Matematikos knygos juodraštis

Except where otherwise noted, this work is licensed under
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

© Copyright Paulius Kantautas, Elena Dulskytė, Edvard Poliakov 2011, Some Rights Reserved

Except where otherwise noted, this work is licensed under Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0.
You are free:

- to Share — to copy, distribute and transmit the work,
- to Remix — to adapt the work.

Under the following conditions:

- Attribution. You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
- Share alike. If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same, similar or a compatible license.

With the understanding that:

- Any of the above conditions can be waived if you get permission from the copyright holder.
- In no way are any of the following rights affected by the license:
  - Your fair dealing or fair use rights;
  - Author's moral rights;
  - Rights other persons may have either in the work itself or in how the work is used, such as publicity or privacy rights.

TURINYS

0.1 Vieta-Jumping (Vieto šokinėjimas)

Vieta-Jumping, tai gana lengvai atskiriamo tipo, bet dažniausiai sudėtingų skaičių teorijos uždavinių sprendimo technika, taip vadinama dėl to, jog sprendime yra naudojamos Vieto kvadratinio trinario šaknų formulės bei Ferma išvystytas begalinio nusileidimo metodas. Ji labiausiai pritaikoma, kada žinome, kad duoti sveikieji skaičiai tenkina kokį nors sąryšį (dažniausiai tam tikrą dalumą) ir reikia įrodyti kokią nors savybę tarp šių sveikųjų skaičių (pavyzdžiui, kad tam tikras jų santykis yra natūralaus skaičiaus kvadratas ar panašiai).

1 Pavyzdys. *(IMO 1988 Nr.6) a ir b yra tokie teigiami sveikieji skaičiai, kad $ab+1|a^2+b^2$. Įrodykite, kad $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.*

Toliau išskirsime porą skirtingų šios technikos atšakų ir pateiksime jas iliustruojančius pavyzdžius.

0.1.1 Standartinis Vieta-Jumping

Standartinis Vieta-Jumping, tai įrodymas prieštara susidedantis iš trijų žingsnių:

1. Tariame, kad egzistuoja sprendinys duotajam sąryšiui toks, kad negalioja mūsų norima įrodyti savybė.

2. Visoms tokių „blogųjų” sprendinių poroms (a, b) priskiriama tam tikra funkcija (dažniausiai $y = a + b$) ir naudojantis naturaliųjų ar sveikųjų skaičių savybėmis leidžiame sau tarti, kad tarp visų šių porų egzistuoja pora (A,B), tokia, kad $Y = A + B$ yra mažiausia. Tada paliekame B fiksuotą ir perstatę gauname kvadratinę lygtį a atžvilgiu. Žinodami, kad viena iš jos šaknų yra A naudodami Vieto formulėmis randame antrą šaknį x.

3. Įrodome, kad (x, B) irgi yra tinkamas sprendinys ir su šia antrąja šaknimi x, $x+B < A+B$, taip gaudami prieštarą (sakėme, kad (A, B) yra pora su minimalia suma $A + B$)

Grįžtame prie mūsų pirmojo pavyzdžio ir iliuostruojame visus tris žingsnius: *Sprendimas.*

1. Tegu $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. Tarkime, kad egzistuoja vienas ar daugiau sprendinių (a, b), tenkinančių šį sąryšį, tokių, kad k nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

2. Tegu (A, B) būna toji (ar viena iš tų) sprendinių porų, tenkinančių sąryšį šiam fiksuotam k, tokia, kad šiai porai $a + b$ yra minimali. Neprarasdami bendrumo galime tarti, kad $A \geqslant B$. Fiksuodami B ir perstatatydami, gauname kvadratinę lygtį a atžvilgiu, kurios viena iš šaknų yra A:

$$a^2 - (kB)a + (B^2 - k) = 0$$

Naudojantis Vieto šaknų formulėm antroji šaknis x yra lygi:

$$x = kB - A = \frac{B^2 - k}{A}$$

3. Iš pirmos lygties matome, kad x sveikasis. Jei $x = 0$, iš antros lygties $k = B^2$, o mes jau tarėme priešingai. Galiausiai x negali būti neigiamas, nes tada:

$$1 + Bx \leqslant 0 \to -kBx \geqslant k \to x^2 - kBx + B^2 - k \geqslant x^2 + k + B^2 - k$$

ir turime:

$$x^2 - kBx + B^2 - k > 0$$

Taigi x yra teigiamas sveikasis ir turime, kad pora (x, B) yra tinkamas mūsų sąryšiui sprendinys. Pabaigai:

$$A \geqslant B \to x = \frac{B^2 - k}{A} < A \to x + B < A + B$$

Taigi (A,B) nėra minimalus sprendinys, kaip mes tarėme ankščiau, prieštara. Koks elegantiškas ir elementarus sprendimas, atkreipus dėmesį į tai, jog tai IMO uždavinys „žudikas”, numeris 6!

△

0.1.2 Pastoviai besileidžiantis Vieta-Jumping

Šis metodas yra naudojamas, kada norime įrodyti, kad tam tikra konstanta k yra susijusi su duotuoju sąryšiu tarp a ir b ir kitaip nei standartinis Vieta-Jumping tai nėra įrodymas prieštara, nors jo esmė ta pati, tik formuluotė kitokia. Jis susideda iš 4 dalių:

1. Patikrinamas atvejis, kai a ir b yra lygus, kad galėtumėme tarti, kad $a > b$.

2. Užfiksuojame b ir k ir pertvarkome turimą sąryšį į kvadratinę lygtį, kurios viena iš šaknų yra a. Naudodamiesi Vieto formulėmis žiūrime, kokia galėtų būti antroji šaknis.

3. Parodome, kad visoms poroms (a, b) didesnėms už tam tikrą „bazinę" porą ar poras galioja $0 < x < b < a$. Vadinasi pradinę sprendinio porą (a, b) galime pakeisti į (b, x) ir kartoti procesą iš naujo.

4. Kartojant procesą ir mažėjant skaičiams ankščiau ar vėliau turime priartėti iki „bazinių” atvejų. Kadangi atliekant šį „nusileidimo” procesą konstanta k buvo fiksuota, užtenka norimą įrodyti teiginį įrodyti tik šiems „baziniams” atvejams ir tada galėsime teigti, kad norimas teiginys galioja visoms galimoms sprendinių poroms (a, b).

2 Pavyzdys. *Tegu a ir b yra tokie teigiami sveikieji, kad $ab|a^2 + b^2 + 1$. Įrodykite, kad $3ab = a^2 + b^2 + 1$.*

Sprendimas.

1. Jei $a = b$, tada $a^2|2a^2 + 1$, vadinasi $a|1$, taigi $a = b = 1$ ir $3 * 1 * 1 = 1^2 + 1^2 + 1$, ką ir norėjome parodyti. Viskas simetriška, neprarasdami bendrumo, galime tarti, kad $a > b$.

2. Tarkime $\frac{a^2+b^2+1}{ab} = k$. Perstatę gauname $x^2 - (kb)x + (b^2+1) = 0$, kuri yra tenkinama šaknies a. Tada naudojantis Vijeto formulėmis antrajai šakniai x gauname:
$$x = kb - a = \frac{b^2+1}{a}$$
3. Iš pirmos lygties matome, kad antroji šaknis x yra sveikas skaičius, o iš antrosios turime, kad jis teigiamas. Kadangi $a > b$, $x = \frac{b^2+1}{a} < b$, jei $b > 1$.
4. Taigi galime „mažinti" iki bazinio atvejo, kai $b = 1$. Tada turime $a|a^2 + 2$ taigi $a = 1$ arba $a = 2$. $a = 1$ netinka, o antruoju atveju turime $k = \frac{6}{2} = 3$. Kadangi k buvo fiksuotas viso proceso metu, įrodėme, kad $k = 3$ bet kokiu atveju.

$\triangle$

Alternatyvus sprendimas: Tarkime $\frac{a^2+b^2+1}{ab} = k$. Fiksuokime k ir nagrinėkime visas galimas šio sąryšio sprendinių poras. Tegu pora (A, B) būna toji pora (ar viena iš jų), kuriai suma $a + b$ mažiausia. Įrodysime, kad $A = B$. Tarkime priešingai, t.y., kad $A > B$. Fiksavę b kaip B, gauname kvadratinę lygtį a atžvilgiu:
$$a^2 - (kB)a + (B^2 + 1) = 0$$
Viena iš jos šaknų yra A, taigi iš Vijeto formulių antroji šaknis x yra:
$$x = kB - A = \frac{B^2+1}{A}$$
Taigi x yra teigiamas sveikasis, be to, iš $A > B \geqslant 1$ gauname, kad:
$$x = \frac{B^2+1}{A} < A$$
Vadinasi pora (x, B) taip pat yra tinkama pora-sprendinys, bet $x+B < A+B$, prieštara. Kadangi viskas simetriška, dėt tų pačių priežasčių $A \not< B$, taigi $A = B$. Galiausiai turime $A^2|2A^2 + 1 \rightarrow A = B = 1 \rightarrow k = \frac{1^2+1^2+1}{1*1} = 3$.

