono criteri per garantirne l'esistenza, o per assicurare ch'esso sia addirittura un model completamento (in termini di eliminazione dei quantificatori e di proprietà di amalgamazione).
Si tratta dunque di metamatematica genuina, e tuttavia nuovamente feconda di applicazioni all'algebra. La più famosa riguarda probabilmente *i campi differenzialmente chiusi* e la *chiusura differenziale*. L'idea dei campi differenziali precede sia pure di poco Robinson e risale a Joseph Ritt e alla metà del secolo scorso. Queste strutture si possono introdurre come coppie $(\mathfrak{F}, D)$ dove $\mathfrak{F}$ è un campo e D è una funzione di F in F che soddisfa le usuali leggi della derivazione: per ogni scelta di $a, b \in F$,

$$D(a+b) = D(a) + D(b), \quad D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b.$$

Una tale assiomatizzazione si esprime facilmente tramite enunciati del primo ordine. I campi differenziali sono allora campi di funzioni, tant'è che i loro esempi includono, a parte il caso banale di un campo arbitrario $\mathfrak{F}$ cui si impone una derivata D costantemente nulla, modelli più "seri" e significativi, come

- il campo $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}(x)$ delle funzioni razionali in x a coefficienti in un campo $\mathfrak{K}$, ove D coincida con l'usuale $\frac{d}{dx}$,
- per U aperto connesso non vuoto di $\mathbb{C}$, il campo $\mathfrak{F}$ delle funzioni meromorfe di U in $\mathbb{C}$, ove si assuma nuovamente per D l'usuale derivata.

L'accento si sposta poi dagli usuali polinomi algebrici ai polinomi *differenziali*, quelli che compaiono nelle equazioni differenziali.
Il contributo di Abraham Robinson e teoria dei modelli all'argomento è datato 1959 e si concretizza nel seguente teorema:
la teoria dei campi differenziali di caratteristica 0 ha un model completamento, che è la teoria dei campi differenzialmente chiusi di caratteristica 0.
Sarà un'allieva di Robinson, Carol Wood, a estendere poi nel 1973 il risultato a ogni possibile caratteristica prima p, per la quale tuttavia la teoria dei campi differenzialmente chiusi è solo il model compagno di quella dei campi differenziali. Nel frattempo un'altra giovane matematica, Lenore Blum, studentessa stavolta non di Robinson ma del suo collega Gerald Sacks, aveva fornito nella sua tesi di dottorato del 1968 un'elegante assiomatizzazione al primo ordine dei campi differenzialmente chiusi di caratteristica 0, e dedotto da risultati astratti generali di Saharon Shelah, sempre per ogni campo differenziale in caratteristica 0, l'esistenza e l'unicità a meno di isomorfismi di una *chiusura differenziale*, ossia di un minimo ampliamento

differenzialmente chiuso.
I campi differenzialmente chiusi assumono in definitiva, tra i campi differenziali, lo stesso ruolo dei campi algebricamente chiusi tra i campi o dei campi reali chiusi tra i campi ordinati. Con una differenza sostanziale, però: che, mentre campi algebricamente chiusi e campi reali chiusi preesistono alla teoria dei modelli, i campi differenzialmente chiusi devono a Robinson e alla teoria dei modelli il merito di averli introdotti. Di più: se un amico ci domandasse un esempio di campo algebricamente chiuso, sarebbe facile rispondergli "*il campo complesso*", così come, se l'amico ci domandasse un esempio di campo ordinato reale chiuso, sarebbe facile rispondergli "*il campo reale*". Ma se lo stesso amico ci chiedesse un esempio di campo differenzialmente chiuso, perfino in caratteristica 0, non sapremmo che cosa dirgli: a tutt'oggi nessun esempio è noto. Eppure questi campi differenzialmente chiusi esistono.

I concetti di model compagno e model completamento riguardano le teorie, e in effetti l'approccio di Robinson predilige le teorie alle strutture. Pur tuttavia intorno al 1970 si svilupparono, anche a opera di Robinson, altre idee, che al contrario spostarono l'enfasi proprio sulle strutture. Il contributo principale si ebbe qui grazie a Paul Eklof e Gabriel Sabbagh, nel 1971. Il concetto chiave è quello di modello *esistenzialmente chiuso*, da intendersi come una struttura che, all'interno di una certa classe $\mathfrak{K}$, soddisfa la condizione (*): in altre parole ogni sua estensione a strutture di $\mathfrak{K}$ è esistenziale. Così i campi esistenzialmente chiusi coincidono con quelli algebricamente chiusi, e i campi ordinati esistenzialmente chiusi con i reali chiusi. Dopo di che, ci si può domandare: se $\mathfrak{K}$ è la classe dei modelli di una teoria T, se dunque tramite T la si può descrivere al primo ordine, la classe $E(T)$ dei modelli esistenzialmente chiusi di $\mathfrak{K}$, quindi di T, è o no vuota? E si può essa pure caratterizzare al primo ordine?
Ipotesi relativamente semplici garantiscono una risposta affermativa alla prima domanda, e anzi, per ogni modello di T, l'esistenza di un'estensione elementare esistenzialmente chiusa. Ma se si passa all'altro interrogativo, la situazione diventa ben più complicata. Prendiamo intanto atto del seguente teorema, che collega il contesto alle idee già riferite di Robinson.
$E(T)$ è descrivibile al primo ordine se e solo T ha model compagno, nel qual caso questo model compagno di T è proprio la teoria di $E(T)$.
Ci sono tuttavia casi in cui $E(T)$ non è descrivibile al primo ordine. Tanto accade perfino per strutture algebriche molto familiari, per esempio quando

- T è la teoria dei gruppi (un risultato degli stessi Eklof e Sabbagh),
- T è la teoria degli anelli commutativi (un teorema di un altro allievo di Robinson, Greg Cherlin).

Si parlava del contributo personale di Robinson, che è qui pure rilevante. Nel 1963 egli era rimasto colpito, al pari di svariatissimi suoi colleghi matematici, dal teorema di Paul Cohen sull'ipotesi del continuo. Ricordiamolo brevissimamente.
L'ipotesi cantoriana del continuo sostiene che un qualsiasi sottoinsieme infinito dei

reali ha la stessa cardinalità o dei reali stessi, o dei naturali. La questione fu inserita da David Hilbert nel 1900 al primo posto della sua famosa lista di 23 problemi matematici. Il dibattito sui fondamenti della matematica, stimolato anche dalla novità dell'aritmetica transfinita di Cantor, chiarì che la soluzione positiva o negativa di simili questioni non poteva prescindere da un sistema ipotetico-deduttivo di riferimento. Nel caso della teoria degli insiemi, quello più facilmente accettato, non l'unico ammissibile, e ciò nonostante una sorta di base rassicurante per il matematico al lavoro, è denotato con l'acronimo *ZFC*, che richiama con le prime due lettere i suoi creatori Zermelo e Fraenkel, e con la *C* finale il delicato assioma della scelta ("*choice*") che viene assunto al suo interno.
Kurt Gödel aveva provato nel 1938 che *ZFC* non può confutare l'ipotesi del continuo, cioè dimostrarne la negazione. Aveva infatti ritagliato all'interno dell'universo *V* degli insiemi un mondo – il modello *costruibile* – che soddisfa tanto *ZFC* quanto l'ipotesi del continuo. Ma nel 1963 Paul Cohen, ideando per questo obiettivo il così detto *metodo del forcing*, aveva costruito un nuovo modello, stavolta un'estensione di *V*, arricchita di nuovi insiemi, che la forzano a soddisfare *ZFC* e la negazione dell'ipotesi del continuo. Come dire che sulla base di *ZFC* non si può dimostrare neppure l'ipotesi del continuo. Il risultato meritò all'autore la medaglia Fields, l'unica finora assegnata per teoremi di logica matematica.
Il forcing, si diceva, costruisce e palesa nuove estensioni, e quindi si connette facilmente alle prospettive di ricerca di Robinson, tese all'individuazione di model compagni e di strutture esistenzialmente chiuse. Robinson allora lo rielaborò all'interno della teoria dei modelli, in due possibili varianti: *forcing finito* e *infinito*.
Il primo fu sviluppato con Jon Barwise nel 1970. Si basa, echeggiando Cohen, sul concetto di condizione, intesa come una porzione finita del diagramma di una struttura $\mathfrak{A}$. Si conviene che $\mathfrak{A}$ forzi un enunciato del suo linguaggio L (con eventuali parametri nella stessa A) se esiste una *condizione* di $\mathfrak{A}$ che forza quell'enunciato. Quanto alla definizione del forcing per una condizione p, essa viene proposta, secondo gli standard logici, per induzione sulla costruzione dell'enunciato. Il punto chiave riguarda la negazione. Si assume infatti che p forza la negazione di un enunciato se e solo se nessuna condizione che contiene p forza quell'enunciato. Un modello $\mathfrak{A}$ di una teoria T si dice generico finito se in $\mathfrak{A}$ verità e forcing finito coincidono sugli enunciati di L a parametri in A. Si prova che:

- ogni teoria in un linguaggio contabile (ma anche sotto altre ipotesi) ammette modelli generici finiti;
- tutti questi modelli sono esistenzialmente chiusi.

Quanto al forcing infinito, avviato da Abraham Robinson sempre nel 1970, presuppone che un modello $\mathfrak{A}$ di T forzi la negazione di un enunciato di L con parametri in A se e solo se nessuna estensione di $\mathfrak{A}$ forza quell'enunciato; chiama $\mathfrak{A}$ generico infinito se in $\mathfrak{A}$ verità e forcing infinito coincidono sugli enunciati di L a parametri in A; prova finalmente che

- sotto ragionevoli ipotesi su T, ci sono modelli di T generici infiniti,

- anche questi modelli sono esistenzialmente chiusi.

Se poi il model compagno di T esiste, allora le classi dei modelli di generici finiti e generici infiniti coincidono tra loro e con $E(T)$, così che la loro teoria eguaglia quel model compagno. Ma altrimenti, se il model compagno di T non esiste, può perfino capitare che le due classi, dei modelli di T generici finiti e generici infiniti, siano tra loro disgiunte. E' questa la condizione delle classi familiari di strutture sopra menzionate, dunque dei gruppi e degli anelli commutativi, come provato rispettivamente da Angus Macintyre e Greg Cherlin.

1.6 Cantor e Robinson

Accennavo a un possibile confronto tra Georg Cantor e Abraham Robinson. Gli dedico questo breve intermezzo, per il quale derogo dai miei propositi iniziali e allargo il discorso pure all'analisi non standard. Se Cantor e Robinson possono ritenersi entrambi a buon diritto grandi della logica, accomunati per di più dalla coincidenza dell'anno 1918 e più seriamente dall'interesse per il tema dell'infinito matematico, bisogna tuttavia riconoscere che tra i due i contrasti prevalgono sulle analogie.

Tra queste ultime, si può forse includere il comune leitmotiv dei numeri reali. In effetti tutti gli articoli più famosi di Cantor ne trattano. Quello del 1872 sulle serie trigonometriche, che per l'appunto propone la definizione cantoriana del concetto di numero reale, tramite le successioni di Cauchy di razionali; poi il lavoro del 1874, che afferma la numerabilità dei reali algebrici ed esclude quella dei trascendenti, implicando di conseguenza l'impossibilità di una corrispondenza biunivoca tra naturali e reali; e ancora l'articolo del 1878, che stabilisce invece una biiezione tra segmento e quadrato, dunque tra reali e coppie ordinate di reali, e introduce per la prima volta, verso la fine, l'ipotesi del continuo. Quanto a Robinson, abbiamo già ampiamente riferito le sue ricerche su $\mathbb{R}$ e più in generale sui campi reali chiusi, e soprattutto la sua soluzione di H17.

Non stupisce poi in nessuno dei due autori l'interesse per Leibniz, dato che quest'ultimo è ritenuto con (o contro) Newton il padre del calcolo infinitesimale. Cantor lo menziona ripetutamente nella sua opera più emozionante, le *Grundlagen* del 1883 [Ca2]. Robinson gli dedica un intero paragrafo di *Analisi non standard* [Ro5] – e del resto della sua ammirazione per il pensatore tedesco parla per esteso il paragrafo finale di [YKKR]. Entrambi, Cantor e Robinson, citano esplicitamente il parere famoso espresso da Leibniz sui numeri infinitamente piccoli e grandi, a suo avviso solo finzioni della mente, utili tuttavia per il calcolo, proprio come le radici immaginarie in algebra – paragone che, a pensarci bene, e almeno a posteriori, è complimento non da poco, visto il ruolo capitale progressivamente assunto dall'unità immaginaria nella storia della matematica, comprese le sue applicazioni.

Ciò nonostante proprio sugli infinitesimi le opinioni di Cantor e Robinson differirono radicalmente. Cantor li avversò fieramente. Un'ostilità così vigorosa sorprende

in chi come lui aveva immaginato, e difeso a spada tratta contro gli oppositori, l'aritmetica transfinita. Ma Cantor era anche profondamente convinto che i numeri reali fossero la risposta ultima all'antica questione della continuità della retta; negava di conseguenza in quell'ambito qualsiasi violazione dell'assioma di Archimede, e quindi qualsiasi fondamento al concetto di infinitesimo. Intendiamoci: lui per primo si era chiesto nelle *Grundlagen* se, allo stesso modo in cui i numeri interi e reali si estendevano grazie alle sue idee all'infinitamente grande, non si potessero definire con altrettanto successo numeri infinitamente piccoli. Ma la sua risposta fu categoricamente negativa, al punto che qualche anno dopo provò ad abbozzare una dimostrazione matematica rigorosa del suo assunto, e cioè dell'impossibilità degli infinitesimi.
Si diceva che la sua polemica contro i loro sostenitori, e in particolare contro l'italiano Giuseppe Veronese [10], fu violenta. In certe sue lettere gli infinitesimi sono definiti "*il bacillo colerico della matematica*" o "*fantasmi e chimere*" [Da1], e nell'altro suo fondamentale lavoro, i *Beiträge* [Ca1], si menziona con fierezza dai *Principia* di Newton la celebre frase "*Hypotheses non fingo*" – a ulteriore rivendicazione delle proprie scoperte, ma anche ad aperta critica di Veronese e delle sue presunte "fantasie".
Concezione opposta ebbe chiaramente Abraham Robinson – il quale tuttavia non mancò, proprio in [Ro5], di celebrare in qualche modo Cantor, riconoscendo alla sua teoria degli insiemi infiniti "*notevoli coerenza e bellezza*" e proponendo addirittura una dimostrazione non standard dei suoi risultati giovanili sulle serie trigonometriche. Robinson però non nascose, nelle stesse pagine, il rammarico che proprio Cantor, lo scopritore della teoria degli insiemi, si fosse spinto contro i numeri infinitamente piccoli, fino al punto di cercare di provarne l'assurdità. Si può peraltro interpretare l'interesse di Robinson verso il forcing di Cohen come un tributo a Cantor e alla sua ipotesi del continuo.
L'atteggiamento verso gli infinitesimi evidenzia tra Cantor e Robinson non solo un diverso carattere e una diversa sensibilità culturale – più settaria e intransigente nel primo, più aperta e "*incantevole*" nel secondo – ma anche una differente concezione della matematica. C'è sì nelle *Grundlagen* un passo bellissimo che celebra la matematica come l'unica tra le scienze a meritare l'attributo di libera, e che culmina con la frase ch'è diventata oggi aforisma famoso: "*l'essenza della matematica è proprio nella sua libertà*". Ma quelle parole servono a Cantor per elogiare pure se stesso e l'aspro itinerario da lui intrapreso, e per difendere le sue idee contro gli oppositori. La libertà di cui egli parla è soprattutto quella del pensiero, la facoltà di immaginare e costruire teorie dove, come all'infinito, nessuna evidenza ci sorregge. Tant'è che, nelle righe che seguono, Cantor critica apertamente la matematica applicata, perché l'inevitabile legame con la natura e le conseguenti imposizioni le negano il "*soffio vivificante del libero pensiero*".
La pluralità degli interessi di Robinson, e la sua frase prima citata, sulla difficoltà di tracciare all'interno della matematica precise linee di confine, stanno evidente-

mente agli antipodi.
E pur tuttavia questa divergenza di visioni vale a sottolineare non solo la varietà degli orizzonti matematici, ma anche la libertà di aprirvi vie nuove, teorie e modelli alternativi, i cui unici vincoli sono la coerenza logica e la ricerca della bellezza. Sia Cantor che Robinson ne sono testimoni eccellenti.

1.7 Tributo a Robinson

Tornando al solo Abraham Robinson: a lui e alla sua opera nella teoria dei modelli furono dedicati, subito dopo la sua scomparsa nel 1974, due articoli di toccante ricordo, il primo a più mani, di Young, Kochen, Körner e Roquette [YKKR], il secondo di Angus Macintyre [Ma1] – comparsi sui Bulletin rispettivamente della London Mathematical Society e dell'American Mathematical Society – così come un volume dal titolo significativo *Model Theory and Algebra. A memorial tribute* [SW]. Oggi la biografia di Robinson compare, insieme a quella dei grandi matematici, tra quelle del sito `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Robinson.html`. Altre pagine della rete presentano la sua genealogia scientifica, che conta, oltre ai già citati Cherlin e Wood, altri 15 allievi.
A parte questi dati apparentemente freddi, resta l'influenza che le sue idee ancora lasciano nella teoria dei modelli e nelle sue applicazioni. Citiamo in proposito solo un paio di spunti, che corrispondono peraltro a due momenti topici della storia recente dell'argomento.
Il primo si connette a uno dei capitoli più vivaci della moderna teoria dei modelli, che ne ha contrassegnato gli ultimi 40 anni, aprendo significative correlazioni con geometria algebrica e analitica reale. Si tratta della *o-minimalità*. Studia, tra l'altro, certe espansioni del campo ordinato dei reali tramite funzioni familiari come l'esponenziale, o le Pfaffiane, o le trigonometriche e più in generale le analitiche (opportunamente accostate). A ispirare l'idea, fu del resto il problema di Tarski sulla decidibilità della teoria di $(\mathbb{R}, \exp)$. Un teorema di Alex Wilkie del 1991 recita: *la teoria di* $(\mathbb{R}, \exp)$ *è model completa e o-minimale.*
Tanto avviene nel naturale linguaggio del primo ordine per $(\mathbb{R}, \exp)$, che non consente invece l'eliminazione dei quantificatori. Quanto al problema di Tarski, lo stesso Wilkie e Angus Macintyre ottennero nel 1996 una risposta positiva, e quindi la decidibilità della teoria di $(\mathbb{R}, \exp)$, poggiandola però su un'analoga soluzione positiva di una difficile ipotesi di teoria dei numeri trascendenti, che ha nome *congettura di Schanuel* e che, se valida, comporta tra le sue conseguenze l'indipendenza algebrica di π ed e.
Il rapporto tra teoria dei modelli e geometria fu poi molto rafforzato verso la metà degli anni novanta da risultati di Ehud Hrushovski, che provano in forma molto generale congetture di *Mordell-Lang* e *Manin-Mumford* in geometria algebrica. Si sussurrò a quei tempi di Hrushovski come di un candidato autorevole alla medaglia Fields. Poi le cose andarono in altro modo. Non è davvero il caso di riferire qui in

dettaglio il contenuto delle congetture, né tanto meno la strategia di soluzione di Hrushovski. Diciamo solo che, nella sua versione originaria del 1922, la congettura di Mordell (poi provata da Faltings) tratta curve di genere > 1 sul campo razionale, e sostiene ch'esse ammettono solo un numero finito di punti razionali. Ma dal 1922 in poi intervennero versioni sempre più astratte, come quella di Lang, e, in questo ambito allargato, connessioni con altre questioni, quale la congettura di Manin-Mumford. A esse si applica l'approccio di Hrushovski. Del quale basterà osservare che, seguendo in questo idee precedenti di Buium, si fonda cospicuamente sui campi differenzialmente chiusi di caratteristica 0 – dunque sulle intuizioni di Robinson.

1.8 Robinson in Italia

L'edizione italiana del libro *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra* comparve nel 1974, nella traduzione di Silvio Bozzi. Nella prefazione scritta per l'occasione, Robinson elogia "*il crescente interesse per la teoria dei modelli*" dei suoi colleghi italiani e dei loro studenti. Del resto, alcuni dei suoi articoli compaiono proprio su riviste italiane. Si ricordano poi almeno 3 suoi interventi ad altrettanti importanti appuntamenti della storia della rinascita della logica italiana dopo Peano:

- anzitutto una conferenza del 1966 a Roma, al Dipartimento Castelnuovo de La Sapienza, tema l'analisi non standard – a proposito, anche il suo volume sull'*Analisi non standard* vanta una recente traduzione italiana, già prima citata [Ro5];

passando poi alla teoria dei modelli,

- il suo corso *Problems and Methods of Model Theory* all'interno del CIME *Aspects of Mathematical Logic*, che si tenne a Varenna, a settembre 1968, con la direzione di Ettore Casari [Ro2];
- finalmente la conferenza *Forcing in model theory*, svolta a Roma in italiano a novembre 1969 nel corso di un convegno dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica organizzato stavolta da Roberto Magari [Ro3].

Quanto a me, riprendo il discorso di partenza. A novembre 1969 sedevo ancora nei banchi del Liceo. Ciò non toglie che, da giovane borsista universitario, elessi Abraham Robinson tra i miei miti matematici. Tale rimane a distanza di tanti anni, sia pure per differenti motivi. Allora, forse, per l'ingenuità e i facili entusiasmi giovanili. Oggi, per il meravigliato rispetto che suscitano la vastità delle sue idee e delle sue intuizioni, la sua genialità nel collegare aree così varie della matematica, la logica come e più delle altre, e nell'incidervi così profondamente. Questa nota vorrebbe essere, nei suoi confronti, il mio modesto ma convinto ringraziamento.

Note alla bibliografia

Ho preferito indicare, ove disponibile, la versione italiana dei testi elencati. Per le basi di teoria dei modelli segnalo, oltre evidentemente a [Ro1], [Ro4], [CK] e [Ho1], [Ho2], anche [Ma2] e, se è consentito menzionarsi, [MT1], [MT2]. La bibliografia completa di Robinson si trova in [YKKR] e [Ma1].

Bibliografia

[BF] V. Benci – P. Freguglia, *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*, Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, 1 (2016), pp. 105-121

[Ca1] G. Cantor, *Beiträge zur Begrundung der transfinite Mengenlehre*, traduzione italiana parziale in: F. Arzarello, *Matematica dell'infinito*, Opera Universitaria dell'Università, Torino, 1961

[Ca2] G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)*, a cura di G. Rigamonti, Mimesis, Milano-Udine, 2012

[CK] C. C. Chang – H. J. Keisler, *Model Theory*, Dover, 2012

[Da1] J. W. Dauben – Georg Cantor, *His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1990

[Da2] J. W. Dauben – Abraham Robinson, *The creation of Non Standard Analysis. A Personal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton, 2016

[Hi] D. Hilbert, *Problemi matematici*, in *Ricerche sui fondamenti della matematica* (a cura di V. M. Abrusci), Bibliopolis, Napoli, 1978, pp. 145-162

[Ho1] W. Hodges, *A shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997

[Ho2] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, 2008

[Ja1] N. Jacobson, *Lecture in Abstract Algebra*, Springer, New York, 1976

[Ja2] N. Jacobson, *Basic Algebra*, Dover, 2009

[Ma1] A. Macintyre, *Abraham Robinson, 1918 – 1974*, Bull. Amer. Mat. Soc. 83 (1977), 646-666

[Ma2] A. Macintyre, *Model completeness*, in *Handbook of Mathematical Logic* (a cura di J. Barwise), North Holland, Amsterdam, 1977, pp. 139-180

[MT1] A. Marcja – C. Toffalori, *Introduzione alla Teoria dei Modelli*, Pitagora, Bologna, 1998

[MT2] A. Marcja – C. Toffalori, *A Guide to Classical and Modern Model Theory*, Kluwer, Dordrecht, 2003

[Ro1] A. Robinson, *Complete Theories*, North Holland, Amsterdam, 1956

[Ro2] A Robinson, *Problems and Methods of Model Theory*, in *Aspects of Mathematical Logic*, a cura di E. Casari, CIME Varenna 1968, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, pp. 181-266

[Ro3] A. Robinson, *Forcing in Model Theory*, INDAM Symposia Mathematica vol. V, Academic Press, Londra e New York, 1971, pp. 69-82

[Ro4] A. Robinson, *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra*, Boringhieri, Torino, 1974

[Ro5] A. Robinson, *Analisi non standard*, Aracne, Roma, 2013

[Ta] A. Tarski, *Contributions to the Theory of Models*, Indag. Math. 16 (1984), pp. 572-581 e 582-588

[SW] D. Saracino – V. Weispfenning, *Model Theory and Algebra. A memorial tribute to Abraham Robinson*, Lecture Notes in Mathematics 498, Springer, 1975

[YKKR] A. Young - S. Kochen - S. Körner - P. Roquette, *Abraham Robinson*, Bull. London Math. Soc. 8 (1976), 307-323

2

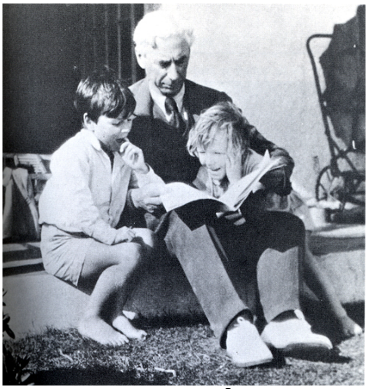
Gli infinitesimi in Matematica tra Scienza e Filosofia

Vieri Benci [1]

2.1 I tre problemi della filosofia matematica

Secondo Bertrand Russell [26] i grandi problemi della Filosofia matematica sono tre e tutti collegati alla nozione di infinito:

- il problema dei numeri infiniti;
- il problema del continuo;
- il problema degli infinitesimi.



Russell[2]

Secondo il nostro filosofo, questi problemi sono stati tutti risolti: il primo è stato risolto da Cantor con l'introduzione dei numeri cardinali, il secondo è stato risolto da Dedekind (e da Cantor) identificando il continuo geometrico con la retta

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

[2]Le immagini presenti in questo capitolo sono tratte dalle seguenti fonti:
commons.wikimedia.org
ia.m.wikipedia.org
i12bent.tumblr.com
RAI Italia
www.behance.net

reale ed il terzo è stato risolto da Weierstrass che ha eliminato i numeri infinitesimi dal regno della matematica.

In particolare, riguardo agli infinitesimi, Russell scriveva:

> *Gli infinitesimi, per spiegare la continuità, devono essere considerati non necessari, erronei ed auto-contraddittori.*[27]

È passato più di un secolo. Siamo ancora convinti che questo punto di vista sia quello giusto? In realtà io non sono affatto d'accordo e cercherò di portare argomenti a favore di una nuova visione dell'infinito e dei problemi ad esso collegati. In particolare cercherò di convincere il lettore che l'uso di numeri infinitesimi presenta moltissimi vantaggi:

- semplifica i calcoli;
- consente di costruire modelli più ricchi;
- amplia l'orizzonte epistemologico dei fondamenti della matematica.

2.2 Primo problema: come contare l'infinito

In primo luogo discuteremo della possibilità di **"contare"** gli elementi degli insiemi infiniti. L'operazione del *contare* e l'idea di *numero naturale* sono alla base di tutta la matematica e storicamente la precedono. Infatti non solo sono presenti in tutte le culture umane, ma c'è una certa evidenza scientifica che molti animali superiori (mammiferi e uccelli) siano capaci di contare, almeno fino a numeri relativamente bassi. Pertanto è possibile che una qualche idea di numero sia geneticamente innata.

Nonostante ciò, se analizziamo criticamente l'idea di numero naturale si incorre in una serie di problemi tecnici e filosofici che sono stati oggetto di riflessione per almeno 2500 anni.

I cavalieri dell'Apocalisse

Le cose si fanno ancora più complicate se vogliamo estendere l'idea del contare ad insiemi infiniti e considerare i numeri infiniti. Pur senza voler analizzare criticamente la nozione di numero, possiamo descrivere, almeno sommariamente, un modo di operare con i numeri finiti nella descrizione della realtà e cercare di estendere ciò ai numeri infiniti.

Dato un qualunque insieme A, denoteremo con $\boldsymbol{n}(A)$ il numero di elementi contenuti in A. Per esempio abbiamo che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}(\{\text{vaghe stelle dell'Orsa}\}) &= 7 \\ \boldsymbol{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) &= 4 \end{aligned}$$

Anche senza esaminare il significato ontologico della nozione di numero, possiamo dare delle regole generali riguardo ai numeri. Più in particolare discuteremo due principi che sembrano radicati alla nostra idea di numero e all'operazione del contare.

- **Principio di Hume** *(o di Cantor) - Il numero degli elementi di F è uguale al numero degli elementi di G se tra F e G vi è una corrispondenza biunivoca.*

Hume

Per esempio si ha che

$$\boldsymbol{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) = \boldsymbol{n}(\{\text{punti cardinali}\})$$

Infatti si ha la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} Pestilenza &\longleftrightarrow Est \\ Guerra &\longleftrightarrow Sud \\ Carestia &\longleftrightarrow Ovest \\ Morte &\longleftrightarrow Nord \end{aligned}$$

Il numero 4, infatti, potrebbe essere definito come quell'ente che accomuna tutti gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{$cavalieri dell'Apocalisse$\}$.

Ma i numeri relativi agli insiemi finiti soddisfano anche un altro principio fondamentale che chiameremo principio di Euclide.

Euclide

- **Principio di Euclide** - *(V assioma) L'intero è maggiore della parte ovvero, dati due insiemi A e B tali che A sia una parte propria di B, allora*

$$\boldsymbol{n}(A) < \boldsymbol{n}(B). \qquad (2.1)$$

Per esempio si possono considerare gli insiemi

$$\begin{aligned} B &= \{\text{insieme dei numeri scritti sulle facce di un dado}\} \\ A &= \{\text{insieme dei numeri pari scritti sulle facce di un dado}\} \end{aligned}$$

In questo caso la disuguaglianza (2.1) si riduce al semplice fatto che $3 < 6$.

È tutto chiaro? In effetti è tutto molto semplice finché ragioniamo con insiemi finiti, ma le cose si complicano se passiamo ad insiemi infiniti. Questi due principi, nonostante che appaiano naturali, sono contraddittori. Galileo è uno dei tanti che ha messo in evidenza questa contraddizione.

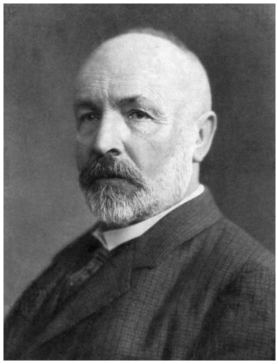
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	1
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	9
4	$\longleftrightarrow$	16
5	$\longleftrightarrow$	25
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$

Tabella 2.1: Numeri quadrati

Galileo

I numeri quadrati sono solo una parte di tutti i numeri, ma possono essere posti in corrispondenza biunivoca con la totalità dei numeri interi (vedi Tabella 2.1).

Cantor ha capito che eliminando uno dei due principi (il principio di Euclide) si sarebbe ottenuta una teoria "bizzarra", ma coerente. In questo modo Cantor ha introdotto un nuovo tipo di numeri da lui chiamati numeri cardinali.



Cantor

2.2.1 I numeri cardinali

Vediamo il ragionamento di Cantor. Dato un qualunque insieme A il "numero dei sui elementi", che Cantor chiama cardinalità di A, sarà denotato con $\mathfrak{card}(A)$. Per esempio si ha che:

$$\aleph_0 = \mathfrak{card}(\mathbb{N}_0)$$

(ove $\mathbb{N}_0$ è $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\aleph$ (àleph) è la prima lettera degli alfabeti fenicio e ebraico).

Ma per quanto abbiamo visto si ha pure che:

$$\aleph_0 = \mathfrak{card}\left(\{\text{numeri quadrati}\}\right)$$

ma ormai sappiamo che questo fatto è paradossale, ma non porta ad alcuna contraddizione in quanto il Principio di Euclide non ha validità universale. Vediamo un altro esempio. Decidiamo di contare tutti i programmi di computer, non solo quelli che sono stati scritti, che sono un numero grande, ma finito, ma anche quelli che saranno scritti e quelli che potrebbero essere scritti, ma che non saranno mai scritti. Come possiamo fare? I programmi di computer non sono altro che una successione di 0 e di 1. Vediamo se possiamo piazzarli in una tabella come la 2.1. Iniziamo con i programmi più corti e poi via via quelli più lunghi. In tal modo otteniamo la seguente disposizione:

La strategia di questo schema è chiara: i programmi della stessa lunghezza vengono sistemati in ordine lessicografico. A questo punto al lettore attento può venire il sospetto che esista un solo numero infinito. In fondo, l'idea filosofica che l'infinito sia un assoluto unico compare assai spesso nella storia del pensiero, anche se oggi sappiamo che è sbagliata. Potrebbe capitare che $\aleph_0$ sia l'unico numero infinito. In effetti questo non è il caso ed il punto più bello della teoria cantoriana è proprio la possibilità di studiare i vari numeri infiniti ed avere regole che permettono di manipolarli.

0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	1
2	$\longleftrightarrow$	00
3	$\longleftrightarrow$	01
4	$\longleftrightarrow$	10
5	$\longleftrightarrow$	11
6	$\longleftrightarrow$	000
7	$\longleftrightarrow$	001
8	$\longleftrightarrow$	010
9	$\longleftrightarrow$	011
10	$\longleftrightarrow$	100
$\dots$	$\longleftrightarrow$	$\dots$

Tabella 2.2: Programmi per computer

Cerchiamo di capire come stanno le cose. Come abbiamo detto, un insieme A ha cardinalità $\aleph_0$ (in simboli $\mathfrak{card}\,(A) = \aleph_0$) se si possono sistemare i suoi elementi in una tabella numerata come la Tabella 2.1. In effetti $\aleph_0$ è il numero infinito più piccolo. Dunque il problema consiste nel trovare un insieme così grande in modo che i suoi elementi non possano essere sistemati in una tale tabella. Insiemi così grandi esistono anche se non sembrano tali. Uno di questi è l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra zero ed uno che in genere viene denotato col simbolo $[0, 1]$. Ricordiamo che un numero reale in $[0, 1]$ ha una rappresentazione decimale costituita da uno zero, la virgola ed infinite cifre decimali. Per esempio

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,3333333333\dots. \\ \frac{1}{4} &= 0,2500000000\dots \\ \pi - 3 &= 0,1415926535\dots.. \end{aligned}$$

La forma generica di un tale numero è data da

$$0, a_0a_1a_2a_3a_4\dots\dots$$

ove gli a_i sono cifre decimali.

Adesso faremo vedere che non è possibile fare entrare tutti questi numeri nella colonna destra di una tabella come la Tabella 2.1. Per provare questo fatto supponiamo di essere riusciti nella nostra impresa dopo di che troveremo una contraddizione che dimostra che questo fatto è impossibile.

Supponiamo per assurdo che sia possibile costruire una tabella del tipo:

0	$\longleftrightarrow$	$0, a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}a_{034}\ldots$
1	$\longleftrightarrow$	$0, a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$
2	$\longleftrightarrow$	$0, a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$
3	$\longleftrightarrow$	$0, a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$

Tabella 2.3: Numeri decimali illimitati

Adesso, si consideri il numero

$$0, b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$$

ove b_0 è una qualunque cifra diversa da a_{00}, b_1 è una qualunque cifra diversa da a_{11}, b_2 è una qualunque cifra diversa da a_{22}, etc. Risulta evidente che $0, b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$ non ha trovato posto nella Tabella 2.3 in quanto non compare nella lista. Infatti non si trova nella casella 0 in quanto $b_0 \neq a_{00}$, non si trova nella casella 1 in quanto $b_1 \neq a_{11}$, e così via.

Dunque, l'insieme dei numeri reali in $[0,1]$ è più numeroso dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ovvero

$$\boldsymbol{n}\left([0,1]\right) > \boldsymbol{n}\left(\mathbb{N}\right)$$

Il numero corrispondente a $[0,1]$ si chiama cardinalità del continuo ed, in genere, è denotato dalla lettera gotica "$\mathfrak{c}$"; dunque si ha che

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

Su questa base Cantor ha costruito l'aritmetica dei numeri infiniti. Per la prima volta nella storia, l'infinito è stato addomesticato dal pensiero umano. Comunque questa aritmetica risulta un po' bizzarra, infatti, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono numeri cardinali infiniti, allora

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Infiniti cardinali

2.2.2 I numeri ordinali

Cantor ha avuto anche un altro grande merito. Si è reso conto che quando si contano insiemi infiniti il risultato dell'operazione dipende dal metodo che si usa per contare. Naturalmente con gli insiemi finiti ciò non è vero, ma questa è una complicazione che va accettata per trattare con l'infinito. Pertanto per contare insiemi infiniti si devono usare differenti tipi di numeri; il tipo di numeri impiegato, dipende dal metodo impiegato per contare. Se contiamo un insieme mediante il metodo impiegato nei paragrafi precedenti si ottengono i numeri cardinali che si dividono in numeri cardinali finiti $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.(che possono essere identificati con i numeri naturali) ed i cardinali infiniti che vengono denotati con i simboli $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

L'altro metodo introdotto da Cantor ci porta ai *numeri ordinali*. Non introdurremo i numeri ordinali col metodo di Cantor, ma useremo la definizione di Von Neumann che, oltre ad essere più semplice ed estremamente elegante, permette anche di dare una definizione di numero che è molto significativa anche quando viene applicata ai numeri naturali. Per introdurre gli ordinali di Von Neumann dobbiamo iniziare da una domanda fondamentale: come possiamo definire i numeri naturali? Che cos'è lo zero? Che cosa rappresenta il numero uno? etc.

Numeri ordinali

La risposta di Von Neumann non è certo l'unica risposta che è stata data da matematici e filosofi, ma è certamente una delle più suggestive perchè costruisce tutto dal niente. Esaminiamo la prima e fondamentale domanda: cos'è lo zero. Lo zero non è niente, ma il niente in matematica è un'ente ben preciso che ha un nome: "*insieme vuoto*" ed un simbolo per rappresentarlo: "$\varnothing$". E dunque abbiamo la nostra prima definizione:

$$0 := \varnothing$$

Passiamo adesso alla seconda domanda: che cos'è il numero 1. Se lo 0 è un insieme anche l'uno deve essere un insieme ed è ragionevole pensare che sia un insieme contenente un elemento. Ma quale elemento? Ovviamente sarà l'unico ente che abbiamo a disposizione, ovvero lo 0, e duque risulta naturale la seguente definizione del numero 1 :

$$1 := \{\varnothing\}\,.$$

Si osservi la sottile differenza tra $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$. $\varnothing$ è l'insieme vuoto, ma $\{\varnothing\}$ non è vuoto in quanto contiene un ente che certamente esiste (ovviamente nel mondo delle idee). A questo punto il nostro lettore avrà capito anche come si costruiscono gli altri numeri naturali:

$$2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\};$$

$$3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

e così via. Usando una notazione più semplice e leggibile, possiamo scrivere

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \varnothing \\ 1 & = & \{0\} \\ 2 & = & \{0,1\} \\ 3 & = & \{0,1,2\} \\ 4 & = & \{0,1,2,3\} \\ & & \ldots\ldots. \\ n+1 & = & \{0,1,2,3,\ldots,n\} \end{array} \tag{2.2}$$

Dunque, secondo Von Newmann, ogni numero naturale n è un insieme particolare (ovvero l'insieme dei numeri naturali più piccoli di lui). I numeri così definiti si chiamano numeri **ordinali** (di Von Neumann). La relazione d'ordine tra numeri ordinali è definita dalla seguente regola:

$$y < x \Longleftrightarrow y \in x.$$

Dunque i numeri ordinali possono essere definiti dalle due regole seguenti:

- 0 è un numero ordinale.
- β è un numero ordinale se e soltanto se è un insieme di numeri ordinali che gode della seguente proprietà: dati due numeri ordinali $x \in \beta$, e $y \in x$, allora $y \in \beta$.

