MATEMATICA C^3

ALGEBRA DOLCE 1

Testo per il primo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Matematicamente.it

1^A Edizione - 2014

Matematica C^3– Algebra dolce 1

COORDINATORI DEL PROGETTO Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini, Daniele Zambelli.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Ubaldo Pernigo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano, Daniele Zambelli.

HANNO COLLABORATO Laura Todisco, Michela Todeschi, Nicola De Rosa, Paolo Baggiani, Luca Tedesco, Vittorio Patriarca, Francesco Speciale, Alessandro Paolino, Luciano Sarra, Maria Rosaria Agrello, Alberto Giuseppe Brudaglio, Lucia Rapella, Francesca Lorenzoni, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Anna Maria Cavallo, Elena Stante, Giuseppe Pipino, Silvia Monatti, Andrea Celia, Gemma Fiorito, Dorotea Jacona, Simone Rea, Nicoletta Passera, Pierluigi Cunti, Francesco Camia, Anna Rita Lorenzo, Alessandro Castelli, Piero Sbardellati, Luca Frangella, Raffaele Santoro, Alessandra Marrata, Mario Bochicchio, Angela Iaciofano, Luca Pieressa, Giovanni Quagnano.

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LaTeX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 5.0 del 27 giugno 2014.
Stampa prima edizione: aprile 2014.
ISBN 9788896354681

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Algebra dolce 1 - prima edizione.
Codice ISBN: 9788896354681
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2014.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,
lui apprezza molto il progetto Matematica C^3
e penso che la tua versione gli possa far comodo
soprattutto per i primi anni del nostro serale.
Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C^3 *normale,*
ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,
promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane
(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.
In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C^3*,*
"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?
Buon lavoro,
Alice

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

Matematica C^3 Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica C^3*. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica C^3*.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica C^3* in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica C^3* ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli.

Aritmetica e Algebra I

"One door, one key..."
Foto di Silv3rFoX
http://www.flickr.com/photos/12030514@N08/2272118558/

Numeri naturali 1

1.1 L'origine dei numeri

L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana. Sono stati ritrovati reperti fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto "Osso di Ishango" (figura 1.1) [1] in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20 000 a.C. e il 18 000 a.C.

FIGURA 1.1: Osso di Ishango

Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. È possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

Sappiamo per certo che circa 6 000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:

𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺

I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero. I simboli sono I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Il numero MM rappresenta $1000 + 1000 = 2000$; il numero VI rappresenta $5 + 1 = 6$, mentre il numero IV rappresenta $5 - 1 = 4$.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango

1.2 I numeri naturali

I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.

Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a sé stante, un oggetto astratto di tipo matematico.

Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto *cardinale* del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto *ordinale*), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo, ...

Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa sono i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

1.3 Cosa sono

I numeri naturali sono alla base dell'aritmetica, tutti gli altri numeri si possono costruire a partire da questi. Chiederci cosa sono i numeri naturali non è una domanda da poco, è domandarsi che cosa sono quegli oggetti su cui poggia una gran parte della matematica.

Per definire i numeri naturali dobbiamo partire da alcuni *concetti primitivi*. I concetti primitivi sono dei concetti che decidiamo di non definire e che siamo tutti d'accordo di ritenere conosciuti.

I concetti primitivi per definire i numeri naturali sono:

- lo zero;
- il successore di un numero.

Lo *zero* è il numero che serve per contare gli elementi di un insieme con il minore numero di elementi possibile: l'insieme vuoto.

Il *successore* di un numero naturale n è quel numero che viene subito dopo n.

Quindi se siamo d'accordo su questi due concetti di base, possiamo definire i numeri naturali come un insieme nel quale valgono le seguenti proprietà:

1. Zero è un numero naturale.
2. Per ogni numero naturale, anche il suo successore è un numero naturale.
3. Numeri diversi hanno successori diversi.
4. Lo zero non è successore di nessun numero naturale.

5. Se una proprietà vale per lo zero e, valendo per un numero naturale qualsiasi, vale anche per il suo successore allora vale per ogni numero naturale.

In pratica i numeri naturali sono la sequenza:
zero, uno, due, tre, ... centoventitre, centoventiquattro, ...

Un modo comodo per esprimere qualunque numero naturale è usare dei segni appositi, le cifre, e un sistema per rappresentarli:
0, 1, 2, 3, ... 123, 124, ...

1.4 Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre*. Un numero non è altro che una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.

Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere (figura 1.2) con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell'asta a sinistra e vuoto la prima asta: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10.

I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10. Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora a sinistra ponendo uno zero nel posto lasciato vuoto. Questo metodo può essere ripetuto per rappresentare tutti i numeri che risultino potenza di dieci, ovvero dieci, cento, mille...

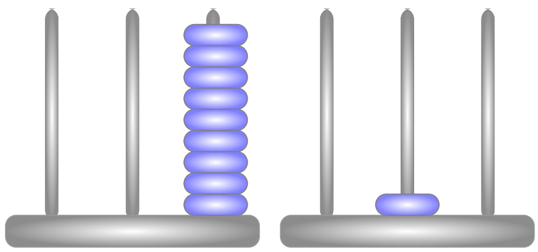


FIGURA 1.2: Il pallottoliere

Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

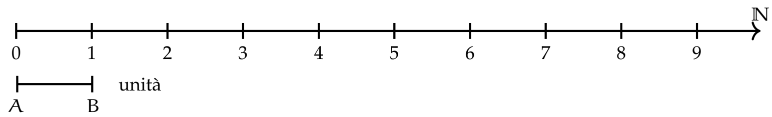
Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$.

Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è;

- *decimale* o a base dieci, perché usiamo dieci segni (cifre) per scrivere i numeri;
- *posizionale* perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

1.4.1 Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di *disuguaglianza* ($\leqslant$ si legge "minore o uguale di") o *disuguaglianza stretta* ($<$ si legge "minore di"). Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi.

Legge 1.1 (di tricotomia)**.** *Dati due numeri naturali n, m vale sempre una delle seguenti tre relazioni:* $n > m, \quad n < m, \quad n = m.$

1.5 Operazioni con i numeri naturali

Le operazioni matematiche sono delle regole che associano ad alcuni oggetti matematici, gli *operandi*, un altro oggetto matematico, il *risultato*.

Di seguito riprendiamo rapidamente le prime cinque operazioni aritmetiche nei numeri naturali.