0.1.3 Uždaviniai

1. a ir b yra tokie teigiami sveikieji skaičiai, kad $ab - 1|a^2 + b^2$. Įrodykite, kad $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = 5$

   Sprendimas. Tarkime $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = k$. Fiksuokime k, tarkime, kad $k \neq 5$ ir nagrinėkime visas galimas šio sąryšio sprendinių poras. Tegu pora (A, B) būna toji pora (ar viena iš jų), kuriai suma $a+b$ yra mažiausia. Neprarandant bendrumo $A \geqslant B$. Jei $A = B$, tada $\frac{A^2+B^2}{AB-1} = \frac{2A^2}{A^2-1} = 2+\frac{2}{A^2-1}$, kas nėra sveikasis skaičius. Jei $A = B+1$, $\frac{A^2+B^2}{AB-1} = \frac{2B^2+2B+1}{B^2+B-1} = 2+\frac{3}{B^2+B-1}$, taigi $B^2+B-1 = 3$ arba $1 \rightarrow B = 1 \rightarrow k = 5$, prieštara. Taigi $A \geqslant B+2$. Perstatome turimą sąryšį į kvadratinę lygtį a atžvilgiu fiksavę b kaip B:
$$a^2 - (kB)a + B^+k = 0$$

Naudojantis Vijeto formulėmis, antroji šaknis x yra lygi:

$$x = kB - A = \frac{B^2 + k}{A}$$

ir dėl to yra teigiama ir sveikoji. Vadinasi pora (x, B) taip pat yra sprendinys pradiniam sąryšiui. Kadangi tarėme, kad pora (A, B) yra minimalioji, turime turėti: $x = \frac{B^2+k}{A} \geqslant A$, $B^2 + \frac{A^2+B^2}{AB-1} \geqslant A^2$, $AB^2 + A^2 \geqslant BA^3 - A^2$, $2A \geqslant BA^2 - B^3 = B(A^2 - B^2) \geqslant B(A^2 - (A-2)^2) \geqslant 4A - 4$. Vadinasi $A \leqslant 2$, o tai yra prieštara, nes $A \geqslant B + 2$. Vadinasi $k = 5$. △

2. (IMO 2007, Nr.5) a ir b yra teigiami sveikieji skaičiai ir $4ab - 1 | (4a^2 - 1)^2$. Įrodykite, kad $a = b$.

   Sprendimas. $4ab-1|(4a^2-1)^2 \to 4ab-1|b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a^3b-2ab+a^2) = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Tegu $\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$ ir tarkime, kad egzistuoja skirtingi a ir b, kuriems galioja šis sąryšis. Fiksuokime k ir iš visų galimų sprendinių porų imkime porą (A, B), kuriai suma $a + b$ yra mažiausia. Neprarandant bendrumo $A > B$. Pertvarkome turimą sąryšį į kvadratinę lygtį a atžvilgiu fiksuodami b kaip B, kurios viena iš šaknų yra A, o antrąją šaknį x randame iš Vijeto formulių:

$$a^2 - (2B + 4kB)a + (B^2 + k) = 0$$

$$x = 2B + 4kB - A = \frac{B^2 + k}{A}$$

   Iš čia gauname, kad x yra teigiamas sveikasis, vadinasi pora (x, B) taip pat yra sprendinys sąryšiui. Vadinasi $x > A$, $\frac{B^2+k}{A} \geqslant A$, $k \geqslant A^2 - B^2$. Tada:

$$\frac{(A-B)^2}{4AB-1} = k \geqslant A^2 - B^2$$

$$A - B \geqslant (A + B)(4AB - 1).$$

   Paskutinė nelygybė yra tikrai neįmanoma, nes A, B teigiami sveikieji, taigi gavome prieštarą. △

3. a ir b yra tokie sveikieji teigiami skaičiai, kad $ab|a^2 + b^2 + 3$. Raskite visas galimas $\frac{a^2+b^2+3}{ab}$ reikšmes.

   Sprendimas. Tarkime, kad $\frac{a^2+b^2+3}{ab} = k$. Fiksavę k iš visų galimų šio sąryšio sprendinių porų išsirenkame porą (A, B), tokią, kad suma $a + b$ būtų mažiausia. Fiksuojame b kaip B ir gauname kvadratinę lygtį a atžvilgiu:

$$a^2 - (kB)a + (B^2 + 3) = 0,$$

   kurios viena iš šaknų yra A, taigi iš Vijeto formulių antrajai šakniai x galioja:

$$x = kB - A = \frac{B^2 + 3}{A}.$$

Aišku, kad x yra teigiamas sveikasis, vadinasi pora (x, B) taip pat yra sprendinys pradiniam sąryšiui. Tarkime $A > B \geqslant 2$. Tada

$$A^2 > B^2 + 3 = Ax \to A > x \to x + B > A + B,$$

pieštara. Vadinasi $A = B$ arba $B = 1$. Jei $A = B$, turėsime $(k-2)A^2 = 3 \to A = 1, k = 5$. Jei $B = 1$, $A^2 + 4 = kA$, vadinasi $A|4$, taigi $A = 1, 2, 4 \to k = 5, 4, 5$. Apibendrinus $k = 4$ arba 5. $\triangle$

4. x, y, z yra teigiami sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas tik tada, kai $xy+1, yz+1, zx+1$ visi yra sveikųjų skaičių kvadratai (būtų pravartu panagrinėti $t = x+y+z+2xyz \pm 2\sqrt{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}$ ir pasižiūrėti, kokią kvadratinę lygtį šios šaknys tenkina).

   Sprendimas. Duotosios t reikšmės yra lygties

   $$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2(xy + yz + zx + xt + yt + zt) - 4xyzt - 4 = 0(*)$$

   šaknys. Pastebėkime, kad ši lygtis gali būti perrašyta į

   $$(x + y - z - t)^2 = 4(xy + 1)(zt + 1)$$

   $$(x + z - y - t)^2 = 4(xz + 1)(yt + 1)$$

   $$(x + t - y - z)^2 = 4(yz + 1)(xt + 1).$$

   Tarkime egzistuoja trejetai x, y, z tokie, kad $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, bet kažkuris iš $xy+1, yz+1, zx+1$ nėra kvadratas. Iš šių trejetų išrinkime tokį, kad suma $x+y+z$ būtų mažiausia, neprarasdami bendrumo tarikime, kad $x \leqslant y \leqslant z$ ir paimkime $t = x+y+z+2xyz-2\sqrt{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}$. Parodysime, kad $0 < t < z$, bet $(xy+1)(yt+1)(tx+1)$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, nors kažkuris iš $xy+1, yt+1, tx+1$ nėra ir taip gausime prieštara, nes $x + y + t < x + y + z$. Iš išraiškų viršuje turime, kad:

   $$16(xy+1)^2(xz+1)(yt+1)(yz+1)(xt+1) = (xy+1)^2(x+y-z-t)^2(x+t-y-z)^2.$$

   Taigi $(xy+1)(yt+1)(tx+1)$ yra kvadratas, nes $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ yra kvadratas, o dešinė lygybės pusė taip pat kvadratas. Taip pat iš trijų lygties $(*)$ išraiškų viršuje turime, kad $xt+1$ yra kvadratas tada ir tik tada, kad $yz+1$ yra kvadratas ir $xz+1$ yra kvadratas tada ir tik tada, kai $yt+1$ yra kvadratas, taigi kažkuris iš $xy+1, yt+1, tx+1$ nėra kvadratas. Iš pertvarkytos lygties išraiškos:

   $$zt + 1 = \frac{(x + y - z - t)^2}{4(xy + 1)} \geqslant 0,$$

   vadinasi $t \geqslant -1/z$. $z = 1 \to x = y = z = 1$, bet tada $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ nėra kvadratas - prieštara. Taigi $z > 1$ ir $t \geqslant 0$. Jei $t = 0$, tada turime:

   $$4(xy + 1) = (x + y - z)^2, 4(yz + 1) = (-x + y + z)^2, 4(zx + 1) = (x - y + z)^2,$$

prieštara, nes kažkuris iš $xy+1, yt+1, tx+1$ nėra kvadratas. Taigi $t > 0$. Galiausiai paimkime $t' = x+y+z+2xyz+2\sqrt{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}$, t.y. antrąją, didesnę lygties šaknį. Tada:

$$tt' = x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx-4 < z^2.$$

Kadangi $t < t'$, $t < z$, taigi (x,y,t) yra tinkamas sąryšiui sprendinys kurio suma mažesnė už jau turėtą minimalią - prieštara. △

5. x, y, z yra teigiami sveikieji skaičiai, kuriems galioja $0 < x^2+y^2-xyz \leqslant z$. Įrodykite, kad x^2+y^2-xyz yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