In base a queste due regole, l'insieme

$$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,4,5,\ldots\ldots..\}$$

è lui stesso un numero ordinale. Ma non può essere identificato con alcun numero naturale in quanto è infinito. Infatti è il numero ordinale infinito più piccolo e viene denotato con la lettera ω. Dunque anche ω al pari dei numeri naturali di Von Neumann è l'insieme dei numeri ordinali più piccoli di lui. Ovviamente la storia non finisce qui e si possono produrre altri numeri ordinali. Per esempio le uguaglianze

2.2 possono essere riscritte nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= 0 \cup \{0\} \\
2 &= 1 \cup \{1\} \\
3 &= 2 \cup \{2\} \\
4 &= 3 \cup \{3\} \\
& \quad \ldots\ldots. \\
n+1 &= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Con questa scrittura vediamo che ogni numero n ha un successore, n', e questo si ottiene aggiungendo al numero l'insieme che ha come unico elemento il numero stesso. Applicando la stessa regola a ω, otteniamo un nuovo numero

$$\omega' := \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$$

Poichè ω è diverso da ogni numero naturale, abbiamo che $\omega' \neq \omega$; ω', il successore di ω è un nuovo numero che, come appare ovvio[3], sarà denotato col simbolo $\omega + 1$. Naturalmente questo processo può essere reiterato ed otteniamo la seguente tabella:

$$
\begin{aligned}
\omega + 1 &= \omega \cup \{\omega\} \\
\omega + 2 &= (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1\} \\
\omega + 3 &= (\omega + 2) \cup \{\omega + 2\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\} \\
& \quad \ldots\ldots. \\
\omega + (n+1) &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n\}
\end{aligned}
$$

Remark 2.2.1. *Kroneker che è stato un insigne matematico tedesco dell'800, soleva dire che i numeri naturali sono stati creati da Dio, mentre tutti gli altri numeri sono stato costruiti dall'uomo. Con questo aforisma egli intendeva dire che mediante i numeri naturali, con costruzioni più o meno complesse, si potevano definire tutti gli altri insiemi numerici quali i numeri razionali, i numeri reali, i numeri complessi e così via. Al contrario i numeri naturali vanno presi così come sono dati dalla nostra intuizione: ogni tentativo di razionalizzazione non fa altro che complicare le cose. Questo punto di vista è stato clamorosamente smentito un secolo dopo da Von Neumann con la sua meravigliosa costruzione dei numeri naturali: bella, semplice e vicinissima all'intuizione. Von Neumann ha costruito i numeri naturali dal nulla e su di essi ha costruito anche la meravigliosa struttura dei numeri ordinali. In questo modo ha anche tolto a Dio il monopolio del "Creare dal Nulla" (almeno per quanto riguarda le cose che vivono nell'iperuranio).*

[3] In seguito vedremo che la cosa non è cosi ovvia; quando si lavora con l'infinito bisogna sempre essere cauti.

A questo punto si pone la seguente domanda:

I numeri di Von Neuman sono una bella cosa, ma con essi si possono contare gli elementi di un insieme infinito?

La risposta è si, ma con essi si possono contare solamente gli elementi di un insieme dopo che essi sono stati *messi in fila*, pertanto prima cosa da fare è quella di mettere in fila gli elementi di E in modo che ogni gruppo abbia un capofila[4]. Successivamente poniamo gli elementi di E in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un ordinale di Von Neumann *in modo che venga rispettato l'ordine della fila*. Questo ordinale, chiamiamolo β, rappresenta il risultato di questa conta e scriveremo

$$\mathfrak{ord}(E) = \beta$$

Vediamo degli esempi: consideriamo il seguente insieme:

$$\{\text{Siena, New York, Gerusalemme, San Paolo}\}$$

Prima di contare dobbiamo stabilire un ordinamento: per esempio stabiliamo l'ordinamento lessicografico per cui si ha:

$$(\text{Gerusalemme, New York, San Paolo, Siena})^{5} \tag{2.3}$$

Questo ordinamento ci porta alla seguente tabella:

0	$\longleftrightarrow$	Gerusalemme
1	$\longleftrightarrow$	New York
2	$\longleftrightarrow$	San Paolo
3	$\longleftrightarrow$	Siena

Ma l'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$ è il numero 4 e dunque l'insieme (2.3) ha quattro elementi. In simboli:

$$\mathfrak{ord}(\text{Gerusalemme, New York, San Paolo, Siena}) = 4$$

Se cambiamo l'ordinamento e ordiniamo le città secondo il numero di abitanti avremo l'insieme

$$(\text{Siena, Gerusalemme, New York, San Paolo})$$

e la tabella:

[4] Questa operazione in matematica si chiama *buon ordinamento*. Più precisamente un insieme E si dice ben ordinato se ogni sottoinsieme $A \subset E$ ha il minimo (il capofila!). Per esempio i numeri naturali sono un insieme *ben ordinato*. Al contrario i numeri razionali non lo sono. Per vedere ciò, basta osservare che l'insieme dei numeri razionali positivi non ha il minimo.

[5] Si osservi che qui abbiamo usato l'usuale convenzione che gli elementi di un insieme ordinato si pongono in parentesi tonda.

0	$\longleftrightarrow$	Siena
1	$\longleftrightarrow$	Gerusalemme
2	$\longleftrightarrow$	New York
3	$\longleftrightarrow$	San Paolo

In questo caso, il numero delle città rimane invariato, ovvero 4. Ma le cose cambiano con gli insiemi infiniti. Consideriamo l'insieme di tutti i programmi considerati nel paragrafo 2.2.1. Se li ordiniamo secondo la Tabella 2.2, allora i programmi sono ω, ma possiamo decidere di ordinarli in altro modo; mettiamo dapprima tutti i programmi che iniziano con 0 e poi tutti i programmi che iniziano con 1. Allora otteniamo una tabella diversa:

0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	00
2	$\longleftrightarrow$	01
3	$\longleftrightarrow$	000
4	$\longleftrightarrow$	001
5	$\longleftrightarrow$	010
6	$\longleftrightarrow$	011
7	$\longleftrightarrow$	0000
...	$\longleftrightarrow$	...
ω	$\longleftrightarrow$	1
$\omega+1$	$\longleftrightarrow$	10
$\omega+2$	$\longleftrightarrow$	11
$\omega+3$	$\longleftrightarrow$	100
...	$\longleftrightarrow$	...

In tal modo abbiamo riempito tutte le caselle della tabella contrassegnate con i numeri $0, 1, 2, 3, \ldots$ con i programmi che iniziano con 0 e tutte le caselle contrassegnate dai numeri infiniti $\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$ con i programmi che iniziano con 1.

In conclusione abbiamo ottenuto il numero ordinale

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\}$$

che ovviamente è maggiore di $\omega + n$ qualunque sia $n \in \omega$, il quale, come il lettore può facilmente intuire viene denotato col simbolo $\omega \cdot 2$.[6]

In ogni caso, se contiamo un insieme usando i numeri ordinali, il principio di Euclide può essere violato. Per esempio, se ordiniamo i numeri quadrati secondo il loro ordine naturale, otteniamo nuovamente la tabella 2.1 e pertanto si ha che

$$\mathfrak{ord}\left(\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}\right) = \omega$$

[6]Si osservi che $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$. L'aritmetica ordinale è piuttosto complessa, ma la sua analisi esula dagli scopi del presente articolo.

Dunque anche in questo caso i quadrati hanno lo stesso numero (ordinale) di elementi di tutti i numeri naturali. Paradosso! Ma non contraddizione. Dunque possiamo contare gli insiemi infiniti con i numeri ordinali anche se finiamo con l'ottenere un'aritmetica ancora più bizzarra (ancorché più bella) di quella dei numeri cardinali.

2.2.3 Tre metodi per contare

A questo punto si pone la seguente domanda.

Esiste un altro metodo per contare gli insiemi infiniti in modo che si possa rispettare il principio di Euclide?

La risposta è SI' ma, ovviamente, dobbiamo rinunciare al Principio di Hume. Prima presentare questo nuovo modo di contare, vediamo come contano i bambini:

- Bambino di tre anni: se a un bambino di tre anni chiedete l'età probabilmente alzerà tre ditini; in questo modo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il numero dei suoi anni e il numero delle dita alzate (si conta per corrispondenza biunivoca).

- Bambino di cinque anni: se un bambino di cinque anni vuol sapere quante caramelle ha in primo luogo le metterà in fila e successivamente "reciterà" la filastrocca che ha imparato a memoria: uno, due, tre, quattro,... Quando si fermerà saprà che il numero delle sue caramelle è l'ultimo numero che ha pronunciato durante la conta (si contano gli oggetti mettendoli in fila e confrontandoli con gli "oggetti-nome-di-numeri" di un'altra fila).

- Bambino di dodici anni: se ad un tale bambino chiedete quanti scolari ci sono nella sua sezione, certamente non chiederà a tutti i suoi compagni di mettersi in fila. Egli sa già che nella prima A ci sono 25 bambini, in seconda ce ne sono dieci ed in terza otto[7]. Fa il conto e risponde che ci sono $25 + 10 + 8 = 33$ ragazzi (si contano gli oggetti organizzandoli in gruppi).

Il lettore che ci ha seguito fino a questo punto avrà capito che questi tre modi di contare danno lo stesso risultato quando si contano insiemi finiti, ma si ottengono risultato diversi quando si contano insiemi infiniti. Per cui, tra i numeri infiniti è necessario distinguere (almeno) tre insiemi di numeri:

- Numeri cardinali,
- Numeri ordinali,
- Numerosità.

Vediamo come queste tre situazioni possono essere formalizzate matematicamente.

Nel primo caso si contano insiemi che non hanno alcuna struttura. Anzi questa è l'unica maniera per contare un insieme "*allo stato puro*" ovvero senza aggiungerci alcuna struttura in più.

Nel secondo caso dobbiamo aggiungere all'insieme da contare un *buon ordinamento*, ovvero gli oggetti da contare vanno messi in fila in modo da poterli confrontare con i numeri ordinali.

Nel terzo caso l'insieme va etichettato ovvero ad ogni elemento dell'insieme bisogna aggiungervi un'**etichetta** come ad esempio un numero, che nella metafora dei bambini è il numero della classe (vedi [4, 9]).

2.2.4 Somme transfinite

Il terzo metodo per contare porta inevitabilmente a considerare somme infinite. L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici, ma presenta problemi tecnici. Per esempio si consideri

$$\sum_k (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots ..$$

Applicando la proprietà associativa si ha:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots .. = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots .. = 0$$

ma applicando la proprietà associativa in modo diverso, si ha anche

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots .. = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

[7] Ma che scuola selettiva!!!

Pertanto, se vogliamo trattare numericamente certi problemi sembra naturale introdurre un nuovo algoritmo detto **somma transfinita** che formalizza mediante **regole precise** la generica nozione di somma infinita**.**

Tale somma verrà indicata nel seguente modo:

$$\sum_{k \in K} a_k. \tag{2.4}$$

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. (**regola delle somme finite**) Se $a_k = 0$ tranne un numero finito di termini, allora la somma transfinita coincide con la usuale somma finita.

2. (**regola della somma**)

$$\left(\sum_{k \in K} a_k\right) + \left(\sum_{k \in H} b_k\right) = \sum_{k \in K \cup H} (a_k + b_k)$$

3. (**regola del prodotto**)

$$\left(\sum_{k \in K} a_k\right) \cdot \left(\sum_{h \in H} b_h\right) = \sum_{(k,h) \in K \times H} a_k b_h$$

4. (**regola della somma doppia**)[8]

$$\sum_{(k,h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{kh} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\max(k,h)=l} a_{kh}\right)$$

5. (**regola del confronto**) se gli a_k sono numeri razionali e se per m sufficientemente grande

$$\sum_{k=0}^{(m!)^{m!}} a_k > \sum_{k=0}^{(m!)^{m!}} b_k,$$

allora

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k > \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k.$$

[8]Per semplicità abbiamo enunciato la regola della somma doppia e del confronto solo nel caso in cui gli indici h e k siano numeri naturali.

Remark 2.2.2. *Nella regola del confronto, la scelta della successione $m \mapsto m!^{m!}$ è determinata dalle proprietà che vogliamo attribuire al numero α che definiremo in seguito. Con questa scelta si ha che comunque si scelgano $p, q \in \mathbb{N}$, il numero*

$$\sqrt[p]{\frac{\alpha}{q}}$$

è la numerosità di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Naturalmente il risultato di una somma transfinita, in generale, non sarà un numero reale, a meno che non si sommi un numero finito di addendi. Il campo dei numeri ottenuto mediante queste somme si chiama campo dei numeri Euclidei ed è denotato dalla lettera $\mathbb{E}$. Si può dimostrare che un tale campo esiste ed è un campo iperreale, ovvero un campo in cui valgono i principi dell'Analisi Non Standard.

La nozione di somma transfinita non va confusa con la nozione di serie anche quando l'insieme degli indici è $\mathbb{N}$; per evidenziare la loro differenza si usano simboli diversi:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \quad \text{per le somma transfinite;}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{per le serie usuali.}$$

Il loro legame è il seguente: se $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è una serie convergente allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := st\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k\right)$$

ove $st(\xi)$ denota la parte standard[9] di ξ. Tutto ciò ha senso in quanto $\mathbb{E}$ è un campo iperreale.

Cerchiamo adesso di familiarizzarci con l'idea di somma transfinita. La cosa più semplice che può venire in mente è quella di sommare un po' di "1".

Per ogni insieme $A \subset \mathbb{N}$ si può definire il numero

$$\mathfrak{num}\,(A) = \sum_{k \in A} 1$$

detto **numerosità** di A che consiste nel sommare tanti "uno" quanti sono gli elementi di A. Se A è un insieme finito, la sua numerosità corrisponde ad un numero naturale. Altrimenti il numero $\mathfrak{num}\,(A)$ è un numero infinito che "generalizza" la

[9]La parte standard di ξ è l'unico numero reale infinitamente vicini a ξ. È ben noto che tale numero esiste qualora ξ non sia un numero infinito.

precedente nozione. Pertanto le numerosità sono un nuovo tipo di numeri che scaturiscono da un diverso modo di contare insiemi infiniti.

Il numero infinito più significativo è

$$\alpha := \sum_{k\in\mathbb{N}} 1.$$

che si ottiene sommando tanti "uno" quanti sono i numeri naturali.

Per esempio se vogliamo "contare" i numeri quadrati dobbiamo fare una somma del tipo

$$\sum_{k\in Q} 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_Q(k)$$

ove $Q = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ è l'insieme dei numeri quadrati e $\chi_Q(k)$ è la funzione caratteristica di Q, ovvero

$$\chi_Q(k) = \begin{cases} 1 & se \quad k \in Q \\ 0 & se \quad k \notin Q. \end{cases}$$

Dal principio del confronto segue immediatamente che

$$\mathfrak{num}\,(Q) < \mathfrak{num}\,(\mathbb{N}) = \alpha.$$

Con un po' di lavoro, dalla proprietà della somma tranfinita si può dedurre che

$$\mathfrak{num}\,(Q) = \sqrt{\alpha}.$$

In modo più semplice si potrebbe dedurre che

$$\mathfrak{num}\,(\mathbb{P}) = \mathfrak{num}\,(\mathbb{D}) = \frac{\alpha}{2}$$

ove $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari e $\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali dispari. Similmente si hanno i seguenti risultati:

$$\mathfrak{num}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \alpha^2,$$

$$\mathfrak{num}\,(\mathbb{N}_0) = \alpha + 1,$$

$$\mathfrak{num}\,(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) = \alpha^2 + 2\alpha + 1,$$

$$\mathfrak{num}\,(\mathbb{Z}) = 2\alpha + 1, \quad etc.$$

Riepilogando, per *contare* un insieme infinito A usando le *numerosità* si deve operare come segue:

- ad ogni elemento dell'insieme A si associa una etichetta "k" in modo che solo un insieme finito di elementi abbia la stessa etichetta;

- denotiamo con a_k il numero degli elementi di A aventi l'etichetta "k" e poniamo
$$\mathfrak{num}\,(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k.$$

Se r è un numero intero, allora la sua etichetta è "$|r|$". Se (m,n) è una coppia di numeri interi, allora, la sua etichetta è $r = \max(|m|,|n|)$. L'analisi di situazioni più complesse, come quando si voglia contare insiemi di grandi cardinalità, esula dagli scopi del presente articolo e si rimanda a [10].

2.2.5 Cardinali, ordinali e numerosità

Che relazione c'è tra gli insiemi (classi) dei cardinali $\mathbf{Card}$, ordinali $\mathbf{Ord}$ e le numerosità $\mathbf{Num}$? Dalla teoria cantoriana sappiamo che

$$\mathbf{Card} \subset \mathbf{Ord}$$

in quanto ogni numero cardinale κ può essere identificato col più piccolo ordinale avente cardinalità κ.

Adesso vedremo che esiste anche una identificazione naturale

$$\mathbf{Ord} \subset \mathbf{Num}$$

Dobbiamo definire quali numerosità possono essere identificate con i numeri ordinali: diamo dunque questa definizione alternativa di numero ordinale

$$\gamma \in \mathbf{Ord} \Longleftrightarrow \gamma = \mathfrak{num}(S_\gamma)$$

ove

$$S_\gamma = \{x \in \mathbf{Ord} \mid x < \gamma\}.$$

Si ha che

$$\mathbf{Ord} \neq \varnothing$$

in quanto

$$0 \in \mathbf{Ord}.$$

E facilmente si può provare che

$$n = \mathfrak{num}(\{0,\ldots,n-1\})$$

è un numero ordinale. Dunque, con questa definizione, un numero ordinale non è un insieme come nella definizione di Von Neumann, ma la numerosità di un tale insieme; ovvero, con questa definizione $\omega \neq \mathbb{N}_0$, ma $\omega = \mathfrak{num}(\mathbb{N}_0)$.

Ma non tutte le numerosità sono numeri ordinali. Per esempio α non è un numero ordinale. Se α fosse un ordinale si raggiungerebbe facilmente una contraddizione:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{num}(\{x \in \mathbf{Ord} \mid x < \alpha\}) = \mathfrak{num}(\mathbb{N}_0) \\ &= \mathfrak{num}(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \mathfrak{num}(\mathbb{N}) + 1 = \alpha + 1. \end{aligned}$$

Similmente si può vedere che $\alpha - 1, \alpha - 2, .., \alpha/2, \alpha/3, .., \sqrt{\alpha}$ non sono ordinali.

Invece

$$\alpha + 1 = \mathfrak{num}(\mathbb{N}_0) = \{x \in \mathbf{Ord} \mid x < \alpha + 1\}$$

è un numero ordinale. In realtà $\alpha + 1$ è il più piccolo numero ordinale infinito, ovvero si ha che

$$\alpha + 1 = \omega.$$

Possiamo associare ad una numerosità una tabella del tipo di quelle presentate nei paragrafi 2.2 e 2.2.2; per esempio

$$\alpha \leftrightarrow \begin{array}{ccc} \hline 0 & \leftrightarrow & \\ 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 2 \\ 3 & \leftrightarrow & 3 \\ 4 & \leftrightarrow & 4 \\ 5 & \leftrightarrow & 5 \\ \ldots & \leftrightarrow & \ldots \\ \hline \end{array} ; \quad \frac{\alpha}{2} \leftrightarrow \begin{array}{ccc} \hline 0 & \leftrightarrow & \\ 1 & \leftrightarrow & \\ 2 & \leftrightarrow & 2 \\ 3 & \leftrightarrow & \\ 4 & \leftrightarrow & 4 \\ 5 & \leftrightarrow & \\ \ldots & \leftrightarrow & \ldots \\ \hline \end{array} ; \quad \sqrt{\alpha} \leftrightarrow \begin{array}{ccc} \hline 0 & \leftrightarrow & \\ 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & \\ 3 & \leftrightarrow & \\ 4 & \leftrightarrow & 4 \\ 5 & \leftrightarrow & \\ \ldots & \leftrightarrow & \ldots \\ \hline \end{array} ;$$

$$\alpha^2 \leftrightarrow \begin{array}{ccc} \hline 0 & \longleftrightarrow & \\ 1 & \longleftrightarrow & (1,1) \\ 2 & \longleftrightarrow & (2,1),(2,2),(1,2) \\ 3 & \longleftrightarrow & (3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3) \\ 4 & \longleftrightarrow & (4,1),(4,2),\ldots,(4,4),(3,4),\ldots,(1,4) \\ 5 & \longleftrightarrow & (5,1),(5,2),\ldots,(5,5),(4,5),\ldots,(1,5) \\ \ldots & \longleftrightarrow & \ldots \\ \hline \end{array}$$

In generale si ha la tabella

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \leftrightarrow \begin{array}{ccc} \hline 0 & \longleftrightarrow & a_0 \text{ oggetti} \\ 1 & \longleftrightarrow & a_1 \text{ oggetti} \\ 2 & \longleftrightarrow & a_2 \text{ oggetti} \\ 3 & \longleftrightarrow & a_3 \text{ oggetti} \\ 4 & \longleftrightarrow & a_4 \text{ oggetti} \\ 5 & \longleftrightarrow & a_5 \text{ oggetti} \\ \ldots & \longleftrightarrow & \ldots \\ \hline \end{array}$$

Dunque anche una numerosità, al pari di un numero ordinale, può essere rappresentata da una tabella ove le caselle a sinistra contengono un numero ordinale. Ma mentre nel caso degli ordinali tutte le prime caselle a destra contengono un solo elemento e quelle successive sono vuote, nel caso delle numerosità, ogni casella contiene a_k oggetti ($a_k \geq 0$), ovvero gli oggetti aventi etichetta k. Ne consegue il fatto che abbiamo molti più numeri, ma si paga il prezzo che ogni numero non può essere rappresentato univocamente da una tabella, poiché somme diverse possono dare lo stesso risultato.

2.3 Secondo problema: la natura del continuo

Nella geometria euclidea classica, le *linee* ed i *segmenti* non sono considerati *insiemi di punti*; al contrario, negli ultimi due secoli l'attitudine riduzionistica della matematica moderna ha descritto la geometria euclidea mediante una *interpretazione insiemistica*. Così il continuo euclideo è stato identificato col continuo di Dedekind e la retta euclidea è stata identificata con l'insieme dei numeri reali (una volta che si sia fissata l'origine O ed un segmento unitario OU). Nonostante che questa identificazione, oggi, sia quasi universalmente accettata, nondimeno è insoddisfacente (per non dire sbagliata), in quanto contraddice alcuni teoremi della geometria euclidea.

2.3.1 Il paradosso della bisezione del segmento

Come esempio consideriamo l'affermazione Euclidea che

un segmento AB può essere diviso in due segmenti congruenti AM ed MB.

Se AB è identificato col continuo di Dedekind, allora o AM ha un punto di massimo oppure MB ha un punto di minimo. Allora AM ed MB non sono congruenti, dunque il continuo di Dedekind non è un modello corretto del continuo Euclideo.

Per costruire un modello coerente, siamo obbligati ad assumere che i punti A, B ed M **non appartengano** al segmento AB. L'immagine della retta Euclidea che ne viene fuori è quella di un insieme $\mathfrak{E}$ linearmente ordinato nel quale il segmento AB è un sottoinsieme di $\mathfrak{E}$ che **non può** essere identificato col segmento insiemistico

$$S(A,B) := \{X \in \mathfrak{E} \mid A < X < B\},$$

poichè

$$M \in S(A,B).$$

Dunque dobbiamo raffigurarci il segmento AB come un insieme di **atomi** intramezzati da **punti vuoti**. In questo modello, i punti vuoti corrispondono ai numeri reali.

Vediamo dove ci porta questa nuovo punto di vista. Tra le conseguenze di questa impostazione si ha la necessità di analizzare la nozione di *distanza*. Possiamo derivare questa nozione da quella di traslazione (sulla retta) che formalizza l'idea di movimento rigido della retta in se stessa. Ogni traslazione è caratterizzata da due punti X ed Y. Denoteremo con g_{XY} la traslazione che trasporta il punto X nel punto Y. Ciò detto, possiamo dare la seguente definizione:

Definition 1. *: Due coppie di punti P,Q e A,B sono tra loro equidistanti se $g_{PQ} = g_{AB}$.*

In particolare se i punti A e B sono estremi di un segmento allora la distanza tra A e B coincide con la *lunghezza* del segmento. Ma esistono distanze che non si possono identificare con la lunghezza di alcun segmento come per esempio la distanza di un atomo dall'estremo del segmento che lo contiene. Pertanto, mentre le lunghezze formano un continuo alla Dedekind, non possiamo dire altrettanto delle distanze. Ogni lunghezza determina una distanza, ma non viceversa. Pertanto, se dotiamo anche le distanze ordinate, come già la lunghezze (orientate), di un'opportuna struttura naturale di campo ordinato, allora questo campo non può essere archimedeo**.**

Comunque esiste una ragione molto più profonda che rende la retta reale non adeguata a rappresentare la retta euclidea. Infatti, noi ci aspettiamo che i punti della retta euclidea possano rappresentare tutte le grandezze. D'altra parte esistono grandezze che non sono archimedee (vedi Def. 3) quali gli angoli di congruenza, i germi di funzioni, la probabilità nei modelli in [18, 24, 13, 14], etc. Dunque queste grandezze non possono essere modellizzate da $\mathbb{R}$. Tra 0 e l'insieme dei reali positivi, $\mathbb{R}$ ha un buco che contraddice la nostra idea di continuo. Così, una idea coerente di continuo euclideo ci conduce direttamente alla geometria non-archimedea come è stata concepita da Giuseppe Veronese alla fine del XIX secolo [28, 29] e ai successivi sviluppi portati avanti da Levi-Civita nella direzione dell'analisi (**campo di Levi-Civita**, 1892, [22]).

2.3.2 Alla ricerca del continuo Euclideo

A questo punto si pone la questione seguente: quali caratteristiche deve avere un campo per soddisfare le proprietà del continuo euclideo richieste sia dall'intuizione che dalle esigenze dello sviluppo della matematica? Se X è un insieme linearmente ordinato, quando possiamo dire che gli elementi di X formano un continuo? È possibile dare una definizione di continuo che da una parte eviti il "paradosso della bisezione" e dall'altra risulti più soddisfacente del continuo di Dedekind?

Cerchiamo di rispondere a queste domande. Nella nostra intuizione ingenua, si pensa ad un continuo come ad un insieme linearmente ordinato senza interruzioni, ovvero senza **fori** tra una parte e l'altra. Rendiamo questa definizione rigorosa. Contrariamente alla nostra intuizione, un insieme X che soddisfa la seguente proprietà

$$\forall a, b \in X,\ a < b,\ \exists c \in X,\ a < c < b \tag{2.5}$$

non può essere considerato un continuo: questa nozione, soddisfatta ad esempio dall'insieme dei numeri razionali, non è un buon candidato per un continuo in quanto l'insieme dei razionali è pieno di fori rappresentati dai numeri irrazionali.

Comunque, da questo punto di vista anche il continuo di Dedekind non è (completamente) soddisfacente; infatti, seguendo la teoria sviluppata fino ad ora, abbiamo visto che le lunghezze formano un continuo alla Dedekind, ma ci sono distanze che non sono lunghezze. Così in un certo senso anche il continuo di Dedekind contiene fori rappresentati da tali distanze (ovvero dai punti in un segmento AB che contengono atomi). Inoltre, anche al di là dell'esempio delle distanze, esistono molte grandezze che non sono archimedee. Una buona teoria del continuo dovrebbe essere in grado di includere anche questi casi.

Pertanto possiamo dare la seguente definizione che generalizza la (2.5):

Definition 2. [10] *Un campo linearmente ordinato $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ è un continuo se dati due sottoinsiemi numerabili A e B tali che*

$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ a < b,$$

esiste $c \in X$ tale che

$$a < c < b.$$

Il campo dei numeri euclidei, come è stato definito nella sezione precedente, certamente soddisfa questa esigenza.

2.3.3 La matematica non archimedea

Ricordiamo la seguente definizione:

Definition 3. *Un insieme di grandezze G si dice archimedeo se prese due grandezze non nulle $a, b \in G$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$na > b$$

Un campo ordinato si dice non-archimedeo se i numeri positivi non soddisfano l'assioma di Archimede. Dunque un campo è non archimedeo se e solo se non contiene numeri infiniti o infinitesimi. La matematica basata su campi non archimedei è chiamata matematica non archimedea (che in seguito denoteremo con "NAM").

L'approccio moderno alla NAM è basato sull'**Analisi Non Standard** (ANS) (Robinson 1961 [25]) e dalle sue varianti (e.g. Keisler, 1976 [21]; Nelson, 1977 [23]; Hrbacek, 2001 [19, 20]; B. [2, 3, 5]). La teoria dei **numeri Euclidei** (che è

[10] Nella moderna letteratura matematica un insieme che soddisfa questa relazione si dice ω-saturato (rispetto alla relazione $<$).

stata sviluppata per queste esigenze) è uno sviluppo dell'ANS in linea anche con lo spirito di Veronese e Levi-Civita (B., Forti, 2017 [10]). Rimandiamo a [12] per una breve descrizione degli sviluppi della matematica non archimedea da Euclide ai giorni nostri.

2.4 Terzo problema: i numeri infinitesimi

Tutti i discorsi precedenti ci portano a considerare gli infinitesimi. La geometria non archimedea ci conduce agli infinitesimi. Ma anche la nozione di somma transfinita ci conduce alla nozione di infinitesimo. Infatti, mediante somme transfinite si possono ottenere non solo numeri infiniti, ma anche infinitesimi; si consideri per esempio la somma transfinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$$

ove $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali positivi. Per ogni n si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1,$$

allora

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} < 1.$$

E poichè, al variare di n, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ supera ogni numero reale minore di 1, se ne deduce che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1 - \varepsilon$$

ove ε è un numero infinitesimo.

2.4.1 Esistenza degli infinitesimi

Tutto ciò ci porta al terzo problema filosofico: il problema dell'esistenza degli infinitesimi. Come abbiamo visto Russell negava l'esistenza degli infinitesimi con notevole determinazione (vedi citazione a pag. 26). Strano che Russell abbia assunto questa posizione, in quanto la sua posizione riguardo alla matematica in generale è la seguente:

> *La matematica è la sola scienza esatta in cui non si sa mai di che cosa si stia parlando né se quello di cui si parla è vero.*

Questa posizione implica il fatto che nella matematica moderna la parola *esistenza* è sinonimo di *coerenza*. Tutto ciò che non porta a contraddizione ha il diritto di cittadinanza nel regno della matematica.

Dunque la domanda corretta non è:

esistono gli infinitesimi?

ma piuttosto

è utile usare gli infinitesimi?

Utile nella misura in cui tali concetti stanno alla base di una teoria che permette di risolvere determinati problemi. Come si costruisce tale teoria? Il paradigma classico, su cui si è basata la matematica occidentale, è dato dalla geometria Euclidea. Occorre stabilire un linguaggio ammissibile e delle "regole" di gestione dei concetti espressi da tale linguaggio. Se ad esempio si ritengono ammissibili locuzioni come "*giacere in*", "*passare per*" ecc. e si scelgono come regole di gestione i 5 assiomi di Euclide, si ottiene la teoria chiamata Geometria Euclidea. Se si vogliono risolvere dei problemi con l'uso della Geometria Euclidea, si deve accettare, all'interno di essa, l'esistenza di *punti*, *rette* e *piani* e farne un uso coerente con gli assiomi della teoria. Chiedersi se questi oggetti esistono è una domanda filosofica che esula dal regno della matematica, almeno come la si concepisce oggi.

Un discorso analogo vale per la matematica non archimedea (NAM). Naturalmente gli assiomi di una teoria devono essere scelti in modo che essa sia abbastanza potente (se dai 5 assiomi di Euclide se ne togliesse uno si riuscirebbero a dimostrare ben poche cose!) e in modo da non essere contraddittoria (cioè deve essere impossibile dedurre una proposizione e la sua negazione).

La NAM certamente è non contraddittoria. Pertanto la sua validità va cercata nella ricchezza delle sua applicazioni. Vediamone alcune.

2.4.2 I numeri reali come arrotondamento dei numeri euclidei

Gli infinitesimi e la nozione di somma transfinita permettono un semplice ed elegante rappresentazione dei numeri reali come noi usualmente li immaginiamo. In genere si pensa ad un numero reale positivo come ad un numero intero n seguito da una virgola e da infinite cifre decimali:

$$n, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Ma come possiamo dare un significato preciso a questa notazione? La cosa è semplice; non si tratta altro che di una somma transfinita nella quale si trascurano gli infinitesimi, ovvero

$$n, a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots = n + st \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{10^k} \right)$$

Vedendo le cose da questo punto di vista i numeri euclidei possono essere considerati un concetto primitivo: i numeri che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti della retta Euclidea. Allora numeri reali divengono una nozione ausiliaria: essi sono il sottocampo dei numeri euclidei che possono essere approssimati da misure infinitamente precise; infatti il risultato di una misura sarà sempre un decimale finito e dunque idealizzando la possibilità di fare misure sempre più precise si ottiene un numero reale. I numeri euclidei, al pari dei numeri reali, non potranno mai essere determinati da una misura, ma la loro esistenza, pensata come punti della retta euclidea, ci permette di costruire una teoria più potente di quella che si avrebbe utilizzando solo i decimali finiti o solo i numeri reali.

2.4.3 La nozione di derivata

Come è ben noto, mediante le tecniche dell'Analisi Non Standard si riesce a definire le principali nozioni del calcolo in modo semplice ed elegante come non sarebbe possibile utilizzando solamente i numeri reali. Per esempio la nozione di derivata può essere definita mediante la formula

$$f'(x) = st\left(\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right) \tag{2.6}$$

ove $\varepsilon \neq 0$ è un qualunque infinitesimo. Ma utilizzando i numeri infinitesimi possiamo fare anche di più:

> *possiamo ricostruire le nozioni fondamentali dell'analisi infinitesimale in modo più naturale, più semplice e più generale*

Questo punto merita di essere chiarito. Consideriamo la nozione di derivata e presumiamo di non conoscere il concetto di limite di Cauchy, ma invece di ispirarci al modello fisico e di considerare l'intuizione che abbiamo della velocità istantanea. L'idea più semplice è quella di pensare alla velocità istantanea come alla velocità media in un intervallo infinitesimo, *qualora si trascurino quantità infinitesime.* Ma può capitare che la velocità dipenda dalla lunghezza dell'intervallo in questione. Questo fatto può essere evitato utilizzando l'*infinitesimo fondamentale* $\eta = \alpha^{-1}$. Ma può pur sempre capitare che ad un istante t_0 ci sia un cambiamento repentino di velocità, ovvero che la velocità media nell'intervallo $[t_0,\ t_0+\eta]$ non sia uguale alla velocità media nell'intervallo $[t_0-\eta,\ t_0]$. Dunque siamo condotti alla seguente definizione: *una funzione f si dice derivabile in un punto t_0 se i numeri*

$$\frac{f(t_0+\eta)-f(t_0)}{\eta} \quad \text{e} \quad \frac{f(t_0)-f(t_0-\eta)}{\eta}$$

differiscono tra loro di una quantità infinitesima. In tal caso poniamo

$$Df(t_0) := st\left(\frac{f(t_0)-f(t_0-\eta)}{\eta}\right)$$

Così facendo si ha una nozione di derivata più generale di quella usuale che possiamo chiamare *derivata generalizzata*. Anche alcune funzioni discontinue possono essere derivabili. La cosa interessante è che il teorema del valor medio di Lagrange continua ad essere valido anche con questa nuova definizione di derivata. E col teorema di Lagrange anche tutti i risultati che ne conseguono. Ma con questa definizione di derivata, la derivabiltà non implica la differenziabilità, ovvero l'esistenza della retta tangente (cosa che è equivalente alla (2.6)). Dunque con questa definizione di derivata anche per le funzioni di una sola variabile, la derivabilità differisce dalla differenziabilità.

Ecco un esempio di funzione derivabile ma non differenziabile. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & per \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

è derivabile nello 0 in quanto[11]

$$D^{+}f(0) = st\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\eta}\right) - 0}{\eta}\right] = st\left[\alpha \sin\left(\alpha\pi\right)\right] = 0$$

$$D^{-}f(0) = st\left[\frac{0 - \sin\left(\frac{\pi}{\eta}\right)}{\eta}\right] = st\left[-\alpha \sin\left(-\alpha\pi\right)\right] = 0$$

Ma questa funzione non è differenziabile nello 0 in quanto non è neppure continua.

Si può dimostrare che affinchè una funzione derivabile sia anche differenzabile è sufficiente che abbia la derivata continua (come capita per le funzioni di più variabili con la vecchia definizione).

Quest'esempio ci conduce alla seguente considerazione: *il principale vantaggio della matematica non archimedea non consiste nel fornire strumenti che permettono di dimostrare alcuni teoremi in modo più facile, ma nel permettere di costruire nozioni matematiche e modelli del mondo reale in modo più ricco ed efficace.*

Naturalmente, nel caso dell'analisi infinitesimale di base, le differenze rispetto alla matematica tradizionale, pur essendo notevoli dal punto di vista fondazionale, sono quasi irrilevanti dal punto di vista tecnico/ingegneristico. Ma passando alla matematica superiore, iniziando con la teoria delle distribuzioni, le maggiori possibilità offerte dalla NAM emergono in modo palese. A mio parere, il valore della NAM non risieda nel fatto che sia più o meno semplice ed intuitiva della matematica tradizionale, ma nella maggiore capacità di costruire modelli della realtà fisica e di conseguenza nella maggiore potenzialità di sviluppi futuri. Rimandiamo il lettore interessato a [11], [14], [8] ed alle referenze ivi contenute.

[11] Si può agevolmente dimostrare che $\sin(\pm\alpha\pi) = 0$ in quanto $\sin(n\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2.4.4 Gli infinitesimi in natura

Ma la nozione di derivata (al pari della nozione di numero reale), come ben si sa, può essere definita anche senza ricorrere all'ausilio degli infinitesimi. Forse, quando Russell asseriva che gli infinitesimi "*devono essere considerati* ***non necessari***", intendeva dire che:

il calcolo differenziale può essere costruito senza di essi

Pertanto adesso voglio ricordare che esistono problemi che non possono essere trattati al di fuori della NAM. Tali problemi sono abbastanza tecnici ed esulano dallo scopo della presente trattazione. Rimandiamo il lettore interessato a [8], [16], [17], [7].

Comunque vogliamo sottolineare un aspetto ancora più importante relativo al ruolo degli infinitesimi. Come tutti sanno, una delle caratteristiche più interessanti della matematica è quella di essere non solo *bella*, ma anche *utile*. La Scienza moderna e tutte le sue applicazioni tecnologiche non sarebbe neppure immaginabile senza il fondamentale apporto della matematica. "*La matematica è il linguaggio della natura*" sosteneva Galileo. Possiamo dunque dire che oggi l'uso dei numeri infiniti ed infinitesimi nelle scienze naturali è solo una questione di gusto? Possiamo sostenere che mediante la nozione di limite alla Weierstrass, senza ricorrere all'uso degli infinitesimi, possiamo modellizzare *tutti* i fenomeni in modo equivalente? Noi siamo convinti di no. Esistono alcuni modelli descriventi certi aspetti della natura, nei quali l'uso degli infinitesimi è una componente essenziale. Rimandiamo a [6], pubblicato su questa collana, per una discussione relativamente elementare di questo punto. Altri esempi possono essere trovati in [1], [11], [15], [17], [7].

Bibliografia

[1] Albeverio A, Fenstad J.E., Hoegh-Krohn R., Lindstrom T., *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Dover Books on Mathematics, 2006

[2] Benci V., *An algebraic approach to nonstandard analysis,* in: Calculus of Variations and Partial differential equations, (G. Buttazzo et al., eds.), Springer, Berlin (1999), p. 285–326.

[3] Benci V. *Alla scoperta dei numeri infinitesimi, Lezioni di analisi matematica esposte in un campo non-archimedeo*, Aracne editrice, Roma (2018).

[4] Benci V., *I numeri e gli insiemi etichettati*, Conferenze del seminario di matematica dell' Università di Bari, vol. 261, Laterza, Bari 1995, p. 29.