1.5.1 Proprietà delle operazioni

Prima ancora di affrontare le operazioni aritmetiche con i numeri naturali, vediamo le proprietà delle operazioni in generale. *In generale* vuol dire che ora non stiamo a precisare né di quale insieme numerico parliamo, né di quale operazione. Quindi useremo delle lettere per indicare operandi e risultato mentre, per l'operazione, useremo un simbolo diverso da quelli delle quattro operazioni. Diremo che:

- Un'operazione si dice *legge di composizione interna* se il risultato appartiene allo stesso insieme degli operandi.
- Un'operazione gode della proprietà *commutativa* se $a \star b = b \star a$
- Un'operazione gode della proprietà *associativa* se $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- Un'operazione possiede un *elemento neutro* se $a \star u = u \star a = a$
- Un'operazione possiede elemento *inverso* se per ogni elemento a dell'insieme, esiste un elemento a' dell'insieme per cui $a \star a' = a' \star a = u$ dove u è l'elemento neutro.

Vediamo ora alcune operazioni con i numeri naturali e le loro proprietà.

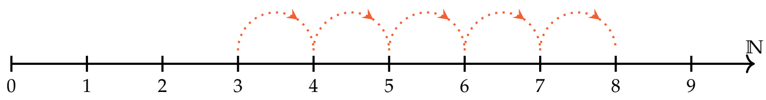
1.5.2 Addizione in $\mathbb{N}$

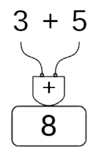
Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

Definizione 1.1. Dati due numeri naturali n e m, l'*addizione* associa un terzo numero s, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi m volte. Si scrive $n + m = s$.

Ad esempio: sommare 5 a 3 significa partire da 3 e spostarsi verso il successivo per 5 volte.

$3 + 5 = 8$





Gli operandi dell'addizione si chiamano *addendi* e il risultato si chiama *somma*.

❑ **Osservazione** Per definire l'addizione abbiamo utilizzato il concetto di successore.

Proprietà

Per come è definita, e dato che i numeri naturali non hanno un limite superiore, l'addizione tra due numeri naturali qualsiasi è sempre un numero naturale. Si dice che è una *legge di composizione interna*.

Nei numeri naturali l'addizione presenta le seguenti proprietà:

- *Commutativa*: $a + b = b + a$
- *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- *Elemento neutro* $a + 0 = 0 + a = a$

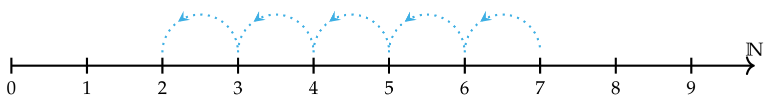
1.5.3 Sottrazione in $\mathbb{N}$

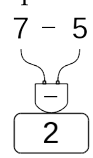
Tra i numeri naturali è definita l'operazione di sottrazione come segue:

Definizione 1.2. Dati due numeri naturali m e n, la sottrazione associa un terzo numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad n dà come somma m. Si scrive $m - n = d$.

Ad esempio: togliere 5 da 7 significa partire da 7 e spostarsi verso il precedente per 5 volte.

$7 - 5 = 2$ perché $2 + 5 = 7$



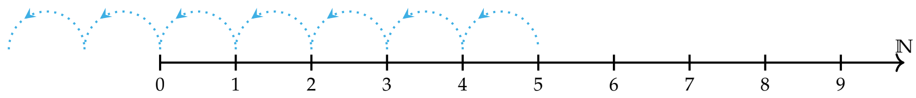


Il primo operando si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo* e il risultato *differenza*.

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

Se al concetto di successivo aggiungiamo anche quello di precedente, possiamo definire la sottrazione anche in un altro modo. Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.

Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti se partendo dal 5 andiamo indietro di 7 posizioni usciamo dalla semiretta dei numeri naturali.



Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ è possibile solo se $b \leqslant a$.

❑ **Osservazione** Nella definizione di sottrazione abbiamo usato l'operazione di addizione.

Proprietà

Dato che non dà sempre un risultato, la sottrazione non è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a - 0 = a$, ma in generale non si può fare $0 - a$.

L'unica proprietà interessante della sottrazione è la proprietà

➡ *Invariantiva*: $a - b = (a \mp c) - (b \mp c)$

1.5.4 Moltiplicazione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di moltiplicazione come segue:

Definizione 1.3. Dati due numeri naturali m, n, l'operazione di *moltiplicazione* associa un terzo numero p che si ottiene sommando n addendi tutti uguali a m:

$$m \times n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{nvolte} = p$$

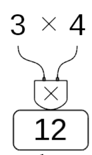
Ma questa definizione è sensata solo nel caso n sia maggiore di 1. Quindi dobbiamo completarla:

Definizione 1.4.

$$m \times n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ m & \text{se} \quad n = 1 \\ \underbrace{m + m + \cdots + m}_{\text{n volte}} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

Ad esempio: moltiplicare 3 per 4 volte significa partire da 0 e aggiungere 3 per 4 volte.

$$3 \cdot 4 = 12$$



Gli operandi della moltiplicazione si chiamano *fattori* e il risultato si chiama *prodotto*.

❑ **Osservazione** Anche per definire la moltiplicazione abbiamo utilizzato l'addizione.

Proprietà

Dato che per eseguire una moltiplicazione ripeto delle addizioni, anche il prodotto di due numeri naturali qualsiasi è sempre un numero naturale. Si dice che la moltiplicazione è una *legge di composizione interna*.

Nei numeri naturali la moltiplicazione presenta le seguenti proprietà:

- *Commutativa*: $a \cdot b = b \cdot a$
- *Associativa*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Elemento neutro* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Un'altra importante proprietà che utilizzeremo spesso anche in seguito è la:

Legge 1.2 (Annullamento del Prodotto)**.** *Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo.*

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oppure } b = 0.$$

Questa legge dice che se il risultato di una moltiplicazione è zero di sicuro almeno uno dei fattori deve essere zero. Attenzione: questa proprietà non vale per tutti gli insiemi numerici in cui è definita la moltiplicazione.

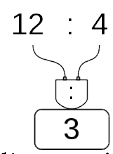
1.5.5 Divisione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di divisione come segue:

Definizione 1.5. Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, la divisione associa un terzo numero naturale q, se esiste, che moltiplicato per ad n dà come prodotto m. Si scrive $n : m = q$.

Ad esempio: dividere 12 per 4 significa trovare quante volte il numero 4 è contenuto nel numero 12.

$$12 : 4 = 3 \text{ perché } 3 \cdot 4 = 12$$



Il primo operando si chiama *dividendo* e il secondo *divisore*, il risultato di dice *quoziente esatto*.

Non sempre si può effettuare la divisione nei numeri naturali ad esempio: $10 : 4 =$ non è un numero naturale.