   Sprendimas. Tarkime egzistuoja tokie $x, y, z, t > 0$ tokie, kad $z \geqslant t$ ir $x^2+y^2-xyz = t$, bet t nėra sveikojo skaičiaus kvadratas. Paimkime tokį šių skaičių ketvertą, kad suma $x+y$ būtų minimali ir neprarasdami bendrumo tarkime, kad $x \geqslant y$. Sprendžiame kvadratinę lygtį x atžvilgiu ir naudodamiesi Vijeto formulėmis išreiškiame antrą šaknį x':

$$x' = yz - x = \frac{y^2-t}{x}.$$

   Iš pirmos lygties x' yra sveikasis, taip pat

$$x' = \frac{y^2-t}{x} \leqslant \frac{y^2}{x} \leqslant x.$$

   Lygybių atveju turime $t = 0$ - prieštara. Belieka įrodyti, kad $x' > 0$, tada turėsime, kad pora (x', y) yra tinkama sprendinių pora, bet $x'+y < x+y$ - prieštara. Tarkime, kad $x > yz$. Tada $x - yz \geqslant 1$. Vadinasi:

$$yz(x-yz)+y^2-t \geqslant yz+y^2-t \geqslant y^2+(y-1)z \geqslant 0 = x(x-yz)+y^2-t,$$

   $yz \geqslant x$ - prieštara, vadinasi $yz \geqslant x$. Tada turime $y^2 = t - x(x-yz) > t$ $(t \neq y^2)$, vadinasi $x' = \frac{y^2-t}{x} > 0$. To ir reikėjo mūsų norimai prieštarai gauti. △

6. Nelyginiai sveikieji a ir b tenkina $a^2-b^2+1 | b^2-1$. Įrodykite, kad a^2-b^2+1 yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

   Sprendimas. $a^2-b^2+1 | b^2-1 \to a^2-b^2+1 | a^2$. Tarkime, kad $\frac{a^2}{a^2-b^2+1} = k$. Pažymėkime $u = \frac{a+b}{2}$, o $v = \frac{a-b}{2}$. Tada lygtis tampa:

$$u^2-(4k-2)uv+v^2-k = 0.$$

   Jei k yra kvadratas iš turimo sąryšio a^2-b^2+1 taip pat yra kvadratas. Turimai kvadratinei lygčiai iš visų sprendinių porų (u,v), paimkime porą (U,V), tokią, kad suma $U+V$ būtų minimali. Fiksuokime V △

0.2 Kompleksinė geometrija

0.2.1 Teoremos

Taškus kompleksinėje plokštumoje žymėsime mažosiomis raidėmis.Pavyzdžiui, Euklido geometrijos taškus, tokius kaip A, P ir X atitiks kompleksniai skaičiai a, p ir x.

Toliau yra pateiktos dažniausiai naudojamos teoremos, su kurių pagalba geometriniai brėžiniai bus paverčiami į algebrinius pertvarkius.

1 Teorema.

1. *Tiesė ab yra lygiagreti tiesei cd tada ir tik tada, kai* $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.
2. *Tiesė ab yra statmena tiesei cd tada ir tik tada, kai* $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.
3. *Taškai a, b ir c priklauso vienai tiesei tada ir tik tada, kai* $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$.

2 Teorema. *Visiems $\triangle abc$ galioja:*

1. *Jei t yra trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai* $t = \frac{a+b+c}{3}$.
2. *Jei o yra apibrėžtinio apskritimo centras, o h yra aukštinių susikirtimo taškas, tai* $h + 2o = a + b + c$.
3. *Jei S lygus $\triangle ABC$ plotui, tai* $S = \frac{i}{4}\Big(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - b\bar{a} - c\bar{b} - a\bar{c}\Big)$

3 Teorema. *Jei a, b, c ir d priklauso vienetiniam apskritimui, tada:*

1. $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$, *analogiškai su kitomis poromis.*
2. *Jei x priklauso tiesei ab, tai* $\overline{x} = \frac{a+b-x}{ab}$.
3. *Jei x yra tiesių ab ir cd susikirtimo taškas, tai* $x = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

4 Teorema. *Jei a, b ir c priklauso vienetiniam apskritimui, tada:*

1. *Egzistuoja u, v, w tokie kad u^2, v^2, w^2 lygūs a, b, c atitinkamai, o $-uv$, $-vw$, $-wu$ yra $\smile ab$, $\smile bc$, $\smile ca$ vidurio taškai, kuriems nepriklauso taškai c, a, b atitinkamai.*
2. *Jei i yra $\triangle abc$ įbrėžtinio apskritimo centras, tai* $i = -(ab + bc + ca)$.

5 Teorema. *a, b, c ir d priklauso vienam apskritimui, tada ir tik tada, kai:*

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

6 Teorema. *Vienetinis apskritimas yra trikampio abc įbrėžtinis apskritimas, kuris jo kraštines ab, bc, ca liečia taškuose p, q, r, tada:*

1. *Galioja* $a = \frac{2qr}{q+r}$, $b = \frac{2pr}{p+r}$, $a = \frac{2qp}{q+p}$.

2. *Jei h yra $\triangle abc$ aukštinių susikirtimo taškas, tai*

$$h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

3. *Jei o yra apibrėžtinio apie $\triangle abc$ apskritimo centras, tai*

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

0.2.2 Teoremų įrodymai

Čia yra pateiktos tik pačios svarbiausios teoremos, o likusios pirmojo skyrelio teoremos nesunkiai įsirodo naudojantis šiomis, pradinėmis.

Teoremos 1.1 įrodymas

Tarkime, kad atkarpa AB su realiųjų skaičių ašimi Re sudaro kampą $\angle X$, tuomet turime, kad:

$$e^{\angle x\pi} = \frac{a-b}{Ia - bI}.$$

Iš kompleksinių skaičių algebrinių savybių nesunkiai plaukia, kad:

$$e^{2\angle x\pi} = \frac{a-b}{\bar{a} - \bar{b}}.$$

Kad tiesė CD būtų lygiagreti tiesei AB, ji su realiųjų skaičių ašimi RE turi sudaryti arba kampą $\angle X$ arba kampą $\pi + \angle X$. Abiem atvejais, gauname, kad

$$\frac{c-d}{\bar{c} - \bar{d}} = e^{2\angle x\pi}.$$

Dar vienas būdas kaip galima lengviau įsivaizduoti kompleksinių skaičių formules yra suprasti, kad kiekvienas kompleksinis skaičius z kompleksinėje plokštumoje yra visiškai apibrėžtas dviem parametrais - savo ilgiu nuo koordinačių centro IzI ir kampu, kurį sudaro tiesė Oz su realiaja ašimi.

Kompleksiniams skaičiams yra būdinga ši savybė: dauginant (dalinant) du kompleksinius skaičius jų ilgiai yra sudauginami (padalijami) kaip realieji skaičiai, o kampai, kuriuos kompleksiniai skaičiai sudaro su realiaja ašimi, yra sudedami(atimami).
Kai matome išraišką

$$\frac{a-b}{\bar{a} - \bar{b}}$$

suprantame, kad jos rezultatas yra kompleksinis skaičius. Jo ilgis yra lygus vienetui, nes skaičių $a - b$ ir $\bar{a} - \bar{b}$ ilgiai yra vienodi, o dalijant du kompleksinius skaičius jų ilgiai pasidalija. Taigi, ši kompleksinių skaičių trupmena parodo tik vieną kintamą dalyką - kampą, kuriuo yra pasvirusi tiesė ab, tačiau nieko nesako nei apie tai, kur tiesė ab yra, nei kokio ilgio atkarpa ab yra.

Teoremos 1.2 įrodymas

Ši teorema nesunkiai mintinai išplaukia iš Teoremos 1.1 - jeigu mes turime tris taškus a, b ir c tai tiesės ac ir ab turi būti lygiagriačios (o dar tiksliau, sutampančios, nes abiem tiesėms priklauso taškas a).

Teoremos 1.3 įrodymas

Kaip ir įrodydami teoremą 1.1, tarkime, kad atkarpa AB su realiųjų skaičių ašimi Re sudaro kampą $\angle X$, tuomet turime, kad:

$$e^{\angle x\pi} = \frac{a-b}{Ia-bI}.$$

Tiesė CD yra statmena statmena tiesei AB tada ir tik tada, kada tiesė CD su Re ašimi sudaro arba kampą $x + \frac{\pi}{2}$ arba kampą $x - \frac{\pi}{2}$.