[5] Benci, V., *L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei. Una introduzione elementare*, MatematicaMente, n.218,. . . ,222; http://mathesisverona.it/Numeri/Nume218.pdf

[6] Benci, V., *Infinitesimi in natura,* Atti del convegno: VII giornata nazionale di Analisi Nonstandard, (P. Bonavoglia ed.), (2017), p. 21-33, DOI: 10.4399/97888255116663.

[7] Benci V., *Non-Archimedean Mathematics and the formalism of Quantum Mechanics,* to appear on Isonomia, Atti del convegno "90-esimo anniversario della formulazione della meccanica quantistica".

[8] V. Benci, L. Berselli, C. Grisanti, *The Caccioppoli Ultrafunctions,* Adv. Nonlinear Anal., (2017), DOI: https://doi.org/10.1515/anona-2017-0225. 2, 10

[9] Benci, V., Di Nasso, M. *Numerosities of labelled sets: a new way of counting*, Adv. Math. 21 (2003), pp.505–567.

[10] Benci V., Forti M., *The Euclidean numbers,* to appear, arXiv:1702.04163v2.

[11] V. Benci, S. Galatolo, M. Ghimenti, *An elementary approach to Stochastic Differential Equations using the infinitesimals,* in Contemporary Mathematics 530, Ultrafilters across Mathematics, American Mathematical Society, (2010), p. 1-22.

[12] Benci V., Freguglia P. , *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*, Matem. Cultura e Soc., RUMI, 1 (2016), pp.105–122.

[13] Benci V., Horsten H., Wenmackers S., *Non-Archimedean probability*, Milan J. Math., (2012).

[14] Benci, V., Horsten, L., Wenmackers, S., *Infinitesimal Probabilities*, Brit. J. Phil. Sci. (2018).

[15] Benci V., Luperi Baglini L., *A model problem for ultrafunctions*, in: Variational and Topological Methods: Theory, Applications, Numerical Simulations and Open Problems; Electron. J. Diff. Eqns., Conference, 21 (2014), 11-21.

[16] Benci V., Luperi Baglini L., *Ultrafunctions and applications,* DCDS-S, Vol. 7, No. 4, (2014), 593-616. arXiv:1405.4152.

[17] Benci V., Luperi Baglini L., Squassina M., *Generalized solutions of variational problems and applications*, Advances in Nonlinear Analysis, (2018), arXiv:1806.10953

[18] Enriques F. (a cura di) *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari, raccolte e coordinate da Federigo Enriques*, Parte prima, vol. I, terza edizione, Nicola Zanichelli editore, Bologna, 1923

[19] Hrbacek K., "Realism, nonstandard set theory, and large cardinals", Annals of Pure and Applied Logic, 109, (2001), pp.15-48.

[20] Hrbacek K., Lessmann O., O'Donovan R., *Analysis with Ultrasmall Numbers,* Chapman and Hall/CRC ,2014.

[21] Keisler H.J., *Foundations of Infinitesimal Calculus,* Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976

[22] Levi-Civita T.,*Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Venezia (Serie **7**), (1892–93)

[23] Nelson E., "Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 83, Number 6, (1977).

[24] Nelson, E. *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press, (1987).

[25] Robinson A., *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1966.

[26] Russell B., *Mysticism and Logic and other essays*, George Allen & Unwin LTD, London, 1901

[27] Russell B. *The Principles of Mathematics* (1903), trad. italiana di L. Geymonat, Bollati Boringhieri, Torino, 2011

[28] Veronese G., *Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede,* Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche 4, (1889), pp.603–624.

[29] Veronese G., *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali,* Mathematische Annalen 47, (1896), pp. 423–432.

3

Delta Functions and Differentation of Discontinuous Functions

Richard O'Donovan[1]

The theory of distributions was developed to provide solutions to the problem of differentiating discontinuous functions. Nonstandard methods have been given (see [1]), but the approach developed in [2, 3], after [4, 5] extends these possibilities. In analysis with ultrasmall numbers, functions with nonstandard coefficients, are "normal" functions provided they respect one syntactic rule: it is possible to use ultrasmall or ultralarge values provided they refer to the context (the parameters involved). A nonstandard interpretation of Dirac's "improperness" is given.
Two frameworks will be presented which take advantage of the existence of many levels of observability:
Here, one considers that it is possible to consider that continuous functions are mere approximations to discrete functions.
The resulting functions can be multiplied or divided. Lopsided Dirac-like functions will also be shown.

3.1 Intuition

Consider the interval of real numbers $[0, 1]$. We may agree that it contains infinitely many numbers. Whether in the weaker form of a potential infinity (we can never finish counting them) or the strong version of an actual infinity (the cardinality of that set is greater than any natural number); either way, there is a huge quantity of them! So there should be nothing wrong to say that in some sense, there are numbers that must be very (very!) close to each other. And if two numbers a and b are very (very!) close, then their difference will be very (very!) small. Then again if we look at the interval $[a, b]$ the same story can be repeated. Yet

[1]College André-Chavanne, Geneve

the classical axioms of set theory, namely ZFC, do not allow for this concept of extreme proximity. One might say that the axioms are too weak.

When defining the derivative of $f : x \mapsto x^2 + 3x + 5$ we would like to have something like

$$\frac{(x+dx)^2 + 3(x+dx) + 5 - (x^2 + 3x + 5)}{dx} = 2x + 3 + dx$$

and somehow conclude that $f'(x) = 2x + 3$ so there should be a rigorous way to discard the dx at the end considering that it is very (very!) small without going into the challenging realm of limits (and this should hold for any x – including nonstandard values).

3.2 Continuity

When continuity and smoothness are considered in the real world, it is often linked to the scale of observation. An object may seem smooth from a distance, but on close inspection may seem non-differentiable, then again a closer look may show that what looked like spikes are in fact smooth on a smaller scale, and so on and so forth until we reach the quantum scale where nothing seems to make sense any more!

It is possible to consider continuity as an approximation to the discrete — or vice versa.

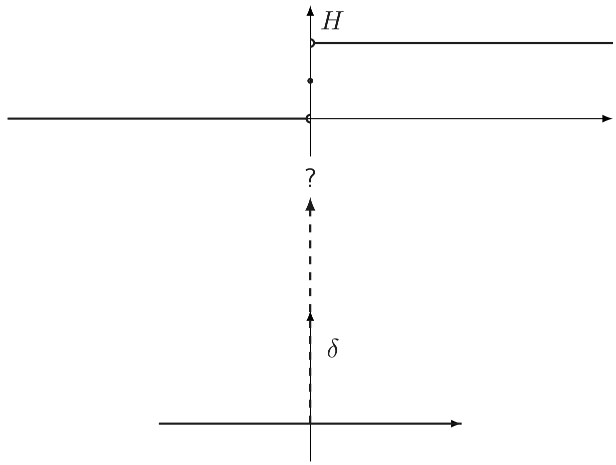
3.2.1 Discontinuous functions

Let H be the Heaviside function

$$H : x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Dirac famously pointed out that if δ is the derivative of H, it would have values everywhere zero except at zero where it would take an infinite value. The integral of δ over its domain would necessarily be 1.

But, he also noted that δ would not be a *proper* function.



The fact that classical axioms cannot formalise this quite intuitive idea, again, can be interpreted as a sign of weakness of the axiomatic system in general use.

There is a classical answer though: distributions; which are linear forms and, as such, cannot be multiplied. And, as with differential forms, all courses I attended on the subject of "forms" appeal to an intuition of infinitesimal to make us understand the concept, then the instructor quickly adds that, of course, infinitesimals do not exist! There is an elephant in the room, and mathematicians refuse to see it.

3.3 Axioms

We now axiomatise the concept of "very (very!) close", or "indiscernible" and introduce the term of **observable** to avoid misunderstandings with other uses of the former words.

Three axioms are added to the usual axioms of set theory:

- Relativised Idealisation
  enables to "see" ultrasmall numbers
- Standardisation
  enables to show that any "non observable, non ultralarge" number is ultraclose to an observable one
- Transfer
  enables to know if a result is observable or not

These will now be restated as consequences on real numbers.

Definition: context
The context of a function, set or statement is the list of parameters used in its description.

Bluntly put: the context is what we are talking about. In the derivative of f at $x = 3$ we are talking about f and the slope of f at 3 but we certainly are not really talking about the dummy variables whether they are ε and δ or h or dx which are linked by quantifiers and therefore are not parameters.

Definition: observable
Given a context, if a real number x is in the context, we say that it is observable.

Axiom 1: Closure
If a property is satisfied by some number, then it is satisfied by an observable number.

In particular, if a and b are observable, then $a \pm b$, $a \cdot b$, a/b (for $b \neq 0$) and a^b are observable since there is a unique number having the property of being the result of the operation. Therefore that result is observable.
If a number is observable in any context, we say that it is always observable or **standard**.

In the contrapositive form: if a property is satisfied by all observable numbers, then it is satisfied by all numbers (since if there were a counter-example, there would be an observable counter-example).

Axiom 2: Comparability
Given real numbers x and y: x is observable when y is observable or y is observable when x is observable. If both occur then we say that they have same observability.
1 *is always observable.*

Axioms 1 and 2 together enable to say that usual operations between standard numbers yield standard numbers i.e., all the numbers we can define in a unique way (no parameters, only constants) are standard – or always observable.

Definition: ultrasmall, ultralarge
If a real number is smaller in absolute value than any nonzero positive observable number, then it is ultrasmall. If it is larger in absolute value than any positive observable number, then it is ultralarge.

Axiom 3
With respect to any context, there exist ultrasmall real numbers.

If $a - b$ is ultrasmall or zero, we note $a \simeq b$ and say that a and b are ultraclose (with respect to the context).

We observe that ultrasmall numbers do not show up unexpectedly, in the sense that even though they exist, by closure, classical operations will not produce them if they are not introduced explicitly.

Axiom 4
Given a context, any real number x which is not ultralarge has a neighbour a such that a is an observable real number and $a \simeq x$.
This number a is the **observable neighbour**.

If parameters are added to a context, this produces an extended context.

Axiom 5
A statement referring to a context is true iff it is true in any extended context.

Properties of functions remain the same even if they are considered in extended contexts of other functions; in the product rule for instance in the case when f and g do not have same observability.

Sometimes a definition can introduce unnecessary data such as $+x-x$ for some parameter x. This does not matter: all we require is that the context contains at least all the parameters.

3.4 Real numbers

These properties due to extra axioms can be interpreted in two distinct ways. The difference is purely philosophical and does not change the mathematics. One way is to say that the addition is syntactic. These axioms enable us to characterise new properties about real numbers which were already there. The usual real numbers are the real numbers mentioned here, some of which are standard and some are not. The other view is that these axioms produce new numbers. The usual real numbers are the standard ones, the nonstandard real numbers are new items.

But in both interpretations, closure holds: a set that contains all the standard real numbers, by closure in the contrapositive form, contains all the real numbers. This is why, in both views, the set $\mathbb{R}$ is the set of real numbers containing numbers of all contexts.

3.5 Induction, non Archimedean collections and internal sets

If there exist ultrasmall positive numbers, their collection is bounded above (by any nonzero positive observable number, say 1) but this collection does not have a least upper bound (there is no greatest ultrasmall number). This seems to contradict a fundamental property of bounded sets of real numbers.

Similarly, there is no smallest positive ultralarge.

A non-Archimedean type behaviour is given by the fact that if x is ultrasmall and n is a standard natural number, then $x \cdot n$ is ultrasmall.

Furthermore, if n is standard (always observable) then, by closure, $n + 1$ is standard, yet one cannot conclude by induction that all natural numbers are standard.

This is a well known situation in nonstandard analysis and is linked to the usually difficult exercise of determining whether a statement is internal (can be used to define sets with usual properties) or external (cannot be used to define a set).

3.5.1 Internal statements

Internal statements can be used to define sets which have the properties of classical sets. Here, the internality is checked by observing the syntax.

Definition: Contextual Statements

A statement whose bound variables either refer to the context – or do not refer to observability at all – are contextual statements.

The $\simeq$ symbol is defined as referring to the context, so its use is automatically contextual, as used in the following example: $\forall x \quad x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)$. Here the parameters are those of f and a. x is bound and ultraclose to a with respect to the context of f and a.

Contextual statements are internal

When observability is used with no explicit reference to a context, then by convention, it implicitly refers to the context. This reduces the notational burden and guarantees internality.

3.5.2 Induction

Recall that induction is not a property of properties; this would be second order logic. It is a property of (internal) sets. The statement

If n is standard, then $n + 1$ is standard

has n as parameter (the constant 1 is always observable) and yet refers to the context in an absolute way (standard, not referring to n), it is thus not an internal statement and cannot be used for induction.

The statement

If n is observable, then $n+1$ is observable

refers implicitly to the context of n and, if made explicit, would be

If n is as observable as n, then $n+1$ is as observable as n

which is internal and the induction conclusion is that every number is as observable as itself – which is true.

3.6 External collections and proper numbers

We postulate the existence of external collections of the form

$$C = \{x \in A \mid P(x)\}$$

where A is an internal set and P is any property which is not internal, in particular if P refers to an observability which does not refer to the context.

We give a meaning to the term "proper" used by Dirac. When shifting between different contexts, we consider *proper* numbers to be those in the initial context. When starting with a standard function (a function whose parameters are all standard – or always observable) the proper numbers are standard. If we start with a nonstandard parameter, the proper numbers are those which have same observability as the nonstandard parameter: it is a new basic standardness.

Given an initial context, **proper** numbers are those that are observable.

A **proper ultrasmall** (ultrasmall relative to the initial context) is *less proper* or improper and an ultrasmall relative to an improper number is *very improper*.

If $a-b$ is ultrasmall (or zero) relative to the proper context, we write

$$a \overset{p}{\simeq} b.$$

Let $n_p(x)$ be the observable neighbour of x referring to the proper context.

Caution!

If we write

$$f(x) \simeq a$$

this means that $f(x)$ and a are ultraclose in the context of f, x and a. This is internal.

If we write

$$\forall x \quad f(x) \simeq a$$

this means that x is not a parameter, so $f(x)$ and a are ultraclose in the context of f and a. This is internal.

If the proper context is given by f and we write

$$f(x) \overset{p}{\simeq} a$$

then it does not consider the context of x nor a and is therefore an external concept.

It is hazardous to manipulate external objects. It is best to use them only at the end of a process!

Example of an external collection

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \overset{p}{\simeq} 0\}$$

which is the collection of proper ultrasmall numbers. This collection is not a set and has no least upper bound.

3.7 The derivative

A function f has a derivative at a if there is an observable number D such that for any ultrasmall dx

$$\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \simeq D$$

Note that the ultrasmallness and ultraproximity refer to the context, which contains the parameters of f, and a, even if they are nonstandard.

The derivative at a given point uses a less proper value, dx.

Compared to other nonstandard approaches, this formula is for all numbers. If a is not standard, then dx must be less proper, but the same formula holds.

3.8 Continuity

f is continuous at a if, for any x,

$$x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)$$

Here the context is given by f and a, but not x, because x is bound by a quantifier and is thus not a parameter.

The classical theorems of analysis hold for internal functions and can be found in [3]. We now turn to extra possibilities where we change the point of view from one context to another.

3.9 Approximating non differentiable functions by $\mathcal{C}^\infty$ functions

Consider the standard context to be the proper context, and let h be ultrasmall and positive.

Let

$$f : x \mapsto h \cdot \ln(e^{x/h} + 1)$$

f is an improper function (but a real function – and internal – nonetheless).

We have

$$f(0) = h \cdot \ln(2) \not\simeq 0$$

because in the context of f, h is observable (because h is a parameter of f). But

$$f(0) = h \cdot \ln(2) \overset{p}{\simeq} 0$$

because $h \overset{p}{\simeq} 0$

If x is a proper negative number, then $\frac{x}{h}$ is a proper negative ultralarge; hence

$$\ln(\underbrace{e^{x/h}}_{\overset{p}{\simeq} 0} + 1) \overset{p}{\simeq} ln(1)$$

By continuity of $\ln$ we have $x \simeq 1 \Rightarrow \ln(x) \simeq \ln(1)$. Since the context of f contains more parameters than the proper context, $x \simeq y \Rightarrow x \overset{p}{\simeq} y$, hence $\ln(e^{x/h} + 1) \overset{p}{\simeq} 0$ and

$$f(x) = h \ln(e^{x/h} + 1) \overset{p}{\simeq} 0$$

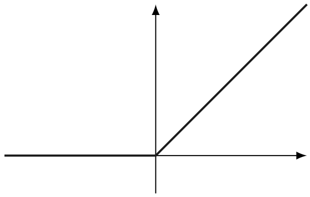
Similarly, if x is a proper positive number, then

$$f(x) = h \ln(e^{x/h} + 1) = h \ln(e^{x/h}(\underbrace{1 + e^{-x/h}}_{\overset{p}{\simeq} 0})) \overset{p}{\simeq} h \ln(e^{x/h}) = x$$

Which leads to:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \overset{p}{\simeq} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \overset{p}{\simeq} x & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

At the proper scale, differentiable f is seen as a function which is non differentiable at 0!



Now let

$$f_p(x) = n_p(f(x))$$

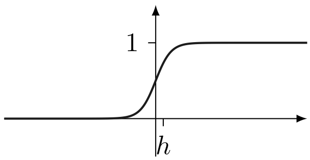
Here,

$$f_p(x) = \frac{|x| + x}{2}$$

so it is in fact internal and is a proper function. f *is* $\mathcal{C}^\infty$ *but* $f_p'(0)$ *does not exist.*

Let $H = f'$, then

$$H : x \mapsto \frac{e^{x/h}}{e^{x/h} + 1}$$



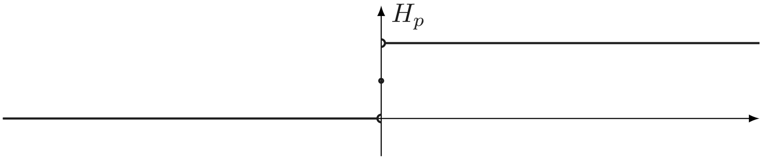
$H(0) = \frac{1}{2}$

$$H : x \mapsto \begin{cases} \overset{p}{\simeq} 0 & \text{if } x < 0 \\ 0.5 & \text{if } x = 0 \\ \overset{p}{\simeq} 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

Let

$$H_p(x) = n_p(H(x))$$

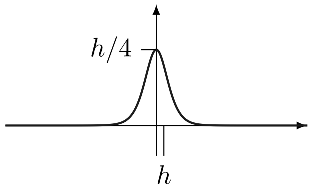
then $H_p(x)$ is the Heaviside function. At the proper scale, all we see is:



Again, H_p is internal and is a proper function.
Let $\delta = H'$, then

$$\delta : x \mapsto \frac{e^{x/h}}{h(e^{x/h}+1)^2}$$

$\delta(0) = \frac{1}{4h}$ which is a proper ultarlarge.



For all proper $x \neq 0$, we have $\delta(x) \overset{p}{\simeq} 0$
Let $\delta_p(x) = n_p(\delta(x))$. Then

$$\delta_p : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

because ultralarge values have no observable neighbour

3.9.1 When it is irrelevant how large is ultralarge

If we assume that the specific ultralarge value is irrelevant provided it is a proper ultralarge, we introduce the $\Diamond\!\Diamond$ symbol to indicate this. The "observable neighbour" of an ultralarge number will be denoted by $\Diamond\!\Diamond$ so $n_p(x) = \Diamond\!\Diamond$ if x is ultralarge.
Let $\delta_p(x) = n_p(\delta(x))$. Then

$$\delta_p : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

because ultralarge values have no observable neighbour

Then: For all proper x

$$\delta_p : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ \Diamond\!\Diamond & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

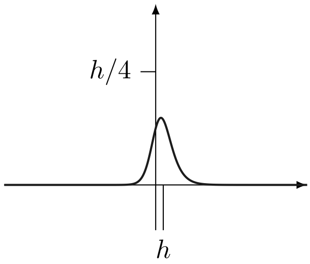
The reciprocals exist!
For all proper x

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)_p : x \mapsto \begin{cases} \Diamond\!\Diamond & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{H}\right)_p : x \mapsto \begin{cases} \Diamond\!\Diamond & \text{if } x < 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

3.9.2 Asymmetrical delta functions

$\mathcal{C}^\infty$ functions can be multiplied, so $H \cdot \delta$ yields an asymmetrical Dirac-like function



with $(H \cdot \delta)(0) = h/8$ and the max is at h.

3.9.3 Delta functions

Two usual requirements for a δ function

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

2. For any $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$([2]) we have
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \delta(x)dx = \varphi(0)$$

The first is by construction of δ as derivative of Heaviside. We show the second:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \delta(x)dx = \underbrace{\varphi(x) \cdot H(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \cdot H(x)dx$$
$$\overset{p}{\simeq} \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} = \varphi(0)$$

(because φ and φ' have compact support)

Here the equality is replaced by proper ultraproximity. But as before, if we take the proper neighbour:

$$n_p\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \delta(x)dx\right) = \varphi(0)$$

[2]Infinitely many times differentiable functions with compact support i.e, their value is zero outside of a compact set.

3.9.4 The Heaviside function can be approximated in many ways

$$h_1 : x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{1}{2}$$

$$h_2 : x \mapsto \frac{\arctan(x/h)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\dots$$

3.10 Concluding remarks

Here, we approximate a discontinuous function by a $\mathcal{C}^\infty$ function – unless we consider that the discontinuous approximates the continuous one.

Distributions cannot be multiplied as normal functions can, hence these approximations are not equivalent to distributions.

Even though the functions can be multiplied and differentiated following the usual rules (including the chain rule) taking the proper neighbour breaks the rules and $n_p(f(x) \cdot g(x)) \neq n_p(f(x)) \cdot n_p(g(x))$ in places of discontinuity. More work needs to be done here.

Bibliografia

[1] O'Donovan, Richard, *Nonstandard Analsysis in the classroom; ultrasmall numbers vs. limits: a comparison* in VII Giornata nazionale di Analisi non standard per le scuola superiori, atti del convegno, Venezia, 2017

[2] O'Donovan, Richard, *Teaching Analysis with Ultrasmall Numbers*, in Analisi Non Standard per le scuole superiori, atti del convegno, Lucca, 2016

[3] Hrbacek, Karel, Lessmann, Olivier and O'Donovan, Richard, *Analysis With Ultrasmall Numbers*, CRC Press, 2015

[4] Hrbacek, Karel, Lessmann, Olivier and O'Donovan, Richard, *Analysis With Ultrasmall Numbers*, American Mathematical Monthly, volume 117, pp 801–816, 2010

[5] Hrbacek, Karel, Hrbacek, Karel, *Stratified Analysis?*, in *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics* ,Editors V. Neves, I. van den Berg, pp 47-63,Springer,2007

[6] O'Donovan, Richard, *Non standard analysis at pre-university level*, Nonstandard Methods and Applications in Mathematics, Lecture Notes in Logic, 2006 (proceedings of the Pisa conference in 2002)

[7] Péraire, Yves, *Théorie relative des ensembles internes*, Osaka Journal of Mathematics, Volume 29, pp 267–297,1992

[8] Hrbacek, Karel, *Nonstandard set theory*, American Mathematical Monthly, volume 86, pp 1–19, 1979

4

Da Eudosso a Berkley a oggi: quando il pregiudizio ha impedito di considerare anche quantità trascurabili

Ruggero Ferro - Università di Verona

Si cercheranno di analizzare le motivazioni del principio di Eudosso e il contesto in cui nacque. Si vedrà come esso sia sostanzialmente un metodo per trascurare il trascurabile che però non giustifica la negazione di quantità trascurabili. L'accettazione di quantità trascurabili è a fondamento dell'inizio dell'analisi matematica. Fintantoché non si precisa come e quando si possono sensatamente trascurare le quantità trascurabili il loro utilizzo non può che essere intuivo senza raggiungere il rigore di una trattazione formale. Tuttavia l'accettazione degli infinitesimi contraddice solo l'ipotesi che non esistano infinitesimi e non altre assunzioni della matematica, come mostra il conseguimento di una rigorosa presentazione anche formale dei metodi non standard.

4.1 Trascurabilità

Prima di esaminare lo sviluppo storico per determinare l'origine del pregiudizio, penso sia opportuno chiarire cosa intendo per quantità trascurabile. Trascurabile non è una quantità misurabile ma molto piccola, tanto piccola da non poter essere rilevata con gli attuali sistemi di misurazione, una quantità che nella pratica viene trascurata, ma è una nozione trascurabile anche in teoria.

Trascurabile è un numero talmente piccolo da rimanere trascurabile se sommato a se stesso un numero arbitrario di volte. E' anche un numero che aggiunto o tolto a un numero A non lo cambia sostanzialmente (cioè gli insiemi dei razionali maggiori di A e quello dei razionali minori di A rimangono invariati da tali aggiunte o sottrazioni).

Poiché, per un qualsiasi numero naturale positivo n, si possono trovare due razionali uno maggiore di A e uno minore di A che differiscono per meno di $1/n$, una quantità positiva trascurabile deve essere più piccola di $1/n$ qualsiasi sia il numero naturale positivo n.

Un numero positivo minore di tutti gli $1/n$, per tutti gli n naturali positivi è detto *infinitesimo* positivo.

Così i numeri trascurabili sono infinitesimi e si mostra che gli infinitesimi sono trascurabili.

Nell'insegnamento che ho ricevuto da studente liceale e universitario si considerava un errore parlare di numeri infinitesimi e trascurabili, anche se venivano usati, si diceva impropriamente, in certe presentazioni di fisica o di ingegneria.

Non molti anni dopo ho scoperto che tutto lo straordinario sviluppo dell'analisi matematica nel Seicento, Settecento e prima metà dell'Ottocento era stato ottenuto utilizzando proprio gli infinitesimi (gradatamente banditi dalla seconda metà dell'Ottocento).

Inoltre scoprivo l'analisi non standard che utilizzava proficuamente infinitesimi e infiniti con il massimo rigore matematico.

Di qui la curiosità di capire il perché di un tale contrasto, da dove proveniva nello sviluppo storico della matematica.

4.2 Matematica greca

La matematica greca si trovò a dover affrontare il grave problema dell'esistenza di grandezze incommensurabili, mentre conseguiva notevoli risultati nella misurazione di aree limitate non solo da spezzate.

I Greci non solo ottennero rilevanti risultati ma riuscirono anche a giustificarli incontrovertibilmente a partire dai postulati, cioè da posizioni facilmente accettabili e condivisibili (addirittura pretendendo che fossero ovvie verità assolute caratterizzanti univocamente i concetti in esame).

L'incommensurabilità tarpò le ali a uno sviluppo delle nozioni numeriche oltre i naturali e i razionali intesi e gli studi si rivolsero verso uno sviluppo assiomatico della geometria che bene s'inquadrava nell'atteggiamento filosofico di Aristotele.

4.3 Aristotele

Un punto della filosofia aristotelica che ha influenzato pesantemente la storia del pensiero umano fu l'accettazione dell'infinito potenziale (si può indefinitamente aggiungere qualcosa di sempre nuovo a una data collezione) e il netto rifiuto dell'infinito attuale (niente può avere infiniti elementi).

Di qui la concezione della retta come segmento indefinitamente prolungabile e sempre suddivisibile e dimezzabile, e non come la concepiamo oggi nella sua interezza attuale.

Direi che questa posizione aristotelica è un esempio di preconcetto e di non comprensione del finito che si scontra sia con l'esistenza di infinitesimi (i cui reciproci sarebbero maggiori di ogni numero naturale e dunque infiniti attuali), sia anche con un'adeguata lettura dei paradossi di Zenone.

4.4 Zenone

Lasciatemi riformulare il paradosso di Zenone su Achille e la tartaruga adattandolo alla situazione presente.

Se volessi uscire da questo locale, mi incamminerei verso la porta e prima di raggiungerla passerei per il punto di mezzo del tragitto da dove sono alla porta. Proseguendo passerei per il punto di mezzo del tragitto che mi rimane, e così avanti indefinitamente, in piena armonia con l'infinità potenziale del mio continuo progredire verso la porta e dimezzare il percorso rimanente.

Ma non raggiungerei mai la porta perché, per arrivarci, dovrei percorrere tutti gli infiniti tratti in cui ho suddiviso il tragitto fino alla porta, ma non posso considerarli tutti perché sono un'infinità attuale, e la porta diventa irraggiungibile.

La posizione aristotelica non è contraddittoria, ma inadatta a rappresentare l'esperienza umana.

4.5 Rifiuto dell'infinito anche potenziale?

Così, volendo seguire quanto ci suggerisce l'esperienza, se si accetta l'infinito potenziale si deve accettare anche l'infinito attuale.

Si potrebbe essere così drastici da rifiutare perfino l'infinito potenziale, ma questa non è stata la scelta dell'umanità per gestire la complicazione della propria esperienza: negando perfino l'infinito potenziale si dovrebbero porre dei limiti precisi al finito, poiché, senza limiti, la quantità dei finiti sarebbe, almeno potenzialmente, infinita.

Anche se l'esperienza ci presenta solo esempi di specifici finiti, tuttavia la nozione di finito non è così pacifica come sembra, non è definibile con il solo linguaggio, e richiede approfondimenti non banali.

4.6 Valore degli assiomi

Per un paio di millenni si è ritenuto che postulati e assiomi precisassero univocamente gli enti di cui parlavano, senza accorgersi che si possono costruire situazioni ben diverse da quelle intese in cui essi sono pure soddisfatti.

Così gli assiomi e i postulati non dicono di che si sta parlando, ma, sapendo ciò, colgono opportunamente alcuni aspetti degli enti in questione, in modo da poter ricondurre affermazioni ben più complesse alla correttezza dei postulati, e quindi giustificarle con certezza.

In Euclide gli assiomi sono insufficienti anche per qualche omissione, sicché varie conseguenze non si giustificano sulla sola base degli assiomi enunciati: ad esempio, mancano i postulati che precisino come utilizzare la continuità, come se questa fosse così scontata e connaturata nelle cose da non richiedere un'assiomatizzazione.

4.7 Definizioni euclidee

Così, per capire di cosa si sta parlando, diventa centrale interpretare bene le presentazioni delle nozioni (definizioni) che presenta Euclide, per quanto queste possano essere vaghe e sottovalutate. Ne esaminiamo alcune dal libro V degli Elementi, rilevanti per le considerazioni successive.

1. *Una grandezza è parte di una grandezza, la minore della maggiore, quando misuri completamente la maggiore.*
Si tratta di grandezze geometriche di un qualsiasi tipo: linee, superfici, solidi. Tra quelle dello stesso tipo deve sussistere un ordine. Si devono poter fare copie identiche di una grandezza da giustapporsi (ci deve essere una certa additività) in modo che un numero naturale di queste sia equivalente alla grandezza misurata. Solo allora si parlerà di essere parte: si accetta cioè che una grandezza possa essere suddivisa in un numero naturale di parti tra loro equivalenti.

4. *Sono dette avere rapporto tra loro grandezze che, se ne sono presi multipli, possono eccedersi tra loro.*
Qui s'introduce una relazione tra grandezze dello stesso tipo su cui si sviluppa tutta la teoria delle proporzioni.
Non è detto che due qualsiasi grandezze, anche dello stesso tipo, debbano avere rapporto, né che il rapporto conduca a una equivalenza, è richiesta solo a una confrontabilità rispetto all'ordine. Si vede qui l'avvio di una posizione che permetterà di superare le difficoltà dell'incommensurabilità.
Con il potersi eccedere, giustamente si esclude che una grandezza trascurabile possa avere rapporto con una grandezza non trascurabile (sarebbe un rapporto non determinabile); ma non si esclude che ci siano grandezze trascurabili.

5. *Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, prima rispetto a seconda e terza rispetto a quarta, quando, secondo quale si voglia multiplo, gli equimultipli della prima e terza o eccedano insieme rispettivamente gli equimultipli della seconda e quarta, oppure siano insieme uguali, oppure facciano insieme difetto presi in ordine corrispondente.*
Oggi diremmo: il rapporto tra A e B è lo stesso del rapporto tra C e D ($A/B = C/D$) se, per ogni coppia ordinata di naturali m e n, o $mA > nB$ se e solo se

$mC > nD$ ($A/B > n/m$ se e solo se $C/D > n/m$) oppure $mA = nB$ se e solo se $mC = nD$ ($A/B = n/m$ se e solo se $C/D = n/m$) oppure $mA < nB$ se e solo se $mC < nD$ ($A/B < n/m$ se e solo se $C/D < n/m$).
Detto altrimenti: due rapporti coincidono se hanno le stesse approssimazioni razionali per difetto e per eccesso, cioè se generano la stessa sezione di Dedekind sui razionali.
Si noti che non ci si limita al caso dell'uguaglianza proprio per superare i problemi dell'incommensurabilità.
Però, esattamente per dimostrare l'incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato, è fondamentale il teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali.
Volendo escludere il ricorso ai numeri, bisognava trovare una versione geometrica del teorema di fattorizzazione unica che è sviluppata nei libri settimo ottavo e nono degli "Elementi".

Si dice che i libri settimo, ottavo e nono, degli "Elementi" riguardano i numeri, ma io direi che elaborano una versione geometrica dei numeri.
In questi libri, i numeri naturali sono dati per scontati, noti a tutti (come la continuità). Essi si trovano nel metalinguaggio del linguaggio geometrico, cioè nel linguaggio che descrive quello che si afferma nel linguaggio della geometria, e quindi anche le eventuali ripetizioni di operazioni descritte. Essendo nel metalinguaggio non necessitano di specifici assiomi o postulati.
A sostegno di questa mia lettura, consideriamo alcune definizioni euclidee nel settimo libro.

1. ($M ονάς$) *Unità è ciò secondo cui ciascuno degli enti è detto uno.*
Gli enti sono al plurale e direi che questa unità non è il numero uno ma l'unità di misura di ciascun tipo di grandezza geometrica.

2. *E* ($Aριθμός$) *numero è una molteplicità composta di elementi.*
Piuttosto che numero, direi che arithmòs indica un segmento graduato composto di altri segmenti graduati che alla base saranno unità di misura: queste infatti permettono di graduare i segmenti.

17. *Quando due numeri che si moltiplicano tra loro facciano un certo numero, quello che risulta è chiamato piano, e i suoi lati i numeri che si moltiplicano tra loro.*
18. *E quando tre numeri che si moltiplicano tra loro facciano un certo numero, quello che risulta è solido, e suoi lati i numeri che si moltiplicano tra loro.*
Queste due definizioni permettono di stabilire i legami tra le misure di volume, di area e di lunghezza in una figura, grazie alla scelta implicita che l'unità di misura delle aree è il quadrato di lunghezza unitaria, e che l'unità di misura dei volumi è il cubo con spigolo di lunghezza unitaria.
Così si riusciranno a determinare rapporti importanti tra figure piane limitate da

spezzate.
Ad esempio il rapporto tra le aree di poligoni regolari simili inscritti in circonferenze è uguale al rapporto tra i quadrati dei rispettivi raggi.
Si noti come questi risultati sono stati conseguiti senza far ricorso a grandezze trascurabili, che, come si è già osservato, sono state escluse dall'avere rapporti con le grandezze non trascurabili.
Ma ci sono figure piane non limitate da spezzate, ad esempio cerchi. Come confrontare le aree di cerchi con raggi diversi?
Si può osservare che poligoni regolari inscritti in una circonferenza la invadono sempre più al duplicare il numero dei loro lati.
Addirittura l'area del cerchio non coperta da un tale poligono più che dimezza ad ogni passo di questo processo.

4.8 Rapporto tra cerchi

Così, se si considerano due cerchi C_1 e C_2 di raggi rispettivi r_1 e r_2 e i poligoni regolari di n lati inscritti nell'uno e nell'altro cerchio si è indotti a supporre che il rapporto tra le aree dei due cerchi sia circa uguale al rapporto tra le aree dei relativi poligoni inscritti con ugual numero di lati, e questo rapporto è sempre uguale al rapporto dei quadrati dei raggi dei cerchi in cui i poligoni sono inscritti.
Circa uguale o proprio uguale?
Per quanti lati abbia un poligono regolare inscritto in una circonferenza non ha mai area uguale a quella del cerchio.
Ma duplicando il numero dei lati l'area mancante viene più che dimezzata sicché alla fine (?) del processo di duplicazione dei lati rimarrà una quantità minore di $1/2n$, per ogni naturale positivo n, cioè una quantità infinitesima, che è ragionevole supporre non nulla, perché ogni poligono ha area strettamente minore di quella del cerchio.
Se si trascurano le quantità trascurabili si ottiene che il rapporto (che non è un numero ma una relazione) tra le aree dei due cerchi è lo stesso del rapporto tra le aree dei quadrati costruiti sui rispettivi raggi.
Se non ci sono quantità trascurabili, di più piccolo di $1/2n$, per ogni naturale positivo n, c'è solo lo zero, e le aree dei cerchi ancora starebbero in rapporto come i quadrati sui loro raggi, ma bisogna glissare sul fatto che i cerchi non sono poligoni.

4.9 Esaustione

Nel caso della figura piana limitata da una circonferenza si è pervenuti al risultato sfruttando le relazioni tra i poligoni inscritti che invadono il cerchio, che lo "esauriscono": essi indicano quale deve essere il rapporto e poi si dimostra per assurdo che lo stesso rapporto deve sussistere tra le figure considerate mostrando che

non può essere né minore né maggiore perché altrimenti si contraddirebbe l'ipotesi che non ci sono infinitesimi.
Si noti che il processo d'invasione dell'area del cerchio mediante poligoni regolari inscritti si configura come un'infinità potenziale (che Aristotele avrebbe accettato) mentre le quantità trascurabili richiedono l'accettazione dell'infinito in atto.
Il metodo di esaustione (attribuito a Eudosso e ad Archimede che ha notato che non era giustificato nella geometria euclidea ma richiedeva uno specifico postulato) sfrutta approssimazioni sempre più fini del risultato mostrando che quanto manca può essere reso più piccolo di ogni prescritta grandezza non trascurabile.
Sostanzialmente è quanto fa anche la nozione di limite, introdotta sperando di giungere ai risultati ottenuti dall'analisi con gli infinitesimi considerando solo infinità potenziali.
Però, il metodo di esaustione, come la nozione di limite, permette solo di mostrare che un certo risultato è davvero quello che soddisfa le richieste, ma non dice quale esso debba essere, come trovarlo.

4.10 Come indovinare il risultato?

Nei casi prima considerati relativi ai cerchi, i poligoni regolari inscritti permettevano di ipotizzare un risultato da confermare, ma se si vogliono confrontare figure piane non limitate da spezzate o archi di circonferenza, come procedere, quali figure con caratteristiche che saranno utili per suggerire il rapporto possono invadere ed esaurire quelle che si vogliono mettere in rapporto?
[Problemi di questo tipo sono ben noti anche agli attuali studenti di corsi di analisi quando viene loro chiesto di calcolare un limite: non si tratta di applicare la definizione di limite (che richiederebbe un processo infinito, senza indicare il valore del limite) ma sfruttare tutti i risultati acquisiti sui limiti adatti al caso in esame.]

4.11 Archimede

Archimede affronta il problema di trovare rapporti utili anche per altre figure piane, ad esempio i segmenti di parabola. Però, nel suo libro "Il metodo", segue una strada ben diversa.
Egli stabilisce che l'area del segmento di parabola sta, come 1 sta a 3, all'area del triangolo limitato dalla corda del segmento, dalla tangente alla parabola in un estremo della corda, e dalla parallela all'asse della parabola per l'altro estremo della corda.
Per ottenere questo risultato valuta il rapporto che c'è tra il tratto limitato dal settore della parabola e quello interno al triangolo di una retta parallela all'asse della parabola. Per giungere al risultato somma le lunghezze dei tratti ottenuti dando a ciascuno un peso specifico corrispondente al rapporto che aveva stabilito.