Se esiste il quoziente esatto tra i numeri m e n, si dice che:

- n è *divisore* di m;
- m è *divisibile* per n;
- m è *multiplo* di n

Esempio 1.1. $12 : 3 = 4$ perché $4 \times 3 = 12$. Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.

Esempio 1.2. 20 è divisibile per 4 perché $20 : 4 = 5$.

Esempio 1.3. 7 è divisore di 35 perché $35 : 7 = 5$.

Esempio 1.4. 6 è multiplo di 3 perché $6 = 2 \times 3$.

Esempio 1.5. 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5.

❑ **Osservazione** Nella definizione di quoziente abbiamo richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti, se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero. Per esempio, nella divisione $5 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dia 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0. Invece nella divisione $0 : 0$ un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.

Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è *impossibile*; mentre la divisione $0 : 0$ è *indeterminata*.

❑ **Osservazione** Nella definizione di divisione abbiamo usato l'operazione di moltiplicazione che a sua volta usava l'addizione.

Proprietà

Dato che non dà sempre un risultato, la divisione non è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a : 1 = a$, ma in generale non si può fare $1 : a$.

L'unica proprietà interessante della divisione è la proprietà

➡ *Invariantiva*: $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) = (a : c) : (b : c)$

1.5.6 Proprietà distributiva

Oltre alle proprietà valide per le singole operazioni, ce n'è una che riguarda due operazioni contemporaneamente, è la proprietà *distributiva*.

Proprietà distributiva della moltiplicazione

Rispetto all'addizione Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18$ $\qquad$ $(2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 18.$

Rispetto alla sottrazione In maniera analoga:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \qquad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$
$$6 \cdot (10 - 4) = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 36 \qquad (10 - 4) \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 36.$$

Proprietà distributiva della divisione

Rispetto all'addizione Solo se le somme sono a sinistra:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d \qquad (20 + 10 + 5) : 5 = 20 : 5 + 10 : 5 + 5 : 5 = 7.$$

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra: $120 : (3 + 5)$. Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120 : 8 = 15$. Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120 : 3 + 120 : 5 = 40 + 24 = 64$. Il risultato corretto è il *primo*.

Rispetto alla sottrazione Solo se la sottrazione è a sinistra:

$$(a - b) : c = a : c - b : c \qquad (20 - 10) : 5 = 20 : 5 - 10 : 5 = 4 - 2 = 2$$

Se, però, la sottrazione è a destra:

$$120 : (5 - 3) = 120 : 2 = 60 \neq 120 : 5 - 120 : 3 = 24 - 40 = \text{ non si può fare.}$$

1.6 Potenza

La *potenza* di un numero naturale è una moltiplicazione che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 1.6. Dati due numeri naturali b, e, l'operazione di *potenza* associa un terzo numero p che si ottiene moltiplicando e fattori tutti uguali a b:

$$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{e volte}} = p$$

Ma questa definizione è sensata solo nel caso e sia maggiore di 1. Quindi dobbiamo completarla:

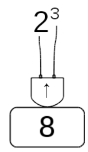
Definizione 1.7.

$$b^e = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad e = 0 \text{ e } b \neq 0 \\ b & \text{se} \quad e = 1 \\ \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{evolte} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

esponente

$$2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 volte}} = 8$$

base potenza



Il primo operando si chiama *base*, il secondo *esponente* e il risultato si chiama *potenza*. Da osservare che 0^0 non ha significato.

1.6.1 Proprietà delle potenze

I Il prodotto di più potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad 2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}.$$

II Il quoziente di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}} \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$\begin{aligned} a^n : a^m &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} && (1.1)\\ &= \underbrace{(a : a) \cdot (a : a) \cdot \ldots \cdot (a : a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-m \text{ volte}} && (1.2)\\ &= a^{n-m}. && (1.3) \end{aligned}$$

Il passaggio dalla (1.1) alla (1.2) avviene per la proprietà invariantiva della divisione.

III La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}} \qquad (6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ volte}} = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}}}^{m \text{ volte}} = a^{n \cdot m}.$$

IV Il prodotto di più potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \qquad (2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n.$$

V Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n} \qquad\qquad (4 : 2)^8 = 4^8 : 2^8.$$

Le definizioni dei casi particolari di potenze si giustificano nel seguente modo:

$$a^0 = a^{5-5} = a^5 : a^5 = 1,$$
$$a^1 = a^{5-4} = a^5 : a^4 = a.$$

Alla potenza 0^0 non si assegna alcun valore perché applicando la definizione di a^0 si dovrebbe ottenere 1; applicando la definizione 0^a si dovrebbe ottenere 0, ma non è accettabile che il risultato dipenda da una scelta arbitraria della regola da usare.

1.7 Espressioni numeriche

Spesso in matematica abbiamo a che fare con più operazioni combinate assieme. In questo caso parliamo di espressioni:

Definizione 1.8. Un'espressione aritmetica è una successione di operazioni.

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio «Luca ha detto Mario è stato promosso» può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura: scrivendo «Luca, ha detto Mario, è stato promosso» significa che è stato promosso Luca; scrivendo «Luca ha detto: Mario è stato promosso» significa che è stato promosso Mario.

Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire, dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni. Per esempio, l'espressione $7 + 5 \cdot 2$ può valere 24 oppure 14, infatti: eseguendo le operazioni da sinistra a destra (associatività a sinistra) otteniamo 24 (vedi figura 1.3), mentre eseguendo prima la moltiplicazione (precedenza algebrica) otteniamo 17 (vedi figura 1.4).

❑ **Osservazione** Alcune calcolatrici, quelle "aritmetiche" svolgono le operazioni man mano che sono inserite, si dice che applicano *l'associatività a sinistra*. Altre, le calcolatrici "scientifiche" seguono le regole dell'algebra. Esegui la seguente sequenza di operazioni sulla tua calcolatrice e osserva il risultato, confrontalo poi con il risultato ottenuto dai tuoi compagni:

| 7 | + | 5 | × | 2 | = |

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate le tre regole della precedenza algebrica:

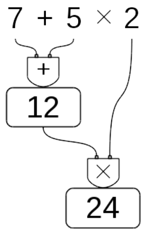


FIGURA 1.3: Da sinistra a destra.