Tuomet

$$\frac{c-d}{Ic-dI} = e^{(x+-\frac{\pi}{2})i}.$$

Arba pakėlus kvadratu turime:

$$\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}} = e^{(2x+-\pi)i} = e^{2xi}e^{+-\pi i} = -e^{2xi} = -\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}.$$

Teorema 2.3 - trikampio plotui apsirašyti

Uždaviniuose kartais prireikia surasti, palyginti trikampių plotus. Formulė, kurią dabar įsirodysime, padės aprašyti pasirinkto trikampio plotą:

Trikampio ABC plotas yra lygus

$$\frac{i}{4}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - b\bar{a} - c\bar{b} - a\bar{c})$$

Įrodymas:

Tegu trikampio ABC aukštinė yra BD. Tuomet yra aišku, jog trikampio plotas yra lygus $\frac{1}{2}BD \cdot AC$. Visgi, kompleksinėje plokštumoje yra kiek painiau, nes mes negalime taip dauginti atkarpų $\frac{1}{2}(a-c)(b-d)$ kadangi rezultatas bus kompleksinis skaičius, o plotas turėtų priklausyti realiųjų skaičių aibei. Tad reikia nagrinėti ne atkarpas, kurios yra kompleksiniai skaičiai, o tų atkarpų modulius. Visgi, tokiu atveju reiškiniai pasidaro itin griozdiški, todėl mes panaudosime gudrystę, kuri gerokai palengvins mūsų sprendimą:

Žinome, kad $\angle BDC = \frac{\pi}{2}$, todėl, padauginę atkarpą BD iš i, pasuksime atkarpą BD taip, kad ji būtų lygiagreti su atkarpa AC. Galiausiai, prisiminkime, kad jei norime sudauginti dvi lygiagrečias atkarpas, tai pavertę vieną atkarpą jos jungtine, gausime atkarpų modulių sandaugą. Trupmpiau tariant, turime, kad plotas yra lygus:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a-c)[(b-d)i]$$

Naudodamiesi tuo, kad taškas D priklauso atkarpai AC, bei tuo, kad BD yra statmena AC, lengvai išsireiškiame tašką D:

$$d = \frac{1}{2}(a + b + (\bar{b} - \bar{a})\frac{a - c}{\bar{a} - \bar{c}}).$$

Įsistatę gautąją d israišką į reiškinį $S_{ABC} = \frac{1}{2}(a-c)[(b-d)i]$ bei atlikę nesudėtingus prastinimo veiksmus, gauname, kad

$$\frac{i}{4}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - b\bar{a} - c\bar{b} - a\bar{c}),$$

o tą mums ir reikėjo įrodyti.

0.2.3 Kompleksinė geometrija and vienetinio apskritimo

Šis uždavinių tipas yra, turbūt, pats paprasčiausias. Taip yra dėl to, jog gaunamos išraiškos yra sąlyginai paprastos, nes mes patogiai išnaudojame koordinačių centro parinkimą - visų taškų x ant vienetinio apskritimo jungtiniai yra lygūs $\frac{1}{x}$.

Kokie uždaviniai priklauso šiam skyriui? Ogi tie, kuriuose visi (arba beveik visi) svarbūs taškai priklauso apie pradinį trikampį apibrėžtam apskritimui arba yra to apskritimo stygų bei liestinių susikirtimo taškai.

Spręsdami kompleksinių skaičių metodu mes tarsime, kad visi geometriniai taškai yra tam tikri kompleksiniai skaičiai koordinačių plokštumoje su dviem ašimis - realiąja ir numanomąja. Toliau, mes surasime pradinius taškus (dažniausiai tai bus pradinis trikampis Δabc, tačiau kartais pradiniais laikysime ir daugiau taškų) ir stengsimės kiekvieną naują sąlygoje figūruojantį tašką išreikšti per pradinius kompleksinius taškus, naudodamiesi pirmame skyrelyje pateiktomis formulėmis.

Kad pasidarytų aiškiau, keliaukime prie uždavinių ir pažiūrėkime, kaip šis metodas veikia praktikoje.

PS: Sripresniems matematikams yra rekomenduojama skirti ypatingą dėmesį šviežiems pasaulinės olimpiados uždaviniams, kurie yra sprendžiami skyrelių pabaigose. Šie uždaviniai tik parodo, koks naudingas yra kompleksinių skaičių geometrijoje metodas ir kad šiuo metodu galima išspresti didžiąją dalį IMO ir kitų garsių olimpiadų uždavinių.

1 Pavyzdys. *Apie trikampį ABC apibrežto apskritimo skersmuo tegu bus AD, H - aukštinių susikirtimo taškas (dar žinomas kaip ortocentras), o M - kraštines BC vidurio taškas. Mūsų yra prašoma įrodyti, jog taškas M yra atkarpos HD vidurys.*

Sprendimas.

Tegu vienetinis apskritimas būna apibrėžtas apie ABC apskritimas.

Pagal teoremą 2.2 mes turime, kad

$$h = a + b + c.$$

Kadangi M yra BC vidurio taškas, tai;

$$m = \frac{b + c}{2}.$$

Kadangi skersmens vidurio taškas yra koordinačių pradžios taškas ir jis yra lygus nuliui, tai taškas d apsirašo taip:

$$d = -a.$$

Galiausiai mūsų laukia visai paprastutis aritmetinis veiksmas - surasti DH vidurio tašką, dar žinomą $\frac{d+h}{2}$ =(įsistatome)= $\frac{(-a)+a+b+c}{2} = \frac{b+c}{2}$. O, juk tai yra mūsų jau surastas taškas M, būtent tai, ką mums ir reikėjo įrodyti! △

2 Pavyzdys. *USAMO'2010 Sąlyga*

Duotas iškilas apibrėžtinis penkiakampis $AXYZB$ toks, kad AB yra apibrėžtojo apskritimo skersmuo. Pažymėkime P, Q, R, S statmenimis iš taško Y tiesėms AX, BX, AZ, BZ atitinkamai. Kad įveiktumėte šį uždavinį, Jūs turite įrodyti, kad smailusis kampas tarp tiesių PQ ir RS yra dvigubai mažesnis nei kampas $\angle XOZ$.

Sprendimas.

Žinoma, tarsime, kad apie penkiakampį apibrėžtasis apskritimas yra vienetinis. Tuomet $a = -b$, nes ab yra skersmuo.

Suraskime taškus p, q, r, s naudodamiesi tuo, kad visi šie taškai yra statmenys iš taškų ant vienetinio apskritimo ant to apskritimo stygų (teorema 3.2):

$$p = \frac{1}{2}(a + x + y - \frac{ax}{y}),$$

$$q = \frac{1}{2}(a + z + y - \frac{az}{y}),$$

$$r = \frac{1}{2}(-a + x + y - \frac{ax}{y}),$$

$$s = \frac{1}{2}(-a + z + y - \frac{az}{y}).$$

Galiausiai lieka apdoroti sąlygą, ką mums reikia įrodyti. Iš tiesų yra ganėtinai sudėtinga tvarkyti kompleksiniais skaičiais kampų lygybes, kai kampai yra ne lygūs, o keletą kartų didesni vienas už kitą. Šiuo atveju, nesunkus ir labai visus skaičiavimus pagražinantis būdas pasilengvinti prastinimą yra Euklidinės geometrijos panaudojimas: pagal įbrėžtinius kampus turime, kad $\angle XOZ = 2\angle XAZ$, todėl, mums lieka įrodyti, jog $\angle XAZ$ yra lygus kampui tarp tiesių PQ ir RS. Šis kampų sulyginimas yra ekvivalentus kompleksiniuose skaičiuose šiai lygybei, kurią reikia įrodyti:

$$\frac{x-a}{\bar{x}-\bar{a}} : \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} = \frac{p-r}{\bar{p}-\bar{r}} : \frac{q-s}{\bar{q}-\bar{s}}$$

Įsistačius vietoje p, q, r, s žinomas išraiškas per a, x, y, z, gauname, kad lygybė teisinga, todėl uždavinys išspęstas. △

3 Pavyzdys. *Sąlyga (Simediana)*

Duotas apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas, kurio liestinės iš taškų A ir B susikerta taške X. Jei M yra kraštinės AB vidurio taškas, įrodykite, kad $\angle ACX = \angle BCM$.

Sprendimas.
Pagal teoremą 3.3 turime, kad $x = \frac{2ab}{a+b}$.
Toliau mes išsireikšime kampus:

$$e^{2\angle ACXi} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} : \frac{c-x}{\bar{c}-\bar{x}} = -\frac{2ab-ac-bc}{2bc-ab-b^2}.$$

Analogiškai apibrėžiame kampą $\angle BCM$, kur $m = \frac{a+b}{2}$:

$$e^{2\angle BCMi} = \frac{m-c}{\bar{m}-\bar{c}} : \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}} = -\frac{2ab-ac-bc}{2bc-ab-b^2}.$$

Taigi, mes gauname, kad $e^{2\angle ACXi} = e^{2\angle BCMi}$, iš ko seka, kad arba $\angle ACX = \pi + \angle BMC$, kas yra neįmanoma, nes Δabc yra smaiusis trikampis, arba $\angle ACX = \angle BCM$, ką mums ir reikėjo įrodyti. △

4 Pavyzdys. *IMO 2009*
Tegul O yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Taškai P ir Q atitinkamai yra atkarpų CA ir AB vidiniai taškai. Tegul Γ yra apskritimas, einantis per atkarpų BP, CQ ir PQ vidurio taškus K, L ir M, o tiesė PQ yra apskritimo Γ liestinė. Įrodykite, kad $OP = OQ$.