Stabilito che il rapporto tra le aree del settore parabolico e del triangolo è $1/3$, Archimede passa a dimostrare ciò con il metodo di esaustione architettando una successione di figure opportune che invadono il segmento parabolico tendendo a esaurirlo.
Perché dimostrare ancora un risultato già ottenuto?
Per ottenere inizialmente il risultato aveva accettato l'idea che l'area di una figura è la somma dei segmenti paralleli che la sezionano e la compongono. Ma se i segmenti hanno spessore zero, per quanti essi siano, la loro somma è ancora zero, e non si arriva ad alcun risultato.
Invece, lo spessore dei segmenti potrebbe essere un infinitesimo positivo (non zero), qualcosa di trascurabile, qualunque esso sia, e ciascun segmento andrebbe considerato come un rettangolo con un lato lungo come il segmento e l'altro lungo quanto lo spessore infinitesimo considerato. Questi rettangoli nel loro complesso ricoprirebbero la figura, però con una certa imprecisione perché i lati infinitesimi dei rettangoli non coinciderebbero esattamente con il bordo della figura.
Tuttavia, per la continuità del bordo, ogni rettangolo differirebbe dalla fetta di figura limitata dai lati non infinitesimi del rettangolo di una quantità contenuta in un mini rettangolo con un lato l'infinitesimo considerato e l'altro pure infinitesimo, cioè una quantità che è un infinitesimo di infinitesimo, ovvero trascurabile rispetto all'infinitesimo considerato.
Così, sommando tutti i rettangoli nella figura, l'area di questi darebbe l'area della figura con un'imprecisione che rimane sempre un infinitesimo da trascurare per ottenere il risultato finale.
Nel credere all'indicazione ottenuta, Archimede ha implicitamente accettato il procedimento indicato utilizzante gli infinitesimi, mostrando che anche le quantità infinitesime, pur dovendo essere trascurate alla fine, possono essere utili per arrivare a certi risultati.
Tuttavia, non ha ritenuto sufficiente il metodo con gli infinitesimi, e ha ridimostrato il risultato con il metodo di esaustione, che ha potuto usare proprio perché aveva già trovato il rapporto.
In cosa era carente il metodo infinitesimale per trovare il rapporto tanto da richiedere un'ulteriore dimostrazione?
Nonostante Archimede avesse utilizzato con profitto le quantità trascurabili, non c'era una chiara descrizione di cosa queste fossero, di come si dovesse operare con esse, non c'erano postulati, cioè affermazioni da cui derivare con certezza le ulteriori proprietà di questi enti in modo da poter giustificare i risultati delle elaborazioni con questi: ci si doveva accontentare della visione competente di chi li utilizzava.
Archimede avrebbe potuto cercare di sviluppare la teoria delle quantità trascurabili che giustificasse il risultato raggiunto con la prima modalità, invece di ricorrere a una seconda dimostrazione. Ma non l'ha fatto, forse perché l'alternativa qui proposta nascondeva serie difficoltà.
Vuoi per le difficoltà intrinseche del metodo di esaustione, vuoi per le difficoltà

generali dei secoli successivi, non ci furono grandi progressi nel calcolare aree di figure piane limitare da curve arbitrarie. L'ingiustificato bando dell'infinito attuale, pur affievolendosi, continuava a vigere e la geometria con la sua staticità non aiutava a riconoscere l'utilità di quantità infinitesime.
Le esigenze della vita di poter calcolare volumi anche di solidi non solo limitati da facce piane, ma soprattutto di poter studiare movimenti spinsero ad accettare strumenti di analisi diversi dai soliti.
Per studiare i movimenti si doveva affrontare la nozione di velocità istantanea: come può essere ottenuta?

4.12 Velocità istantanea

Se un istante è un intervallo di tempo di durata nulla, in quel tempo si è sempre nella stessa posizione e non si ha velocità; mentre se è un intervallo di tempo di una certa durata apprezzabile in quel frattempo la velocità potrà mutare e, anche in questo caso, non si può parlare di velocità istantanea, ma eventualmente di velocità media in un breve intervallo di tempo.
D'altra parte la velocità istantanea ha una consistenza fisica ed esperienziale ben precisa. Nel correre si percepisce se si sta correndo più o meno velocemente; la forza centrifuga dipende dalla velocità istantanea di rotazione e può essere utilizzata per metterla in evidenza.
Sicché si è forzati a precisare cos'è un istante.
Un istante dovrà essere un intervallo di tempo così piccolo che anche ripetendolo un qualsiasi numero finito di volte rimane non apprezzabile, trascurabile.
Comunque, anche lungo la brevissima durata di un istante la velocità può cambiare, ma, se il moto è sufficientemente regolare (per esempio non è un urto), la variazione di velocità durante un istante è così piccola da essere trascurabile e, trascurando le differenze infinitesime, si ha la determinazione di una velocità istantanea come rapporto tra variazione infinitesima di posizione e variazione infinitesima di tempo, in quel momento, che, trascurato il trascurabile, sarà apprezzabile.
Ad esempio, se la posizione s dipende dal tempo t nel modo seguente: $s = t^2$, allora, considerando un qualsiasi incremento infinitesimo dt di tempo dal momento t_0 al momento $t_0 + dt$, la variazione di posizione $ds = s(t_0 + dt) - s(t_0)$ è data da

$$ds = (t_0 + dt)^2 - t_0^2 = t_0^2 + 2t_0 dt + dt^2 - t_0^2 = dt(2t_0 + dt)$$

che rapportata all'incremento di tempo dà $\dfrac{ds}{dt} = 2t_0 + dt$ e trascurando il trascurabile, qualunque sia dt, si ottiene che la velocità istantanea è $2t_0$.
Ai giorni nostri si sente spesso dire che la velocità istantanea è il limite della velocità media al tendere a zero dell'intervallo di tempo in cui viene rilevata. Questa affermazione tutt'al più dichiara un legame tra velocità media e velocità istantanea, ma non dice cosa si intende per velocità istantanea.

Questa deve esserci ben prima che si possa parlare di velocità media perché se non c'è velocità istantanea non ci sarebbe neppure movimento né la conseguente velocità media.
Così si è visto che gli infinitesimi possono essere utilmente adoperati non solo per calcolare aree come somme di parti infinitesime (come fece Archimede e anche più in generale), ma anche per determinare velocità istantanee e da queste spostamenti come somma degli effetti infinitesimi di spostamenti nell'istante, o pendenze di curve sufficientemente regolari.
Queste considerazioni non possono essere svolte considerando uno specifico infinitesimo, perché non si può dargli un valore.
Piuttosto va considerato un infinitesimo generico con l'obiettivo di poter trascurare, alla fine, la parte trascurabile del risultato che deve permanere lo stesso qualsiasi sia l'infinitesimo da cui si era partiti. Ciò sarà possibile se il fenomeno studiato è sufficientemente regolare, anzi sarà un'indicazione della regolarità del fenomeno stesso.
Nonostante gli incredibili successi e progressi della matematica nel Seicento e nel Settecento ottenuti dai vari matematici di quel periodo usando gli infinitesimi, rimaneva poco chiaro cosa fosse il campo numerico che li includeva (veramente non era chiaro neppure cosa fosse il campo dei reali): mancava l'enunciazione di caratteristiche fondamentali dalla quali giustificare con certezza deduttiva tutti gli sviluppi e i successi che si conseguivano, e ciò suscitava perplessità in alcuni.

4.13 Berkeley

Campione degli oppositori all'introduzione degli infinitesimi fu Berkeley. Nonostante i grandi progressi ottenuti dai matematici grazie all'uso degli infinitesimi, egli li attacca ridicolizzando la stessa nozione di infinitesimo. Per poter fare il rapporto tra la variazione di posizione e quella di tempo bisogna supporre che questa non sia zero, ma poi quando la si trascura si suppone che sia zero. Evidentemente Berkeley accetta di trascurare solo quantità nulle, sostanzialmente partendo dalla posizione preconcetta che non ci sono quantità trascurabili diverse da zero.
Otteneva così una contraddizione con l'idea che ci dovessero essere infinitesimi, ma non mostrava contraddizioni nella teoria che trattava gli infinitesimi, e mi pare sia un palese pregiudizio negare che ci siano gli infinitesimi perché non ci devono essere.
Sarebbe stato auspicabile che Berkeley si fosse, invece, chiesto in cosa consistano gli infinitesimi e le quantità trascurabili, ed eventualmente avesse contribuito al chiarimento e sistematizzazione di questo strumento.

4.14 Elementi separatori

Come già detto, a quel tempo non era chiaro neppure cosa fossero i numeri reali, anche se era sempre viva l'esigenza di affrontare i problemi dell'incommensurabilità, cioè di eliminare i "buchi" che i razionali lasciavano rispetto a una qualsiasi idea di continuità.
Gli insiemi di razionali che stavano a destra e di quelli a sinistra di un "buco" possono essere utili a precisare l'idea di continuità? Perché tra la classe delle approssimazioni razionali per difetto e la classe delle approssimazioni razionali per eccesso ci deve essere un solo elemento separatore?
Questa può essere una semplificazione utile in molti casi, ma in altri casi può essere più opportuno accettare che gli elementi separatori siano molti.
Certo, se gli elementi separatori sono molti la distanza tra loro deve essere infinitesima, ma, se non si escludono pregiudizialmente gli infinitesimi, Newton, Leibniz e i matematici del tempo da loro ispirati hanno mostrato che gli infinitesimi possono essere uno strumento prezioso.

4.15 Eliminazione degli infinitesimi

L'avversione radicale verso gli infinitesimi portò i matematici a cercare di raggiungere senza l'uso degli infinitesimi gli stessi risultati ottenuti con questi (circa l'intera analisi matematica che s'insegna nelle scuole e all'inizio dei corsi universitari). Sostanzialmente si voleva escludere l'uso dell'infinito attuale e limitarsi all'uso di quello potenziale.
Questo progetto pervase la comunità matematica dominante dalla metà dell'Ottocento, cavalcando la nozione di avvicinarsi, considerata potenziale. Ma lasciava aperto il problema di cosa sono i numeri cui ci si avvicina: i razionali non bastano e un concetto preciso di numero reale non era ancora arrivato. Questo concetto arriva nella seconda metà dell'Ottocento, con la necessaria accettazione dell'infinito in atto e il tramonto dell'idea di sviluppare l'analisi limitandosi all'infinito potenziale: tanto valeva restare con gli infinitesimi.

4.16 Che sono i numeri?

Dal tempo di Berkeley fino a metà Ottocento c'è stata una grande vaghezza sul concetto di numero, a cominciare dagli stessi numeri naturali: erano dati per noti con le loro caratteristiche, e noto doveva essere il modo di come operare con questi, senza dedurlo da proprietà fondamentali cui fare riferimento, né da una "definizione".
Leibniz cercò di precisare meglio il sistema dei numeri che include gli infinitesimi dicendo che deve avere le stesse proprietà dei numeri degli altri sistemi numerici

(dei reali come venivano intesi allora). Questa uscita, al tempo fu infelice: come possono avere le stesse proprietà se gli uni non sono archimedei e gli altri lo sono? Ma Leibniz non aveva tutti i torti nel fare la sua proposta.

4.17 Proprietà

Infatti stava emergendo, e non solo a riguardo degli infinitesimi, il problema di cosa si deve intendere per proprietà.
Le proprietà sono espressioni del linguaggio vere riguardo a certi enti, o sono aspetti intrinseci di quegli enti che permettono di selezionare quelli che li hanno?
Nel primo caso sono legate al linguaggio, e, siccome è ragionevole supporre che questo sia numerabile, le proprietà sarebbero pure una quantità numerabile.
Nel secondo caso le proprietà sono tante quante i sottoinsiemi degli enti in esame, e, se questi sono infiniti, le proprietà raggiungono un'infinità più che numerabile, come ci ha insegnato Cantor.
Pertanto, la domanda posta, per lo meno, non è banale come potrebbe sembrare.

4.18 Peano

Sul finire dell'Ottocento Peano aveva individuato un buon sistema di assiomi per i numeri naturali e finalmente era possibile ricondurre a questi la correttezza del loro uso e quella dei numeri razionali poiché questi si possono costruire partendo dai naturali. (La costruzione dei reali dai naturali richiede anche un intervento determinante della teoria degli insiemi).
Addirittura pensava che gli assiomi individuati potessero definire implicitamente i numeri naturali, avendo dimostrato che due strutture qualsiasi, che soddisfano quegli assiomi per i numeri naturali, sono isomorfe.
Ma il valore di questa dimostrazione è ben più limitato di quanto Peano pensava: la dimostrazione va bene se si considerano solo strutture il cui universo è la totalità dei sottoinsiemi dei numeri naturali, totalità che include l'insieme dei numeri naturali stessi.
Sostanzialmente si definivano i numeri naturali a partire dalla conoscenza dei numeri naturali. Ciò è potuto accadere per aver sottovalutato la distinzione tra le nozione di proprietà una legata al linguaggio e l'altra ai sottoinsiemi.
Prestando attenzione a questa differenza ci si accorge che anche gli assiomi di Peano sui numeri naturali possono essere soddisfatti da strutture tra loro non isomorfe. Sicché rimangono non definibili con il linguaggio non solo la nozione di numero naturale ma anche molte altre nozioni che si appoggiano su questa, a cominciare dalla nozione di finito, per arrivare anche alla nozione di archimedeità.
Così si può recuperare l'idea di Leibniz che gli iperreali (il sistema numerico che

include gli infinitesimi) e i reali hanno le stesse proprietà purché si precisi che sono le proprietà esprimibili nel linguaggio dei numeri reali.

4.19 Robinson

Anche se nella matematica non dominante si era mantenuto vivo l'interesse per campi non archimedei, fu Robinson a cogliere appieno le potenzialità degli iperreali per sviluppare l'analisi matematica. Nel suo libro "Non standard analysis", comincia con una precisa analisi logico matematica che gli permette di smontare i pregiudizi di categoricità dei numeri naturali, e, conseguentemente, anche degli altri sistemi numerici. Poi passa alla ricostruzione solidamente fondata sui risultati ora a disposizione dell'analisi matematica con l'uso degli infinitesimi. L'intento era di mostrare che questo approccio è più naturale dell'approccio classico tanto da permettere di ottenere teoremi non ancora raggiunti, e allo scopo dà la prima dimostrazione di un risultato che era aperto.
Le precisazioni di Robinson sugli infinitesimi e i numeri iperreali hanno dato piena legittimità al loro uso con tecniche e limiti ben precisati.
Gli iperreali possono essere costruiti a partire dai reali con metodi ormai standard nella matematica. Ma possono anche essere introdotti a partire dall'idea base di qualcosa di trascurabile che giustifica la scelta di adeguati assiomi dai quali far conseguire i risultati che li riguardano.
Keisler, poi, nel suo testo "Elementary Calculus", introduce rigorosamente e assiomaticamente gli iperreali e sviluppa in modo didatticamente molto efficace la parte iniziale dell'analisi matematica come viene insegnata nei licei o nei primi anni universitari, mostrandone la valenza per l'insegnamento anche grazie a sperimentazioni sul campo.

Perché scegliere la presentazione dell'analisi matematica mediante gli iperreali

E' un risultato acquisito che tutti i teoremi sui numeri reali esprimibili nel linguaggio dei reali sono anche teoremi degli iperreali e viceversa.
Allora perché voler proporre gli iperreali?
Perché, lasciando cadere i preconcetti contro infinito attuale e infinitesimi, si evitano le artificiose tortuosità e complessità dell'analisi matematica per far a meno degli infinitesimi, rendendo il processo di apprendimento più naturale e direttamente legato a quanto si vuole esaminare e rappresentare, pur includendo tutto ciò che si otterrebbe attraverso l'usuale presentazione con i reali.
Inoltre permettono di costruire modelli di situazioni che si vogliono analizzare molto più vicini ai fenomeni in questione. Ecco un paio di esempi.

Qual è la probabilità di colpire un punto del pavimento lasciando cadere una freccetta lanciata in alto?
Se la probabilità fosse zero sarebbe zero anche la probabilità che la freccetta cada sul pavimento (somma di zeri dà zero), altrimenti sommando probabilità reali per gli infiniti punti del pavimento si otterrebbe una probabilità infinita (che non c'è): con i reali non si ha un buon modello di questo fenomeno.
Se, d'altra parte la probabilità di colpire un punto fosse un infinitesimo si può arrivare a elaborare un buon modello di questo fenomeno.
Lo studio anche teorico della probabilità ha ricevuto grandi contributi dai lavori che utilizzano le tecniche infinitesimali grazie in particolare alla scuola di Keisler.
Nel libero mercato della domanda e dell'offerta i prezzi dovrebbero variare in seguito all'aumento di domanda che si ha con gli acquisti. Ma l'acquisto di una cosa non ne fa cambiare il prezzo sicché anche l'acquisto di un'enorme quantità di elementi non deve fare cambiare il prezzo. D'altra parte non è realistico che l'acquisto di un solo elemento ne faccia cambiare il prezzo. Di fatto i modelli con i numeri reali trattano il problema come una tendenza che si realizza dopo un tempo infinito, ancora contro l'esperienza che il mercato cambia quotidianamente.
Se invece si accetta che l'acquisto di un elemento provochi una variazione infinitesima del prezzo, si riesce a costruire un modello molto più realistico del mercato.

4.20 Metaosservazione

In tutta questa mia esposizione non sono mai entrato nello sviluppo di risultati e teoremi, pur pretendendo d'aver fatto una relazione di matematica. Infatti, penso che sia vera matematica anche quella che, in particolare nei momenti didattici, non solo fornisce giustificazioni certe, prove inconfutabili di non contraddittorietà, ma anche mette in risalto la significatività delle proprie elaborazioni, e spero di essere riuscito a fare proprio questo.

Bibliografia

[Acerbi, 2014] ACERBI F, *Euclide, tutte le opere*, Bompiani, Milano 2014

[Boyer, 1976] BOYER C.B., *Storia della matematica*, Isedi, Milano, 1976

[Goldoni] GOLDONI G., *Il prof.Apotema insegna ...* (Collana), `ilmiolibro.kataweb.it`

[Guidotti, 2015] GUIDOTTI R., *Il mondo iperreale e l'analisi non standard*, `ilmiolibro.kataweb.it`, 2015

[Guidotti, 2016] GUIDOTTI R., *Il modello non standard dalla topologia all'analisi funzionale*, `ilmiolibro.kataweb.it`, 2016

[Hurd, Loebb, 1985] HURD A.E., LOEBB P.A., *An introduction to nonstandard real analysis*, Academic Press, 1985

[Keisler, 2012] KEISLER, H.J., *Foundation of Infinitesimal Calculus*, `www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html`, 2012

[Keisler, 2012] KEISLER, H.J., *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, `www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`, 2012

[Keisler, 1982] KEISLER, H.J., *Elementi di analisi matematica*, Piccin, Padova, 1982

[Kline, 1999] KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, traduzione italiana: *Storia del pensiero matematico*, Giulio Einaudi, Torino 1999

[Robinson, 2013] ROBINSON, A., *Non Standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966. Revised Edition, Princeton University Press, 1996. Tr. it. di Bedini F., *Analisi non standard*. Aracne editrice, Roma, 2013.

5

Aspetti non standard del calcolo integrale nell'opera di Maria Gaetana Agnesi

Leonardo Aldegheri[1] Bruno Stecca [2]

Per completare l'analisi del manuale di Maria Gaetana Agnesi, esposta per una prima parte nel convegno NSA2017, si illustrano alcuni contenuti relativi al calcolo integrale, interessanti ai fini didattici. Ripresi alcuni concetti indispensabili (infinitesimo, differenziale, sottotangente), si mostra quanto facilmente sia possibile pervenire al concetto di primitiva dall'utilizzo del rapporto fra differenziali in funzione di derivata. Esaurite rapidamente le regole relative all'integrazione di funzioni polinomiali, ci si sofferma sul caso particolare dell'integrale di f(x)=1/x, ricorrendo a considerazioni geometriche basate sull'analisi del grafico della curva che Maria Gaetana Agnesi chiama Logaritmica o Logistica, servendosi dei concetti di differenziale e di sottotangente. Infine si vedranno alcune applicazioni geometriche del concetto non standard di integrale riguardanti il calcolo dell'area sottesa da una curva, procedimento detto quadratura.

5.1 Introduzione

Come sappiamo, l'analisi matematica, sviluppata alla fine del Seicento da Newton e Leibniz, in quanto basata sul concetto di infinitesimo, fu sottoposta a critiche serrate da matematici contemporanei (Berkley) e successivi, perché affetta da diverse contraddizioni, in particolare riguardo all'ambiguo concetto di infinitesimo.
Sulla spinta di tali critiche, i lavori di Cauchy, Weierstrass e altri matematici dell'Ottocento portarono alla riorganizzazione e alla sistematizzazione della materia, introducendo il concetto di limite e sacrificando gli infinitesimi.
Tuttavia, l'analisi originaria, proprio in quanto basata sul concetto di infinitesimo, aveva prodotto la quasi totalità dei risultati corretti che conosciamo tutt'ora. È

[1]Liceo Messedaglia, Verona
[2]Liceo Maffei, Verona

esattamente da questa analisi che Abraham Robinson prese le mosse per la costruzione dell'Analisi non standard, ricordando Leibniz come suo illustre predecessore, nel suo testo: "Analisi non standard".
Forte dei risultati ottenuti, l'analisi precedente a Weierstrass merita dunque di essere rivalutata nei suoi metodi. Questa riscoperta deve avvenire alla luce della sistemazione rigorosa conferitale da Robinson, perché si evitino le contraddizioni già ricordate e perché le sue ricadute didattiche si avvalgano di contenuti ben fondati.
Per studiare questa "antica" analisi e cercarne significativi utilizzi didattici ci siamo rivolti ad un testo italiano di analisi del Settecento: "Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana" pubblicato nel 1748 dalla matematica milanese Maria Gaetana Agnesi. Nel precedente convegno: "VII giornata nazionale di Analisi non standard per le scuole superiori" (Venezia, 2017), ci siamo occupati di come l'autrice trattava il calcolo differenziale; in questo intervento completeremo il percorso soffermandoci sul calcolo integrale.
Nell'esporre i contenuti del manuale che troviamo più interessanti ed utili, integreremo l'esposizione con i riferimenti a quanto propone oggi l'Analisi non standard (NSA), per mostrare la forte continuità che la lega a quei contenuti, che divengono così più ricchi e profondi.

5.2 Premesse di calcolo differenziale

In avvio al nostro percorso è necessario riprendere alcune considerazioni importanti sul calcolo differenziale presenti nel manuale, prima fra tutte la natura di un segmento fondamentale: la sottotangente.
Consideriamo la curva ADF, la tangente in D, che interseca l'asse X in T, e la normale in D, che interseca l'asse Xin N. Essendo B la proiezione di D sull'asse X, chiamiamo il segmento TB sottotangente e il segmento BN sottonormale.

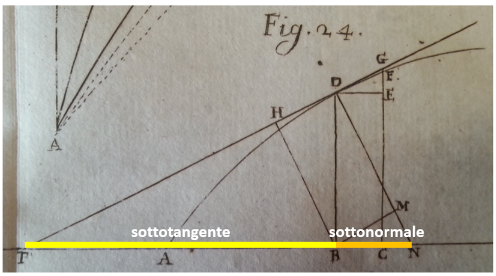


Figura 5.1: Figura originale 24 (Tomo II, Libro II), con l'indicazione dei segmenti sottotangente e sottonormale.

Ragionando sull'arco infinitesimo DF, riproducendo[3]) il disegno (Figura 5.2 per maggior chiarezza. Vediamo come Maria Gaetana Agnesidetermina la sottotangente ad una curva, procedimento poi generalizzabile alla sottotangente di qualsiasi

[3]Per facilitare l'analisi geometrica della figura, in questa ed in altre fedeli ricostruzioni dei disegni originali, i tratti infinitesimi sono rappresentati da segmenti di misura ridotta, ma finita, rinunciando così a simularli infinitamente ingranditi tramite opportuni microscopi.

curva. Consideriamo la curva ADF, la sua tangente in D e l'arco di curva DF infinitesimo del primo ordine rispetto alla curva. Osservando che GF può essere considerata infinitesima rispetto a EF[A-S 2017], così come la differenza fra DF e DG è infinitesima rispetto all'arco DF, si possono allora ''usurpare per eguali'' EF e EG, DF e DG.

Si avrà quindi $AB = x$, $BD = y$, $EF = EG = dy$, $BC = DE = dx$, $DF = DG = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. I triangoli simili GED e DBT ci danno $GE : ED = DB : BT$, cioè $dy : dx = y : BT$, avremo quindi $BT = \frac{ydx}{dy}$, formula della sottotangente per qualunque curva.

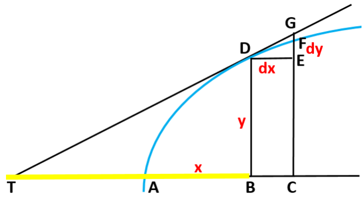


Figura 5.2: Rifacimento della Figura 5.1, con l'indicazione delle quantità x, y, dx, dy.

5.2.1 "Usurpare per eguali"

In Analisi non standard[4] c'è un criterio stringente per valutare se due numeri si possono "usurpare per eguali". Come sa già la nostra autrice, deve trattarsi di numeri che, se finiti, differiscono per quantità infinitesime. Maria Gaetana Agnesi è anche consapevole che le stesse considerazioni si applicano a numeri infinitesimi che differiscano per infinitesimi di ordine superiore.
Nel caso di numeri iperreali finiti, quindi in NSA, si dicono infinitamente vicini ($\approx$) due iperreali non infinitesimi che differiscono per un infinitesimo. Il concetto viene meglio precisato dalla definizione di indistinguibili [Goldoni, 2016], che vale sia per i finiti (diversi da 0) che per gli infinitesimi e gli infiniti. Sono indistinguibili ($\sim$), e possono essere considerati approssimativamente eguali, due numeri iperreali non nulli che:

- se infinitesimi, differiscono per infinitesimi di ordine superiore;
- se finiti, sono infinitamente vicini;
- se infiniti, differiscono per infinitesimi o per finiti o per infiniti di ordine inferiore.

Differenziale, rapporto differenziale

Sono necessarie alcune note sintetiche per esprimere quanto del calcolo differenziale di Maria Gaetana Agnesi rimane oggi nell'Analisi non standard. Per la matematica milanese:

[4] In questo articolo i simboli $\approx$ e $\sim$ sono usati per significare, rispettivamente, *infinitamente vicino* e *indistinguibile*.

- l'incremento infinitesimo sull'asse x (o y) prende il nome di differenziale dx (dy) ed è un effettivo ente geometrico: un segmento di lunghezza infinitesima lungo l'asse x (y);
- la continuità è sottointesa e, in generale, è sempre calcolabile il rapporto dy/dx (o indifferentemente dx/dy), come relazione di proporzionalità tra enti geometrici;
- lo studio dell'evolversi e del variare della funzione si basa sullo studio della sottotangente, che include il rapporto dx/dy;
- Maria Gaetana Agnesi non ha bisogno di definire la derivata.

In NSA:

- una funzione $f(x)$ che subisce un incremento infinitesimo $df(x)$, a partire da $f(x_0)$, quando x subisce un qualsiasi incremento infinitesimo dx a partire da x_0, è continua nel punto considerato;
- il differenziale (in Robinson, come per Leibniz e per Agnesi) [5]. è l'incremento infinitesimo e, come tutti gli infinitesimi, anche dx, dy sono numeri iperreali;
- il differenziale $dy = df(x)$ si può esprimere in dettaglio, attraverso la derivata (v. ultimo punto);
- se $f(x)$ è continua, ha senso scrivere il rapporto fra i differenziali: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$, che dipende da x_0 e dal particolare dx che si considera;
- nell'insieme degli Iperreali, la derivata e il rapporto differenziale sono diversi: quando, fissato x_0, il risultato del rapporto è un numero finito che ha la stessa parte standard $\forall dx \neq 0$, allora esiste la derivata $f'(x)$ in x_0;
- la derivata è un numero iperreale standard, cioè è un numero reale. Calcolati in x_0, il rapporto differenziale e la derivata (se esiste) sono indistinguibili. Infatti $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon \to f'(x) = st\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)$;
- quindi, se esiste $f'(x)$, il differenziale di f si può esprimere così:
  $df(x) = f'(x)dx + \varepsilon dx$.
  L'ultimo termine è infinitesimo di ordine superiore e si può "usurpare" per ininfluente.

5.3 Il calcolo integrale

Il testo "Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana" consta di due tomi: il primo descrive gli elementi dell'algebra, la risoluzione delle equazioni e la geometria analitica, mentre il secondo si divide in tre libri, di cui il primo parla del calcolo

[5] La maggior parte degli autori trascura il recupero operato da Robinson sulla definizione e sul significato del differenziale. Vedi su questo [Goldoni 2014]

differenziale, il secondo del calcolo integrale ed il terzo delle equazioni differenziali. Questo secondo libro si divide in quattro capi:

CAPO I: ''Delle regole dell'integrazione espresse da formole finite algebriche, o ridotte a quadrature supposte."

CAPO II: ''Delle regole dell'integrazioni facendo uso delle serie."

CAPO III: ''Dell'uso delle accennate regole nelle rettificazioni delle curve, quadrature de'spazi, appianazioni delle superficie, e delle cubature de'solidi."

CAPO IV: "Del calcolo delle quantità logaritmiche ed esponenziali.''

Tralasciando la parte sulle serie, pur interessante, focalizzeremo la nostra attenzione sulle regole di integrazione e il concetto di integrale per passare poi alle sue applicazioni.
Nell'introduzione al libro terzo: "Del Calcolo Integrale" Maria Gaetana Agnesi descrive, immediatamente nelle prime righe, l'oggetto del libro. Leggiamo:
"Il calcolo integrale, che suole definirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni o sia delle differenze."[6].

5.3.1 Integrali elementari di funzioni polinomiali

Subito, l'autrice entra nel merito:
"Per cagion d'esempio il differenziale di x è dx, e per conseguenza x è l'integrale di dx. Quindi farà segno sicuro, che sia giusto quell'integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi. In due diverse maniere si ricercano gl'integrali delle formule differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebriche, o ridotte a quadrature, supposte; nell'altra facendo uso delle serie."[7]
Conclusa così una breve introduzione, il capitolo primo di questo terzo libro, contiene le prime regole di integrazione e il più semplice esempio di calcolo integrale riguarda le quantità differenziali costituite da un polinomio. Leggiamo:
"per esempio l'integrale di mx^{m-1} farà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m. L'integrale di $x^{\pm\frac{m}{n}}$ farà egli $\frac{x^{\pm\frac{m}{n}+1}}{\pm\frac{m}{n}+1}$, cioè $\frac{nx^{\pm\frac{m+n}{n}}}{\pm m+n}$"[8].
Continuando, troviamo una necessaria e doverosa precisazione:
"Ma qui fa d'uopo avvertire, che acciò gl'integrali fieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere" ...
"La ragione di ciò è, che non avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x, quanto di $x + a$, quanto di $x - b$ ecc, e però tanto x, quanto $x + a$, quanto $x - b$ ecc, possono essere gl'integrali di dx."[9]

[6]Agnesi M. G. Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana, cit. p.613.
[7]Ibidem.
[8]Ivi, p.614.
[9]Ivi, p.615.

A partire da formule differenziali anche complesse, sempre di carattere polinomiale, si può quindi con non troppa difficoltà arrivare alla funzione originaria di cui la formula è la quantità differenziale.

5.3.2 L'integrale di x^{-1} e la curva logaritmica

Vi sono però alcune situazioni problematiche: prima fra tutte quella in cui l'esponente della variabile x sia -1:
"Tutto ciò, che fin'ora ô detto, procede quando nella formola differenziale nessun termine vi sia, in cui l'esponente della variabile sia l'unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o sia $ax^{-1}dx$, imperocchè secondo la regola l'integrale sarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o sia $\frac{ax^0}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa sapere. In questi casi adunque bisogna ricorrere ad altri metodi. Due sono quelli, che servono: uno per mezzo d'una curva, che si chiama Logaritmica, ed anco Logistica, l'altro per mezzo di serie infinite."[10]

La curva logaritmica

Concentriamoci sul primo metodo, osservando subito che la principale caratteristica della curva Logaritmica è: "che prese nell'asse le assisse in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica.[11]"

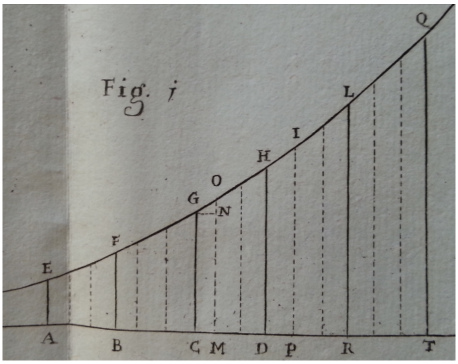


Figura 5.3: Originale figura 1 tomo II, libro III.

Mediante il termine Logaritmica Maria Gaetana Agnesi si sta riferendo, in realtà, alla moderna curva esponenziale: se le ascisse successive sono in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica. Un errore? No, semplicemente la studiosa legge il grafico dell'esponenziale diversamente da noi, pensando alle x come ai logaritmi, in una data base, delle ordinate corrispondenti sulla curva: un generico punto sulla curva, che noi descriviamo come $P(x, a^x)$ per Agnesi è $P(\log y, y)$. Grazie a questa visione della curva esponenziale, non solo risolveremo il problema dell'integrale di $x^{-1}dx$, ma saremo più avanti in grado di calcolare integrali complessi che coinvolgono i logaritmi. Tornando alla curva Logaritmica è fondamentale evidenziarne sin da ora una notevole peculiarità "la sottotangente di questa curva sarà

[10] Ivi, p.617.
[11] Ibidem.

sempre costante" [12] e in particolare se la base dell'esponenziale è quella naturale cioè e, tale costante è 1: la sottotangente è unitaria.
In base alla proprietà data, tracciamo la curva logaritmica con il seguente procedimento: dividiamo l'asse delle x in parti uguali, AB, BC, CD, ecc, innalzando da A, B, C, D le perpendicolari AE, BF, CG, DH tali che questi ultimi segmenti siano in proporzione geometrica tra loro. I punti E, F, G, H individuano alcuni punti della curva e dividendo in parti uguali i segmenti AB, BC, ecc, e ripetendo il procedimento delle perpendicolari otteniamo gli infiniti punti intermedi che costituiscono la curva.

Ingrandiamo la figura precedente con microscopi a infiniti ingrandimenti e consideriamo una suddivisione infinitesima di CD, $CM = dx$, l'ordinata $CG = y$, dy sull'ordinata MO, infinitamente vicina a CG, e un'altra ordinata $DH = z$.
Se le ascisse sono aritmeticamente proporzionali, le rispettive ordinate saranno tra loro geometricamente proporzionali e la medesima proporzione si avrà tra i loro differenziali perciò $dy : dz = y : z$ ossia $dy : y = dz : z$, rimane dunque costante il rapporto tra un'ordinata e il suo differenziale.
Se assumiamo dx costante si avrà allora
$dy : y = dx : a$, cioè $\dfrac{ady}{y} = dx$, che rappresenta l'equazione della curva Logaritmica.

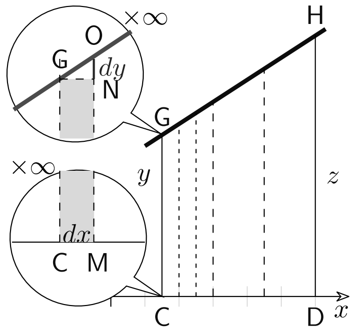


Figura 5.4: Ingrandimento non standard del tratto CD nella figura precedente.

Con le parole di Maria Gaetana Agnesi: "È facile vedere, che la sottotangente di questa curva sarà sempre costante, imperocchè nella formula generale della sottotangente $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sostituito in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avrassi $\dfrac{ydx}{dy} = \dfrac{adydx}{dxdy} = a$." [13]

Possiamo facilmente verificare la proprietà della costanza della sottotangente, studiando ad esempio la curva $y = 2^x$ (Figura 5.6). Prendiamo in considerazione le sottotangenti relative ai punti $A(1,2)$, $B(2,4)$ e $C(2,8)$: esse risultano uguali e misurano $\left|\dfrac{-1}{\ln 2} + 1\right| + 1$.
Potendosi generalizzare la formula precedente, nel caso in cui la base dell'esponenziale sia e, la sottotangente risulta unitaria.

[12] Ivi, p.618.
[13] Ibidem.

Un'altra costruzione della curva Logaritmica proposta da Maria Gaetana Agnesi nella figura 5.5, illustra graficamente la costanza della sottotangente. Infatti dividendo in parti uguali l'asse delle x e costruendo la curva Logaritmica passante per O, C, D, P, le rispettive sottotagenti NI, BA, KE, IF sono congruenti. Inoltre, posto $NI = a$, sottotangente, e considerando dx le suddivisioni dell'asse x, studiando la similitudine fra i triangoli STR e RGA si riottiene l'equazione della curva. Infatti, se $GR = y$, $RT = dx$, $TS = dy$, si ha $dy : dx = y : a$ e quindi $\dfrac{ady}{y} = dx$.

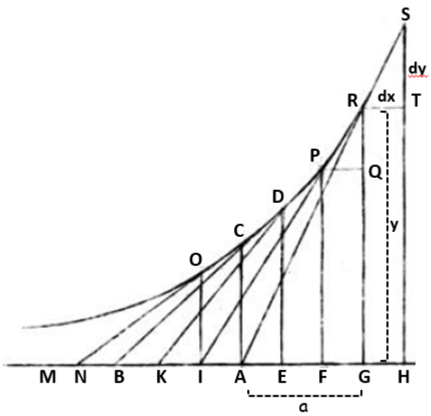


Figura 5.5: Nella Fig. 2 originale indichiamo dx, dy, y e la sottotangente a.

Abbiamo così ricavato la curva Logaritmica per punti, sulla base del confronto fra proporzionalità, e ne abbiamo dimostrato la proprietà caratteristica cioè la costanza della sottotangente.
La trascendenza della curva, infatti, non consente a Maria Gaetana Agnesi di descriverla algebricamente. Leggiamo però che a lei risulta già chiaro il legame fra questa curva e l'iperbole, che per noi viene esplicitato dall'integrale.
"La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva mecanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola."[14].

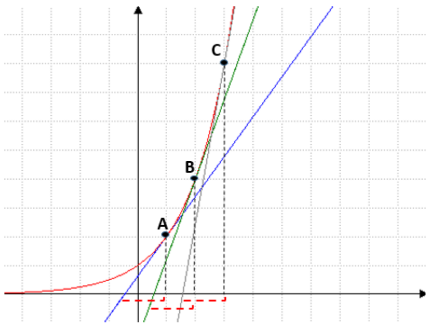


Figura 5.6: Sottotangenti relative ai punti A, B, C della curva $y = 2^x$.

L'integrale di x^{-1} grazie alla Logaritmica

Possiamo ora risolvere il problema dell'integrazione di $x^{-1}dx$.
Consideriamo la Logaritmica DC, con sottotangente pari ad a e prendiamo l'ascissa

[14]Ivi, p.621.

$x = AB$ e la corrispondente ordinata $y = BC$.