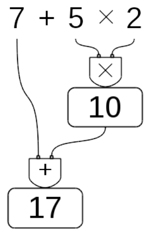


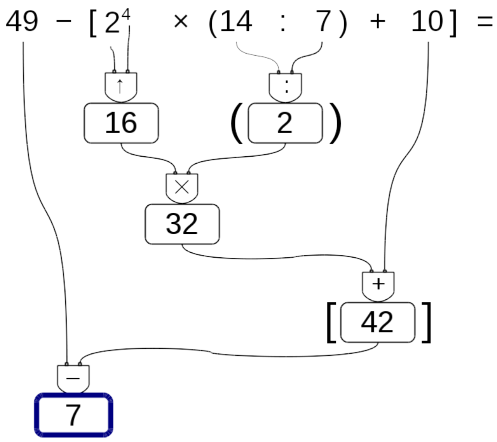
FIGURA 1.4: Precedenza alle moltiplicazioni.

1. prima si svolgono le espressioni nelle parentesi più interne;
2. in una espressione senza parentesi si svolgono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, poi addizioni e sottrazioni;
3. le operazioni con la stessa precedenza si svolgono da sinistra verso destra.

Risolviamo le espressioni con i numeri naturali usando grafi ad albero; gli operandi sono le foglie dell'albero, il risultato è la radice. Costruiamo il grafo tenendo conto delle seguenti indicazioni:

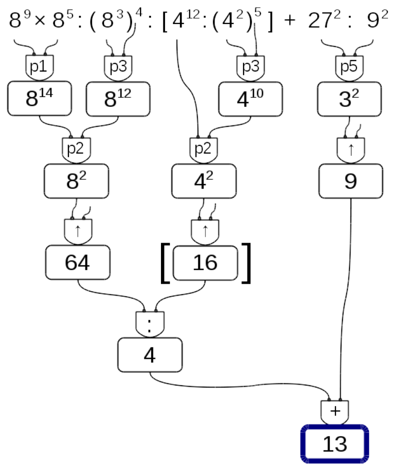
- in ogni nodo viene riportata l'operazione eseguita e il risultato;
- costruiamo l'albero disegnando ogni nodo esattamente sotto l'operazione corrispondente;
- disegniamo le parentesi attorno al nodo che contiene il risultato di tutta un'espressione racchiusa tra parentesi.

Esempio 1.6. $49 - [2^4 \times (14 : 7) + 10] =$



Esempio 1.7. $8^9 \times 8^5 : (8^3)^4 : [4^{1}2 : (4^2)^5] + 27^2 : 9^2 =$

Se per risolvere un'espressione dobbiamo utilizzare le proprietà delle potenze, al posto del simbolo di operazione scriveremo le sigle "p1", "p2", ... per indicare l'uso della prima, seconda, ... proprietà.

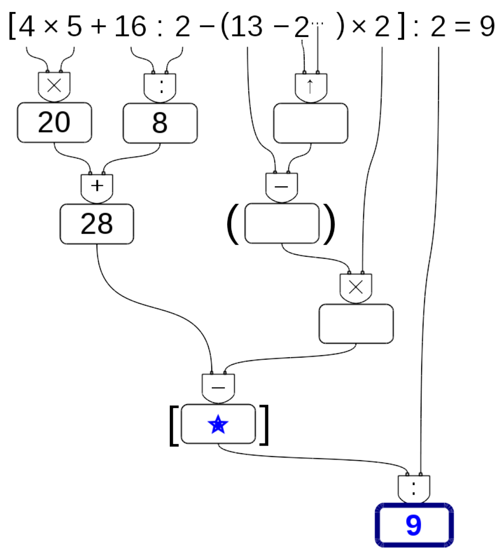


Esempio 1.8. A volte potrà succedere che manchi un numero nell'espressione, conoscendo il risultato possiamo trovare il numero mancante. Nella seguente espressione manca un esponente:

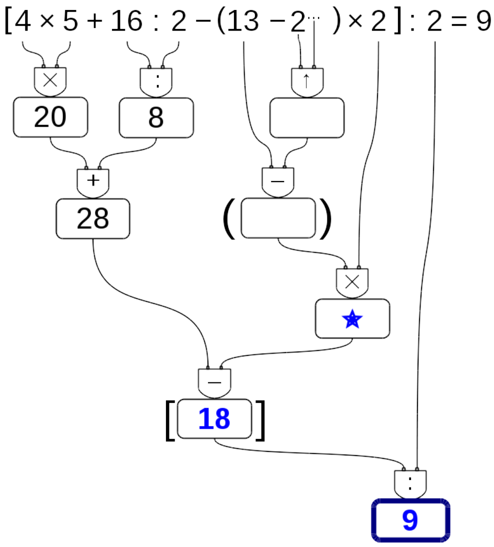
$[4 \times 5 + 16 : 2 - (13 - 2^{\cdots}) \times 2] : 2 = 9$

Per trovare l'operando mancante possiamo seguire questa strada: per prima cosa costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Ora, usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo.

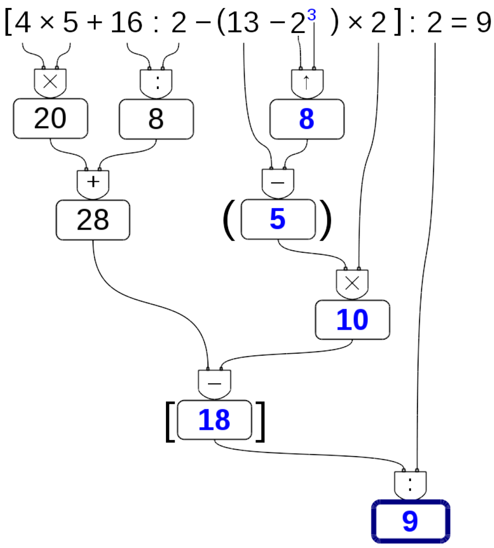
Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione. E poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede, quello con la stella.



Dobbiamo trovare il numero che diviso per 2 dia come risultato 9. È facile: il numero cercato è 18. Scriviamo allora 18 in questo nodo e poniamo l'attenzione a quello che lo precede.



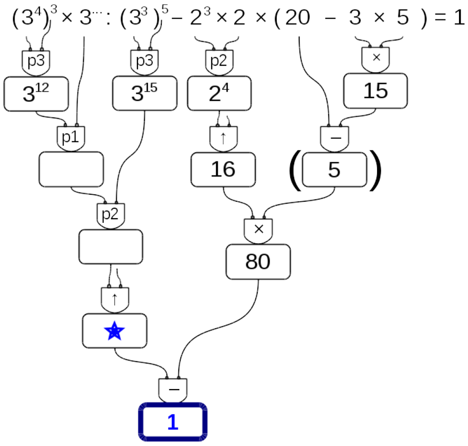
Ora dobbiamo trovare quel numero che tolto da 28 dia come risultato 18. Anche questo è facile da trovare: è 10. Lo scriviamo e ci spostiamo sul nodo precedente. Procedendo in questo modo possiamo risalire fino al dato mancante:



Esempio 1.9. Se c'è un "buco" in una espressione da risolvere con le proprietà delle potenze, si procede allo stesso modo:

$(3^4)^3 \times 3^{\cdots} : (3^3)^5 - 2^3 \times 2 \times (20 - 3 \times 5) = 1$

Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo. Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione, e poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede.