Sprendimas.
Tegu apie △abc apibrėžtas apskritimas yra vienetinis. Kadangi p ir q priklauso ca ir ab, atitinkamai, tai

$$\overline{p} = \tfrac{a+c-p}{ac},$$
$$\overline{q} = \tfrac{a+b-q}{ab}.$$

Mums reikia įrodyti:

$$(p-o)(\overline{p-o}) = (q-o)(\overline{q-o}) \Leftrightarrow p\overline{p} = q\overline{q} \Leftrightarrow \tfrac{p(a+c-p)}{ac} = \tfrac{q(a+b-q)}{ab}.$$

Liko neišnaudota viena sąlyga - tiesė pq liečia apskritimą Γ. Galima bandyti susirasti apskritimo centrą ir įrodyti kad statmuo iš m tiesei pq eina per Γ centrą, arba naudotis tuom, kad $\angle qmk = \angle mlk$ tada ir tik tada, kai tiesė pq yra Γ liestinė taške m. Pasižymime $\omega = \angle qmk = \angle mlk$, tada:

$$\tfrac{m-q}{|m-q|}\omega = \tfrac{m-k}{|m-k|} \Rightarrow \tfrac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}}\omega^2 = \tfrac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}} \Leftrightarrow \omega^2 = \tfrac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}}\tfrac{\overline{m}-\overline{q}}{m-q}.$$

Analogiškai ir su m, l, k:

$$\tfrac{l-m}{|l-m|}\omega = \tfrac{l-k}{|l-k|} \Rightarrow \omega^2 = \tfrac{l-m}{\overline{l}-\overline{m}}\tfrac{\overline{l}-\overline{k}}{l-k}$$

Sulyginame reiškinius, įsistatome m, k ir l reikšmes, tada p ir q jungtinius:

$$\frac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}}\frac{\overline{m}-\overline{q}}{m-q}=\frac{l-m}{\overline{l}-\overline{m}}\frac{\overline{l}-\overline{k}}{l-k}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (q-b)(\overline{p}-\overline{q})(c-p)(\overline{c}+\overline{q}-\overline{b}-\overline{p})=(p-q)(\overline{q}-\overline{b})(c+q-b-p)(\overline{c}-\overline{p})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (q-b)(\frac{ab-ac+qc-pb}{abc})(c-p)(\frac{pb-qc}{abc})=(p-q)(\frac{b-q}{ab})(\frac{p-c}{ac})(c+q-b-p),$$

gautą lygybę galima nesunkiai suprastinti ir pertvarkyti į reiškinį, kurį mums reikėjo įrodyti. △

0.2.4 Komplikuotesni uždaviniai su apskritimais

Iš tiesų, šio skyriaus uždaviniai mažai skiriasi nuo praeitojo, nes mes vėl turime vieną apskritimą, aplink kurį sukasi visas uždavinio veiksmas. Visgi, formulės, kurias čia naudosime yra kiek komplikuotesnės. Vienas iš variantų, kas pasikeičia, gali būti tai, jog vienetinis apskritimas tampa į pradinį trikampį įbrėžtu apskritimu, arba mes naudojamės teoremos 4 savybėmis ir pradiniais taškais paimame u^2,v^2 ir w^2, kas leidžia pakankamai gražiai surasti vienetinio apskritimo vidurio lankus ir pusiaukampinių susikirtimo tašką. Vėlgi, visą šią abstrakčią litaniją geriausiai atspindi uždavinių sprendimo pavyzdžiai.

5 Pavyzdys. *(Litmo 2005)Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Taškas M yra lanko AC (kuriam nepriklauso viršūnė B) vidurio taškas, o N yra lanko AB (kuriam nepriklauso viršūnė C) vidurio taškas. Atkarpos MN ir AB kertasi taške K. Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras yra O. Įrodykite, kad KO yra lygiagreti kraštinei AC.*

Sprendimas.
Tarsime, kad apie ABC apibrėžtasis apskritimas yra vienetinis. Šiame uždavinyje mums reikia gudriai apsirašyti taškus M, N ir O, todėl mes taikysime teoremą 4:

$$\begin{aligned} a &= x^2,\\ b &= y^2,\\ c &= z^2,\\ o &= -(xy+xz+yz),\\ m &= -xz,\\ n &= -xy. \end{aligned}$$

Kadangi k yra stygų ab ir mn susikirtimo taškas, tai tašką k surasime pagal teoremą 3.3:

$$k=\frac{x^2yz(x^2+y^2)+x^2y^2(xy+xz)}{x^2yz-x^2y^2},$$

Galiausiai lieka įrodyti, kad ko yra statmena ac pagal teoremą 1.2:

$$\frac{k-o}{\bar{k}-\bar{o}}=x^2z^2=-\frac{x^2-z^2}{\bar{x}^2-\bar{z}^2},$$

Taigi, gavome būtent tai, ką ir reikėjo įrodyti! △

6 Pavyzdys. *Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas su centru I liečia kraštines BC, AC, AB taškuose D, E ir F atitinkamai. Tegu M ir N yra atkarpų AB ir BC vidurio taškai, o X yra taškas, kur susikerta tiesės NM ir DF. Reikia įroryti, kad (a) tiesės IC, NM, FD eina per vieną tašką, o didesni adrenalino fanatikai galės pabandyti dar ir įrodyti, jog galioja lygybė (b)* $\angle AXC = \frac{\pi}{2}$.

Sprendimas.

Pradėsime nuo (a) dalies. Vienetinis apskritimas bus įbrėžtinis į ΔABC apskritimas, todėl mes stengsimės visus taškus išreikšti per d, e ir f.

Tarkime, kad X yra taškas, kur kertasi DF ir IC. Tuomet užduotis prašo mūsų įrodyti, kad X priklauso tiesei NM. Aprašysime duotas sąlygas:

Trikampio kraštinės yra įbrėžto trikampio liestinės, todėl turime, jog:

$$a = \frac{2ef}{e+f},$$

$$b = \frac{2df}{d+f},$$

$$c = \frac{2ed}{e+d}.$$

Svarbiausias ir patogiausias dalykas, kurį mums duoda vienetinio apskritimo parinkimas, yra tai, jog galioja lygybės: $\bar{d} = \frac{1}{d}, \bar{e} = \frac{1}{e}, \bar{f} = \frac{1}{f}$. Šių lygybių teisingumas plaukia iš paties kompleksinių skaičių jungtinių apibrėžimo bei fakto, kad visų kompleksinių skaičių ant vienetinio apskritimo ilgiai yra lygūs 1.

Iš to seka, kad

$$\bar{a} = \frac{2}{e+f},$$

$$\bar{b} = \frac{2}{d+f},$$

$$\bar{c} = \frac{2}{e+d}.$$

Naudojamės vektorių savybėmis kompleksiniams skaičiams ir gauname, jog

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{c+b}{2}.$$

Taškas X priklauso tiesei IC:

$$\frac{c-0}{\bar{c}-0} = \frac{x-0}{\bar{x}-0} \quad \leftrightarrow \quad \bar{x} = \frac{\bar{c}}{c} \cdot x$$

Taškas X taip pat priklauso tiesei FD, todėl turime, kad:

$$\frac{f-d}{\bar{f}-\bar{d}} = \frac{x-f}{\bar{x}-\bar{f}} \quad \leftrightarrow \quad \bar{x} = \frac{\bar{f}-\bar{d}}{f-d} \cdot (x-f) + \bar{f}$$

Sulyginame gautas dvejas $\bar{x}$ išraiškas ir gauname, kad

$$x = e \cdot \frac{d+e}{f+e}$$

Lieka parodyti, jog gautas taškas X priklauso atkarpai NM, o tai yra ekvivalentu šiai lygybei:

$$\frac{m-n}{\bar{m}-\bar{n}} = \frac{x-n}{\bar{x}-\bar{n}}$$

O tai mes gauname įsistatę jau turimas taškų išraiškas m, n ir x per taškus d, e ir f.

Keliaujame prie (b) dalies: ši dalis yra sunki tik tuo atveju, jei spręstume uždavinį besinaudodami klasikine Euklidine geometrija. Sprendžiant kompleksinių skaičių metodu, (b) dalis pasidaro juokingai paprasta, ypač turint iš (a) dalies visų reikalingų taškų nesudėtingas išraiškas. Tereikia įrodyti, jog galioja lygybė: $\frac{a-x}{\bar{a}-\bar{x}} = -\frac{x-c}{\bar{x}-\bar{c}}$, kas taip pat tiesiogiai plaukia įsistačius turimas išraiškas ir šiek tiek praprastinus gautas trupmenas.
Štai ir įveiktas šis uždavinys! $\triangle$

7 Pavyzdys. *IMO 2010*
Tegul I yra trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas, o Γ – apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Tiesė AI kerta Γ taške D, kur $D \neq A$. Taškas E priklauso apskritimo Γ lankui $\smile BDC$, o taškas F – atkarpai BC. Be to, $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Taškas G yra atkarpos IF vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesių DG ir EI susikirtimo taškas priklauso apskritimui Γ.