Essendo l'equazione della curva $\frac{ady}{y} = dx$, "l'integrale di $\frac{ady}{y}$ sarà x, ma $x = AB$, ed AB è il logaritmo di BC, cioè di y, adunque servendosi del segno $\int$ per significare integrale o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno l, che vuol dire logaritmo, sarà $\int \frac{ady}{y} = ly$, nella logaritmica, la cui sottotangente sia $= a$."
Proseguendo nella lettura del testo:"Istessamente sarà nella logaritmica della sottotangente $= 1$; $\int \frac{ady}{b+y} = l(b+y)$ nella logaritmica della sottotangente $= a$."
"Se la formula differenziale fosse $\frac{-dy}{y}$, l'integrale sarebbe $-ly$, e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$, l'integrale sarebbe $-l(a+y)$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $-l(a-y)$,

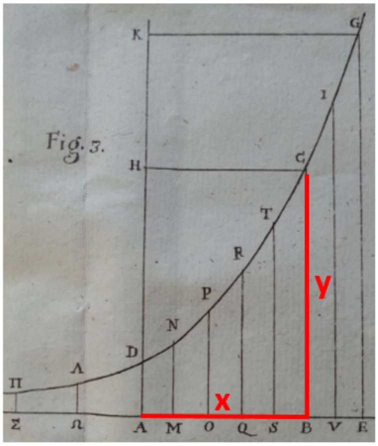


Figura 5.7: Nell'originale Fig.3 sono stati messi in evidenza $AB = x$ e $BC = y$.

intendendo questi logaritminella logaritmica della sottotangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è ly, così il differenziale di ly è $\frac{dy}{y}$, e generalmente parlando, il differenziale di una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottotangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa."[15]

5.4 Le applicazioni del calcolo integrale

Dopo aver illustrato il concetto di integrale e i metodi di integrazione, Maria Gaetana Agnesi si concentra sulle sue applicazioni, quindi sul calcolo delle aree, delle lunghezze delle curve e dei volumi dei solidi di rotazione, argomenti da lei chiamati rispettivamente: quadrature, cubature e rettificazioni.
La disamina di queste applicazioni geometriche procede soprattutto per esemplificazioni. Per le aree vengono studiati gli spazi determinati da iperboli, ellissi e

[15] Ivi, pp.622-623.

parabole, ma anche gli spazi relativi a curve celebri quali la cicloide, la concoide e la cissoide di Diocle. Infine vengono calcolati spazi legati alle curve logaritmica ed esponenziale e alle spirali.
Per le rettificazioni vengono studiate le lunghezze delle stesse curve che determinano le aree precedenti, quindi delle coniche e di curve come la cicloide.
Per i volumi ci si occupa di solidi di rotazione dai semplici coni a sferoidi, ellissoidi, paraboloidi fino anche a solidi legati alla rotazione di curve più complesse come la cissoide.

5.4.1 Le quadrature

All'inizio del terzo capitolo, leggiamo: "Per fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de' spazi, rettificazioni di curve, appianazioni, o sia quadrature di superficie, e cubature de' solidi, sia una qualunque curva ADH (Fig.6) riferita all'asse AB con le ordinate parallele fra loro, ed in angolo retto sopra l'asse stesso. Alla ordinata BD condotta CH parallela, ed infinitamente prossima, e tirata DE parallela a BC, il mistilineo $BDHC$ sarà la flussione, o il differenziale, o sia l'elemento dello spazio ABD, e perché lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$, si potrà prendere esso rettangolo per l'elemento del suddetto spazio ABD."[16] Dove lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$ in quanto le due quantità sono infinitesimi di ordine diverso: DEH è approssimativamente $\frac{1}{2}dxdy$, $BDEC$ è dato da ydx. Sicché $BDHC \sim BDEH$.

La formula differenziale che rappresenta uno spazio infinitesimo ci consentirà, una volta integrata, di trovare lo spazio che di volta in volta vogliamo determinare: "Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi $BDEC$ sarà lo spazio compreso dalla curva AD, e dalle coordinate AB, BD. Quindi chiamata $AB = x$, $BD = y$, sarà $BC = dx$, $EH = dy$, ed il rettangolo $BDEC = ydx$ sarà la formola per gli spazi. Se in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x, e per le costanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx, il valore

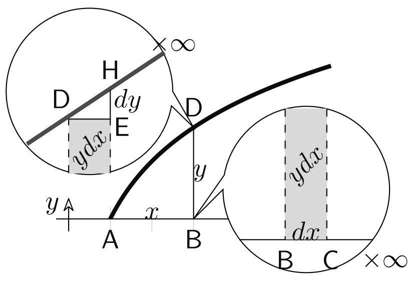


Figura 5.8: Riproduciamo con gli opportuni ingrandimenti la Fig.6 del manuale, indicando le variabili e gli incrementi infinitesimi.

[16] Ivi, p.709.

dato per y, dy e le costanti, ed indi integreremo, sarà l'integrale il ricercato spazio ABD."[17]

La funzione radice quadrata

Come primo esempio di applicazione degli integrali al calcolo delle aree consideriamo proprio il primo esempio del manuale riguardante lo spazio parabolico.
"Sia ABC una parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, una qualunque assissa $AD = x$, $DB = y$, e debbasi quadrare lo spazio ADB. Sarà dunque $y = \sqrt{ax}$ e posto questo valore nella formola degli spazi (ydx) in luogo di y, sarà essa $dx\sqrt{ax}$ ed integrando $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$. La quantità b è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto A, cioè quando $x = 0$, lo spazio è 0, adunque l'integrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta $x = 0$, e però sarà $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b$, cioè $b = 0$; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna. Adunque sarà lo spazio $ABD = \frac{2}{3}x\sqrt{ax}$ ma $y = \sqrt{ax}$, onde $ABD = \frac{2}{3}xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'assissa nell'ordinata."[18]

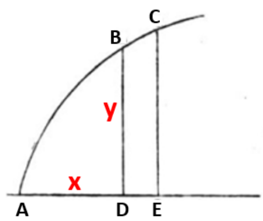


Figura 5.9: Riadattamento dall'originale Fig.10 del testo.

In maniera molto spontanea ed immediata viene ritrovato così il teorema di Archimede sull'area del segmento parabolico.

La cicloide

"Sia la cicloide NAM, (Fig.16) il circolo generatore ARH, e sia $AH = a$, $AB = x$, $BC = dx$, $BE = y$, $DF = dy$, sarà l'equazione

$$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{dx\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}.$$

Ma lo spazietto $QEFP$ è l'elemento dello spazio AEQ, adunque $FP \times PQ$, cioè $\frac{xdx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} = dx\sqrt{ax - xx}$ ne sarà la formola; ma $\int dx\sqrt{ax - xx}$ è il segmento circolare ASB, adunque lo spazio cicloidale AEQ sarà eguale al corrispondente spazio circolare ASB, e

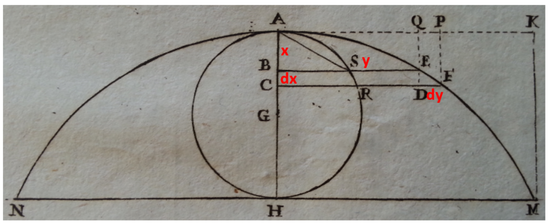


Figura 5.10: Sulla Fig.16 originale si sono posti in evidenza dx, dy, x, y.

[17] Ivi, pp.709-710.
[18] Ivi, pp.726-727.

tutto lo spazio AMK al semicircolo. Ma il rettangolo $AHMK$ è quadruplo del semicircolo, poiché è il prodotto della semiperiferia nel diametro; adunque lo spazio AMH sarà triplo del semicerchio, e però lo spazio della cicloide triplo del circolo generatore."[19]

Interpretiamo ed analizziamo il testo originale (v. Figura 5.11).
Indichiamo con $AH = a$ il diametro del cerchio generatore e poniamo: $AB = x$, $BC = dx$, $AQ = BE = y$, $QP = DF = dy$. L'equazione della cicloide, determinata in precedenza per via geometrica (nel libro II), è $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$. Notiamo che essendo $BS = \sqrt{x(a-x)} = \sqrt{ax - x^2}$ per il 2° Teorema di Euclide, lo spazio del cerchio $y_c dx$, vale $\sqrt{ax - x^2}$, con $y_c = BS$.

Ora, lo spazio $QEFP$ è l'elemento infinitesimo dello spazio AEQ. Esso vale:

$QEFP = xdy =$
$= \frac{xdx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} =$
$dx\sqrt{ax - xx}$
ed integrando:

$\int dx\sqrt{ax - xx}$ si avrà AEQ, ma, per quanto visto,

$\int dx\sqrt{ax - xx}$ è anche l'integrale per avere ASB. Abbiamo allora che l'area AKM equivale al semicerchio ARH e visto che il rettangolo $AHMK$, è il quadruplo del semicerchio (è infatti facile notare che se l'area del rettangolo $AHMK$ è $2R\pi R = 2\pi R^2$, l'area del semicerchio è $\frac{\pi R^2}{2}$): l'area del tratto di cicloide è il triplo del semicerchio, l'area dell'intera cicloide è il triplo di quella del cerchio generatore.

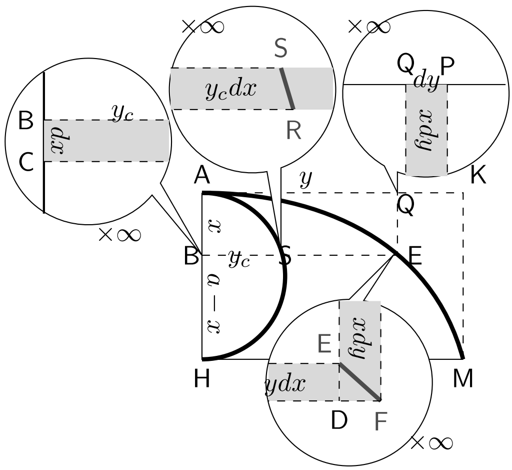


Figura 5.11: Gli incrementi infinitesimi delle variabili indicate nella figura precedente, utili per calcolare lo spazio della cicloide.

Sfruttando il concetto di spazio infinitesimo e integrando l'opportuna formula differenziale della cicloide, con pochi passaggi otteniamo lo spazio della cicloide, assai meno immediato da ottenere altrimenti.

[19] Ivi, pp.747-748.

L'esponenziale

L'ultimo esempio su cui ci soffermiamo è la determinazione dello spazio logaritmico, cioè quello sotteso dalla curva esponenziale, undicesimo esempio di calcolo degli spazi presente nel manuale.

Consideriamo la logaritmica HBD, di sottotangente a ed equazione $\frac{ady}{y} = dx$; consideriamo $AB = a$, $KH = y$, $AK = x$. Si avrà $ydx = ady$ e integrando $\int ydx = ay + bb$. Se $y = a$, si ha $0 = aa + bb$ e quindi $aa = -bb$ e lo spazio $AKHB = ay - aa$. Presa un'altra ordinata $NM = z$, si ha lo spazio $AMNB = az - aa$ e quindi lo spazio $MKHN = ay - az$.

Ora consideriamo dalla parte opposta, verso Q, $FE = y$, con $AE = x$ e la formula per lo spazio ora diventa $ydx = ady$, così integrando, lo spazio $AEFB$ vale $-ay + bb$, che se $y = a$, darà $bb = aa$ e lo spazio $AEFB$ varrà: $aa - ay$. Se ora poniamo $y = 0$ facendo retrocedere l'ordinata dalla parte di Q, lo spazio $AEFB$ assumerà il valore aa; "in conseguenza lo stesso spazio infinitamente prodotto dalla parte di Q, ma che principi da una qualunque ordinata $EF = y$, sarà $= ay$".

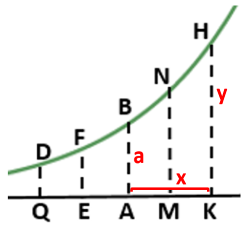


Figura 5.12: Rifacimento della Fig.19 originale. In evidenza i segmenti $AB = a$, $KH = y$, $AK = x$.

Ritroviamo in due grafici il risultato del manuale[20], nel caso di e^x dove la sottotangente è unitaria e dunque l'area compresa fra l'asse x e la curva, fino ad una certa quota y, è y stessa.

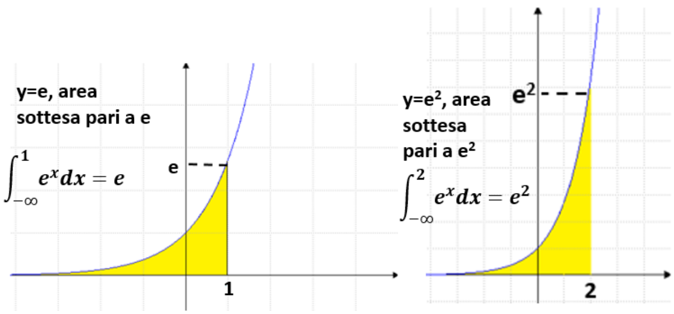


Figura 5.13: Quadrature di $f(x) = e^x$.

[20] Ivi, p.753.

5.4.2 Le rettificazioni

Esaurita l'esposizione del metodo di calcolo delle quadrature, Maria Gaetana Agnesi passa a descrivere la rettificazione di una curva ovvero la lunghezza di un arco di curva. Leggiamo dal manuale: "Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime DH della curva formano la curva stessa, e però, che DH ne sarà l'elemento, adunque chiamata (Fig.6) $AB = x$, $BD = y$, e però $BC = dx$, $EH = dy$, nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, sarà $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formola generale per la rettificazione di esse curve."[21].

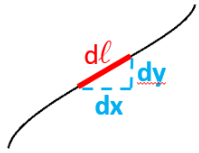


Figura 5.14: Come impostare la rettificazione.

La cicloide

Come unico esempio applicativo della formula di rettificazione, consideriamo la lunghezza della cicloide. Leggiamo dall'esempio ventiduesimo sulle rettificazioni: "'Sia la cicloide dell'esempio VIII delle quadrature, (Fig.16) la di cui equazione sappiamo essere $dy = \frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$; adunque sarà la formola $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, e però integrando, sarà l'arco $FA = \sqrt{2ax} =$ al doppio della corda AS del corrispondente arco di circolo AS, e posta $x = a$, sarà AM doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla."
Rifacciamoci alla figura 5.10. Applicando la rettificazione alla formula differenziale della cicloide $dy = \frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, otteniamo:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \frac{(dx)^2(a-x)}{x}} = dx\sqrt{1 + \frac{a}{x} - 1} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

Una volta trovato l'elemento dl dell'arco AF, integrando si ha:

$$AF = \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{ax}.$$

Quando $x = a$, coprendo tutto il diametro AH, si ha l'arco di cicloide AM, che vale $2a$. L'intera cicloide ha quindi una lunghezza di 4 diametri a, della circonferenza generatrice.

La rettificazione non standard

La formula per le rettificazioni usata da Maria Gaetana Agnesi deriva dal Teorema di Pitagora, applicato al tratto infinitesimo dl. Per lei dl, dx, dy sono quantità

[21] Ivi, p.711. Agnesi qui si riferisce alla figura 6 del testo originale, da noi citata a proposito del grafico in Figura 5.8

differenziali, perciò analizziamo e sviluppiamo la formula secondo la definizione di differenziale vista al termine del capitolo 5.2.1.
Dato che, a livello infinitesimo, un tratto di curva è rettilineo, siamo autorizzati a scrivere $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Se la funzione $y = f(x)$ nel punto considerato è continua insieme alla sua derivata, allora $dy = f'(x)dx + \varepsilon dx \sim f'(x)dx$, cioè l'incremento infinitesimo della funzione è indistinguibile dall'incremento infinitesimo, calcolato lungo la tangente.

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \sim \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = dx\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Per integrare dl sulla curva (o per un suo arco) occorre dunque che $f(x)$ sia una funzione di classe C1. Il simbolo $\sim$ interno all'espressione precedente suggerisce che la somma infinita che calcola la lunghezza della curva comporta dei residui, infinitesimi di ordine superiore, che verranno trascurati applicando la definizione non standard di integrale (vedi oltre).
Quanto al calcolo dell'integrale, che non è elementare, si rinvia a [Casiraghi 2016].

5.4.3 Le cubature, ovvero i volumi dei solidi di rotazione

Prendendo le mosse dalla stessa figura che le è servita per trovare la formula dello spazio infinitesimo, Maria Gaetana Agnesi determina la formula della superficie infinitesima di rotazione e poi la formula che dà il volume infinitesimo di rotazione, che vedremo di seguito.
"S'intenda muoversi il piano AHC (Fig. 6) attorno alla retta AC, la curva AH descriverà una superficie nel mentre, che il piano AHC descriverà un solido; ma la porzione infinitesima DH descriverà una zona infinitesima, che sarà l'elemento della superficie descritta dalla curva AH, ed il piano infinitesimo $DBCH$ descriverà un solido infinitesimo, che sarà l'elemento del solido descritto dal piano AHC. Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate in angolo retto; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c, la circonferenza descritta col raggio $BD = y$ sarà $\frac{cy}{r}$, e però $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'espressione della zona infinitesima, ed in conseguenza la formola generale per la superficie."[22]
All'inizio dello studio dei volumi troviamo la formula dell'area di una superficie di rotazione espressa con gli infinitesimi, e l'elemento infinitesimo di superficie di Maria Gaetana Agnesi: $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ può essere rielaborato in chiave moderna (approssimando per brevità, cioè senza tener conto di ulteriori infinitesimi):

$$dS = \frac{cy}{r}\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{2\pi r}{r}f(x)\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

facendo infine ritrovare la formula integrale dell'area di una superficie di rotazione:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

[22] Ivi, p.712.

Come già ricordato l'originale figura 6 del testo servirà all'autrice per ricavare anche la formula del volume di rotazione infinitesimo:
"Sarà pure $\frac{cyy}{2r}$ l'area del circolo col raggio $BD = y$, e però $\frac{cyydx}{2r}$ sarà l'espressione del cilindretto infinitesimo descritto dal rettangolo $BCED$, ma esso non differisce, se non per quantità del secondo ordine, dal solido generato dal piano $BCHD$; adunque sarà $\frac{cyydx}{2r}$ la formola generale per i solidi."
L'elemento di volume dV è dunque: $dV = \frac{cyydx}{2r} = \frac{2\pi ryydx}{2r} = \pi y^2 dx$ e il volume di rotazione riscritto modernamente è: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.
È interessante notare come Maria Gaetana Agnesi non utilizzi il simbolo π, ma faccia uso di questa quantità mediante i rapporti fra le lunghezze tipiche della circonferenza. Se è vero che la trascendenza di π verrà dimostrata dal matematico tedesco Lindemann solo nel 1882, tuttavia con grande probabilità la matematica milanese conosceva sia la formula sommatoria di Leibniz sia la produttoria di Viète, entrambe convergenti a π. Maria Gaetana Agnesi, coerente con il suo approccio fortemente geometrico, basato in gran parte sulle proporzioni, preferisce riportare questo numero irrazionale trascendente come rapporto, evitando questioni numeriche e non perdendo nulla in efficacia.

π non standard

Il ragionamento che porta alla definizione di π è l'esempio più semplice ed emblematico di un approccio non standard utile didatticamente.
Consideriamo i perimetri di due poligoni regolari con lo stesso numero di lati e lo stesso centro. Fissato il numero di lati, se si dividono i poligoni in triangoli tracciando i raggi, è chiara la similitudine fra i triangoli corrispondenti nell'uno e nell'altro poligono. Quindi vi è uguale rapporto fra il perimetro e il raggio in entrambi i poligoni e, trattandosi di rapporto fra numeri finiti (non infinitesimi), si tratta di un numero standard (cioè reale). Per esempio negli esagoni regolari il rapporto fra il perimetro e il raggio è 6.
Immaginiamo ora due poligoni concentrici analoghi, con un numero ugualmente infinito di lati: i loro perimetri sono indistinguibili dalle rispettive circonferenze circoscritte. Il valore del rapporto fra la misura di ogni circonferenza e il proprio raggio è quindi indistinguibile dal rapporto fra il perimetro e il raggio nel poligono circoscritto di infiniti lati, rapporto che, come si è visto, non dipende dal raggio. Perciò una circonferenza, di qualsiasi dimensione, è in rapporto al suo raggio per un numero indistinguibile da un numero standard, che si usa indicare con 2π.
Una stretta conseguenza di questo approccio è che il seno[23] è indistinguibile dal suo arco infinitesimo e quindi il famoso limite notevole del rapporto fra i due in NSA è evidente di per sé e non richiede una dimostrazione.

[23] seno = mezza corda, secondo l'etimo.

5.4.4 L'integrale del logaritmo

Vogliamo esaminare un ultimo brillante esempio di calcolo integrale, nel quale Maria Gaetana Agnesi perviene al risultato grazie all'approccio geometrico, in maniera intuitiva ed immediata. Si tratta di integrare il logaritmo naturale di una certa quantità; integrale questo che l'analisi moderna risolve con una tutt'altro che immediata integrazione per parti. Leggiamo dal manuale:
"Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene spesso ammettono integrazioni, che sono geometriche, e dipendono da quadrature di spazi curvilinei, che facilmente si descrivono, supposta la logistica..." "...nella logaritmica descritta (Fig. 42.) pongasi $CD = y$, e presa la sottotangente per unità, avremo AC, o $HD = ly$; onde il rettangolo infinitesimo DG, la di cui base $GH = FE = dy$, sarà $= dyly$, ma questo rettangolo si è l'elemento dell'area BDH, dunque la somma è eguale alla detta area BDH. Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo AD meno lo spazio logaritmico $ABDC$, ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo $AB \times CD = y$, dunque l'area $BDH = \int dyly = yly - y$" [24]

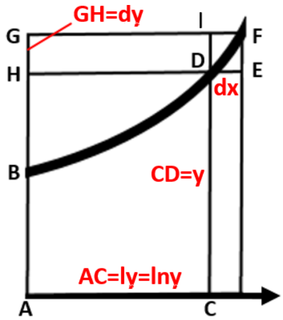


Figura 5.15: Rifacimento dell'originale figura 42, con l'indicazione dei segmenti $GH = dy$, $AC = ly$, $CD = y$, $DE = dx$.

Consideriamo la Logaritmica BF, con sottotangente unitaria: si tratta quindi della curva $y = e^x$. L'ordinata $CD = y$ e la corrispondente ascissa $AC = x = \ln y$; gli incrementi infinitesimi sono $GH = dy$ e $DE = dx$. Il rettangolo infinitesimo $GHDI$, di area $\ln y dy$, è l'elemento infinitesimo dell'area BDH, la quale è data da $\int \ln y dy$. Tale area BDH è pari, geometricamente, a quella del rettangolo $ACDH$ meno l'area sottostante alla curva BD, data dal trapezoide $ACDB$. Il rettangolo $ACDH$ vale $y \ln y$ mentre l'area del trapezoide, come visto in precedenza trattando lo spazio dell'esponenziale, vale $y - 1$, se consideriamo A l'origine degli assi.
L'integrale dunque:

$$\int \ln y dy = y \ln y - y + 1 + c = y \ln y - y + k$$

Il risultato trovato da Maria Gaetana Agnesi: $y \ln y - y + c$ è la classica risoluzione dell'integrale del logaritmo naturale di una variabile. Significativo è però che la soluzione viene trovata geometricamente, come differenza di aree e non con il solito, laborioso, procedimento per parti che si usa in casi simili a questo:

$$\int \ln y dy = \int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

[24] Ivi, pp.829-830.

La relazione fra integrali e curve logaritmiche risulta dunque molto feconda perché consente di determinare integrali anche complessi per via geometrica attraverso semplici sottrazioni di aree.

5.4.5 Brevi note sull'integrale non standard

In NSA la definizione di integrale è coerente con tutto quanto descritto finora. Per Maria Gaetana Agnesi e anche in Analisi non standard:

- la primitiva si deduce dall'espressione del differenziale;
- l'integrale geometricamente è uno spazio: nel caso dell'area è la somma di infinite quantità (porzioni d'area) infinitesime;
- ogni striscia rettangolare ricopre l'area effettivamente sottesa a meno di infinitesimi di ordine superiore;
- dx ha un preciso significato geometrico ed è irrinunciabile nell'espressione integranda, perché:
  - questa è un differenziale di cui dx è parte costitutiva;
  - rappresenta geometricamente la base infinitesima delle strisce che compongono idealmente il plurirettangolo sotteso alla curva.

L'Analisi non standard ci conduce nel dettaglio degli infinitesimi coinvolti nell'integrale. Seguiamo il percorso didattico nella fase essenziale in cui il modello geometrico supporta la concettualizzazione.

1. Come nei percorsi usuali, dapprima si definisce la Somma di Riemann finita, che rappresenta l'area del plurirettangolo sotteso. Se ne riscontra l'imprecisione e la dipendenza dal metodo usato per suddividere l'intervallo di integrazione;
2. si considera poi la suddivisione infinita dell'intervallo di integrazione e si esaminano le ragioni che riducono quella imprecisione e quella dipendenza, sostanzialmente dovute agli infinitesimi di ordine superiore: $\int_a^b f(x)dx \sim \sum_a^b f(x)dx$;
3. si definisce l'integrale come la parte standard della somma di Riemann infinita: $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x)dx\right)$. La funzione $\mathrm{st}()$ è applicabile solo a iperreali finiti e ne esclude la parte infinitesima.

La prova che il risultato è indipendente dalla scelta degli infiniti punti che suddividono l'intervallo di integrazione coinvolge le proprietà di una funzione d'area e (ancora una volta) l'indistinguibilità fra iperreali.

5.5 Conclusioni

Maria Gaetana Agnesi introduce il calcolo integrale come calcolo dell'antidifferenziale, ma ben presto, cioè a partire dall'integrale della curva logaritmica associato

alla quadratura dell'iperbole, viene posto in evidenza il legame naturale esistente fra l'integrale e l'area, che viene ribadito da tutti gli esempi ed esercizi successivi.
A nostro avviso, il percorso didattico che l'opera delinea non è solo pregevole per chiarezza, originalità e metodo, ma è oltremodo utile anche ai docenti dei nostri giorni, alla ricerca di proposte didattiche efficaci. Quella che si può costruire a partire dal manuale che abbiamo illustrato risulta coerente nell'organizzazione e motivante grazie al modello geometrico, che può essere facilmente visualizzato e gestito dall'alunno con gli attuali strumenti di software.
Possiamo quindi seguire il manuale in molte sue pagine. Ne ricaviamo agilità e ricchezza della presentazione, semplificazione dei calcoli, stretta connessione con il modello geometrico, quindi efficacia e rappresentatività dei simboli. Evitando le complicazioni del mero calcolo, potremo giustificare per via diretta dei risultati che altrimenti apparirebbero astratti.
Il percorso didattico che Maria Gaetana Agnesi ci propone può essere interamente recuperato nell'Analisi non standard, trovando nell'insieme degli Iperreali un naturale inquadramento logico che può essere proposto agli alunni investendo un tempo limitato e distribuito negli anni. In questo modo si raggiunge una conoscenza dell'analisi molto più ricca, motivante e fondata di quanto non si riesca a ottenere con il percorso tradizionale.
Infine, ci sembra opportuno riprendere le parole del collega Giorgio Goldoni: "L'idea fondamentale del calcolo integrale è quella di esprimere l'intero come somma di infinite parti infinitamente piccole. Ogni parte infinitesima racchiude però la stessa difficoltà di calcolo dell'intero e il passo decisivo è quello di sostituire ogni parte infinitesima con una indistinguibile più semplice, in modo da riuscire a portare a termine il calcolo ottenendo un risultato infinitamente vicino a quello esatto." ([Goldoni 2014])

Bibliografia

[Agnesi] Agnesi M.G., *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana*, Regia-Ducal corte, Milano, 1748. Retrived from:
`https://archive.org/details/bub_gb_xDF_ksE24HUC`,
`https://archive.org/details/BUSA298_184`

[A-S 2017] Aldegheri L. - Stecca B., *L'Analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi*, in VII giornata di studio "Analisi non standard per le scuole superiori", atti 2017, Aracne

[Brunacci 1804] Brunacci V. *Corso di matematica sublime*, Editore Allegrini, Firenze 1804

[Casiraghi 2016] Casiraghi S. *Quanto didattica della NSA: svolgimenti e coinvolgimenti in classe virtuale*, in VI convegno nazionale Analisi non standard, atti 2016, Matematicamente.it

[Ferro 2016] Ferro R. et al. *Elementi di Analisi non standard*, rivista online MatematicaMente, dal n.205, 2016 http://mathesisverona.it/matematicamente/

[Goldoni 2011] Goldoni G., *I numeri iperreali*, collana "Il prof.Apotema insegna..." www.ilmiolibro.it

[Goldoni 2013] Goldoni G., *La formula di sostituzione negli integrali*, in III Convegno nazionale Analisi non standard, atti 2013, Matematicamente.it

[Goldoni 2014] Goldoni G., *Il differenziale alla Robinson in una o più variabili*, in IV Convegno nazionale Analisi non standard, atti 2014, Matematicamente.it

[Goldoni, 2016] Goldoni G., *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, collana "Il prof.Apotema insegna..." www.ilmiolibro.it

[Goldoni 2016] Goldoni G., *Il calcolo delle somme e il calcolo integrale*, collana "Il prof.Apotema insegna..." www.ilmiolibro.it

6

Percorso non standard per un Istituto Tecnico

Elena Bellandi, Anna Pivi, Anna Secreti, Gabriella Tosi [1]

Nelle discipline di indirizzo di un Istituto Tecnico Tecnologico sono richiesti sia il concetto di derivata che il suo utilizzo come operatore già dalla fine della classe terza; l'approccio non standard ci consente, all'inizio della quarta, di introdurre lo studio delle derivate posticipando il calcolo dei limiti.
Le fasi più significative della sperimentazione si articolano su tre aspetti trattati in parallelo:

1. *La risoluzione di problemi complessi in ambito geometrico e fisico: i problemi della tangente ad una curva e del calcolo della velocità istantanea.*
2. *Gli infinitesimi: strumenti matematici efficaci per la risoluzione di problemi e per la comprensione del concetto di limite.*
3. *Il metodo deduttivo della matematica: le regole di derivazione risultano più semplici da dimostrare e lo studente percepisce meglio il valore del metodo deduttivo della matematica.*

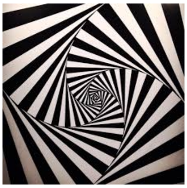
6.1 Introduzione e presentazione del percorso

Il contenuto delle slide seguenti è frutto del lavoro di un gruppo di quattro insegnanti dell'Istituto Tecnico "Fedi Fermi" di Pistoia, che da due anni sperimenta il calcolo differenziale alla maniera non standard nelle classi quarte.
Nell'Istituto ci sono cinque indirizzi: meccanica, elettronica ed elettrotecnica, costruzioni ambiente e territorio, informatica e chimica; naturalmente è possibile svolgere l'analisi non standard in ognuno di essi, tuttavia, secondo la specializzazione, vengono effettuati approfondimenti su aspetti diversi.
Lo scopo di questa presentazione è quello di illustrare e condividere il percorso che abbiamo sperimentato, sottolineando i vantaggi e le criticità che sono emersi.

[1] ITT Fedi-Fermi, Pistoia

6.2 Il percorso: prima parte

Percorso non standard per un Istituto Tecnico



Anna Pivi

Anna Secreti

Elena Bellandi

Gabriella Tosi

Firenze, 6 Ottobre 2018

dia 1

Perché il percorso non standard?

In un Istituto Tecnico la matematica è strettamente legata alle discipline di indirizzo. La nostra esperienza ci ha portate a confrontarci con l'esigenza di fornire agli studenti le competenze necessarie per utilizzare le derivate, nella risoluzione di problemi di carattere tecnico, già dalla fine della classe terza. L'approccio non standard ci consente di introdurre il calcolo differenziale, posticipando lo studio dei limiti.

dia 2

Sintesi del percorso

- Problema della velocità istantanea (breve introduzione storica)
- Problema di definizione della retta tangente
- Attività propedeutica al concetto di tangente: studio della variazione di semplici funzioni polinomiali
- Definizione di derivata, operazioni e applicazioni
- Trattazione degli iperreali finalizzata allo studio delle funzioni
- Passaggio dal linguaggio degli infinitesimi al linguaggio dei limiti

dia 3

Due grandi problemi storici

1) Definizione e calcolo della velocità istantanea

2) Definizione di retta tangente e relativa equazione

dia 4

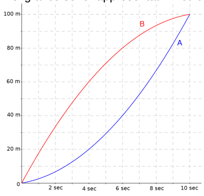
dia 4. I problemi proposti vengono anticipati da una breve introduzione storica sulla nascita del calcolo differenziale, spiegando il percorso di Leibniz e Newton.

Le dia 5, 6, 7, 8 presentano una sintesi delle attività introduttive al calcolo differenziale (la classe si avvale di schede di lavoro dettagliate e approfondite).

Problema della velocità istantanea

Viene fornito agli studenti il seguente grafico (tratto dal libro del pro Bonavoglia), a partire dal quale è stata costruita una scheda (lavoro.

Nel grafico sono rappresentati i moti di due atleti: A e B



1) facciamo calcolare la velocità media dei due atleti
2) si chiede chi dei due arriva per primo
3) si fa osservare che se anche arrivano al traguardo contemporaneamente le loro velocità durante il percorso sono diverse

dia 5

Per introdurre il concetto di velocità istantanea facciamo compilare, in base al grafico, la seguente tabella e successivamente poniamo delle domande mirate.

Intervallo di tempo	Velocità A	Velocità B
[0 ; 2]		
[2 ; 4]		
[4 ; 6]		
[6 ; 8]		
[8 ; 10]		

1) che andamento ha la velocità nei due casi?
2) in prossimità di quali punti del grafico si ha la stessa velocità?
3) cosa rappresentano, da un punto di vista geometrico, le velocità calcolate?
4) cos'è secondo voi la velocità istantanea? interpretatene il significato dal punto di vista geometrico in relazione ai grafici assegnati
5) con gli strumenti che abbiamo a disposizione è calcolabile la velocità istantanea?

Si pone il problema di definire la parola "*istante*" ed è a questo punto che viene introdotto per la prima volta il concetto intuitivo di ***infinitesimo.***

Il problema del calcolo della velocità istantanea rimane aperto...

dia 6

dia 6. Per introdurre il concetto di velocità istantanea prendiamo come riferimento i grafici della dia 5 e suddividiamo l'intervallo di tempo in 5 sottointervalli di ampiezza 2, in ognuno dei quali calcoliamo la velocità dei due atleti. Per il calcolo delle variazioni diciamo che i moti sono rappresentati da archi di parabole e facciamo calcolare agli studenti le rispettive equazioni.
I dati ottenuti vengono riportati nella tabella seguente:

$$\text{grafico A: } y = \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{3}x, \qquad \text{grafico B: } y = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{55}{3}x$$

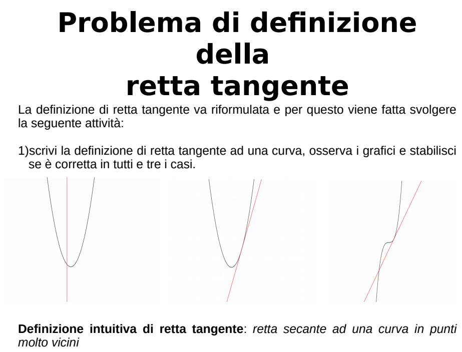
Intervallo di tempo	**Variazione A ΔS**	**Velocità A**	**Variazione B ΔS**	**Velocità B**
$[0;2]$	$\frac{20}{3}m$	$\frac{10}{3}m/s$	$\frac{100}{3}m$	$\frac{50}{3}m/s$
$[2;4]$	$\frac{40}{3}m$	$\frac{20}{3}m/s$	$\frac{80}{3}m$	$\frac{40}{3}m/s$
$[4;6]$	$\frac{80}{3}m$	$\frac{40}{3}m/s$	$20m$	$10m/s$
$[6;8]$	$60m$	$30m/s$	$\frac{40}{3}m$	$\frac{20}{3}m/s$
$[8;10]$	$40m$	$20m/s$	$\frac{20}{3}m$	$\frac{10}{3}m/s$

Sulla base della tabella compilata vengono poste alcune domande:

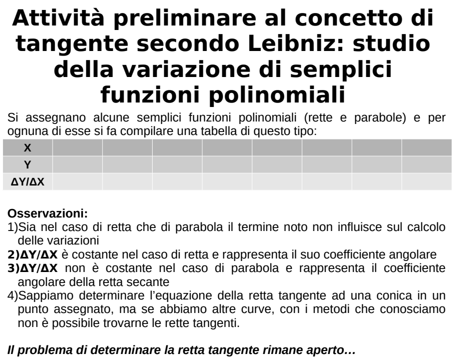
- Che andamento ha la velocità nei due casi?
- In prossimità di quali punti del grafico si ha la stessa velocità?
- Cosa rappresentano, da un punto di vista geometrico, le velocità calcolate?

- Cos'è secondo voi la velocità istantanea? Interpretatene il significato dal punto di vista geometrico in relazione ai grafici assegnati.
- Con gli strumenti che abbiamo a disposizione è calcolabile la velocità istantanea?

Si pone il problema di definire la parola "*istante*" ed è a questo punto che viene introdotto il concetto intuitivo di **infinitesimo**.
Il problema del calcolo della velocità istantanea rimane aperto...



dia 7



dia 8

dia 7. Il concetto vago di "molto vicini" viene analizzato in classe per introdurre il concetto di infinita vicinanza.
dia 8. L'attività presentata nella slide è un esempio che vuole evidenziare come l'interpretazione geometrica caratterizzi da subito i concetti che vengono introdotti. Nel caso specifico il rapporto tra gli incrementi delle variabili $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ viene presentato come uno strumento utile sia allo studio della monotonia di una funzione sia al confronto delle pendenze tra due funzioni. Infatti dall'analisi delle tabelle compilate dagli studenti, per parabole diverse, si pone l'accento sul confronto tra la rapidità di crescita delle curve in relazione ai corrispondenti valori dei coefficienti angolari delle rette secanti.
La pendenza della retta secante viene definita come rapporto incrementale di una funzione solo in una fase successiva per evitare che il formalismo ne svilisca l'interpretazione geometrica.

I due problemi analizzati non sono risolvibili con gli strumenti matematici a nostra disposizione

dia 9

...La soluzione

Il percorso di seguito descritto, già sperimentato in classe, è interamente tratto dal libro del prof. Bonavoglia citato nella bibliografia:

- Definizione di derivata
- Applicazione del calcolo delle derivate, mediante la definizione, alla risoluzione di problemi di carattere fisico e geometrico
- Regole di derivazione per funzioni algebriche e trascendenti, con relative dimostrazioni
- Algebra delle derivate, con dimostrazioni
- Derivate prima e seconda nello studio della funzione

dia 10

Nel primo anno di sperimentazione abbiamo trattato i numeri iperreali in modo estremamente sintetico per non appesantire la simbologia da utilizzare nel calcolo delle derivate. Pertanto la definizione di derivata che riportiamo di seguito, è stata utilizzata sostituendo il calcolo della funzione $\mathrm{st}()$ (parte standard) con il simbolo di *infinitamente vicino* $\approx$.
Seguono alcune definizioni proposte alla classe e uno degli esercizi, a titolo di esempio.

Il rapporto incrementale

Sia data la funzione $y(x)$ continua in un intervallo I del suo dominio; si indichi con dx un generico infinitesimo positivo, di cui incrementare la variabile indipendente x e con dy il corrispondente incremento infinitesimo della variabile dipendente y; si definisce rapporto incrementale della funzione $y(x)$ in $x \in I$ il seguente rapporto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}.$$

La derivata di una funzione

Sia la funzione $y(x)$ continua in un intervallo I del suo dominio e $\dfrac{dy}{dx}$ sia il rapporto incrementale nel punto $x \in I$. Si definisce derivata della funzione nel punto x la parte standard del rapporto incrementale:

$$y'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) \to \mathrm{st}\left(\frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}\right).$$

ESEMPIO
Si calcoli la derivata della funzione $y(x) = \dfrac{1}{x}$ in un generico punto del suo dominio.

- Si calcola il rapporto incrementale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{x+dx} - \dfrac{1}{x}}{dx}.$$

- Si semplifica l'espressione ottenuta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x-x-dx}{x(x+dx)}}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-dx}{x(x+dx)} \cdot \frac{1}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x(x+dx)}.$$

- Si approssima al risultato reale, cioè alla parte standard del rapporto ottenuto:

$$y'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-1}{x(x+dx)}\right) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Lo svolgimento illustrato ha avuto, in alcuni casi, il difetto di rendere confusa la nozione di forma indeterminata. Infatti per alcuni studenti non risultava perfettamente chiaro il motivo per il quale era necessario elaborare il rapporto incrementale applicando le opportune regole dell'algebra (si pensi al caso delle funzioni irrazionali).
Pertanto, negli anni successivi della sperimentazione abbiamo ritenuto indispensabile trattare in modo più approfondito i numeri iperreali, la funzione $\mathrm{st}()$ e lo studio, in semplici casi, delle forme indeterminate.