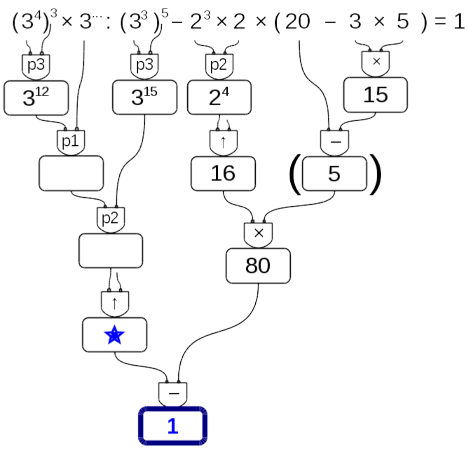


È facile individuare i valori mancanti:

- questo numero meno ottanta deve dare come risultato uno: il numero cercato è 81;
- nel nodo precedente: qui ci va una potenza che deve dare come risultato 81, potrebbe essere 9^2 o 3^4, ma dato che sopra posso usare le proprietà delle potenze con base 3, conviene usare 3^4;
- nel nodo precedente: questo esponente meno quindici deve dare come risultato quattro, l'esponente qui deve essere 19;
- e infine: dodici sommato a questo esponente deve dare come risultato diciannove: il valore mancante è quindi: 7.

Esempio 1.10. Prova a risolvere questa:
$(3^4)^3 \times 3^{\cdots} : (3^3)^5 - 2^3 \times 2 \times (20 - 3 \times 5) = 1$

Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo. Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione, e poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede.



È facile individuare i valori mancanti:

- questo numero meno ottanta deve dare come risultato uno: il numero cercato è 81;
- nel nodo precedente: qui ci va una potenza che deve dare come risultato 81, potrebbe essere 9^2 o 3^4, ma dato che sopra posso usare le proprietà delle potenze con base 3, conviene usare 3^4;
- nel nodo precedente: questo esponente meno quindici deve dare come risultato quattro, l'esponente qui deve essere 19;
- e infine: dodici sommato a questo esponente deve dare come risultato diciannove: il valore mancante è quindi: 7.

1.8 Divisibilità e numeri primi

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile.

❑ **Osservazione** In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri, m e n, è possibile solo se m è multiplo di n.

Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

Definizione 1.9. Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, possiamo sempre trovare due numeri q e r con $0 \leqslant r < n$ tali che:

$$m = n \cdot q + r$$

q si dice *quoziente* e r si dice *resto* della divisione.

Esempio 1.11. Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \times 3 = 21$, mentre $7 \times 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $3 \times 7 + 4 = 25$).

$$\begin{array}{r r|l l}
\text{dividendo} \rightarrow & 25 & \underline{7} & \leftarrow \text{divisore} \\
 & \underline{21} & 3 & \leftarrow \text{quoziente} \\
\text{resto} \rightarrow & 4 & &
\end{array}$$

Esempio 1.12. $0 : 2 = 0$.

Esempio 1.13. $1 : 2 = 0$ con resto 1.

Esempio 1.14. $5 : 2 = 2$ con resto 1.

La divisione con resto è un'operazione che dà due risultati: quoziente e resto. Questo fatto a volte è scomodo quindi i matematici hanno ricavato, dalla divisione con resto, due nuove operazioni: la divisione intera e il modulo.

Definizione 1.10. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, la *divisione intera* $n \operatorname{div} m$ è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q \times m \leqslant n$.

Esempio 1.15. $0 \operatorname{div} 5 = 0$.

Esempio 1.16. $9 \operatorname{div} 2 = 4$.

Esempio 1.17. $3 \operatorname{div} 5 = 0$.

Esempio 1.18. Non è possibile, invece, la divisione intera per 0.

$$3 \operatorname{div} 0 = \text{ non si può fare.}$$

Definizione 1.11. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra n e m si chiama *modulo* di n rispetto a m e viene indicata con $n \bmod m$.

Esempio 1.19. $3 \bmod 0 =$ non si può fare; $0 \bmod 5 = 0$.

Esempio 1.20. $9 \bmod 5 = 1$; $10 \bmod 5 = 0$.

Esempio 1.21. $3 \bmod 5 = 3$; $11 \bmod 5 = 1$.

Ripassiamo l'algoritmo della divisione intera per numeri a più cifre; questo algoritmo risulterà particolarmente utile nel seguito.

$$\begin{array}{rrrr|rr}
 & 3 & 2 & 7 & 2 & 3 \\ \cline{5-6}
- & 2 & 3 & \downarrow & 1 & 4 \\ \cline{1-3}
 & & 9 & 7 & & \\
 & - & 9 & 2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 1 & 3 & 2 & 9 & 1 & 0 & 7 \\ \cline{6-8}
- & 1 & 0 & 7 & \downarrow & 1 & 2 & \\ \cline{1-4}
 & & 2 & 5 & 9 & & & \\
 & - & 2 & 1 & 4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 4 & 5 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
 & 1 & 2 & 5 & 9 & 4 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ \cline{8-10}
- & 1 & 1 & 9 & 7 & \downarrow & & 7 & 3 & 6 \\ \cline{1-5}
 & & & 6 & 2 & 4 & & & & \\
 & & - & 5 & 1 & 3 & \downarrow & & & \\ \cline{4-6}
 & & & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\
 & & - & 1 & 0 & 2 & 6 & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 8 & 7 & & &
\end{array}$$

(a) (b) (c)

a) 327 : 23 = quoziente 14 e resto 5;
b) 1329 : 107 =quoziente 12 e resto 45;
c) 125943 : 171 = quoziente 736 e resto 87.

1.8.1 Divisori, numeri primi, numeri composti

Precisiamo il significato di *divisore* con la seguente definizione:

Definizione 1.12. Il numero n si dice divisore di m se, nella divisione intera, $m : n$ dà come resto 0.

Prima di proseguire, disegna nel quaderno la seguente tabella e completala. Nella prima colonna scrivi i numeri fino al 50, nella seconda scrivi tutti i divisori di quel numero ordinati dal minore al maggiore, nella terza scrivi quanti sono i divisori.