Sprendimas.
Tegu Γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Naudojamės 4.2 teorema: tegu $a = u^2$,$b = v^2$,$c = w^2$, tada

$$i = -(uv + vw + wu).$$

Tegu af kerta Γ taške $h \neq a$. $\angle bah = \angle eac = \alpha$, pažymime $\phi = e^{i\alpha}$. Tada $\frac{h-a}{|h-a|}\phi = \frac{b-a}{|b-a|}$ Pakėlę kvadratu ir pasinaudoję 3.1 teorema gauname $h = \frac{v^2}{\phi^2}$. Analogiškai randame

$$e = \phi^2 w^2.$$

Tegu ei kerta Γ taške $x \neq e$. Iš 1.1 teoremos gauname $\frac{e-x}{\bar{e}-\bar{x}} = \frac{e-i}{\bar{e}-\bar{i}}$ ir kadangi $x\overline{x} = 1$, tai

$$x = -uvw\frac{w^2\phi^2+uv+vw+wu}{uvw+w^2\phi^2(u+v+w)}.$$

Prisiminę teoremą 3.3, randame

$$f = \frac{v^2w^2(u^2+\frac{v^2}{\phi^2}) - \frac{u^2v^2}{\phi^2}(v^2+w^2)}{v^2w^2 - \frac{u^2v^2}{\phi^2}} = \frac{w^2(u^2\phi^2+v^2)-u^2(v^2+w^2)}{w^2\phi^2-u^2}.$$

Taškas $d = -vw$ pagal 4.1 teoremą, nes ai yra trikampio abc pusiaukampinė.

Galiausiai $g = \frac{1}{2}(f + i)$ ir pagal 1.1 teoremą įrodome, kad d, g ir x priklauso vienai tiesei. △

8 Pavyzdys. *IMO 2009*

Tegul O yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Taškai P ir Q atitinkamai yra atkarpų CA ir AB vidiniai taškai. Tegul Γ *yra apskritimas, einantis per atkarpų BP, CQ ir PQ vidurio taškus K, L ir M, o tiesė PQ yra apskritimo* Γ *liestinė. Įrodykite, kad OP = OQ.*

Sprendimas.

Tegu apie △abc apibrėžtas apskritimas yra vienetinis. Kadangi p ir q priklauso ca ir ab, atitinkamai, tai

$$\overline{p} = \frac{a+c-p}{ac},$$

$$\overline{q} = \frac{a+b-q}{ab}.$$

Mums reikia įrodyti:

$$(p-o)(\overline{p-o}) = (q-o)(\overline{q-o}) \Leftrightarrow p\overline{p} = q\overline{q} \Leftrightarrow \frac{p(a+c-p)}{ac} = \frac{q(a+b-q)}{ab}.$$

Liko neišnaudota viena sąlyga - tiesė pq liečia apskritimą Γ. Galima bandyti susirasti apskritimo centrą ir įrodyti kad statmuo iš m tiesei pq eina per Γ centrą, arba naudotis tuom, kad $\angle qmk = \angle mlk$ tada ir tik tada, kai tiesė pq yra Γ liestinė taške m. Pasižymime $\omega = \angle qmk = \angle mlk$, tada:

$$\frac{m-q}{|m-q|}\omega = \frac{m-k}{|m-k|} \Rightarrow \frac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}}\omega^2 = \frac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}}\frac{\overline{m}-\overline{q}}{m-q}.$$

Analogiškai ir su m, l, k:

$$\frac{l-m}{|l-m|}\omega = \frac{l-k}{|l-k|} \Rightarrow \omega^2 = \frac{l-m}{\overline{l}-\overline{m}}\frac{\overline{l}-\overline{k}}{l-k}$$

Sulyginame reiškinius, įsistatome m, k ir l reikšmes, tada p ir q jungtinius:

$$\frac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}}\frac{\overline{m}-\overline{q}}{m-q} = \frac{l-m}{\overline{l}-\overline{m}}\frac{\overline{l}-\overline{k}}{l-k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q-b)(\overline{p}-\overline{q})(c-p)(\overline{c}+\overline{q}-\overline{b}-\overline{p}) = (p-q)(\overline{q}-\overline{b})(c+q-b-p)(\overline{c}-\overline{p}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (q-b)(\frac{ab-ac+qc-pb}{abc})(c-p)(\frac{pb-qc}{abc}) = (p-q)(\frac{b-q}{ab})(\frac{p-c}{ac})(c+q-b-p),$$

gautą lygybę galima nesunkiai suprastinti ir pertvarkyti į reiškinį, kurį mums reikėjo įrodyti. △

0.2.5 Uždaviniai, kuriuose yra ieškoma ploto

Šiame skyriuje atkreipiame Jūsų dėmesį į teoremą 2.3. Neturint šios teoremos mums reikėtų gerokai paprakaituoti, sunkant galvą, kaip rasti kompleksinėje plokštumoje realiaisiais vienetais matuojamą plotą. Smalsesniems skaitytojams, norintiems sužinoti, kaip buvo sugalvota šį plotą surasti, rekomenduojama grįžti į antrą skyrelį, kur yra pateiktas teoremos įrodymas, o mes keliaujame toliau, prie uždavinių pavyzdžių.

9 Pavyzdys. *(Litmo 2008)Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Atkarpa BD yra to apskritimo skersmuo. Iš viršūnės A nubrėžta aukštinė kerta apskritimą taške E. Įrodykite, kad keturkampio $BECD$ plotas yra lygus trikampio ABC plotui.*

Sprendimas.
Šiame uždavinyje mums labai pravers plotų formulė.
Pasiėmę vienetiniu apskritimu apie ABC apibrėžtą apskritimą, gauname, kad $d = -b$ bei iš teoremos 3.1:

$$e = \frac{bc}{a} = bc\bar{a}.$$

Lieka pagal teoremą 2.3 apsirašyti duotuosius plotus:

$$S_{ABC} = \frac{i}{4}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - \bar{a}b - \bar{b}c - \bar{c}a),$$

$$S_{BECD} = S_{BEC} + S_{BCD} =$$
$$\tfrac{i}{4}(b\bar{e} + e\bar{c} + c\bar{b} - \bar{b}e - \bar{e}c - \bar{c}b) + \tfrac{i}{4}(b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{b} - \bar{b}c - \bar{c}d - \bar{d}b) =$$
$$\tfrac{i}{4}(b\bar{b}ca + bc\bar{a}\bar{c} + c\bar{b} - \bar{b}bc\bar{a} - \bar{b}cac - \bar{c}b) + \tfrac{i}{4}(b\bar{c} + c\bar{(} - b) + (-b)\bar{b} - \bar{b}c - \bar{c}(-b) - (\bar{-}b)b) =$$
$$\tfrac{i}{4}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - \bar{a}b - \bar{b}c - \bar{c}a) = S_{ABC}.$$

Štai ir uždavinys nugriautas! △

10 Pavyzdys. *IMO 2007*
Trikampio ABC kampo BCA pusiaukampinė kerta apibrėžtą apie ABC apskritimą kitame taške R. Tarkime, kad K yra atkarpos BC vidurio taškas, o L yra atkarpos AC vidurio taškas. Tiesė, kuri eina per tašką K ir yra statmena atkarpai BC, kerta tiesę CR taške P, o tiesė, kuri eina per tašką L ir yra statmena atkarpai AC, kerta tiesę CR taške Q. Įrodykite, kad trikampių RPK ir RQL plotai yra lygūs.

Sprendimas.
Naudosimės 4.1 teorema: tarsime, kad $a = u^2$, $b = v^2$ ir $c = w^2$. Tada $r = -uv$, o $l = \frac{u^2+w^2}{2}$. Pasinaudoję tuo, kad q priklauso stygai rc ir tuo, kad ql statmena ac, randame $q = \frac{a(c^2-ab)}{(a-b)}$. Pažymime: S - trikampio rql plotas, o $t = (r\bar{q} + q\bar{l} + l\bar{r})$, tada $S = \frac{i}{4}(t - \bar{t})$. Randame:

$$t = \tfrac{c^4(b-2a)+c^2(3a^2b-2ab^2+b^3)+a^2b^3-2a^3b^2}{2abc^2(a-b)}$$

$$-\bar{t} = \tfrac{c^4(a-2b)+c^2(3b^2a-2ba^2+a^3)+b^2a^3-2b^3a^2}{2abc^2(a-b)},$$

gauname:

$S = \frac{i}{4}(t - \overline{t}) = \frac{i}{4}\frac{-(a+b)c^4+(a^3+b^3+a^2b+b^2a)c^2-(a^2b^3+a^3b^2)}{2abc^2(a-b)}$

Matome, kad gauta ploto išraiška yra simetriška a ir b atžvilgiu (t.y. išraiškoje sukeitę a su b vietomis gausime tokį pat plotą), todėl $\triangle$pkr plotas bus lygus S. $\triangle$

0.2.6 Įvairiausių uždavinių sprendimas

Šiame skyriuje bus taikomos visos pirmojo skyrelio teoremos. Uždavinių sprendimai taps itin įmantrūs, nes bus išnaudojamos pačios sudėtingiausios savybės - sprendžiama su konkrečiais kampais, tokiais kaip $\frac{\pi}{4}$ ar $\frac{\pi}{3}$, uždaviniuose dings pradinis vienetinis apskritimas ir teks verstis be jo, arba, dar įdomiau, išdygs keli apskritimai su kuriais teks skaitytis!