6.3 Il percorso: seconda parte

Le criticità rilevate

Dall'osservazione del lavoro e della risposta da parte degli studenti sono emerse le seguenti necessità:

•Potenziare il calcolo con gli infinitesimi

•Approfondire il concetto di continuità

•Creare un ponte fra il linguaggio degli infinitesimi e quello dei limiti

dia 11

Un'integrazione al nostro percorso

Gli iperreali e la loro applicazione allo studio della

continuità e delle funzioni ai confini del dominio

dia 12

Dalla slide n.12 fino alla n.18 si presenta il percorso sugli iperreali, in fase di sperimentazione nell'anno scolastico in corso.

1) Definizioni e operazioni

- Definizione rigorosa di **infinitesimo (ε)**
- Definizione di **infinito (1/ε)**
- **Operazioni fra infinitesimi**: somma algebrica, moltiplicazione fra infinitesimi e moltiplicazione fra un infinitesimo e un numero reale, potenza e radice *n*-esima.

RAPPORTO FRA INFINITESIMI: una forma indeterminata ne consegue
RAPPORTO FRA INFINITI: un'altra forma indeterminata

- Definizioni di **numero iperreale r*** e di **parte standard**
- Operazioni fra iperreali e calcolo di *St* (r*)

dia 13

2) Si adatta la simbologia degli iperreali allo studio delle funzioni

Da questo momento in poi un numero iperreale sarà indicato nel seguente modo:

numero infinitesimo positivo: ***dx***

numero infinito: **∞**

numero finito: ***x+dx***

dia 14

3) Studio delle funzioni agli estremi del dominio

Un semplice esempio:

studiare il comportamento della funzione $y=\frac{1}{x}$ negli estremi del dominio in $\mathbb{R}^*$ ed interpretare graficamente in $\mathbb{R}$

Primo estremo : $-\frac{1}{dx} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{dx}\right) = -dx \Rightarrow st\ f(-\frac{1}{dx}) = 0^-$

Secondo estremo : $0 \pm dx \Rightarrow f(\pm dx) = \pm\frac{1}{dx} = \pm\infty$

Terzo estremo : $+\frac{1}{dx} \Rightarrow f\left(+\frac{1}{dx}\right) = +dx \Rightarrow st\ f(+\frac{1}{dx}) = 0^+$

I risultati vengono interpretati graficamente

dia 15

4) Si potenzia il calcolo con gli iperreali

Esempio tratto dagli esercizi del capitolo sui limiti notevoli del libro di testo:

calcola la parte standard della funzione $f(x)=\frac{e^{3x}-1}{x}$ in 0*

Svolgimento: $f(dx) = \frac{e^{3dx}-1}{dx} \Rightarrow f(dx) = \frac{3dx}{dx} \Rightarrow st\ f(0^*) = 3$

dia 16

<u>dia 15.</u> La discussione relativa all'interpretazione grafica tende a far cogliere l'andamento asintotico.
<u>dia 16.</u> Si propone un esercizio tratto dal capitolo sui limiti del libro di testo e riadattato al linguaggio dell'analisi non standard. Una delle criticità rilevate è proprio la necessità di adeguare gli esercizi dei manuali in uso nelle scuole.

La continuità e i limiti

5) Il concetto di continuità

Definizione
Sia $y = f(x)$ definita in $D \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$, $f(x)$ si dice **continua in x_0** se

$$St\ f(x_0 \pm dx) = f(x_0)$$

Ovvero:

1. $St\ f(x_0 \pm dx) = l_{1,2}$ (l_1 e l_2 valori finiti)
2. $l_1 = l_2 = l$
3. $l = f(x_0)$

Se almeno una delle suddette condizioni non si verifica si dice che x_0 è un **punto di discontinuità**.

La definizione formale sarà sempre supportata da rappresentazioni grafiche.

dia 17

Il passaggio dagli infinitesimi ai limiti

Si propone agli studenti un confronto fra la definizione di continuità vista nel percorso non standard e quella presente nei libri di testo (ε – δ), se ne fanno rilevare le differenze e il significato, introducendo a questo punto il linguaggio dei limiti.

dia 18

<u>dia 17.</u> Indicheremo con dx un qualsiasi infinitesimo positivo.

Innanzi tutto si dà il concetto più intuitivo di continuità, molto semplice e naturale, ovvero:
Se $f(x)$ è una funzione definita in $D \subset \mathbb{R}^*$ allora è continua in un punto x_0 se ad una variazione infinitesima della variabile indipendente corrisponde una variazione infinitesima della funzione:

$$\text{Se } x \approx x_0 \text{ allora } f(x) \approx f(x_0).$$

Si usa il simbolo "infinitamente vicino" $\approx$: la continuità espressa in questo modo non richiede alcun artificio tecnico, nemmeno l'uso della funzione parte standard.
Tuttavia può essere utile fornire anche una definizione di continuità più articolata, soprattutto se vogliamo classificare i punti di discontinuità.

Se $f(x)$ è una funzione definita in $D \subset \mathbb{R}^*$ allora è continua in un punto x_0 se

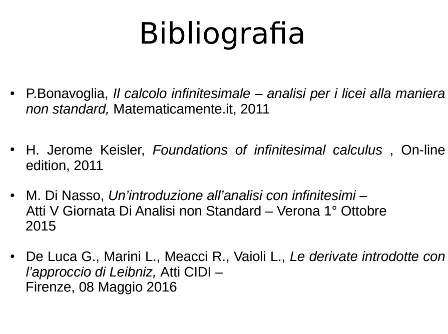
$$\mathrm{st}(f(x_0 \pm dx)) = f(x_0).$$

Ovvero:

- $\mathrm{st}(f(x_0 \pm dx) = l_{1,2}$ (l_1 e l_2 valori finiti)
- $l_1 = l_2 = l$
- $l = f(x_0)$

Se almeno una delle suddette condizioni non si verifica si dice che x_0 è un **punto di discontinuità**.
L'utilizzo della funzione $\mathrm{st}()$ a questo scopo è comunque semplice e se gli studenti hanno capito e assimilato la definizione più intuitiva non hanno difficoltà a capire anche quest'ultima.
Dia 18. La programmazione dell'Istituto Tecnico non può prescindere dalla trattazione dei limiti, pertanto abbiamo ritenuto di affrontarli introducendo un confronto tra le definizioni standard e non standard di continuità. Consapevoli dell'ambizione di tale passaggio se ne auspica la sperimentazione nelle classi migliori.

dia 19



dia 20

dia 19. La realizzazione di questa sperimentazione si è rivelata estremamente efficace per le seguenti ragioni, che dettagliano i punti della slide.

- Lavorare con gli infinitesimi ed assimilarne il concetto ha reso gli studenti più pronti alla comprensione dei limiti, delle forme indeterminate e della continuità.
  Lavorando in modo approfondito con gli infinitesimi, grazie ad opportuni e numerosi esercizi nell'ambito dello studio di funzioni, della continuità e del calcolo delle derivate, gli studenti acquisiscono un'idea molto intuitiva dei concetti di infinitesimo, di infinito e del loro comportamento all'interno delle operazioni. Per questo motivo l'introduzione del linguaggio dei limiti non viene accolta come qualcosa di nuovo (e complicato), ma come un modo diverso di esprimere ciò che loro hanno già compreso e sul quale hanno svolto molto lavoro. Ad esempio abbiamo spesso osservato che, nel calcolo dei limiti, molti studenti hanno difficoltà a distinguere fra "essere uguale a..." e "tendere a...", mentre usando gli infinitesimi hanno presente che se la parte standard di $f(x_0+dx)$ è uguale ad l, non significa che $f(x_0+dx)$ sia uguale ad l, ma che si avvicina infinitamente a quel valore.
- Recuperare il percorso storico del calcolo infinitesimale fa sì che le nozioni di derivata, tangente ad una curva e velocità istantanea rimangano strettamente connesse.
  Per definire la derivata alla maniera non standard si parte da due problemi fondamentali: la velocità istantanea e la tangente ad una curva. Questi problemi, accompagnandoci durante tutto il percorso, rimangono sempre connessi al concetto di derivata. Con il metodo tradizionale tali problemi vengono trattati come esempi di applicazione del calcolo della derivata, quindi marginalmente; con questo approccio invece diventano il fulcro di tutto il percorso.
- Le dimostrazioni delle regole di derivazione, che seguendo il metodo classico sono talvolta eccessivamente laboriose, col metodo non standard si sono dimostrate più semplici, permettendoci di rendere completa la trattazione delle derivate e valorizzando così il metodo deduttivo della matematica. Facciamo alcuni esempi:

  1. Dimostriamo la **regola della derivata del prodotto fra due funzioni.**

     Standard: Se $y = f(x) \cdot g(x)$ allora

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}.$$

Sottraiamo e sommiamo al numeratore $g(x+h)\cdot f(x)$ ed otteniamo

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x+h)\cdot f(x) + g(x+h)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot [f(x+h)-f(x)] + f(x)\cdot [g(x+h)-g(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$
$$= g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Non standard: Se $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, e tenendo conto che $f(x+dx) = f(x) + df(x)$, si ha:

$$h'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{h(x+dx)-h(x)}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+dx)\cdot g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx}\right)$$
$$= \mathrm{st}\left(\frac{[f(x)+df(x)]\cdot[g(x)+dg(x)] - f(x)\cdot g(x)}{dx}\right).$$

Moltiplicando e sommando i termini simili otteniamo

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(x)\cdot dg(x) + g(x)\cdot df(x) + df(x)\cdot dg(x)}{dx}\right) = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot dg(x).$$

2. Dimostriamo la **regola della derivata di una funzione composta.**

Standard: In alcuni libri di testo la regola non è riportata, in altri sì, ma è piuttosto complessa e spesso non viene proposta in classe.

Non standard: Se $y = f(g(x))$, poniamo $t = g(x)$, quindi $y = f(t)$ allora $\mathrm{st}(\frac{dt}{dx}) = g'(x)$ e $\mathrm{st}(\frac{dy}{dx}) = f'(t)$. Quindi:

$$y' = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot \mathrm{st}\left(\frac{dt}{dx}\right) = f'(t)\cdot g'(x).$$

Sostituendo t con $g(x)$, otteniamo $y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, che è la formula della derivata della funione composta.

3. Possiamo agevolmente dimostrare le derivate delle funzioni goniometriche senza utilizzare i limiti. Ad esempio dimostriamo che: $D\cos x = -\sin x$.

$$D\cos x = \mathrm{st}\left(\frac{\cos(x+dx) - \cos x}{dx}\right) =$$
$$= \mathrm{st}\left(\frac{\cos x\cdot\cos(dx) - \sin x\cdot \sin(dx) - \cos x}{dx}\right) =$$
$$= \mathrm{st}\left(\cos x \frac{[\cos(dx) - 1]}{dx} - \sin x \frac{\sin(dx)}{dx}\right) = -\sin x.$$

Infatti, tenendo conto che $\frac{\sin(dx)}{dx} = 1$, e che $\frac{cos(dx)-1}{dx}$ è una forma indeterminata che si risolve moltiplicando e dividendo per $\cos(dx) + 1$, si ottiene il risultato desiderato.

6.4 Conclusioni

Sulla base della sperimentazione già effettuata ci siamo rese conto che le abilità del calcolo dei limiti sono migliorate dopo la trattazione dell'analisi non standard. La lacuna che ancora rimane da colmare riguarda la definizione di limite: nell'analisi standard lo studente riduce la verifica di un limite alla risoluzione di una disequazione in valore assoluto e perde di vista il significato della verifica. Riteniamo pertanto necessario individuare, attraverso il percorso non standard, delle strategie che possano aiutare gli studenti ad acquisire in modo più consapevole la definizione di limite.

Bibliografia

[Bonavoglia P.] Paolo Bonavoglia, *Il calcolo infinitesimale – analisi per i licei alla maniera non standard*, Matematicamente.it, 2011

[Keisler J.H] Jerome H. Keisler, *Foundations of infinitesimal calculus*, On-line edition, 2011

[Di Nasso M.] Mauro Di Nasso, *Un'introduzione all'analisi con infinitesimi*, in Atti V Giornata Di Analisi non Standard - Verona 2015, Matematicamente.it, 2016

[De Luca et al.] De Luca G., Marini L., Meacci R., Vaioli L. *Le derivate introdotte con l'approccio di Leibniz*, in Atti CIDI Firenze, 2016

7

Analisi alla maniera NSA o alla maniera di Cauchy Weierstrass? Un confronto

Paolo Bonavoglia[1]

Si confrontano esperienze didattiche alla maniera non standard, con le equivalenti alla maniera di Cauchy e Weierstrass. Come esempi possibili: la definizione e lo studio di funzioni continue; alcune derivate fondamentali, come si ricavano o dimostrano usando la NSA; integrale definito e teorema di Torricelli-Barrow.

7.1 Introduzione

Quello che segue è un confronto basato sulla mia esperienza didattica dell'analisi; la prima esperienza risale agli anni Ottanta, più precisamente tra il 1982 e 1986 quando insegnavo analisi in un liceo sperimentale ex art. 2, dove nella stessa classe erano presenti tre gruppi di studenti, il primo di indirizzo classico, il secondo di indirizzo pedagogico, il terzo di indirizzo scientifico; due ore di matematica alla settimana in comune, tre ore extra solo con gli studenti dello scientifico. Allora insegnavo l'analisi classica con i limiti e usavo un libro molto tradizionale, il [Ferrauto, 1983]; e non sapevo neanche che ci fosse un'analisi non standard.
La seconda esperienza va dai primi anni Duemila al 2010, quando insegnavo in un classico con sperimentazione PNI, programmi molto flessibili. Anticipavo al quarto anno l'introduzione di derivate ed integrali ma limitatamente alle funzioni polinomiali; l'analisi veniva poi ripresa estendela a funzioni fratte, esponenziali e goniometriche all'ultimo anno.
Tra il 2010 e il 2017, anno del mio pensionamento, tornai a concentare l'analisi all'ultimo anno, ma tutto sommato credo sia stata più felice la scelta di anticipare al quarto anno.

[1]Paolo Bonavoglia, Mathesis Venezia c/o Convitto Nazionale Marco Foscarini Venezia - paolo.bonavoglia@mathesisvenezia.it

Di seguito esamino alcuni argomenti che mi pare mettano in luce i vantaggi dell'approccio NSA rispetto a quello basato sui limiti e sulla loro definizione alla maniera di Weierstrass.

7.2 La continuità

Nell'analisi di Cauchy-Weierstrass il concetto di continuità può essere introdotto in diversi modi, che si possono dividere in due famiglie; 1) dopo aver definito i limiti, una funzione si dice continua in un punto se il suo valore in quel punto coincide con il valore del limite per x che tende a quel punto; 2) prima di aver definito i limiti, la funzione si dice continua in un punto se soddisfa la seguente condizione[2]:
Data $f(x)$ di E in F, f è continua in x_0 quando

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in E \wedge |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

oppure usando gli intorni:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(E \cup I(x_0; \delta)) \subset I(f(x_0); \varepsilon)$$

Che si usino gli intervalli o gli intorni non si tratta certo di formule facilmente decifrabili.
Nell'analisi NSA una funzione $f(x)$ si dice continua in x_0 se ad un incremento infinitamente piccolo della x corrisponde un incremento infinitamente piccolo della $f(x)$. Tradotto in simboli, essendo x_0 reale ed ε infinitesimo, se è

$$st(f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)) = 0$$

allora $f(x)$ è continua a destra di x_0; altrimenti è discontinua a destra; se è

$$st(f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)) = 0$$

allora $f(x)$ è continua a sinistra di x_0, altrimenti è discontinua a sinistra.
Si noti che risulta molto semplice distinguere la continuità a destra o a sinistra.
Alternativamente si potrebbe scrivere, dati x reale ed y iperreale:

$$x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$$

Se poi si toglie la restrizione che x sia reale, in altre parole si ammette che x e y siano entrambi iperreali, si definisce in modo molto semplice il concetto di continuità uniforme, valida cioè per qualsiasi numero iperreale.
L'approccio NSA appare più vicino all'idea intuitiva di curva continua intesa come curva senza salti o che si può disegnare con la matita senza mai staccare la matita dalla carta.[3]

[2]Le definizioni qui riportate sono tratte da [Geymonat, 1968] dispense universitarie usate dal sottoscritto nel lontano anno accademico 1968-69

[3]Non condivido la critica dell'approccio intuitivo che viene periodicamente riproposta, usando quasi sempre come esempio la funzione iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$, che viene ad essere continua

7.2.1 Percorso didattico

Nel percorso didattico in classe, si fa uso come esempio e controesempio delle funzioni *floor* e *ceiling*, disponibili anche in Geogebra, e scritte spesso in modo espressivo: $y = \lfloor x \rfloor$ e $y = \lceil x \rceil$.
Queste due funzioni sono molto utili per sperimentare la definizione di sopra come una procedura per stabilire la continuità o meno della funzione per un dato valore, per esempio: verificare che $\lfloor x \rfloor$ è continua a destra e discontinua a sinistra per $x = 1$, oppure che è continua a destra e sinistra per $x = 1.5$.
In seguito, una volta introdottetrattate le derivate si possono introdurre le funzioni valore assoluto $y = |x|$ e segno come derivata della precedente; utile per chiarire i concetti di continuità e derivabilità.

7.3 Derivate

Nell'analisi Cauchy-Weierstrass le derivate fondamentali si ricavano calcolando il limite come da definizione standard di derivata.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Per ricavare una derivata fondamentale occorre poi risolvere disequazioni più o meno complicate e laboriose.
Nell'analisi NSA esiste una definizione equivalente basata sui numeri iperreali che fa uso della funzione parte standard (parte reale di un iperreale).

$$f'(x) = st\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

dove dy e dx sono gli incrementi infinitesimi delle due variabili; si può anche scrivere in forma più simile a quella classica:

$$f'(x) = st\left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right)$$

Fin qui la differenza può apparire minima, ma concettualmente la prima si basa sull'*infinito potenziale*, la seconda sull'*infinito attuale*. In quest'ultimo la notazione è più leggera, inoltre si possono seguire percorsi diversi per trovare una derivata.
Vediamo qualche esempio:

in tutto il suo dominio $R - \{0\}$ contro l'intuizione che la vuole discontinua con un salto infinito. Questo introdurrebbe *temibili misconcezioni* nella mente dello studente. Critica che mi pare comunque molto discutibile e superata nella definizione NSA dove si recupera uno stretto legame tra definizione intuitiva e definizione formale, cosa che mi pare piuttosto un pregio didatticamente. Si potrebbe anzi usare questo esempio per illustrare la differenza tra continuità in un punto reale e continuità uniforme, ma mi pare cosa oltre l'orizzonte dei programmi liceali.

7.3.1 La funzione quadratica e i polinomi

Il caso più semplice usato quasi sempre come punto di partenza è quello della funzione $y = x^2$ (parabola elementare).
Si potrebbe applicare la formula vista sopra, ma è altrettanto semplice procedere così; si considera la funzione per un valore qualsiasi x e per un qualsiasi valore infinitamente vicino $x + dx$:
$\begin{cases} y = x^2 \\ y + dy = (x + dx)^2 \end{cases}$
Sottraendo la prima uguaglianza dalla seconda e sviluppando il quadrato del binomio si ottiene: $dy = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2$
e quindi
$dy = 2xdx + dx^2$
e dividendo tutto per dx:
$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$
$2x + dx$ è un iperreale, la cui parte reale è $2x$ ed è quella che ci serve. Quindi è la derivata di x^2:

$$D_x x^2 = 2x$$

A questo punto si può dare come esercizio il calcolo della derivata di potenze successive come x^3, x^4 ... o anche inferiori come x e una costante, fino ad arrivare in modo molto naturale alla regola della derivata della potenza ennesima.
Sempre per esercizi si arriva facilmente e in tempi brevi a saper derivare un polinomio qualsiasi, che non è poi tanto poco.
Solo allora si può generalizzare arrivando alla formula generale vista sopra.

7.3.2 Il numero e e la funzione esponenziale

Uno dei percorsi più semplici per arrivare a definire il numero e è quello che parte dalle formule dell'interesse semplice e composto, una buona occasione per parlare un po' dell'ABC dell'economia.[4]
La formula dell'interesse composto è:

$$C = C_0 \times (1 + i)^n$$

dove C_0 è il capitale iniziale, C quello dopo n periodi, e i il tasso di interesse, la cedola maturata alla fine di ogni periodo.
È facile verificare che aumentando il numero di periodi e diminuento in proporzione la cedola, si ha un vantaggio per l'investitore; per esempio se si investono 1000 € al tasso del 100% ($i = 1$) con una sola cedola a fine periodo, il capitale raddoppia, ma se si opta per due cedole del 50%, il capitale alla fine cresce di un fattore $2,5$.
Cosa accade se si aumenta sempre più il numero di periodi, riducendo al tempo

[4]Non è poi una gran novità, anzi è la storia della matematica! Risulta infatti che fu Jacob Bernoulli a seguire questo percorso per approssimare per primo questo numero nel 1685.

stesso la cedola?
Usando un foglio di calcolo è facile approssimare questo valore con la sequenza $n = 0, 1, 2, 3, ...$ fino rendersi conto (ma non dimostrare!!!) che il vantaggio cresce strettamente, ma sempre più lentamente, tendendo a stabilizzarsi su un numero decimale, la cui scrittura approssimata è $2,7182818\ldots$ il numero e appunto.
Nell'analisi classica il numero e si definisce con il seguente limite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Nell'analisi NSA, dato il numero infinitamente grande fondamentale $\omega = \langle 1, 2, 3 ...\rangle$ e il numero infinitamente piccolo, suo reciproco $\varepsilon = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...\right\rangle = \frac{1}{\omega}$, che corrispondono bene alla procedura seguita con il foglio di calcolo, la definizione si può scrivere così:

$$e = st\,(1+\varepsilon)^{\omega}$$

Si può allora ricavare in modo relativamente semplice qualche proprietà notevole di e. Per esempio per calcolarne la potenza ad esponente infinitesimo prendiamo un infinitesimo qualsiasi δ che ponendo $k = \frac{\delta}{\varepsilon}$ si potrà scrivere $\delta = k\varepsilon$;

$$\eta^{\delta} = (1+\varepsilon)^{\omega\delta} = (1+\varepsilon)^{k}$$

d'altra parte, per la potenza del binomio, lasciando in sospeso gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\eta^{\delta} = (1+\varepsilon)^{k} = 1 + k\varepsilon + ...$$

e quindi si ottiene questa proprietà notevole:

$$e^{\delta} \cong 1 + \delta$$

dove il segno $\cong$ sta per indistinguibile (o asintotico), che in questo caso coincide con $=$ a meno di infinitesimi di ordine superiore.
Nell'analisi classica si scriverebbe:

$$\lim_{x\to 0} e^{x} = 1$$

notazione che è più ingombrante e dice meno di quella NSA.
In definitiva la notazione NSA usando infiniti ed infinitesimi attuali invece che potenziali, è più leggera e più leggibile di quella classica che usa infiniti potenziali alias limiti.
L'importanza della notazione in matematica non è cosa trascurabile. Anche la differenza tra numeri arabi e numeri romani in fondo è una differenza di notazione. . .

7.3.3 La derivata della funzione composta

La regola della derivazione delle funzioni composte (*chain rule* in inglese) è una delle più potenti del calcolo; la sua dimostrazione alla maniera di Cauchy-Weierstrass è piuttosto complessa e difficile. Nel calcolo alla maniera di Leibniz era semplicissimo giustificarla come una banale semplificazione in croce (dove $y = f(g(x))$ e si pone $t = g(x)$):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{dt}} \times \frac{\cancel{dt}}{dx}$$

che può essere trasformata in una analoga NSA, sotto l'ipotesi che tutte le derivate in gioco esistano:

$$st\left(\frac{dy}{dx}\right) = st\left(\frac{dy}{dt}\right) \times st\left(\frac{dt}{dx}\right) = st\left(\frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}\right)$$

Questa giustificazione appare di una semplicità disarmante a confronto con le dimostrazioni piuttosto lunghe e di difficile lettura fornite dai normali manuali di analisi per i licei, e può essere messa tra i vantaggi di NSA. Pure viene considerata anche da alcuni autori di testi NSA non sufficientemente rigorosa per chiamarsi dimostrazione, non distinguendo t variabile indipendente da una parte da t variabile dipendente dall'altra e non considerando il caso che sia $dt = 0$ nel qual caso la semplificazione non è possibile.
Su alcuni testi NSA, p.es. [Henle, 1979] viene proposta con la sola aggiunta del caso in cui dt vale zero (funzione costante); altri come [Goldblatt, 1991] presentano una dimostrazione più complessa, ma che ha comunque questa semplificazione un po' mimetizzata alla fine.
Per un liceo credo che la giustificazione di sopra sia più che sufficiente, magari ricordando il caso $dt = 0$; caso che può emergere a sorpresa in qualche esempio, come il seguente realmente accaduto in un compito in classe.
Era stata proposta la domanda *insidiosa*: *Calcolare la derivata della funzione* $y = e^2$. Dovrebbe essere ovvio che la derivata di una costante è nulla, ma come ben sanno gli insegnanti per molti studenti cose del genere non sono affatto ovvie.
Così pochi studenti notarono che e^2 è un numero, una costante, molti altri fornirono risposte prevedibilmente errate come $2e$; uno invece propose questa soluzione, scomponendo la funzione in due:

$$\begin{cases} y = e^t \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y' = e^t \\ t' = 0 \end{cases}$$

e visto che la derivata è il prodotto delle due il risultato è: $y' = e^t \times 0 = 0$ che è corretto.

Come valutare una tale soluzione? Lo studente all'inizio dimentica che la derivata di una costante è zero, ma poi se lo ricorda quando scrive $t' = 0$. Quindi il problema sembrerebbe non tanto di non aver capito il significato di derivata o la regola, ma di non aver riconosciuto che e^2 è una costante, proprio come 2.

7.4 Integrale definito

Quando si insegna analisi alla maniera di Cauchy-Weierstrass, ci si trova a dover fare acrobazie linguistiche e mentali per giustificare la formula dell'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Le domande che sorgono spontanee a chi studia gli integrali in analisi classica sono: "Da dove viene quel dx nella formula? Che significato ha? A che serve".
Le risposte più frequenti sono: "Non ha alcun significato preso da solo", "Non serve a nulla, si potrebbe abolire".
In effetti la definizione di integrale usando i limiti lascia la cosa alquanto misteriosa. Il simbolo qui sopra va preso come un tutt'uno definito con simboli diversi.
In analisi NSA questa simbologia appare del tutto naturale. Ancor più se si parte dal calcolo numerico di un'area con la formula dei trapezi.

7.4.1 Percorso didattico

Si può partire dalla formula dei trapezi come formula per il calcolo approssimato di un'area[5] ; la formula somma le aree di N trapezi di uguale base h e di altezza $f(x_i)$ ed è tanto più precisa tanto più grande è N.
Un buon esempio di partenza è quello di calcolare l'area del segmento parabolico, funzione $1 - x^2$ tra $x = -1$ e $x = 1$. Usando la formula dei trapezi per $2, 4, 8$ intervalli si trovano valori del'area pari a $1; 1,25; 1,3125$. Usando poi un software apposito si conferma la prima impressione che l'area tenda a $1,3333 = \frac{4}{3}$. [6]
Se si ammette l'idea dell'infinito attuale è intuitivamente semplice passare all'idea leibniziana della somma *integrale* di infiniti trapezi infinitamente piccoli, che prende il nome di integrale definito.
Certo qui non si dà una definizione rigorosa di somma infinita, e tanto meno una regola per calcolare una somma infinita. In effetti basta il teorema fondamentale dell'analisi per trovare lo strumento che permette di calcolare un integrale e cioé l'antiderivata (integrale indefinito).

[5] Un approccio simile è ovviamente possibile anche nell'analisi classica, vedi p.es. [Kline, 1966] ma la cosa è più macchinosa dovendo continuamente far ricorso alla notazione dei limiti.

[6] Quando avanzava tempo scolastico, sempre più raramente negli ultimi anni, introducevo anche la formula di Simpson, molto più rapida.

Dalla formula dei trapezi:

$$A = \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) ... + \frac{1}{2} f(x_n) + \right) \Delta x$$

che per Δx piccolo diventa

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

e da questa il passo è ormai breve, basta passare da Δx piccolo a dx infinitamente piccolo per arrivare alla definizione di integrale definito:

$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

Bibliografia

[Kline, 1966] M. Kline 1966. *Calculus, an Intuitive and Physical Approach*. Dover ISBN: 978-0-486-40453-0

[Geymonat, 1968] G. Geymonat 1968. *Note di matematica*. Politecnico di Torino

[Henle, 1979] J. M. Henle and E. M. Kleinberg. 1979. *Infinitesimal Calculus*. Dover. ISBN: 3-540-24502-2

[Ferrauto, 1983] R. Ferrauto 1983. *Lezioni di Analisi Matematica*. Società editrice Dante Alighieri

[Goldblatt, 1991] R. Goldblatt 1991. *Lectures on the Hyperreals*. Springer ISBN: 0-387.98464-X

[Mactutor, 2018] Autori vari 2018. *MacTutor History of Mathematics*. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html/

[Bonavoglia, 2018] P. Bonavoglia 2018. *Calcolo infinitesimale NSA*. http://nsa.mateweb.eu/

8

Un percorso di inserimento dell'Analisi Non Standard nel curriculum liceale

Pietro Cacciatore [1]

Si presenterà un percorso nel quale la NSA è inserita in modo organico nel curricolo liceale, almeno a partire dal terzo anno. Tutto quello che si dirà, anche se potrebbe sembrare rivolto ad un pubblico di specialisti, può essere, come realmente è stato fatto, raccontato agli studenti. In modo schematico, ecco gli argomenti introdotti nei diversi anni: terzo anno: l'Infinito in matematica quarto anno: elementi di Geometrie non euclidee quinto anno: NSA. Il primo argomento consente di approfondire il concetto di infinito in atto e quindi, quando servirà, anche quello di infinitesimo in atto; il secondo permette di parlare di Modelli di una teoria, concetto propedeutico ai modelli non standard. Naturalmente i due argomenti trattati nei due anni precedenti il quinto hanno valore in sé, anche se in questo contesto appaiono funzionali all'introduzione della NSA. Limitandoci, tuttavia, a quest'ultimo aspetto, possiamo affermare che essi consentono di rendere familiari per gli studenti concetti quali infinito in atto, sintassi e semantica, sistema assiomatico, eccetera, contribuendo alla formazione di un lessico adatto non soltanto all'ora di matematica ma anche ad altre discipline come quelle linguistiche e filosofiche. Si concluderà ricordando alcune riflessioni di carattere storico-filosofico presenti nell'Introduzione e nel Capitolo 10 del testo di Robinson Non standard Analysis, 1965, interessanti per capire il suo interesse per tali tematiche già da quel periodo, e che compaiono nel percorso proposto; riflessioni che potrebbero essere prese come punto di partenza per una discussione con i colleghi.

La conoscenza è una rete che cresce e si infittisce con lo studio e le esperienze. Spetta ad ogni insegnante ampliare le proprie conoscenze e aumentare il numero dei collegamenti fra queste, e dare agli studenti strumenti per fare lo stesso. L'i-

[1] Liceo classico Tito Livio - Padova

deale sarebbe che ogni parte del curricolo fosse collegata con ogni altra, anche se, ovviamente, limiti personali e oggettivi costringono a ridimensionare questa aspettativa. Tuttavia, anche con questi vincoli, ogni sforzo e ogni energia dovrebbero essere rivolti a fare acquistare agli studenti questa visione della conoscenza.
Anche per l'insegnamento della NSA è possibile adottare questo schema inserendola in un contesto di conoscenze storicamente e logicamente collegate fra loro che possano aiutare, non a superare le difficoltà tecniche del Calcolo, non è questo lo scopo, ma a fornire motivazioni per l'apprendimento e strumenti per lo studio. Alla luce di queste considerazioni, in questo intervento, non parlerò tanto di NSA quanto del modo di preparare il terreno per un suo inserimento nel curricolo liceale. In particolare mi soffermerò su due argomenti, *Infinito in matematica* e *Geometrie non euclidee*, che sono, a mio parere, propedeutici, in quest'ottica, ad un apprendimento consapevole della NSA. Sebbene i due argomenti appaiano qui strumentali alla NSA, essi, naturalmente, contribuiscono autonomamente, e in modo sostanziale, alla formazione di una cultura matematica negli studenti. Nello specifico essi serviranno alla costruzione di un lessico adatto allo studio della NSA: si tratta di parole come *Infinito in atto, Modelli di una teoria, Teorie coerenti e contraddittorie*.
Per spiegare meglio questo passaggio partirei da una citazione dal libro di Robinson dalla quale emerge il suo debito verso la logica matematica ed in particolare verso un importante risultato ottenuto da Skolem nel 1934.

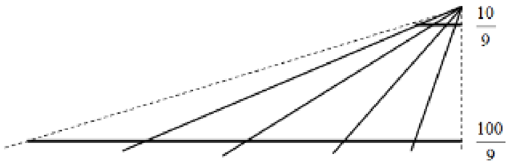
> ... sul cadere degli anni '60 mi accadde che i concetti e i metodi della Logica Matematica contemporanea erano in grado di fornire una struttura adeguata per lo sviluppo del Calcolo per mezzo di numeri infinitamente piccoli e infinitamente grandi. Il calcolo che ne risultò fu da me chiamato NSA poiché esso coinvolgeva, e in parte fu ispirato, dal, così detto, Modello Non-standard dell'Aritmetica la cui esistenza fu per la prima volta indicata da T. Skolem. [Ro, Introduzione]

Risultato che oggi possiamo far discendere direttamente dalla *teoria dei modelli* e che consiste nella poco gradita sorpresa dell'esistenza, per una teoria assiomatica dell'aritmetica, di *modelli non standard* che prevedono numeri infinitamente grandi oltre ai consueti numeri finiti.
In modo analogo direi che per parlare con una certa consapevolezza di infinitesimi sia necessario far riflettere gli studenti sulla distinzione fra infinito in *potenza* e in *atto*, onde familiarizzarli col concetto di *infinitesimo in atto*.
I due argomenti *Infinito in matematica* e *Geometrie non euclidee* possono essere affrontati al terzo e quarto anno rispettivamente, in unità di una ventina di ore ciascuna. La NSA è trattata in modo rigoroso (teoria degli ipereali, parte standard, ecc.) al quinto anno, ma derivate e integrali sono introdotti informalmente sin dal terzo anno, come molte volte si è detto in questi convegni sottolineando uno dei vantaggi didattici della NSA rispetto alla sistemazione del Calcolo di Weierstrass.
In una schematica linea del tempo possiamo collocare il contributo di alcuni personaggi al problema dell'infinito nella convinzione che la storia della conoscenza

sia una storia di idee. Aristotele è costretto dalle riflessioni (provocazioni?) di Zenone a bandire l'infinito in atto dal discorso scientifico: l'infinito può essere solo in potenza pena l'impossibilità del movimento. Un salto di duemila anni ci porta a Galileo che si imbatte in una originale riflessione: i numeri (naturali positivi) sono tanti quanti i loro quadrati. Per la verità egli si ritrae davanti a questo risultato poiché in contraddizione con uno degli assiomi (logici) di Euclide (la Nozione Comune: il tutto è maggiore della parte). Ancora un salto nel tempo ed ecco il nostro eroe: Cantor, in cui rinasce la stessa idea di Galileo, ma dal punto di vista della storia della conoscenza è solo una curiosità. Egli ha il merito esclusivo di coltivare tenacemente questa idea ed ha il coraggio di portarla alle estreme conseguenze.

Il paradosso di Achille e la Tartaruga resterà, nel percorso, un problema aperto,

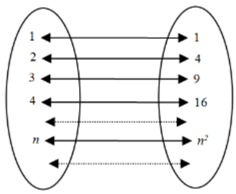
La corrispondenza biunivoca fra i due percorsi, quello della Tartaruga, in alto, e quello di Achille, in basso. La velocità di Achille è dieci volte quella della Tartaruga.



solo nell'ultima lezione si mostrerà il modo in cui si può risolvere alla maniera di Cantor, e cioè mettendo in corrispondenza biunivoca, in un semplice diagramma, i percorsi della Tartaruga e di Achille rispettivamente. Naturalmente ci sono altri modi per farlo, per esempio col concetto di limite.

Il richiamo a Galileo è utile, nel contesto esaminato, per poter parlare di corrispondenza biunivoca in un ambito molto più ricco del finito, e per la verità non così banale. Per il senso comune l'Infinito è solo in potenza, questa convinzione è alimentata da più parti: dalla letteratura, dalla religione, e anche dal professore di Filosofia. E questa è la convinzione degli studenti. Per scardinare questa

La corrispondenza biunivoca di Galileo.

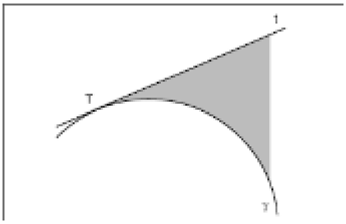


convinzione è necessario procedere con circospezione. Dapprima si mostrerà agli studenti che gli insiemi numerici ad essi noti sono tutti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei Numeri naturali, $\mathbb{N}$, e dunque hanno tutti la stessa cardinalità. Quando essi si saranno in qualche modo convinti che non si riesce ad andare oltre la cardinalità di $\mathbb{N}$ [2] ecco che si esibirà un risultato imprevisto: la cardinalità di

[2]Le prove indiziarie sono molte: non solo l'insieme degli interi, $\mathbb{Z}$, è equipotente ad $\mathbb{N}$, ma lo

$\mathbb{R}$, l'insieme dei Reali, è maggiore di quella di $\mathbb{N}$. Per esperienza personale posso affermare che è con l'argomento diagonale che si ha negli studenti la vera svolta cognitiva: se c'è un infinito maggiore di N allora posso pensare finalmente $\mathbb{N}$ stesso come un *tutto unico*, cioè lo posso pensare in $atto$. E qui scatta qualcosa di nuovo e definitivo, la consapevolezza di una differenza qualitativa tra infinito in potenza e infinito in atto: l'infinito in potenza non si può superare, tranne, naturalmente per l'assoluto, ma questa è un'altra faccenda. Ma se esiste l'infinito in atto è pensa-

L'angolo mistilineo formato dalla tangente alla linea gamma nel punto T e dalla stessa gamma è detto angolo di contingenza. Euclide dimostra (Corollario alla Proposizione 16 del Libro III) che l'angolo di contingenza è più piccolo di un qualsiasi angolo rettilineo dato. Matematici come Proclo, Wallis e Galileo consideravano nullo l'angolo di contingenza. Come utile esercizio provate ad immaginare qual era l'opinione di Newton e Leibniz.



bile l' *infinitesimo in atto*, cosa che verrà ricordata al quinto anno. Naturalmente per gli studenti, ma anche per noi, sono anche necessari esempi, diciamo concreti, l'angolo di contingenza funziona bene per la bisogna.
Anche per il percorso sulle Geometria non euclidee è possibile collocare in una schematica linea del tempo personaggi e idee come virtuali pietre miliari. Aristotele ed Euclide, già noti dal biennio, il primo inventore del metodo assiomatico, o almeno colui che ne dà una sistemazione formale, *Analitici Secondi*, e il secondo che pone in essere tale metodo, *Elementi* e *Ottica*, con tale successo da oscurare ogni predecessore. Proclo e Posidonio con i loro tentativi di porre mano allo 'scandalo' del Quinto Postulato. Saccheri che si prefigge, e in parte realizza, lo scopo di dimostrare che le due possibili teorie costruite con la negazione del Quinto Postulato sono contraddittorie. Bolyai e Lobacevskij che la teoria la costruiscono davvero, dando forma e sostanza ad un'idea audace e rivoluzionaria.
Aristotele impone determinate caratteristiche agli assiomi (*Analitici Secondi*), che possiamo sintetizzare, per le necessità del percorso, con la richiesta che gli assiomi devono essere immediati, semplici, evidenti. Senonché proprio il quinto postulato, nel seguito lo indicherò con E5, è lontano sia dalla semplicità, ha addirittura la forma di un teorema, che dall'evidenza. Tanto è vero che i dubbi su E5 cominciarono molto presto. Nel percorso didattico tali dubbi sono esemplificati dalle proposte di Posidonio e Proclo, una nuova definizione di rette parallele il primo, e l'ipotesi di una nuova formulazione di E5 il secondo. Si può dimostrare che entrambe le proposte sono logicamente equivalenti ad E5 stesso. Dal punto di vista didattico le dimostrazioni di queste equivalenze sono un modo per ritornare, in un contesto più ricco, alle conoscenze del primo anno; è piacevole vedere studenti di una certa età

sono anche l'insieme dei razionali, $\mathbb{Q}$, e addirittura l'insieme dei punti del quadrato! Anche i vari 'Alberghi di Hilbert', che riscuotono grande successo, aiutano alla bisogna.