TABELLA 1.1: Divisori dei primi numeri naturali

numero	divisori	numero di divisori
0	tutti i numeri naturali	∞
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6		
7		
8		
9		
10		
11		
...		

a) Riesci a prevedere quale sarà il prossimo numero con un numero dispari di divisori? (*facile*)
b) Riesci a prevedere quale sarà il prossimo numero con esattamente 2 divisori? (*impossbile?*)

Guardando la tabella dei divisori si può osservare che ogni numero è divisibile per 1 e per se stesso. Poi può avere altri divisori, questi altri divisori si chiamano divisori propri.

Definizione 1.13. Chiamiamo *divisore proprio* di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Per quanto riguarda il numero dei divisori possiamo anche osservare che due numeri sono particolari:

- *zero* è divisibile per ogni numero naturale perché quando dividiamo 0 per un qualunque numero otteniamo come resto 0.
- *uno* ha un solo divisore.

Dopo queste osservazioni possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 1.14. Un numero $p > 1$ si dice *primo* se ha esattamente due divisori.

Definizione 1.15. Un numero $p > 1$ si dice *quadrato* se ha un numero dispari di divisori.

Definizione 1.16. Un numero $p > 1$ si dice *composto* se ha più di due, ma non infiniti, divisori.

Nella tabella dei divisori evidenzia i numeri primi e con un colore diverso i numeri quadrati.

❑ **Osservazione** 2 è l'unico numero primo pari.

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

Teorema 1.3 (di Euclide)**.** *I numeri primi sono infiniti.*

Euclide ci ha fatto vedere come sia possibile costruire numeri primi comunque grandi. Dato un numero primo, è sempre possibile costruirne uno più grande.

❑ **Osservazione** Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.

Criteri di divisibilità

Per vedere se un numero divide un altro *basta* eseguire la divisione e osservare se si ottiene un resto uguale a zero. Ma questo non sempre è comodo da fare, i matematici hanno scoperto dei trucchi per capire se un numero divide un altro senza dover eseguire la divisione: sono i *criteri di divisibilità*. Di seguito sono riportati i criteri relativi ai primi numeri naturali.

Divisibilità per 0 Nessun numero è divisibile per 0.

Divisibilità per 1 Tutti i numeri sono divisibili per 1.

Divisibilità per 2 0, 2, 4, 6, 8 sono divisibili per 2 e un numero è divisibile per 2 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 2.

Divisibilità per 3 0, 3, 6, 9 sono divisibili per 3, e un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero è divisibile per 3.

Divisibilità per 4 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 … sono divisibili per 4 e un numero è divisibile per 4 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 2 cifre, è divisibile per 4.

Divisibilità per 5 0, 5 sono divisibili per 5 e un numero è divisibile per 5 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 5.

Divisibilità per 6 Un numero è divisibile per 6 se è divisibile per 2 e per 3.

Divisibilità per 7 0, 7 sono divisibili per 7 e un numero maggiore di 10 è divisibile per 7 se la differenza, in valore assoluto, fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è divisibile per 7.

Il numero 252 è divisibile per 7, infatti $|25 - 2 \cdot 2| = 21$ è multiplo di 7.

Il numero 887 non è divisibile per 7, infatti $|88 - 2 \cdot 7| = 74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 8 0, 8, 16, 24, 32, ... sono divisibili per 8 e un numero è divisibile per 8 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 3 cifre, è divisibile per 8.

Divisibilità per 9 0, 9 sono divisibili per 9, e un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero è divisibile per 9.

Divisibilità per 10 0 è divisibile per 10 e un numero è divisibile per 10 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 10.

Divisibilità per 11 0 è divisibile per 11 e un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è un numero divisibile per 11.

Il numero 253 è divisibile per 11, infatti $|5 - (2 + 3)| = 0$;

Il numero 887 non è divisibile per 11, infatti $|8 - (8 + 7)| = 7$.

Divisibilità per 12 Un numero è divisibile per 12 se è divisibile per 3 e per 4.

Divisibilità per un numero qualunque Un numero a è divisibile per un numero d se e solo se $a - nd$ è divisibile per d.

Il numero 253 è divisibile per 23 perché $253 - 10 \cdot 23 = 253 - 230 = 23$ che è divisibile per 23.

Il numero 1894 è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $1894 - 100 \cdot 17 = 1894 - 1700 = 194$ che è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $194 - 10 \cdot 17 = 194 - 170 = 24$. Poiché 24 non è divisibile per 17 non lo sarà neppure 1894.

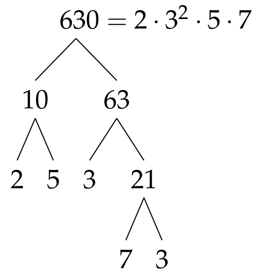
1.9 Scomposizione in fattori primi

Scomporre in fattori un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

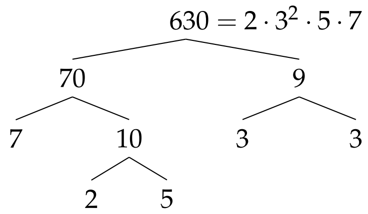
Teorema 1.4 (fondamentale dell'Aritmetica). *Ogni numero naturale $n > 1$ si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.*

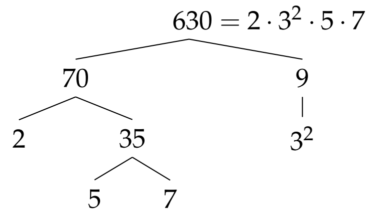
Per scomporre in fattori primi un numero, per prima cosa lo scomponiamo in due fattori, senza preoccuparci che siano primi, poi scomponiamo questi e così via fino ad ottenere solo fattori primi.

Esempio 1.22. Scomporre in fattori primi il numero 630.



In generale, un numero può essere scomposto in fattori seguendo percorsi diversi. Per esempio, 630 può essere scomposto attraverso questi alberi diversi:





Qualunque strada si segua per scomporre un numero in fattori primi otterremo sempre lo stesso risultato.

1.10 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Definizione 1.17. Il *massimo comune divisore* di numeri naturali a e b è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b e si indica con $\text{MCD}(a, b)$,.

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e 12:

$$\begin{aligned} \text{divisori di } 18: &\quad 1,\ 2,\ 3,\ 6\,9,,\ 18; \\ \text{divisori di } 12: &\quad 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12. \end{aligned}$$

I divisori comuni sono 1, 2, 6, il più grande è 6, quindi: $\text{MCD}(18, 12) = 6$.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.5. *Calcolo del* MCD *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con l'esponente minore .

Esempio 1.23. Calcolare $\text{MCD}(60, 48, 36)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$. I fattori comuni sono 2 e 3, il 2 compare con l'esponente minimo 2; il 3 compare con esponente minimo 1.