Prižadėję visą gausybę naujovių skubame prie pavyzdžių, parodysiančių, kad kompleksinių skaičių metodas reikalauja iš matematiko nemažai išradingumo.

11 Pavyzdys. *MEMO 2010*
Duotas keturkampis ABCD, apie kurį galima apibrėžti apskritimą. E yra toks įstrižainės AC taškas, kad AD = AE ir CB = CE. M yra apskritimo k, apibrėžto apie trikampį BDE, centras. Apskritimas k kerta tiesę AC taškuose E ir F . Įrodykite, kad tiesės FM, AD ir BC kertasi viename taške.

Sprendimas.
Tegu apie b, d, e apibrėžtas apskritimas yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, tada f irgi priklauso šiam apskritimui, o $m = 0$. Kadangi $a \in ef$ iš 3.2 teoremos gauname: $\overline{a} = \frac{e+f-a}{ef}$. $ae = ad$, tai $|a-e| = |a-d| \Leftrightarrow (a-e)\overline{(a-e)} = (a-d)\overline{(a-d)}$. Iš šių lygčių išsireiškiame a:

$$a = \frac{d(e+f)}{d+f}.$$

Analogiškai randame c:

$$c = \frac{b(e+f)}{b+f}.$$

Kadangi a, b, c, d priklauso vienam apskritimui, tai:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \overline{\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right)} \Leftrightarrow bed = f^3.$$

Tarkime, kad fm ir ad kertasi taške x_1, o fm ir bc taške x_2. Kadangi $x_1, x_2 \in fm$, tai iš 1.1 teoremos gauname $\frac{x_i - m}{(\overline{x_i} - \overline{m})} = \frac{f-m}{(\overline{f} - \overline{m})} \Leftrightarrow \overline{x_i} = \frac{x_i}{f^2}$ $(i \in \{1, 2\})$. Kadangi $x_1 \in ad$, tai iš 1.1 teoremos gauname $\frac{x_1 - d}{(\overline{x_1} - \overline{d})} = \frac{a-d}{(\overline{a} - \overline{d})} \Rightarrow x_1 = \frac{df^2(e+f)}{(f^3+d^2e)}$, analogiškai $x_2 = \frac{bf^2(e+f)}{(f^3+b^2e)}$.
Iš čia $x_1 = x_2 \Rightarrow bed = f^3$ $\triangle$

12 Pavyzdys. *IMO 2009*
Tegul ABC yra lygiašonis trikampis, kuriame AB = AC. Kampo CAB pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D, o kampo ABC pusiaukampinė kerta kraštine CA taške

E. Taškas K yra įbrėžto į trikampi ADC apskritimo centras, o $\angle BEK = 45^0$*. Raskite visas įmanomas* $\angle CAB$ *reikšmes.*

Sprendimas.

Spresdami geometrinius uždavinius kompleksiniais skaičiais kartais turime performuluoti sąlygą taip, kad sprendžiant gautume paprastesnius reiškinius ir lygybės netaptų pernelyg komplikuotos. Pasižymime tiesių ad ir ck susikirtimo tašką g, o $\angle acd = 2\alpha$. Nesunku įsitikinti susižymėjus kampus, kad $AB = AC$ tada ir tik tada, kai $\angle kec = 3(45^0 - \alpha)$. Todėl spręsdami uždavinį tašką b galime pamiršti, o suradę α reikšmes, nesunkiai surasime ir ieškomojo kampo reikšmes.

Tegu įbrėžtinis į adc apskritimas yra vienetinis ir liečia kraštines da, ac, cd taškuose p, q ir r. Pasižymime $\phi = e^{i45^0}$ ir $\omega = e^{i\alpha}$. Tada $r = p\phi^2$, nes $\angle pkr = 90^0$.

Kadangi $g \in ad$, tai $\overline{g} = \frac{2p-g}{p^2}$, ir $g \in ck$, $\frac{c}{\overline{c}} = \frac{g}{\overline{g}}$, tai

$$g = \frac{2pq\phi^2}{p+q\phi^2}.$$

Kadangi $e \in ac$, tai $\overline{e} = \frac{2q-e}{q^2}$ ir $\angle kec = 45^0 \Rightarrow \frac{e}{\overline{e}}\frac{\phi^6}{\omega^6} = \frac{e-q}{\overline{e}-\overline{q}}$ ir $\phi^4 = -1$, tai

$$e = \frac{2q\omega^6}{\omega^6+\phi^2}.$$

$$\angle gek = 45^0 \Rightarrow \frac{e-g}{\overline{e}-\overline{g}}\phi^2 = \frac{e}{\overline{e}}. \quad (*)$$

Apskaičiuojame:

$$\frac{e}{\overline{e}} = \frac{\omega^6 q^2}{\phi^2}$$

$$\frac{1}{2}(e-g) = \frac{q(q\omega^6\phi^2+p\omega^6-p\omega^6\phi^2+p)}{(\omega^6+\phi^2)(p+q\phi^2)}$$

$$\frac{1}{2}(\overline{e}-\overline{g}) = \frac{p\phi^2-q\omega^6-q\phi^2-q}{q(\omega^6+\phi^2)(p+q\phi^2)}$$

Įsistatome į (*) ir suprastinę gauname:

$$(q\omega^6 - p)(\omega^6+1) = 0. \quad (**)$$

Išsprendę $(\omega^6+1) = 0$ lygtį ir atsižvelgę į tai, kad $\alpha < 45^0$, gauname vienintelę reikšmę $\alpha = 30$. Tada mūsų ieškomas kampas yra 60^0.

Antras atvejis, kai $q\omega^6 = p$. Nesunkiai paskaičiuojame (tiesiog susižymėję kampus), kad $\angle pkq = 90^0 + 2\alpha$, todėl gauname:

$$\omega^6 = e^{i6\alpha} = e^{i(90^0+2\alpha)} \Leftrightarrow 6\alpha = 90^0 + 2\alpha + 2k\pi \text{ (kažkokiam } k \in \mathbb{Z}),$$

Matome, kad tinka tik viena α reikšmė, kai $4\alpha = 90^0$, tai ieškomas kampas irgi lygus 90^0.

Kadangi iš pradinių sąlygų gavome (**), tai dar nereiškia, kad abu sprendiniai tenkina pradinę sąlygą, todėl turime juos abu įsistatyti ir patikrinti ar tokie trikampiai egzistuoja, tenkinantys visas sąlygas. Galima tarti, kad $\angle cab = 60^0, 90^0$ ir parodyti, kad $\angle bek = 45^0$. $\triangle$

13 Pavyzdys. *APMO 2005*

Tegu ABC smailusis trikampis, kurio $\angle BAC = 60^0$ ir $AB > AC$. Tegu I įbrėžtinio apskritimo centras, o H - aukštinių susikirtimo taškas. Įrodykite, kad $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

Sprendimas.

Tegu įbrėžtinis į trikampį abc apskritimas yra vienetinis, kuris liečia kraštines ab, bc, ca taškuose r, p, q. Pažymime: $\angle ahi = \alpha$, $\angle abc = \beta$ ir $\omega = e^{i\alpha}$, $\phi = e^{i\beta}$.