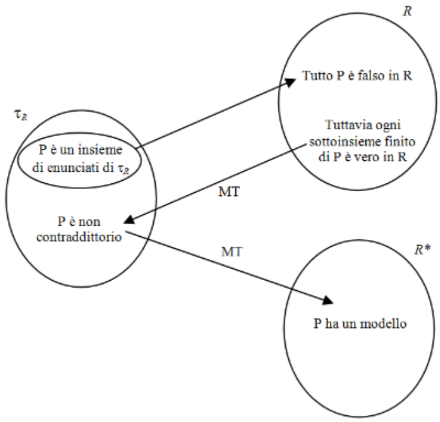
alle prese con tecniche dimostrative praticate al biennio. Devo segnalare, per non dare l'impressione nel seguito dell'intervento di operare salti logici, che Proclo e Poseidonio sono presi come spunto per trattare problemi di *indipendenza di assiomi*, che però qui, per motivi di tempo, non posso nemmeno sfiorare. Per presentare il contributo di Saccheri sono partito dal famoso quadrilatero: dalla base AB si innalzano le perpendicolari uguali AC, DB e si unisce C con D. Ora, senza lasciarsi influenzare dallo sfondo euclideo, Saccheri nota che per gli angoli in C e in D sono possibili tre casi: sono retti (ipotesi dell'angolo retto corrispondente alla geometria euclidea); sono acuti (ipotesi dell'angolo acuto corrispondente alla geometria iperbolica); sono ottusi (ipotesi dell'angolo ottuso corrispondente alla geometria sferica). Lo scopo dichiarato di Saccheri è dimostrare la contraddittorietà delle due ultime ipotesi onde far emergere l'ipotesi dell'angolo retta come l'unica 'vera'. Egli dimostra effettivamente che l'ipotesi dell'angolo ottuso è contraddittoria, ma cade in errore sull'ipotesi dell'angolo acuto. A prescindere da questo incidente, un emblematico caso di metafisica influente, il risultato ottenuto sull'angolo ottuso consente, a questo punto del percorso, di affrontare problemi di non contraddittorietà per le teorie, in sostanza di cercare i possibili modi per dimostrare quando una teoria matematica si possa dire non contraddittoria. La *Teoria dei modelli* porge la soluzione con il metateorema (Teorema del modello): Una teoria T è non contraddittoria se e solo se ha un modello M. [3]
Gli studenti conoscono già, dallo studio di problemi di indipendenza, molti modelli. Per dimostrare l'indipendenza degli assiomi di appartenenza e di ordine si utilizzano modelli finiti. Il Modello di Klein dimostra l'indipendenza di E5. Il programma NonEuclid è un ambiente prezioso per lavorare con la geometria iperbolica. Il modello $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ovvero il piano cartesiano, dimostra la non contraddittorietà della Geometria euclidea. [4]
Prima di spiegare perché il 'gioco' dei modelli ha un'importanza decisiva nella formazione degli studenti è doverosa una avvertenza. Bisogna prestare molta attenzione ai modelli fondati sulla Geometria euclidea, come il Modello di Klein o il Modello di Poincaré usato dal programma NonEuclid, poiché possono generare qualche confusione, e non è difficile capirlo, dopo tutto si tratta di lavorare con oggetti euclidei per determinare proprietà non euclidee. Tornando al ruolo dei modelli nell'economia del percorso si può affermare che gli studenti capiscono in modo consapevole la differenza fra una teoria e i suoi possibili modelli già con i modelli finiti, ma la coscienza di questa distinzione arriva con il modello RxR. È solo quando si tocca con mano come una equazione si comporti effettivamente come una retta, o una coppia ordinata di numeri agisca come fosse proprio un punto, che scatta qualcosa negli studenti, solo da questo momento cominceranno ad usare con familiarità parole come *significante, significato, segno, referente*. E allora sa-

[3] Dove M è una realizzazione concreta di T in cui: ad ogni ente di T corrisponde un oggetto di M; ogni enunciato dimostrabile in T è vero in M.

[4] Relativamente alla teoria dei numeri reali.

rà anche possibile giocare con questi concetti discutendo ad esempio sull'opera di Magritte, *Il tradimento delle immagini*, dove si mostra che una osservazione poco attenta confonde l'immagine di una pipa con la pipa stessa. O allargare il discorso sull'arbitrarietà del linguaggio interpretando in questo senso, forse con qualche forzatura, l'opera *La chiave dei sogni*. O infine discutere sull'immagine di un atomo di elio, tratta dal libro di Chimica, e far notare che ad un esame attento non si tratta 'dell'immagine di un atomo di elio', ma dell'immagine che la meccanica quantistica dà di un atomo di elio.
Al quinto anno si mettono le cose a posto e si introduce la NSA in modo assiomatico. Ma siamo pronti anche a fare qualcosa di più vicino alla sensibilità degli studenti, introdurre in modo genetico gli infinitesimi provandone con un teorema l'esistenza. La dimostrazione, che utilizza il metateorema citato più sopra, è ora accessibile agli studenti.
Nella figura si distinguono, anche graficamente, i due ambiti: quello sintattico, linguistico, della teoria a sinistra e quello semantico dei modelli a destra.

Consideriamo il seguente insieme P di enunciati:
c è un numero maggiore di zero e minore di $\frac{1}{2}$
c è un numero maggiore di zero e minore di $\frac{1}{3}$
...
c è un numero maggiore di zero e minore di $\frac{1}{n}$
...
P è un insieme di enunciati della teoria dei numeri reali e $\mathbb{R}$ è un modello di questa teoria. Ovviamente tutto P non può essere vero in $\mathbb{R}$ – poiché contraddirebbe l'assioma di Archimede – tuttavia ogni sottoinsieme finito di P è vero in $\mathbb{R}$ e dunque ognuno di questi sottoinsiemi è non contraddittorio (MT5), ma allora l'intera collezione è non contraddittoria (questo è un punto centrale: infatti una qualunque dimostrazione che utilizzi questi enunciati deve, come ogni altra dimostrazione, essere formata da un numero finito di premesse, così se P è fatto da sottoinsiemi non contraddittori, non potrà esserci una dimostrazione che utilizzi come premesse un sottoinsieme di P e conduca ad una contraddizione), così per MT5 l'insieme P deve avere un modello, $\mathbb{R}^*$, in cui tutti gli enunciati sono simultaneamente veri. Evidentemente $\mathbb{R}^*$ dovrà essere diverso da $\mathbb{R}$.



La questione dell'esistenza degli infinitesimi sta molto a cuore a Robinson, tanto da mettere in primo piano, egli che è un logico, la genesi dei concetti e lasciare quasi come un inciso il metodo assiomatico[Ro, p.282]:

> ...ci sembra a tutt'oggi che i numeri infinitamente grandi e piccoli della NSA siano reali ne più e ne meno che, per esempio, i numeri irrazionali. Ciò è ovvio se introduciamo questi numeri assiomaticamente; mentre in un approccio genetico entrambi sono introdotti da certi processi infinitari.

Bibliografia

[AP] Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Mondadori, 1978.
(vedi [CB])

[CB] Conti - Baroncini, *Geometria razionale*, Vol. 1, Ghisetti e Corvi, 1981.
Questo libro è straordinario: gli autori sono riusciti a fare una trasposizione didattica dei Fondamenti della geometria di Hilbert.
Per l'indipendenza dell'assioma delle parallele ho usato il modello di Klein, il manuale di Conti, Baroncini ne contiene una semplice esposizione addirittura per studenti del biennio.

[Cr] Crossley et al., *Che cos'è la logica matematica?*, Boringhieri, 1976.
Ottimo libro di divulgazione. Può risultare utile per un approfondimento personale sulla teoria dei modelli.

[DH] Devis - Hersh, *L'analisi non-standard*, in Le scienze quaderni no. 60, 1991.
Vi si trova una dimostrazione informale dell'esistenza degli infinitesimi.

[Eu] Euclide, *Ottica*, Di Renzo Editore, 1996, a cura di Incardona.
Utilizzo l'Ottica di Euclide come rinforzo del metodo assiomatico e anche per mostrare agli studenti il modo semplice e straordinario in cui Euclide riesce con pochi assiomi a dedurre teoremi che parlano di quello che vediamo, quali: le cose vicine appaiono più grandi delle lontane; guardando un corridoio si vedono le pareti convergere ma anche il soffitto 'scendere' e il pavimento 'abbassarsi', eccetera.

[Hi] Hilbert, *Fondamenti della geometria*, Franco Angeli, 2009.
Il fondamentale volume di Hilbert contiene la dimostrazione della non contraddittorietà della geometria euclidea relativamente alla teoria dei numeri reali.

[Ke] Keisler, *Elementi di analisi matematica*, Piccin, 1982.
Ho seguito questo libro per l'introduzione assiomatica della NSA.

[LR] Lombardo Radice, *L'infinito*, Editori Riuniti, 1981.
I due libri, di Agazzi - Palladino e di Lombardo Radice, mi sono serviti come canovaccio per la costruzione delle dispense sulle geometrie non euclidee e l'infinito in matematica.

[NE] Il programma NonEuclid si trova in
`https://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/`

[Ro] Robinson, *Non standard analysis*, Princeton University Press, 1965.

[Sa] Sawyer, *Che cos'è il calcolo infinitesimale*, Zanichelli, 1986.
Il libro permette l'introduzione informale delle derivate e degli integrali sin dalla classe terza.

[Sm] Smullyan, *Satana, Cantor e l'infinito*, Bompiani, 1994.
Vi si trovano gli esercizi sui diversi Hotel di Hilbert.

[St] Stabler, *Il pensiero matematico*, Boringhieri, 1970.
Per i modelli di geometria finita che ho utilizzato.

[Tr] Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Borighieri, 1991.
Libro bello e utile per un approfondimento personale.

9

Gli orologi di Fourier

Roberto Zanasi[1]

Una presentazione geometrica della serie di Fourier, fatta mediante vettori rotanti e in chiave non standard, porta a una comprensione della formula per il calcolo dei coefficienti della serie stessa.

9.1 Introduzione

Insegno in un istituto tecnico industriale, nel triennio di elettronica: già dall'inizio della terza gli studenti sentono parlare, durante le ore di materie di indirizzo, di vettori rotanti, di correnti alternate, di dominio delle frequenze, di filtri, di armoniche. Ho cercato quindi di preparare una lezione propedeutica a questi argomenti, in modo da chiarire le basi matematiche che reggono le serie di Fourier.

L'introduzione parte col richiamare il modello tolemaico del sistema solare: quando si pensava che la terra fosse al centro dell'universo e che tutti i corpi celesti ruotassero intorno a essa su orbite circolari, si giustificava il fatto che alcuni pianeti manifestassero un moto retrogrado sulla volta celeste assumendo che il loro moto fosse sì circolare, ma col centro in movimento lungo una seconda circonferenza avente, nel centro, la terra.

Il modello a epicicli (la circonferenza, o le circonferenze, col centro mobile) e deferente (la circonferenza col centro fisso) venne ideato da Apollonio per descrivere il moto apparente dei pianeti sulla volta celeste. Tale modello può essere presentato mediante una animazione realizzata con GeoGebra, in modo da mostrare agli studenti in maniera chiara la costruzione geometrica.

Non è detto che l'epiciclo sia unico: per descrivere moti più complicati (i satelliti di un pianeta esterno, per esempio) può essere necessario utilizzare una gerarchia di epicicli, ognuno dei quali avente il centro su un epiciclo di ordine inferiore. Un

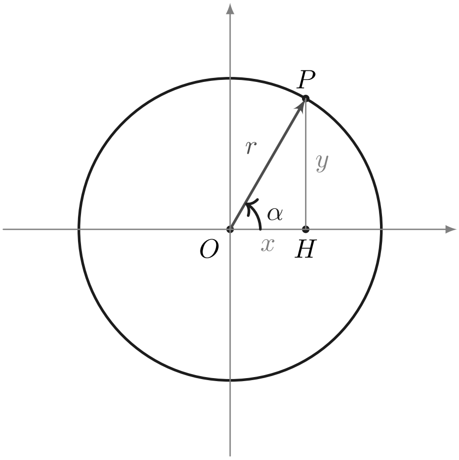
[1]ITIS E. Fermi, Modena

video su YouTube, presente all'indirizzo `https://youtu.be/D-ogjQP_TBs`, rende bene l'idea di quanto si possano complicare le cose.

Il video, pur utilizzando correttamente la matematica, è scherzoso: il cosiddetto pianeta, che si appoggia a una gerarchia enorme di epicicli, in realtà traccia un'orbita che ha la forma di Homer Simpson: il video è divertente e senza dubbio incuriosisce gli studenti. A questo punto la domanda diventa: "Ma come hanno fatto a farlo?". E la risposta è: "Con le serie di Fourier".

9.2 Numeri complessi e lancette

Lo strumento migliore per descrivere il sistema di vettori rotanti del modello a epicicli e deferente è quello dei numeri complessi.

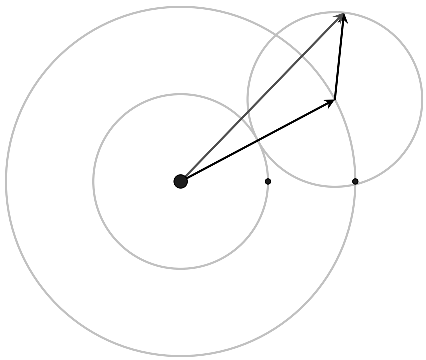


- P è un numero complesso
- $P = x + iy$
- $P = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
- $P = re^{i\alpha}$

Un numero complesso può essere visto come punto P nel piano di Gauss che, in forma cartesiana, si può esprimere come $x + iy$, dove x è la parte reale e y quella immaginaria. Si può anche usare la forma trigonometrica $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, dove r è il modulo del numero complesso, uguale a $\sqrt{x^2 + y^2}$ (cioè la lunghezza del segmento OP), mentre α è l'angolo orientato che il vettore OP forma con il semiasse positivo delle ascisse. La forma più naturale per poter poi parlare di serie di Fourier è quella esponenziale, in cui il numero complesso viene scritto come $re^{i\alpha}$, e in cui r e α sono gli stessi valori che compaiono nella forma trigonometrica. Anche se gli studenti non conoscono ancora le formule di Eulero che legano la forma cartesiana a quella esponenziale, si può comunque utilizzare la seconda giustificandola, almeno temporaneamente, come puramente simbolica: si usa questa forma perché le proprietà di cui gode la moltiplicazione tra due numeri complessi sono, almeno formalmente, analoghe alle proprietà delle potenze. Il prodotto di due numeri complessi, infatti, è quel numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti, e — in perfetta analogia — il prodotto tra due numeri come $re^{i\alpha}$ e $se^{i\beta}$ è $rse^{i(\alpha+\beta)}$.

La similitudine che si può utilizzare con gli studenti per presentare l'argomento è quella dell'orologio: i vettori rotanti che generano il volto di Homer Simpson sono come le lancette di un orologio, che possono girare in senso orario o anche antiorario a velocità diverse, e che possono avere lunghezze diverse.

Dato il numero $P = re^{i\alpha}$, cambiare il valore di r corrisponde a cambiare la lunghezza della lancetta, mentre cambiare quello di α corrisponde a farla ruotare. C'è poi una differenza rispetto a quello che si fa con un normale orologio: in questo caso le lancette si devono *sommare*, così come si sommano i vettori. Dato poi che la somma di due vettori è commutativa (dal punto di vista geometrico è la diagonale del parallelogramma che ha i due vettori per lati), non importa quale vettore viene usato per generare il deferente e quale per l'epiciclo.



Quindi il modello di orologio che genera figure come quella di Homer Simpson è quello di un orologio con un grande numero (eventualmente infinito) di lancette di lunghezze diverse che ruotano a velocità diverse e che vengono tutte sommate, così come si sommano i vettori, fino ad arrivare al risultato finale. In formule, questo:

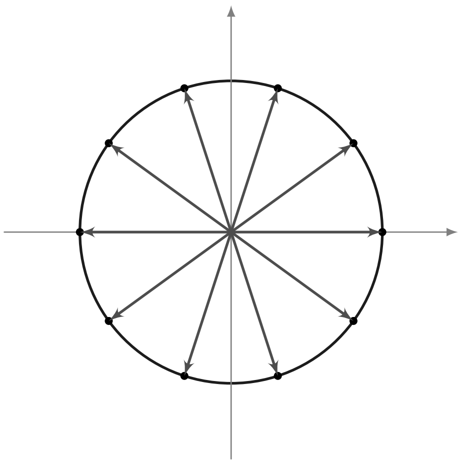
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Ogni coefficiente c_n, che è un numero complesso, descrive la lunghezza e la fase del vettore rotante (con *fase* si intende l'angolo di partenza di ogni vettore); il numero n è poi associato alla velocità di rotazione del vettore: e^{ix} corrisponde a un giro completo per x che varia da $-\pi$ a π, e^{2ix} corrisponde a un vettore che gira a velocità doppia, e^{-ix} a un vettore che gira in senso opposto, eccetera.

Eseguire un'analisi di Fourier significa quindi saper rispondere alla domanda: "come si fa per calcolare c_n?".

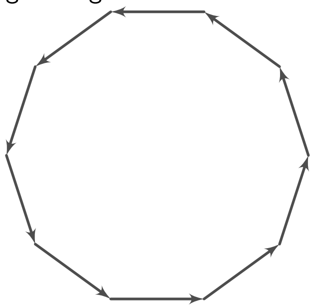
L'idea che sta sotto alla formula che permette di calcolare i coefficienti della serie di Fourier è questa: per capire come è fatta una lancetta che ruota, è sufficiente fare ruotare l'intero orologio in *verso opposto*. In questo modo si ferma una lancetta, ma le altre? Come annullare il contributo delle altre lancette rotanti?

Esaminiamone una: se immaginiamo di scattare tante fotografie in vari istanti di tempo diversi, a intervalli regolari, potremmo ottenere una figura di questo tipo:



Se siamo fortunati, otteniamo una figura del genere.

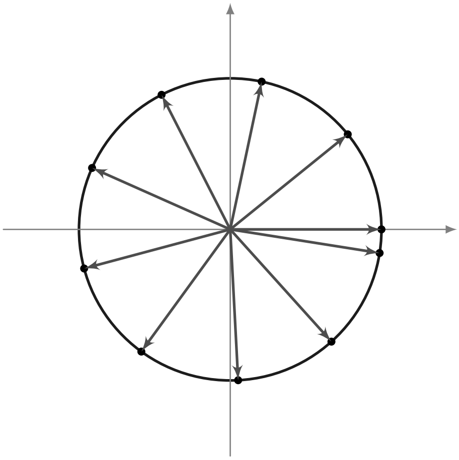
Se i tempi sono stati scelti opportunamente, le varie posizioni in cui viene fotografata la lancetta corrispondono a segmenti che congiungono i vertici di un poligono regolare con il centro del poligono stesso.



La somma è nulla.

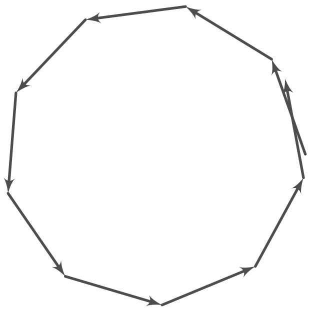
Se tutti questi vettori vengono sommati tra loro, disponendoli consecutivamente facendo coincidere la punta di ognuno di essi con la coda del successivo, si ottiene un poligono chiuso: questo significa che la somma di tutti i vettori è nulla. Questa considerazione suggerisce quindi un metodo per eliminare il contributo fornito dalle lancette dell'orologio che ancora ruotano.

Se, però, l'intervallo di tempo che viene scelto per scattare le varie fotografie alle lancette dell'orologio non è scelto in maniera opportuna, potrebbe accadere una situazione come quella rappresentata nella seguente figura:



Se siamo sfortunati, succede questo.

Se si sommano tutti i vettori rappresentati, ci si accorge che la figura poligonale che si forma non si chiude, e la somma non è nulla:



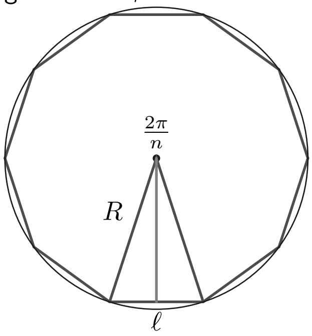
La somma non è nulla.

Riassumendo: se il rapporto tra il periodo di rotazione e quello delle fotografie è intero, la somma dei vettori è nulla; se il rapporto invece non è intero, la somma non è nulla.

C'è poi un altro problema: ci sono infiniti vettori che girano a velocità diverse, come far sì che *ogni* somma sia nulla? La soluzione è: dobbiamo fare infinite fotografie.

Rimane però ancora un problema da risolvere: la somma di infiniti vettori di lunghezza finita corrisponde, dal punto di vista geometrico, a un poligono infinitamente grande. La soluzione, in questo caso, è: rendiamo infinitesime le lunghezze, quanto basta perché il poligono risultante abbia un perimetro finito.

Vediamo ora di utilizzare queste idee per ricavare le formule che servono per ottenere i valori dei coefficienti di Fourier c_n. Uno strumento che ci servirà sarà la relazione tra il raggio di una circonferenza circoscritta a un poligono e il lato del poligono stesso, che ricordiamo:



- Numero di lati: n
- Angolo al centro: $2\pi/n$
- $\frac{\ell}{2} = R \sin \frac{\pi}{n}$
- $R = \frac{\ell}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$

Passiamo ora a un poligono avente un numero ipernaturale infinito N di lati: in questo caso l'angolo al centro avrà ampiezza $2\pi/N$. Come fattore di scala per rendere infinitesime le lunghezze dei lati utilizziamo $dx = 2\pi/N$, cioè confondiamo la corda dx con l'arco.

Il raggio R della circonferenza diventa quindi[2] $R = \frac{dx}{2 \sin \frac{\pi}{N}} = \frac{2 \frac{\pi}{N}}{2 \sin \frac{\pi}{N}} \approx 1.$

Risultato: vediamo la circonferenza goniometrica come poligono di N lati di lunghezza $\frac{2\pi}{N}$.

Ora, tutti questi vettori di lunghezza infinitesima vanno sommati, e la somma di infiniti numeri infinitesimi è un integrale. Vediamo in dettaglio come arrivare al risultato.

Consideriamo quindi i temini della serie di Fourier della funzione f, e concentriamoci su uno di essi, per esempio $c_1 e^{ix}$:

$$f(x) = c_0 + \underbrace{c_1 e^{ix}}_{\Uparrow} + c_2 e^{2ix} + \dots + c_{-1} e^{-ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots$$

Se si moltiplica a destra e a sinistra per e^{-ix} (cioè se si fa girare l'orologio in verso opposto), si ottiene:

$$f(x) e^{-ix} = \underbrace{c_0 e^{-ix}}_{?} + c_1 + \underbrace{c_2 e^{ix} + \dots + c_{-1} e^{-2ix} + c_{-2} e^{-3ix} + \dots}_{?}$$

Come fare per ricavare c_1, ovvero per eliminare da questa somma tutti i termini che non lo contengono? Fissiamo l'attenzione su uno dei termini non costanti, per esempio $c_2 e^{ix}$: è un vettore di modulo c_2 e argomento x: vorremmo cancellarlo.

Per prima cosa lo moltiplichiamo per dx: in questo modo lo rendiamo di lunghezza infinitesima, perché otteniamo $c_2 e^{ix} dx$. Poi scattiamo infinite fotografie

[2]In appendice si può trovare una spiegazione più dettagliata relativa alla risoluzione della forma indeterminata del rapporto tra i due infinitesimi non nulli $\sin(\pi/N)$ e π/N.

al variare di x, cioè suddividiamo l'angolo giro in infinite parti. Infine sommiamo tutto: $\int_{-\pi}^{\pi} c_2 e^{ix} dx$.

Questo integrale dà zero come risultato, perché la somma degli infiniti vettori di lunghezza infinitesima è un poligono chiuso di infiniti lati, cioè è indistinguibile dalla circonferenza goniometrica. Il cerchio si chiude, la somma è nulla.

Abbiamo quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ix}dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ix}dx}_{0} + \int_{-\pi}^{\pi} c_1 dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (c_2 e^{ix} + \dots)dx}_{0}$$

Ma

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_1 dx = 2\pi c_1,$$

e quindi possiamo ricavare finalmente il valore di c_1:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ix}dx.$$

Possiamo ora ripetere il procedimento per tutti gli altri coefficienti della serie; in generale avremo che, per ogni valore di n,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

In particolare il coefficiente c_0, che corrisponde all'unica lancetta che non ruota, si ottiene in questo modo:

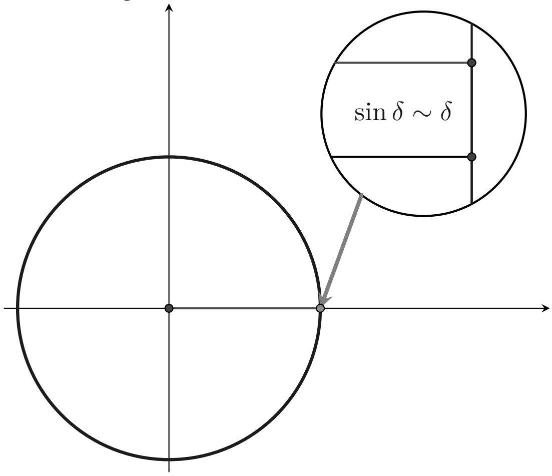
$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Questo è il valor medio della funzione, e corrisponde al punto intorno al quale fare girare la prima lancetta degli orologi di Fourier: nel modello tolemaico, al centro dell'universo.

9.3 Un rapporto notevole

Nel calcolo del raggio del poligono di infiniti lati di lunghezza $2\pi/N$ è stato affermato che il rapporto $\frac{\frac{\pi}{N}}{\sin\frac{\pi}{N}}$ è infinitamente vicino a 1 quando N è un infinito. Questa affermazione (dimostrabile rigorosamente tramite disugaglianze in maniera analoga a quanto si fa in analisi standard) ha una notevole "dimostrazione grafica".

Se si rappresenta, sulla circonferenza goniometrica, un angolo di ampiezza δ infinitesima, e si ingrandisce poi mediante un microscopio infinito la zona di intersezione dei lati dell'angolo con la circonferenza, ciò che si vede è questo:



La corda (di lunghezza $\sin\delta$) e l'angolo (di ampiezza δ, se misurato in radianti) sono indistinguibili. Per questo motivo *si vede* che

$$\frac{\sin\delta}{\delta} \approx 1.$$

10

Numeri iperreali in una classe terza

Daniele Zambelli[1]

I numeri iperreali possono essere introdotti relativamente presto nel percorso scolastico della scuola superiore dato che richiedono, come prerequisiti, solo semplici competenze algebriche. Gli Iperreali possono essere presentati dopo aver ripreso e sistematizzato i vari insiemi numerici ad esempio in una classe terza. In questo intervento presento: il percorso, gli strumenti didattici utilizzati e i nodi fondamentali da affrontare e sciogliere nel presentare questi numeri perché diventino uno strumento potente per semplificare l'approccio all'analisi matematica. È importante precisare gli aspetti chiave dei numeri iperreali:

- *la loro diversità dai reali,*
- *le regole del calcolo,*
- *il confronto tra Iperreali e i concetti di ordine di infinitesimo e di infinito,*
- *la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;*
- *...*

Chiariti questi aspetti è possibile usare gli Iperreali per affrontare l'analisi in modo più semplice coniugando coerenza logica e intuizione.

Tutta l'attività svolta è supportata dal materiale presente nel testo libero, Matematica Dolce vol. 3[Zambelli e altri, 2018]

10.1 Nuovi numeri con cui giocare

Di solito parto dall'esperimento mentale di piegare un foglio di carta un certo numero di volte: quale spessore raggiungerà? Per semplicità pensiamo che sia spesso un decimo di millimetro, se lo piego una volta avrà uno spessore di due decimi, se lo piego 2 volte avrà lo spessore di quattro decimi di millimetro. . . , se lo piego sessantaquattro volte che spessore raggiungerà?

[1]Liceo Fracastoro, Verona

Le considerazioni che ne seguono portano a dare un senso all'assioma di Eudosso - Archimede: per quanto piccolo sia un segmento misurabile con un numero reale, un suo multiplo può superare una qualunque lunghezza prefissata.

Ma certi problemi ammettono delle soluzioni più semplici se si ammette l'esistenza di numeri non nulli ma infinitamente piccoli: gli infinitesimi.

Anche quando insegniamo l'analisi alla moda standard usiamo gli infinitesimi, ma non sono semplici numeri, sono degli oggetti molto più complessi, sono delle classi di funzioni. È vero anche che spesso nell'analisi standard ho usato, con buoni risultati di comprensione il concetto di infinitesimo, ma lasciandolo molto vago e in modo non rigoroso.

Se accettiamo di perdere, inizialmente, il postulato di Eudosso-Archimede, possiamo aggiungere all'insieme dei Reali un nuovo numero ε così definito:

$$\varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza nessun multiplo naturale di ε potrà superare 1 e quindi anche qualunque altro numero:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m\varepsilon < \frac{1}{n}$$

Quindi, per riprendere l'esempio precedente:

$$2^{64}\varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

10.2 Un'esplosione di numeri

Aggiungendo un insignificante infinitesimo all'insieme di numeri reali e ammettendo di poter fare operazioni anche con il nuovo arrivato, cioè trattandolo effettivamente da numero, esplode in una quantità indescrivibile di numeri.

Se ε è un infinitesimo, lo sarà anche la sua metà, o un suo sottomultiplo qualsiasi, ma anche ogni suo multiplo; quindi partendo da un infinitesimo e moltiplicandolo per un numero reale qualsiasi, otteniamo infiniti infinitesimi. E cosa possiamo dire del prodotto di due infinitesimi e della potenza di un infinitesimo?

Attorno allo zero si affolla una quantità infinita di infinitesimi!

Questo avviene anche attorno ad ogni numero reale; infatti, se noi sommiamo ad un numero reale un infinitesimo qualsiasi, possiamo osservare che anche attorno a ogni numero reale si affollano infiniti altri numeri iperreali a lui infinitamente vicini.

Di più, se ε è un numero maggiore di zero ma più piccolo di qualsiasi altro numero, allora $\frac{1}{\varepsilon}$ deve essere un numero maggiore di qualsiasi altro numero. Infatti:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\varepsilon} > n.$$

Se abbiamo a disposizione un infinito con cui fare operazioni, allora avremo anche infiniti *infiniti*. Non il solo misero ∞ messo a disposizione dai libri delle superiori.

Questo nuovo strabordante insieme numerico viene chiamato **insieme dei numeri iperreali**.

Per poter dare un supporto all'immaginazione possiamo rappresentare gli iperreali sulla retta iperreale con l'ausilio di strumenti ottici non standard: un microscopio, un telescopio e un grandangolo con la possibilità di ingrandire infinite volte.

10.3 Operazioni sui tipi

10.3.1 Classificazione e convenzioni

Dato uno sguardo all'insieme degli iperreali possiamo vedere come operare con loro. Per prima cosa possiamo classificarli in:

- zero, l'unico infinitesimo reale;
- infinitesimi non nulli (inn), tutti i numeri infinitamente vicini a zero ma diversi da zero (α; β; γ; δ; ε; $\dots$);
- finiti non infinitesimi (fni) tutti i numeri in valore assoluto maggiori di zero e minori di un qualsiasi numero reale (a; b; c; d; $\dots$);
- infiniti (I), tutti i numeri in valore assoluto maggiori di qualsiasi numero reale (A; B; C; D; $\dots$).

Se consideriamo solo il tipo di iperreale, alcune operazioni risultano evidenti:

- la somma di due infinitesimi non nulli positivi è ancora un infinitesimo non nullo positivo;
- la somma di due infiniti positivi è ancora un infinito positivo;
- il prodotto di un infinitesimo per un finito è un infinitesimo;
- il prodotto di due finiti non infinitesimi è un finito non infinitesimo;
- il quoziente di due fni è un fni;
- ...

Ma altre operazioni non sono così evidenti, anzi ci sono alcuni casi in cui dal tipo degli operandi non si può inferire il tipo di risultato:

- differenza di due infinitesimi non nulli;
- differenza di due finiti non infinitesimi;
- differenza di due infiniti;
- quoziente di due infinitesimi non nulli;
- quoziente di due infiniti;
- prodotto di un infinito per un infinitesimo non nullo.

Per poter capire il tipo del risultato in queste ultime operazioni non basta conoscere il tipo degli operandi, bisogna avere altre informazioni.

10.4 Numeri finiti e parte standard

Il tipico modo per risolvere problemi "reali" con gli iperreali è il seguente:

1. Si trasformano i dati "reali" in numeri iperreali;
2. si risolve il problema usando gli iperreali;
3. si trasforma il risultato ottenuto in numero reale.

Infatti a volte è più facile risolvere un problema con gli iperreali che con i reali.

Il punto 1 è facile: a ogni numero reale può essere associato in modo naturale un numero iperreale (ad es. $4 = 4 + 0 \cdot \varepsilon$).

Per il punto 2 possiamo usare tutti gli strumenti messi a disposizione dagli iperreali.

Il punto 3 è un po' più complesso infatti non tutti gli iperreali possono essere trasformati in modo naturale in numeri reali: solo gli iperreali finiti. Dato un iperreale finito, c'è sempre uno e un solo numero reale infinitamente vicino. Questo numero reale viene detto parte standard del numero iperreale:

$$\text{se} \quad x = a + \varepsilon \quad \text{allora} \quad \mathrm{st}(x) = a$$

Non esiste la parte standard di un numero infinito.

10.5 Il confronto

Un'altra azione che contiamo di fare con i numeri è il confronto.
Normalmente, per il confronto utilizziamo la differenza:
se la differenza tra due numeri è maggiore di zero allora il primo è maggiore del secondo. Questo metodo funziona anche con gli iperreali, ma un altro metodo ci permette di ottenere delle informazioni più interessanti: il rapporto.

Se il rapporto tra due numeri positivi è maggiore di 1 allora il primo è maggiore del secondo.

L'aspetto interessante di questo metodo è che, dividendo due iperreali positivi, possiamo ottenere un quoziente:

1. infinitesimo non nullo;
2. finito minore di 1;
3. uguale a 1;
4. finito maggiore di 1;
5. infinito.

I punti 2, 3, 4 sono banali e rispecchiano quanto detto sopra. Interessanti sono il primo e l'ultimo caso.

Se il quoziente tra due numeri è un infinitesimo, vuol dire che il primo numero non solo è più piccolo del secondo, ma è infinitamente più piccolo del secondo:

- $\dfrac{x}{\alpha} = \varepsilon$, x è un infinitesimo di ordine superiore;
- $\dfrac{x}{a} = \varepsilon$, x è un infinitesimo;
- $\dfrac{x}{M} = \varepsilon$, x è un infinito di ordine inferiore o un finito.

Viceversa se il quoziente tra due numeri è un infinito, vuol dire che il primo numero non solo è più grande del secondo, ma è infinitamente più grande:

- $\dfrac{x}{\alpha} = M$, x è un infinitesimo di ordine inferiore o un finito o un infinito;
- $\dfrac{x}{a} = M$, x è un infinito;
- $\dfrac{x}{M} = M$, x è un infinito di ordine superiore.

10.6 Indistinguibili

Quando passiamo dagli iperreali ai reali usando la funzione parte standard operiamo una semplificazione nel calcolo trascurando la presenza degli infinitesimi.

Se ε rappresenta un qualsiasi infinitesimo:

$$\mathrm{st}\,(7 + 458\varepsilon) = 7$$

Dato che nei problemi reali siamo interessati ad avere come risultato un numero reale [2], possiamo trascurare tranquillamente un qualsiasi numero di infinitesimi. A questo punto uno studente sveglio potrebbe porre qualche domanda imbarazzante:

1. «Ma se poi li trascuriamo, perché li dobbiamo usare?»;
2. «Possiamo sempre trascurare gli infinitesimi?»;
3. «Si possono trascurare solo gli infinitesimi?».

Queste domande vanno al cuore dell'analisi non standard e riprendono le critiche che il reverendo Berkeley rivolgeva ai primi matematici che utilizzavano gli infinitesimi.

Nel seguito provo ad abbozzare delle risposte.

[2] Anzi quello che ci interessa realmente è un numero razionale che approssimi, più o meno vagamente, il numero reale.

10.6.1 Perché usare quantità trascurabili

Perché sono comode, semplificano il ragionamento, anche se nelle realizzazioni pratiche mi accontento di numeri razionali che sono lontane approssimazioni di numeri reali.

10.6.2 Cosa posso trascurare e cosa no nei calcoli con gli iperreali?

Quando cerco una soluzione in prima approssimazione, in una somma posso trascurare gli addendi che sono infinitamente più piccoli degli altri. Posso sostituire un'espressione con un'altra che dia risultati indistinguibili dalla prima. Per indicare "essere indistinguibile" usiamo il simbolo "$\sim$".

Alcuni esempi (le lettere greche minuscole rappresentano quantità infinitesime, le lettere latine maiuscole rappresentano quantità infinite):

$$12 + \varepsilon \sim 12; \quad N + \varepsilon \sim N; \quad 6\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon \nsim 6\varepsilon$$

Se due infinitesimi differiscono per un infinitesimo, non è detto che siano indistinguibili, mentre due finiti non infinitesimi o due infiniti che differiscono per un infinitesimo sono indistinguibili.

Precisiamo il concetto di indistinguibile dandone la definizione:

Due numeri a e b sono **indistinguibili** se il rapporto tra la loro differenza e ciascuno di essi è un infinitesimo:

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{b-a}{a} = i \quad \text{e} \quad \frac{b-a}{b} = i\right)$$

Dobbiamo prestare attenzione ad un particolare importante: nella definizione abbiamo due frazioni una con denominatore a e una con denominatore b: perché siano definite, sia a sia b devono essere diversi da zero.

Ritorniamo agli esempi precedenti.

Indistinguibilità tra numeri finiti non infinitesimi: Due numeri fni sono indistinguibili se e solo se sono infinitamente vicini.

$$a \approx b \;\Rightarrow\; b - a = \alpha \;\Rightarrow\; \frac{b-a}{a} = \frac{\alpha}{a} = \beta \quad \text{e} \quad \frac{b-a}{b} = \frac{\alpha}{b} = \gamma$$

È facile fare anche il ragionamento alla rovescia.

Indistinguibilità tra numeri infiniti: Due numeri infiniti sono indistinguibili se differiscono per un infinitesimo, per un finito o per un infinito di ordine inferiore.

Vediamo tre esempi lasciando la dimostrazione al volonteroso lettore:-)

1. $N + \varepsilon \sim N$;
2. $N + 98 \sim N$;
3. $N^2 + N \sim N^2$.

Osservazioni: *In una somma dove ci siano infiniti posso tenere solo gli infiniti di ordine maggiore trascurando gli altri termini.*

$$5N^3 - 2N^4 + 4N - 7 + \varepsilon \sim -2N^4$$

Indistinguibilità tra numeri infinitesimi: La situazione in questo caso è simmetrica della precedente. Due numeri infinitesimi sono indistinguibili se differiscono per infinitesimi di ordine superiore: $\varepsilon + \varepsilon^2 \sim \varepsilon$.

Anche qui la dimostrazione dovrebbe risultare abbastanza semplice.