Pertanto $\text{MCD}(60, 48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Esempio 1.24. Calcolare $\text{MCD}(60, 120, 90)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. I fattori in comune sono 2, 3, 5. L'esponente minino è 1 per tutti.

Pertanto $\text{MCD}(60, 120, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Definizione 1.18. Due numeri a e b si dicono *primi tra loro* o *coprimi* se $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio 1.25. Numeri primi tra loro:

- 12 e 25 sono primi tra loro. Infatti il $\text{MCD}(12, 25) = 1$ dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $25 = 5^2$;
- 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35 = 5 \times 7$, $16 = 2^4$. I due numeri non hanno divisori comuni e il loro $\text{MCD} = 1$;
- 11 e 19 sono primi tra loro infatti il $\text{MCD}(11, 19) = 1$ dato che 11 e 19 sono numeri primi;
- 12 e 15 non sono primi tra di loro in quanto hanno 3 come divisore comune.

Definizione 1.19. Il *minimo comune multiplo* di due numeri naturali a e b è il più piccolo tra tutti i multipli comuni ad a e a b e si indica con $\text{mcm}(a, b)$.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri:

$$\begin{aligned} \text{multipli di } 6: &\quad 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60, \ldots; \\ \text{multipli di } 15: &\quad 15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90, \ldots \end{aligned}$$

Sono multipli comuni 30, 60, 90,... Il più piccolo dei multipli comuni è 30.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.6. *Calcolo del* mcm *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore .

Esempio 1.26. Calcolare il $\text{mcm}(60, 48, 36)$.

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono sono: 2^4, 3^2, 5.

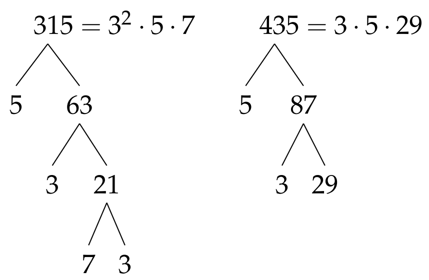
Il mcm è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

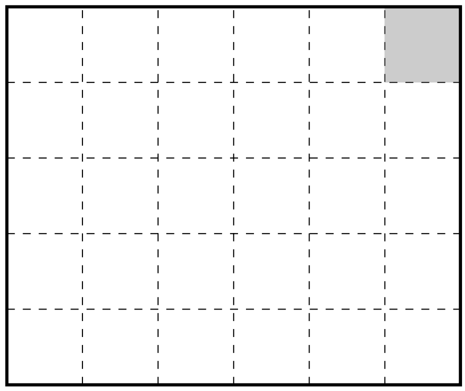
Esempio 1.27. Calcolare il $\text{mcm}(20, 24, 450)$.

Scomponendo in fattori si ha: $20 = 2^2 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Esempio 1.28. Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315cm per 435cm con mattonelle quadrate le più grandi possibile, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.





La soluzione del problema è data quindi dal $\text{MCD}(315, 435) = 3 \cdot 5 = 15$. Le mattonelle devono avere il lato di 15cm. Ci vogliono $435 : 15 = 29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435cm e $315 : 15 = 21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315cm. In tutto occorrono $29 \cdot 21 = 609$ mattonelle.

1.11 Esercizi

1.11.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.5 Operazioni con i numeri naturali

1.1. Rispondi alle seguenti domande:

a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

1.2. Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) $7 - \ldots = 1$;
b) $3 - 3 = \ldots$;
c) $5 - 6 = \ldots$;
d) $3 - \ldots = 9$;
e) $15 : 5 = \ldots$;
f) $18 : \ldots = 3$;
g) $\ldots : 4 = 5$;
h) $12 : 9 = \ldots$.

1.3. Vero o falso?

a) $5 : 0 = 0$ V F
b) $0 : 5 = 0$ V F
c) $5 : 5 = 0$ V F
d) $1 : 0 = 1$ V F
e) $0 : 1 = 0$ V F
f) $0 : 0 = 0$ V F
g) $1 : 1 = 1$ V F
h) $1 : 5 = 1$ V F
i) $4 : 0 = 0$ V F

1.4. Se è vero che $p = n \times m$, quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F
b) p è multiplo di m V F
c) m è multiplo di p V F
d) m è multiplo di n V F
e) p è divisibile per m V F
f) m è divisibile per n V F
g) p è divisore di m V F
h) n è multiplo di m V F

1.5. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F
b) 3 è un divisore di 6 V F
c) 8 è un multiplo di 2 V F
d) 5 è divisibile per 10 V F

1.6. Esegui le seguenti operazioni:

a) $18 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
b) $18 \bmod 3 = \ldots$;
c) $20 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
d) $20 \bmod 3 = \ldots$;
e) $185 \operatorname{div} 7 = \ldots$;
f) $185 \bmod 7 = \ldots$;
g) $97 \operatorname{div} 5 = \ldots$;
h) $97 \bmod 5 = \ldots$;
i) $240 \operatorname{div} 12 = \ldots$;
j) $240 \bmod 12 = \ldots$;
k) $700 \operatorname{div} 8 = \ldots$;
l) $700 \bmod 8 = \ldots$.

1.7. Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice.

a) $311 : 22$;
b) $429 : 37$;
c) $512 : 31$;
d) $629 : 43$;
e) $755 : 53$;
f) $894 : 61$;
g) $968 : 45$;
h) $991 : 13$;
i) $1232 : 123$;
j) $2324 : 107$;
k) $3435 : 201$;
l) $4457 : 96$;
m) $5567 : 297$;
n) $6743 : 311$;
o) $7879 : 201$;
p) $8967 : 44$;
q) $13455 : 198$;
r) $22334 : 212$;
s) $45647 : 721$;
t) $67649 : 128$.

1.8. Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) $33 : 11 = 11 : 33$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $8 - 4 = 4 - 8$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 - 9) \cdot 4$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.9. Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$, verifica se è:

a) commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$;
b) associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
c) 0 è elemento neutro.

1.6 Potenza

1.10. Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\cdots+\cdots+\cdots} = 3^{\cdots}$;
b) $3^4 : 3^2 = 3^{\cdots-\cdots} = 3^{\cdots}$;
c) $(3 : 7)^5 = 3^{\cdots} : 7^{\cdots}$;
d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\cdots}$;
e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\cdots}$;
f) $(2^6)^2 = 2^{\cdots\cdot\cdots} = 2^{\cdots}$;
g) $(18^6) : (9^6) = (\ldots\ldots)^{\cdots} = 2^{\cdots}$;
h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : [(5^2)^3]^6 = \ldots\ldots\ldots = 5^{\cdots}$.