Tada $i = 0$, $a = \frac{2rq}{(r+q)}$, $b = \frac{2rp}{(r+p)}$, o $\angle riq = 120^0$ iš keturkampio $riqa$ kampų. Gauname, kad $e^{i120^0} = r/q$, todėl $\left(\frac{r}{q}\right)^3 = 1$. Iš čia gauname:

$$r^2 + rq + q^2 = 0 \tag{*}$$

Pasinaudoję teoremą 6.2 ir (*) gauname:

$$h = \frac{2qr(pq+qr+rp)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

ω tenkina:

$$\frac{a-h}{\bar{a}-\bar{h}}\omega^2 = \frac{i-h}{\bar{i}-\bar{h}} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{qr}{p^3}\frac{(pq+qr+rp)}{(p+q+r)}$$

ϕ tenkina:

$$\frac{p-b}{|p-b|}\phi = \frac{r-b}{|r-b|} \Rightarrow \phi^3 = -\frac{r^3}{p^3}$$

Pasinaudoję (*) įrodome, kad

$$\phi^3 = \omega^2 \Rightarrow 3\beta = 2\alpha + 360^0 k, \text{ kažkokiam } k \in \mathbb{Z}.$$

Jei $k > 0$, tai $b > 120^0$, kas neįmanoma. Jei $k < 0$, tai $\alpha > 180^0 \Rightarrow \angle bah < \angle bai \Rightarrow ab < ac$, kas nėra teisinga. Todėl $k = 0$ ir $3\beta = 2\alpha$. △

14 Pavyzdys. *Duota trapecija $ABCD$ (su pagrindais BC ir AD), o jos įstrižainių susikirtimo taškas yra lygus P. Taškas M yra BC vidurio taškas bei yra žinoma, kad $\angle ABD + \angle ACD = \pi$. Ant kraštinės AD paimtas taškas X, toks, kad $(\frac{PD}{PA})^2 = \frac{DX}{XA}$. Įrodykite, kad MX yra statmena trapecios pagrindams.*

Sprendimas. Šį kartą spręsime kompleksinių koordinačių centru imdami tašką p. Iš Euklidinės geometrijos nesunku pastebėti, kad ΔAPD yra panašus su ΔCDP. Šis faktas yra labai naudingas tvarkantis su trapecijos kraštinėmis, nes gauname lygybes:

$$c = ka, b = kd,$$

kur k yra racionalusis skaičius. Kadangi yra žinoma, jog $(\frac{PD}{PA})^2 = \frac{DX}{XA}$, tai pagal teoremą XXX gauname, kad

$$x = \frac{da\bar{a} + ad\bar{d}}{a\bar{a} + d\bar{d}},$$

nes $(\frac{PD}{PA})^2 = \frac{DX}{XA} = \frac{d\bar{d}}{a\bar{a}}$.

Koeficientą k mums padės surasti žinojimas, kad $\angle ABD + \angle ACD = \pi$, nes tai duoda lygybę:

$$\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} : \frac{b-d}{\bar{b}-\bar{d}} = \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}} : \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}}$$

Sutvarkius lygybę, gauname, kad

$$k = \frac{\bar{d}a + \bar{a}d}{a\bar{a} + d\bar{d}}.$$

Galiausiai, MX yra statmena trapecijos pagrindams tada ir tik tada, kai pagal teoremą 1.2 :

$$\frac{m - x}{\bar{m} - \bar{x}} = -\frac{a - d}{\bar{a} - \bar{d}},$$

kur žinome, jog $m = k \cdot \frac{a+d}{2}$, nes M yra atkarpos BC vidurio taškas:

$$\frac{m - x}{\bar{m} - \bar{x}} = \frac{(a - b)(\bar{a}b - \bar{b}a)}{(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b}a - \bar{a}b)} = -\frac{a - d}{\bar{a} - \bar{d}}.$$

Tad, uždavinys išspęstas!

$\triangle$

15 Pavyzdys. *Tegul F yra taškas ant trapecijos $ABCD$ pagrindo AB, toks kad $DF = CF$. Bei pavadinkime raide E trapecijos įstrižainių susikirtimo tašk1, o taškais O_1 ir O_2 apibrėžtų apie ΔADF ir ΔFBC apskritimų centrus. Įrodykite, kad $FE \perp O_1O_2$.*

Sprendimas.

Raktas į šio uždavinio sprendimą yra teisingas koordinačių centro parinkimas. Šiuo atveju, ypač gražiai tvarkosi reiškiniai, jei pasirenkame centru tašką F. Kodėl gražiai? Ogi todėl, kad tuomet $d = \bar{c}$, (nes $FC = FD$ ir mes galime tarti, jog Ox, realiųjų skaičių ašis yra statmena trapecijos pagrindams). Toliau darosi dar gražiau, nes mes pastebime, jog taškai a ir b priklauso menamųjų skaičių Oy ašiai, todėl galime nesunkiai (mintyse įsivaizduodami kompleksinę plokštumą ir prisiminę, jog jungtinis tai taškas simetriškas pradiniam realiųjų skaičių Ox ašies atžvilgiu) pastebėti jog $\bar{a} = -a$ bei $\bar{b} = -b$.

Toliau eina kiek griozdiškesni reiškiniai - reikia surasti o_1 bei o_2 taškus. Šie taškai yra ne kas kita, kaip kraštinių vidurio statmenų susikirtimai, todėl pagal teoremos 1 formules gauname, kad:

$$o_1 = \frac{ad(\bar{a} - \bar{d})}{\bar{a}d - a\bar{d}} = \frac{\bar{c}(a + c)}{\bar{c} + c}$$

bei

$$o_2 = \frac{bc(\bar{b} - \bar{c})}{\bar{b}c - b\bar{c}} = \frac{c(b + \bar{c})}{\bar{c} + c}.$$

Dabar dorosime tašką E: šį tašką apsibrėšime per dvi lygtis: naudojantis teorema 1.3 taškai a, c, e bei d, b, e priklauso vienai tiesei, gauname:

$$\frac{a - c}{\bar{a} - \bar{c}} = \frac{e - a}{\bar{e} - \bar{a}}$$

$$\frac{b - d}{\bar{b} - \bar{d}} = \frac{e - b}{\bar{e} - \bar{b}}.$$

Išsireiškę iš šių dviejų lygčių $\bar{e}$ ir juos sulyginę, gauname, kad

$$e = \frac{a\bar{c} - bc}{a + \bar{c} - b - c}.$$

Galiausiai mums lieka įsistatyti visas gautąsias grožybes tam, kad išspręstume uždavinį - įrodytume, kad $FE \perp O_1O_2$. Pastaroji sąlyga pagal teoremą 1.2 yra ekvivalenti sąlygai :

$$\frac{o_1 - o_2}{\bar{o}_1 - \bar{o}_2} = -\frac{f - e}{\bar{f} - \bar{e}},$$

o tai išeina elementariausiai prastinantinant $o_1 - o_2 = \frac{a\bar{c} - cb}{c + \bar{c}}$. △

16 Pavyzdys. *(„Baltic Way" 2002) Tegu ABC yra smailusis trikampis $\angle BAC > \angle BCA$, ir tegu D yra toks taškas ant kraštinės AC, kad $AB = BD$. Dar daugiau, F yra toks ypatingas taškas ant apibrėžto apie ABC apskritimo, kad tiesė FD yra statmena BC bei taškai F, B yra ant priešingų pusių kraštinės AC. Įrodykite, kad tiesė FB yra statmena kraštinei AC.*

Sprendimas.
Tegu apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas yra vienetinis.

Paimsime tokį tašką d', kad fd' būtų statmena bc bei d' priklausytų stygai ac ir įrodysime, kad tuomet $d = d'$. Pagal teoremą 3.2, taško d', priklausančio stygai ac jungtinis yra

$$\bar{d'} = \frac{c + a - d}{ca}$$

Pagal teoremas 1.2 ir 3.1 bei faktą, kad bf statmena ca, turime, kad:

$$f' = -\frac{ca}{b}.$$

Dar daugiau, d'f yra statmena bc, tad pagal tas pačias teoremas gauname:

$$d = b + \frac{c}{b}(b - a).$$

Lieka įrodyti, kad d'b=ab ir tuomet gausime, kad d'=d. Atstumui apskaičiuoti prisiminsime kompleksinių skaičių modulių sąvybę: $|x|^2 = \bar{x} \cdot x$
. Tuomet sąlyga, kad d'b=ab užsirašo štai taip:

$$(d - b)(\bar{d} - \bar{b}) = (a - b)(\bar{a} - \bar{b}).$$

Įstačius žinomą d' reikšmę gauname:

$$(d-b)(\bar{d}-\bar{b}) = (b+\frac{c}{b}(b-a)-b)((\bar{b}+\frac{\bar{c}}{\bar{b}}(\bar{b}-\bar{a})-\bar{b}) = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}).$$

Gavome, kad $d = d'$, todėl ir šis uždavinys buvo nugriautas! $\triangle$

1 **SKYRIUS**

SPRENDIMAI

Vieta-Jumping (Vieto šokinėjimas)

Standartinis Vieta-Jumping

Pastoviai besileidžiantis Vieta-Jumping

Uždaviniai

Kompleksinė geometrija

Teoremos

Teoremų įrodymai

*

Teoremos 1.1 įrodymas

*

Teoremos 1.2 įrodymas

*

Teoremos 1.3 įrodymas

*

Teorema 2.3 - trikampio plotui apsirašyti

Kompleksinė geometrija and vienetinio apskritimo

Komplikuotesni uždaviniai su apskritimais

Uždaviniai, kuriuose yra ieškoma ploto

Įvairiausių uždavinių sprendimas