Conseguenza di queste osservazioni: *In una somma dove ci siano infinitesimi posso trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.*

$$8\varepsilon^3 + \varepsilon^2 - 8\varepsilon \sim -8\varepsilon$$

10.6.3 Indistinguibilità e zero

Primo esempio

$$(4 - \varepsilon) + (4 + 6\varepsilon) \sim 4 + 4 = 8$$

Il tutto è abbastanza intuitivo.

Secondo esempio

$$(4 + \varepsilon) - (4 - 6\varepsilon) \sim 4 - 4 = 0$$

Anche questo sembra intuitivo ... ma è sbagliato!
È vero che $4+\varepsilon \sim 4$ e $4-6\varepsilon \sim 4$, ma la sostituzione porta a porre indistinguibili una espressione diversa da zero e zero. La definizione di indistinguibilità esclude questa possibilità.
Per risolvere questo caso dobbiamo fare alcuni passaggi:

$$(4 + \varepsilon) - (4 - 6\varepsilon) = 4 + \varepsilon - 4 + 6\varepsilon = 7\varepsilon \nsim 0$$

Chiariti questi punti, il calcolo di limiti e derivate si riduce a semplici calcoli algebrici.

Il percorso descritto in questo intervento è trattato con maggiori particolari, con esempi ed esercizi, nel volume 3 e ripreso nel volume 5 di Matematica Dolce 2018.

Bibliografia

[Bonavoglia, 2015] PAOLO BONAVOGLIA, *Il calcolo infinitesimale, analisi per i licei alla maniera non standard*, 2011, Matematicamente.it urlshop.matematicamente.it/extra/bonavoglia-analisi-non-standard-p.1-20.pdf

[Ferro, 2015] RUGGERO FERRO, Ritorno all'analisi infinitesimale, in *V Giornata di studio "Analisi non standard per le scuole superiori"*, atti, 2015, Matematicamente.it

[Goldoni, 2016] GIORGIO GOLDONI, *I numeri Iperreali*, `ilmiolibro.kataweb.it/libro/scienza-e-tecnica/106196/i-numeri-iperreali`

[Goldoni, 2016] GIORGIO GOLDONI, 20 anni di calcolo infinitesimale, in *Giornata di studio "Analisi non standard per le scuole superiori"*, atti, 2011, Matematicamente.it

[Keisler, 2015] HOWARD JEROME KEISLER, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, `www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`

[Stecca, 2016] BRUNO STECCA, DANIELE ZAMBELLI, *Analisi Non standard*, `nsa.readthedocs.io`

[Zambelli e altri, 2018] DANIELE ZAMBELLI (a cura di), *Matematica Dolce 3*, `www.matematicadolce.it`

11

Maria Gaetana Agnesi: nuovi metodi di insegnamento dal passato

Paola Magnaghi-Delfino, Tullia Norando [1]

Nel 1739 Maria Gaetana Agnesi (Milano, 1718 - 1799) iniziò a scrivere un commento, ad uso didattico, al trattato sulle curve di Guillame de l'Hospital. Gradualmente però prese in considerazione un progetto più ambizioso: un'introduzione al calcolo differenziale e integrale scritto, in italiano, per coloro che si accostavano per la prima volta a quegli argomenti matematici.
Con un grande lavoro di sintesi, L'Agnesi presentava i contenuti dell'analisi avvalendosi del concetto intuitivo di infinitesimo, che applicava alle tecniche della geometria cartesiana, che stabilivano un legame fra la geometria e l'analisi.
Ma i lavori successivi prima di Cauchy e poi Weierstrass, alla ricerca di un approccio più formale al Calcolo, rifondarono l'analisi a partire dalla nota definizione $\varepsilon - \delta$ di limite e portarono all'eliminazione del concetto di infinitesimo.
Secondo alcuni, al giorno d'oggi questa impostazione astratta può risultare didatticamente poco efficace per lo studente principiante, anche perché in un corso di matematica si usano nozioni di limite diverse, che andrebbero opportunamente coordinate per fare in modo che le applicazioni derivino da un unico concetto.
Anche per questo, il metodo di insegnamento di Maria Gaetana Agnesi può essere ancora oggi interessante e didatticamente utile.

11.1 Maria Gaetana Agnesi

Maria Gaetana, fin da bambina, dimostra un talento innato per lo studio delle lingue e, in breve tempo, parla correntemente latino, greco, ebraico, francese, tedesco e spagnolo. Il salotto di casa Agnesi raccoglie parecchi esponenti dell'Illuminismo cattolico lombardo legati al movimento di riforma portato avanti da Antonio Ludovico

[1]Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, paola.magnaghi@polimi.it, tullia.norando@polimi.it

Muratori e appoggiato da papa Benedetto XIV. Questi ecclesiastici si proponevano di armonizzare ragione e fede anche attraverso l'introduzione delle nuove teorie scientifiche come il sistema newtoniano e il calcolo infinitesimale.
Nel 1738, alla fine dei suoi studi filosofici, Maria Gaetana pubblica le *Propositiones philosophicae quas crebris disputationibus domi habitis coram clarissimis viris explicabat extempore et ab objectis vindicabat Maria Cajetana de Agnesiis mediolanensis* dedicate al conte Carlo Belloni che le aveva insegnato le tecniche del dibattito e le questioni della etichetta. L'opera consiste in 191 tesi discusse da Maria Gaetana durante le *conversazioni* che si tenevano nel salotto di casa Agnesi. Con questa opera promuove pubblicamente la cultura scientifica del Cattolicesimo illuminato, diventando famosa non solo in Italia ma anche in tutta Europa.
Maria Gaetana inizia anche lo studio della matematica, sotto la guida di padre Francesco Manara e del conte Carlo Belloni e inizia a scrivere un commentario all'opera postuma del marchese Guillaume De L'Hospital intitolata: *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez* e consultandosi spesso con il suo maestro, conte Carlo Belloni.
Maria Gaetana ha un fitto scambio epistolare con molti studiosi italiani fra i quali ricordiamo l'abate Paolo Frisi, Eustachio Zanotti, Vincenzo e Jacopo Riccati.
Nel 1740 arriva a Milano Padre Ramiro Rampinelli, benedettino olivetano, già professore di matematica e fisica a Roma e a Bologna e destinato ad insegnare nel monastero di San Vittore al Corpo. Frequenta casa Agnesi e, sotto il suo insegnamento, Maria Gaetana fa grandi progressi nello studio della matematica.
Seguendo il suo consiglio, la matematica milanese decide di non pubblicare più il suo commento alle sezioni coniche ma di applicarsi alla sua opera principale *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* che viene stampata nel 1748 in due volumi editi nella sua casa di via Pantano. L'opera è dedicata all'imperatrice Maria Teresa d'Austria e si propone di raccogliere tutte le conoscenze matematiche note all'epoca e di rendere fruibili le nuove idee sul calcolo differenziale e integrale anche a chi si avvicina per la prima volta agli studi matematici.
Maria Gaetana afferma che intende escludere dal suo libro ogni applicazione alla fisica e alle altre scienze e che vuole limitare il suo libro alla pura analisi per preservarne la semplicità, il rigore e l'evidenza proprie della geometria classica. Appena stampata l'opera, parecchi *Fogli Letterari* italiani e stranieri ne danno notizia e ne pubblicano degli estratti: le *Novelle letterarie* (Firenze), la *Storia letteraria d'Italia* (Venezia), il *Giornale de' Letterati* di Firenze, il *Journal des Sçavans* di Parigi e i *Nova Acta Eruditorum* di Lipsia.
Il Tomo II è tradotto in francese e pubblicato a Parigi nel 1755 mentre la traduzione in inglese viene fatta da John Colson e pubblicata solo nel 1801.
Dopo la pubblicazione della sua maggior opera, Maria Gaetana dà inizio alla seconda parte della sua vita, dedicandosi ai poveri e bisognosi e viene nominata direttrice della sezione femminile del Pio Albergo Trivulzio dove vive fino alla sua

morte avvenuta il 9 gennaio 1799.

11.2 Il secondo volume delle Instituzioni Analitiche

Il secondo volume delle Instituzioni è dedicato all'*analisi delle quantità infinitamente piccole*.
Nell'Introduzione, Maria Gaetana dichiara che l'analisi *delle quantità infinitamente piccole* tratta delle differenze delle quantità variabili, detto anche *Calcolo Differenziale o Metodo delle Flussioni*. Questo Calcolo contiene i metodi per trovare le tangenti alle curve, il calcolo dei massimi e dei minimi e dei flessi.
Nel volume II, Libro II, Sezione I, Maria Gaetana definisce le quantità variabili come quelle che sono capaci di crescere o decrescere in modo continuo.
Poi definisce le differenze o flussioni nel seguente modo:
Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile ***abbia proporzione minore di qualunque data****, e per cui crescendo o diminuendosi la stessa variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.*
Appunto in questa definizione sta il punto cruciale: un infinitesimo positivo dovrebbe essere una quantità maggiore di zero ma minore di qualunque numero reale positivo. Si ha dunque una contraddizione con l'Assioma di Archimede che afferma che se a e b sono due numeri reali positivi, allora esiste un numero naturale n tale che $an > b$.
Nella Tavola I, figura2.3 del II volume, Maria Gaetana chiarisce il concetto [Agnesi 1748].

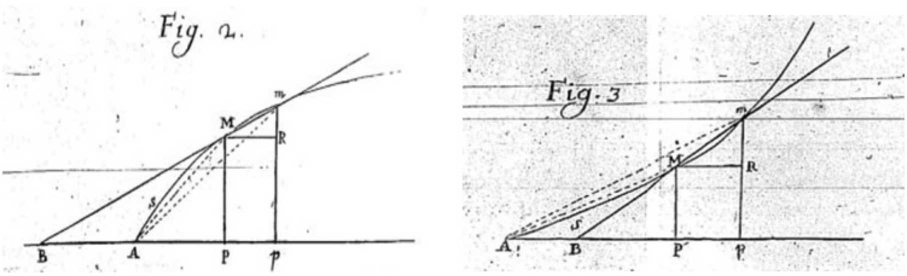


Figura 1. Instituzioni Analitiche, Volume II, Libro II, Sezione I, Tavola I

Sia AM una curva il cui asse sia AP; consideriamo una porzione infinitamente piccola Pp che sarà la differenza o flussione dell'ascissa AB e quindi le due linee AP, Ap potranno essere considerate uguali, poiché non esiste alcuna differenza fra la quantità finita AP e la porzione infinitamente piccola Pp.
Dai punti P, p tiriamo le due rette PM, pm e disegniamo la corda mM che parte da B e la retta MR parallela a AP; allora poiché i due triangoli BP, PM sono finiti e MR è infinitamente piccolo, allora anche Rm sarà infinitamente piccolo e quindi sarà la flussione dell'ordinata PM.

Per la stessa ragione la corda Mm sarà infinitamente piccola, ma la corda Mm non differisce dal suo piccolo arco e quindi sarà indifferente considerare uno o l'altro; anche l'arco Mm sarà infinitamente piccola e perciò sarà la flussione dell'arco della curva AM. Quindi anche lo spazio $PMmp$ contenente PM, pm, l'arco Pp e l'arco infinitamente piccolo Mm, sarà la flussione dell'area AMP, compresa fra AP, PM, e la curva AM. Inoltre, disegnando le due corde AM, Am, il triangolo mistilineo AMm sarà la flussione del segmento AMS che comprende la corda AM e la curva ASM.
Il metodo di insegnamento di Agnesi è davvero notevole, punta sempre dritto al concetto, che lei chiarisce con molti esempi.
L'obiezione di Berkeley, contenuta nel suo libro satirico *The Analyst* [Berkeley, 2002] colpisce nel segno: non contesta la validità dei risultati ottenuti con il nuovo Calcolo, ma il rigore logico.
Infatti, è necessario osservare che, nel fervore della ricerca e nell'urgenza di risolvere nuovi problemi, la preoccupazione per quanto riguarda gli aspetti fondamentali del calcolo infinitesimale è lasciata da parte. I pochi libri nati per diffondere i metodi, come quello di De L'Hôpital, non si preoccupano molto di chiarire le definizioni.
Il problema sarà affrontato e risolto in modi diversi, in epoche diverse.

11.3 Problema della tangente a una curva

Data una curva, il modo di trovare la sua tangente, sottotangente è detto Metodo Diretto delle Tangenti; quando la tangente, la sottotangente o l'area sottesa a una linea sono date e si deve trovare la curva, allora il metodo è detto Metodo Inverso delle Tangenti.

Consideriamo il seguente Problema III:
Date infinite parabole dello stesso tipo, si trovi la curva che le taglia tutte ad angolo retto

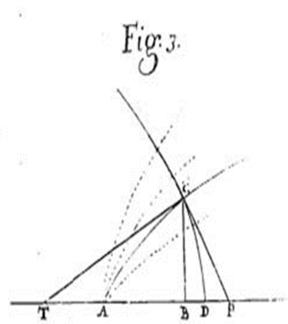


Figura 2. Instituzioni Analitiche, Volume II, Libro IV, Tavola I

Sia $AB = x$ e $BC = y$. L'equazione delle infinite parabole è $p^{m-n}x^n = y^m$.
Da ogni punto C consideriamo la tangente alla linea CT e la normale CP. Abbiamo che $BT = mx/n$. Cerchiamo la curva DC. La porzione infinitesimale di questa curva è la normale CP; quindi CT è nello stesso tempo la tangente alla parabola AC e la normale alla curva DC nel punto C. Allora BT è la sottotangente alla parabola e la sottonormale a DC. La sottonormale è $-ydy/dx$, quindi otteniamo l'equazione differenziale $\frac{mx}{n} = \frac{-ydy}{dx}$.
Separando le variabili si ottiene $\frac{mxdx}{n} = -ydy$.

Integriamo e abbiamo:

$$\frac{mxx}{2n} = \frac{-yy}{2} + aa$$
$$\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$$

Questa è l'equazione di un'ellisse.

11.4 Questione dei fondamenti dell'Analisi

Nel XIX secolo nascono nuovi settori della matematica, come quello delle geometrie non euclidee, e si realizza un rigoroso assetto teorico dell'analisi matematica. La costruzione di sistemi coerenti di geometrie, caratterizzati da postulati diversi da quelli euclidei, ha dimostrato il limitato valore matematico dell'appello alla evidenza. Anche la situazione dell'Analisi stimola una riflessione: sebbene fosse decisiva per lo sviluppo delle scienze, aveva fatto uso di nozioni non chiare, come quella di infinitesimo, e di procedure senza scrupoli, così da far dire a D'Alembert: *Andate avanti e la fede vi verrà*.

Il problema di considerare un approccio più formale e logico alla definizione di limite fu affrontata da Augustine-Louis Cauchy e, in seguito, da Karl Weierstrass. Cauchy, nel suo libro *Cours d'Analyse* [Cauchy, 1821], ha basato la definizione di infinitesimo e la definizione di limite sul concetto di quantità variabile, che gli studiosi generalmente ritengono sia una successione di valori.

Weierstrass, in seguito, riprese le idee di Cauchy e diede la definizione ε-δ di limite che è tuttora insegnata ed elimina gli infinitesimi come soggetti separati. Weierstrass applicò la definizione di limite alla definizione di continuità e di convergenza di una serie di funzioni e produsse il famoso controesempio che dimostra che una funzione può essere continua ma non derivabile in nessun punto. Da Weierstrass in poi, l'analisi matematica divenne la scienza che conosciamo.

Secondo alcuni studiosi di didattica della matematica questo approccio astratto può essere didatticamente poco efficace per lo studente principiante; osserviamo che, tra le altre cose, in un corso di matematica vengono utilizzate diverse nozioni di limite, la più opportuna in ogni situazione: ad esempio il limite di una successione, di una funzione, di una serie, nella definizione di integrale; pertanto sarebbe più opportuno introdurre e definire il limite in modo che le applicazioni derivino da un singolo concetto.

Nel 1961, Abraham Robinson pubblicò un articolo nell'Accademia delle Scienze Olandese in cui presentò la sua idea di una teoria dell'infinitesimo e dell'infinito, con il nome di Analisi non standard, entrando nel dibattito su come la definizione di Weierstrass interpretasse la definizione storica [Robinson, 1961]. La teoria di Robinson ha raggiunto una grande notorietà in seguito al lavoro che ha presentato congiuntamente all'American Mathematical Society e alla Mathematical Association of America. La teoria di Robinson consiste nell'introdurre un nuovo campo numerico, che costituisce un'espansione del campo reale, in cui generalmente non si applica l'assioma di Archimede. Fra gli oggetti extra nel nuovo campo numerico vi sono precisamente gli infinitesimi e il nuovo insieme è detto dei numeri iperreali. La teoria di Robinson si basa essenzialmente sulla logica matematica, anche se verso la fine degli anni sessanta il matematico americano H. Jerome Keisler riuscì a riformulare l'intera analisi matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo un percorso alternativo che rende questo metodo accessibile persino alle matricole universitarie [Keisler, 2012].

Oggigiorno molti ricercatori in didattica della matematica testano l'Analisi Non Standard anche a livello introduttivo. Pensano che l'intuizione degli infinitesimi possa essere orientata a condurre più facilmente gli allievi verso concetti matematici. Gli studenti pre-universitari possono così acquisire le idee fondamentali, che costituiscono il nucleo dell'analisi, attraverso l'analisi non standard, presentando in classe i numeri iperreali. Già alla fine dell'Ottocento, Giovanni Vailati, matematico, filosofo ed educatore italiano, affermava che un metodo di insegnamento dovrebbe tenere conto del fatto che il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto. Gli allievi dunque *non dovrebbero essere costretti a imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono*.

Nella tabella seguente riassumiamo i metodi, le tecniche e le teorie dell'analisi che sono state sviluppate nel corso dei secoli. Ci domandiamo se si tratta di differenti Analisi Matematiche o differenti impostazioni teoriche della medesima Analisi.

Autore data	Euclide 300 a.C. Archimede 220 a.C. Taylor 1715	Cavalieri Torricelli 1640	Leibniz Newton 1687	[Cauchy, 1821] Weierstrass 1870
Metodo	Metodo di esaustione, Approssimazione numerica	Metodo degli indivisibili	Metodo infinitesimale	Definizione epsilon - delta
Tecnica	Approssimazione finita, dimostrazione per contraddizione	Intuizione geometrica	Limite intuitivo	Approssimazione epsilon-delta
Infinito	Infinito potenziale	Infinito attuale	Infinito attuale	Infinito attuale
Nome	Matematica costruttiva	Matematica elementare di Weyl	Analisi Non Standard	Matematica Formale

11.5 Conclusioni

Le opinioni sull'uso didattico dell'Analisi Non Standard e precisamente sul vantaggio che porterebbe alla comprensione degli argomenti sono ancora controverse, così come quelle riguardanti il vantaggio che porterebbe alla scoperta di nuove proprietà analitiche. La questione dei fondamenti dell'Analisi non può essere considerata del tutto chiusa, anzi qualcuno pensa che il sistema di assiomi da considerare sia persino variabile con il tipo di problemi che devono essere affrontati. Sarebbe un colpo terribile per la concezione di Cartesio, secondo la quale "*le verità matematiche sono immutabili ed eterne*". Pensiamo che gli studenti pre-universitari possano acquisire efficacemente le idee fondamentali del calcolo differenziale recuperando la formulazione originale di Leibniz, basata sugli infinitesimi. Da questo punto di vista, possiamo usare molti suggerimenti ed esempi contenuti nei libri di Maria Gaetana Agnesi.

Bibliografia

[Agnesi 1748] AGNESI M.G., *Instituzioni Analitiche*. Tomo I, Tomo II, Retrived from: `https://archive.org/details/bub_gb_xDF_ksE24HUC`, `https://archive.org/details/BUSA298_184`

[Aldegheri-Stecca, 2017] ALDEGHERI L. -STECCA B., L'Analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi, in *VII giornata di studio "Analisi non standard per le scuole superiori"*. Atti del convegno (pp.99-112), Venezia 2017, Matematicamente.it

[Berkeley, 2002] BERKELEY, G., *The Analyst*, 2002, London, David R. Wilkins ,

[Borovik] BOROVIK, A., KATZ, M.G., *Who gave you the Cauchy–Weierstrass tale? The dual history of rigorous calculus*, ArXive:1108.2885v3[MATH.HO], 16 Oct. 2012

[Cauchy, 1821] CAUCHY, A.L., *Cours d'Analyse*, 1821 Retrived from `https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog`

[Dauben] DAUBEN, J.W., *Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics*, Minnesota Center, 1984 Retrived from `http://mcps.umn.edu/philosophy/11_7Dauben.pdf`

[De L'Hôpital] DE L'HÔPITAL, G., *Traité des sections coniques*, 1776 Retrived from `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1042799f.image`

[Dupont, P., Roero, C.] DUPONT, P., ROERO, C., *Leibniz 84. Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*, 1991, Rende. Mediterraneo Press

[Giusti] GIUSTI, E., *Il calcolo differenziale tra Leibniz e Newton*, 1988, Torino Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn.Torino (46)1

[Keisler, 2012] KEISLER, H.J., *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*, 2012
Retrived from https://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

[Lubet] LUBET, J-P., *Le calcul différentiel et intégral dans l'Analyse démontrée de Charles René Reyneau*, 2005, Societé Diderot. Retrived from http://rde.revues.org/304

[Masotti] MASOTTI, A., Maria Gaetana Agnesi. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*. XIV, 1940, Milano

[Masotti] MASOTTI, A., Matematica e Matematici nella storia di Milano. emphRendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. XXXIII, 1963, Milano

[Mazzotti] MAZZOTTI, M., *The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God*, 2007, Johns Hopkins Univ Pr

[O'Donovan] O'DONOVAN, R., Nonstandard Analysis in the Classroom ultrasmall numbers vs limits: a comparison, in *VII giornata di studio "Analisi non standard per le scuole superiori"*, atti, 2017, Matematicamente.it

[Robinson, 1961] ROBINSON, A., *Non-Standard Analysis*. Proceedings of the Royal Academy of Sciences (Serie A) 64. 1961, Amsterdam

[Robinson] ROBINSON, A., *Non-Standard Analysis*, 1966, Princeton University

12

Considerazioni sulla matematica presente nei monumenti fiorentini

Giuseppe Conti [1]

A conclusione dei lavori del convegno, i partecipanti sono stati condotti a visitare alcuni monumenti nel centro di Firenze. Il prof.Giuseppe Conti, che guidava la visita, ha illustrato le caratteristiche geometriche dei monumenti e degli elementi architettonici, mettendole in relazione con la storia di Firenze, con l'Umanesimo e con la tensione ideale e religiosa del periodo rinascimentale fiorentino.

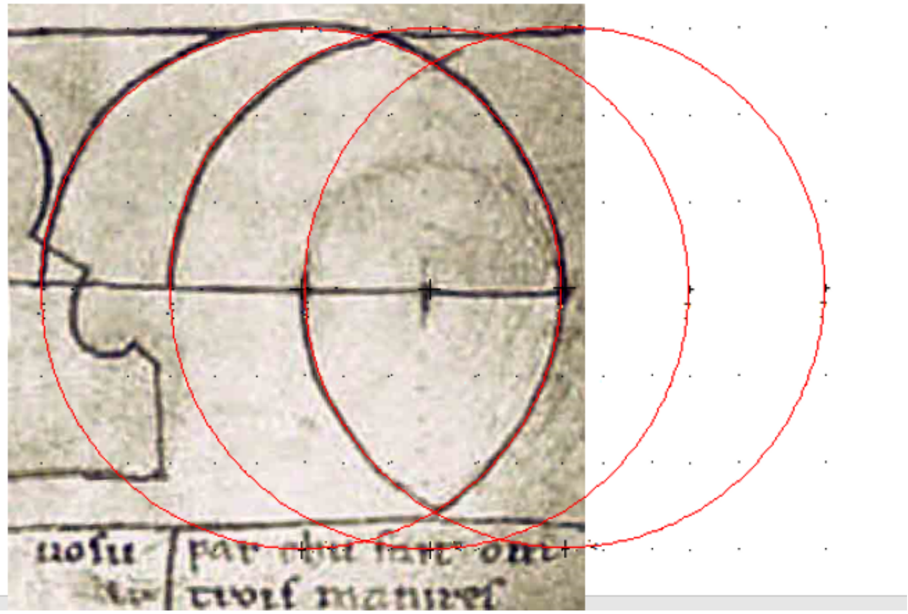
La formella esagonale che si trova nel Campanile di Giotto, a destra guardando l'ingresso, rappresenta l'Architettura. In essa è raffigurata una persona seduta che sta disegnando su un tavolo: si tratta del matematico Euclide.

[1]Università di Firenze

Formella del campanile che rappresenta l'architettura

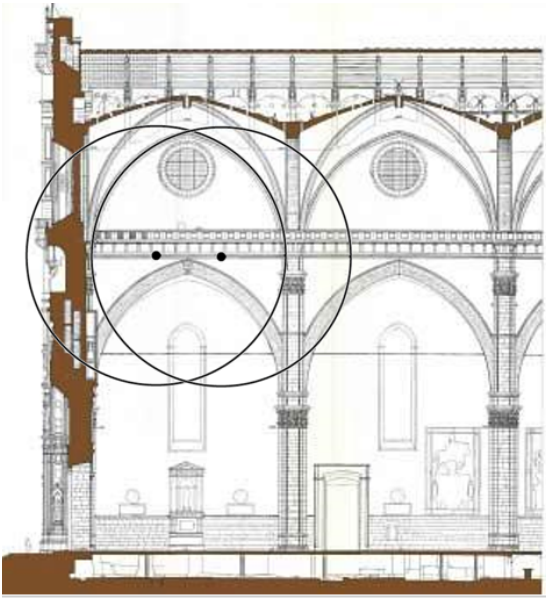
Questo fatto mette in evidenza lo stretto legame fra l'architettura e la geometria, legame particolarmente evidente nell'architettura fiorentina. Per notare tale connessione, basta osservare, ad esempio, i riquadri geometrici, ottenuti da intarsi marmorei, che ripartiscono le superfici di molti monumenti fiorentini.
Tale carattere geometrico, unitamente al cromatismo (bianco e verde), richiama la classicità, anche in riferimento alle tarsie marmoree che ricoprivano numerose architetture romane.
Il bicromatismo delle facciate architettoniche fiorentine solo in parte è riferibile all'influenza del romanico pisano, dove l'alternarsi delle fasce orizzontali bicromatiche divenne particolarmente marcato anche a causa dell'uso dei materiali locali (pietra alberese bianca e marmo verde di Prato). Anche a Firenze fu impiegato tale elemento, ma con un'impronta molto diversa; il bicromatismo fu, infatti, utilizzato non in fasce orizzontali, ma proprio per disegnare i riquadri delle facciate, ottenendo una serena armonia geometrica che ricorda le opere classiche antiche.
L'architettura romanica fiorentina, insieme a quella gotica, si distinse dalle altre

per la sua compostezza geometrica, per il carattere sobrio ed elegante; è proprio questa architettura fatta di splendide combinazioni di forme, che darà origine al Rinascimento fiorentino.
Possiamo dire che in questo modo, attraverso la geometria, l'architettura esprime la perfezione di Dio e ci avvicina maggiormente a lui; infatti la geometria è perfetta, indiscutibile, eterna, quindi divina. Essa, tuttavia, è comprensibile dall'uomo perché, unico fra gli esseri viventi, è stato dotato da Dio della ragione che lo rende a "immagine e somiglianza" del suo creatore. Si tratta una visione platonica dell'arte, ma sappiamo che è stata proprio questa la filosofia che ha permeato tutta la cultura fiorentina. Nella passeggiata matematica sono state mostrate alcune costruzioni geometriche usate per realizzare elementi architettonici presenti nei monumenti fiorentini.
Abbiamo notato che tutte queste costruzioni geometriche possono essere effettuate con "la riga ed il compasso", come, ad esempio, possiamo osservare nella costruzione dei vari tipi di archi gotici.
Il ***Livre de portraiture*** di Villard de Honnecourt (scritto intorno al 1230) rappresenta l'unica raccolta di disegni tecnici del Medio Evo. Fra questi si trovano rappresentati, come viene evidenziato nella figura seguente, gli archi a tutto sesto (semicirconferenze), a sesto (curvatura) di terzo acuto (ciascuno dei due archi di circonferenza ha il centro a un terzo dall'estremità del segmento di base), e gli archi equilateri (i due archi hanno i centri negli estremi del segmento di base).

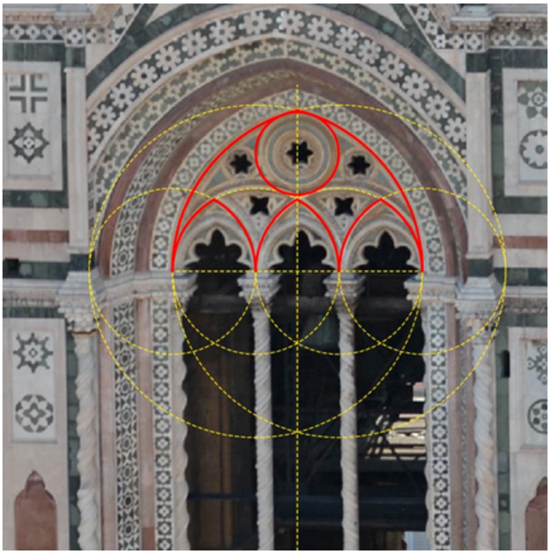


Costruzione geometrica degli archi presente nel *Livre de portraiture*

Queste tipologie archi si trovano, insieme ad altre, in tutte le architetture fiorentine: ne mostriamo alcuni esempi.

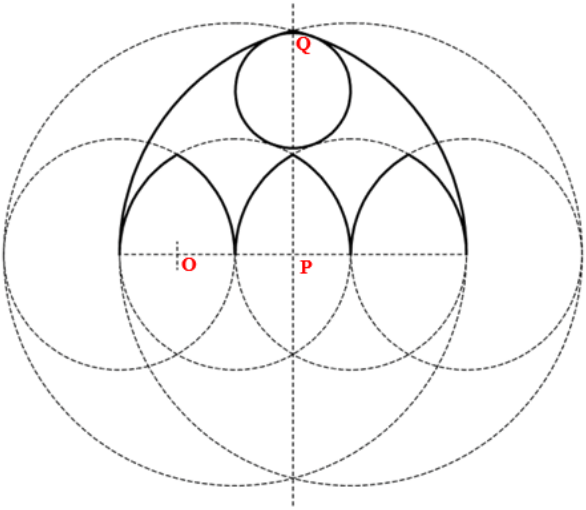


Archi a terzo acuto nell'interno della Cattedrale di Firenze



Archi gotici nelle trifore del Campanile di Giotto

Anche nelle trifore del Campanile si trovano archi gotici equilateri e archi a sesto di terzo acuto, come evidenziato nella figura precedente ed in quella seguente.

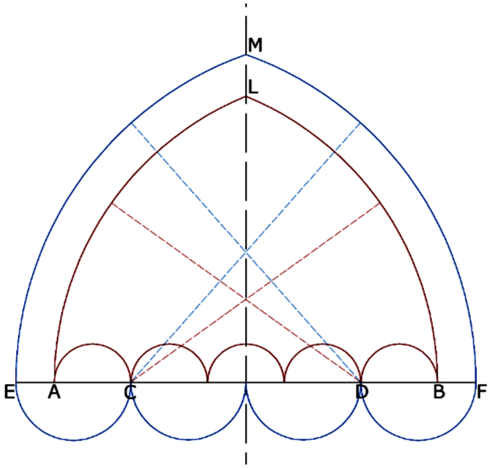


Schema geometrico trifore del Campanile di Giotto

La "mandorla" della **Porta della Mandorla** è formata da due archi equilateri opposti.

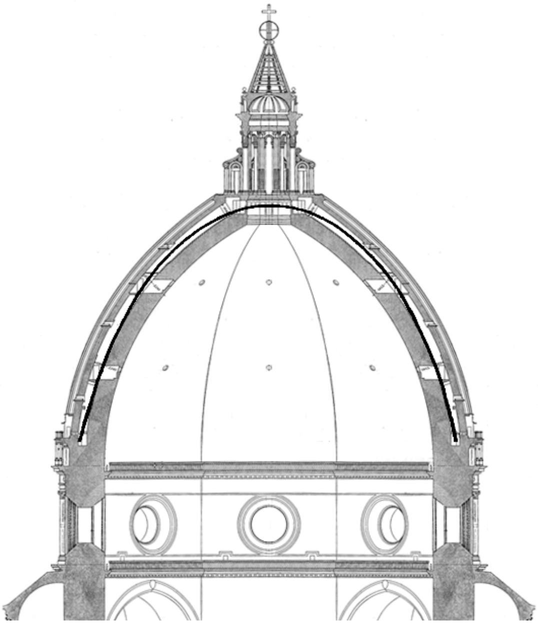
Mandorla della Porta della Mandorla

Il profilo della Cupola interna è un arco a sesto di quinto acuto (ciascuno dei due archi di circonferenza ha il centro a un quinto dall'estremità del segmento di base), mentre quello della Cupola esterna è a sesto di quarto acuto (ciascuno dei due archi di circonferenza ha il centro a un quarto dall'estremità del segmento di base).



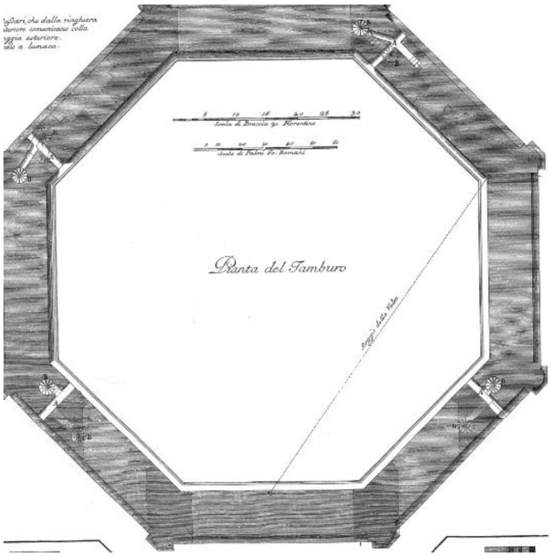
Costruzione geometrica del profilo della Cupola

Come ha osservato nel ‘700 Leonardo Ximenes, questo profilo si avvicina molto alla curva catenaria e tale forma contribuisce alla stabilità di tutta la struttura architettonica. Il fatto interessante consiste nel tenere presente che tale profilo è stato stabilito quasi tre secoli prima degli studi sulle proprietà statiche della catenaria.



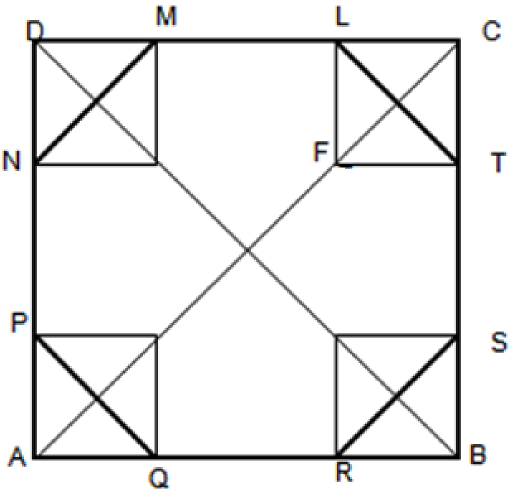
Curva catenaria presente nell’interno della Cupola

La base della Cupola è un ottagono (quasi regolare). Il diametro dell'ottagono interno è 45.5 metri, mentre quello dell'ottagono esterno è 54.8 metri.



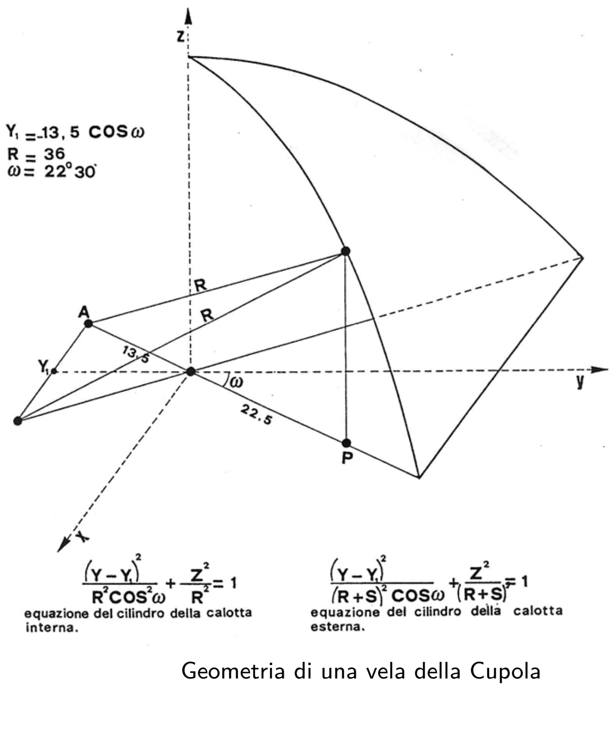
Ottagono di base della Cupola

L'ottagono regolare veniva costruito a partire da un quadrato; era sufficiente riportare il lato del quadrato sulla diagonale per ottenere il lato dell'ottagono.



Costruzione dell'ottagono regolare

La costruzione di una cupola a base ottagonale è molto più complessa di quella di una cupola a base circolare. Infatti nelle cupole a base circolare gli sforzi sono tutti equamente distribuiti (come, ad esempio, nella cupola di San Pietro a Roma); in quelle a base ottagonale, invece, gli sforzi sono concentrati nei vertici dove, inoltre, la struttura è più debole poiché vi è un cambio di direzione. Per questo motivo in molte costruzioni bizantine (ad esempio, San Vitale a Ravenna) le basi poligonali delle cupole diventavano circolari per mezzo di raccordi, chiamati pennacchi.
Il motivo per cui a Firenze fu scelta la base ottagonale risiede nel fatto che la Cupola della Cattedrale doveva avere la stessa forma di quella che si trova all'interno del Battistero, chiesa molto amata dai fiorentini. Osserviamo che il profilo della cupola del Battistero è un sesto di quarto acuto.
La Cupola di Brunelleschi è formata da otto porzioni di cilindro ellittico, chiamate vele, la cui equazione è rappresentata nella figura seguente.



Geometria di una vela della Cupola

Di conseguenza le linee meridiane di ciascuna vela sono archi di ellisse, mentre, anche se questo fatto può sembrare strano, le linee corrispondenti ai costoloni di spigolo di ciascuna vela sono archi di circonferenza.

Bibliografia

[1] Bartoli L., *Il disegno della cupola del Brunelleschi*, Olschki, Firenze 1994.

[2] Battisti E., *Filippo Brunelleschi*, Electa, Milano 1989.

[3] Bianchi L., *Firenze, Piazza del Duomo. Duemila anni di storia*, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze 2014.

[4] Chiarugi A., Quilghini D., *Tracciamento della cupola del Brunelleschi. Muratori e geometria*, in «Critica d'Arte», XLIX, s. IV, n. 3, 1984, pp. 38-47.

[5] Conti G., Corazzi R., *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi*, Edizioni Sillabe, Livorno 2005.

[6] Corazzi R., Conti G., *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze*, Angelo Pontecorboli Editore, Firenze 2011.

[7] Di Pasquale S., *La costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore*, Biblioteca Marsilio, Venezia 2002.

[8] Ferri W., Fondelli M., Franchi P., Greco F., *Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore*, «Bollettino di Geodesia e Scienze Affini dell' I.G.M.», XXX, 1971, pp. 158-184.

[9] Gurrieri F., *La cupola*, in F. Gurrieri, G. Belli, A. Benvenuti Papi, R. Dalla Negra, Fabbri P., Tesi V., La cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze, Cassa di Risparmio di Firenze, Firenze 1994, I, pp. 81-135.

[10] Ximenes L., *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche*, Stamperia Imperiale, Firenze 1757.

[11] Rossi P.A., *Le cupole del Brunelleschi*, Capire per conservare, Calderini, Bologna 1982.

[12] Sanpaolesi P., *La Cupola di Santa Maria del Fiore. Il progetto-La costruzione*, Edam, Firenze 1977.