1.11 (*). Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ $[6^6]$
b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ $[5^4]$
c) $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$ $[1]$
d) $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$ $[6^3]$

1.12. Calcola:

a) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$;
b) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^1$;
c) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$;
d) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$.

1.13. Completa, applicando le proprietà delle potenze:

a) $7^4 \cdot 7^{\cdots} = 7^5$;
b) $3^9 \cdot 5^9 = (\ldots\ldots)^9$;
c) $5^{15} : 5^{\cdots} = 5^5$;
d) $(\ldots\ldots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$;
e) $8^4 : 2^4 = 2^{\cdots}$;
f) $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{\cdots}$;
g) $20^7 : 20^0 = 20^{\cdots}$;
h) $(\ldots{}^3)^4 = 1$;
i) $(7^3) \cdot 7^{\cdots} = 7^14$;

1.14. Il risultato di $3^5 + 5^3$ è: $\boxed{A}$ 368 $\boxed{B}$ $(3 + 5)^5$ $\boxed{C}$ $15 + 15$ $\boxed{D}$ 8^8.

1.15. Il risultato di $(73 + 27)^2$ è: $\boxed{A}$ 200 $\boxed{B}$ $73^2 + 27^2$ $\boxed{C}$ 10^4 $\boxed{D}$ 1000.

1.7 Espressioni numeriche

1.16. Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine.

a) $15+7-2$;	e) $12-2\times 2$;	i) $2+2^2+3$;	m) $(3^2)^3-3^2$;
b) $16-4+2$;	f) $10-5\times 2$;	j) $4\times 2^3+1$;	n) 2^4+2^3;
c) $18-8-4$;	g) $20\times\ 4:5$;	k) $2^4:2-4$;	o) $2^3\times 3^2$;
d) $16\times 2-2$;	h) $16:4\times\ 2$;	l) $(1+2)^3-2^3$;	p) $3^3:3^2\times 3^2$.

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze. Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità.

1.17. $1^5+(2^2+2^4)\cdot 5-5^2\cdot 2^2$ [1]

1.18. $8^2-3^{\cdots}\cdot 5+(2^2\cdot 3^2-4\cdot 9):4^2+3^0$ [20]

1.19. $2\cdot 3:[3^3-2^2\cdot 5+2^3-36:2^2]$ [1]

1.20. $(2\cdot\ldots)^2-2\cdot 2^4+3^3:3^2-2^3:2-2$ [1]

1.21. $[(1^2+5^1:5-2)^2\cdot(2^2\cdot 2^2)^2+2\cdot(2\cdot 2^3):2^3]^2:(1^2\cdot 2^2)$ [4]

1.22. $(6:3+\ldots:2-4)^3\cdot[2\cdot 3:2+7:7]$ [0]

1.23. $[(5^2-24)^3\cdot 8^2-(4^2\cdot 2)]:2^3$ [4]

1.24. $(3^2+2^3)\cdot 3-\ldots^2:(5^2-3^2)$ [50]

1.25. $(7-5)^2+(2^3-2^2-2)^3-5\cdot 2$ [2]

1.26. $[2^{\cdots}+2\cdot(2^2\cdot 5+3)]:25-3^0$ [1]

1.27. $2^2+3^2\cdot 5^2-3\cdot 2^4+7\cdot 5^2-2^3\cdot 5^2-2^2\cdot 3^3$ [48]

1.28. $3^2+2^2\cdot[(\ldots\cdot 2^2:3+5\cdot 2^2):6+1^5]$ [29]

1.29. $2^2\cdot[(2^2\cdot 3:3+5\cdot 2^2):(2\cdot 3)+1^3]$ [20]

1.30. $(7^2-2\cdot 5+15:3):4+(3\cdot 2^2+3^{\cdots}-4^2)^2$ [38]

1.31. $10^1+(2+11-3^2)^2-(2^2+4^2+6)$ [0]

1.32. $5^1+(\ldots^2-5\cdot 3^2-2^3)-3^3:(4^2+3-10)$ [13]

1.33. $2^1+3^2+4^2-5^2-4^0$ [1]

1.34. $2^2+3^{\cdots}+5^2-2\cdot 3-8\cdot 4$ [0]

1.35. $24:(3\cdot 2^2)+2^2\cdot(3^2+3^0-2^3)$ [10]

1.36. $(5^2-3^2):2^2+9^{\cdots}\cdot 8^2:8^1$ [12]

1.37. $5+2\cdot[5+2\cdot(2^2+5):3-3^2]-2\cdot 3$ [3]

1.38. $(2^3+2^4):2+\ldots\cdot 3-2^2\cdot 5$ [31]

1.39. $(5^2+3^2-1):3+(3^3+1):7$ [15]

1.40. $[(7^5\cdot 7^{\cdots}):(7^4)^3]:7^2$ [1]

1.41. $(3\cdot 4+2^3\cdot 2+7\cdot 6):10\cdot 3-2^2\cdot 5$ [1]

1.42. $(1^5+1^6+1^8+1^10)\cdot 4-2^{\cdots}$ [0]

1.43. $3^2+4^2+2\cdot 3+(7+2):9+(27-2):5$ [37]

1.44. $81:3^2+32:2^2+\ldots:5^2-(4\cdot 2-2^3):3$ [19]

1.45. $(3^3+3^2+3^1+3^0-10):6+6^2:6$ [11]

1.46. $\{[(2^6-2^5-2^4-2^3):4+\ldots]\cdot 8-24\}+3$ [3]

1.47. $\{[(2^6-2^5-2^4-2^3):2^2+1]^3\cdot 2-24\}^2+3$ [903]

1.48. $3\cdot 2+(2^{\cdots}:2^2+3^2:3)\cdot 5-(6:2+44:4):7$ [29]

1.49. $\{16:(6^2-10\cdot 2)+[(7\cdot 3+3^3\cdot 3-2)^2:10^3]:(7^2-11\cdot 4)-2\}^5$ [1]

1.50. $\{5\cdot 16-(6^2-2^4)-[(3^2-\ldots^2)\cdot 10-5]\}-[(2^2\cdot 5+2^3):(3^3-5^2)]$ [1]

1.51. $[(2^2\cdot 2^5):(2\cdot 2^3)]^2$ [64]

1.52. $[2+15:(2^3\cdot 5-3^3+2)]^4:3\cdot 2-2\cdot^{(}\ldots-5\cdot 12:3)^2$ [4]

1.53. $(2^2\cdot 2)^2:(5\cdot 2^2-2^2)+[7^2:(5^2-3^2\cdot 2)+13^3:13^2]:2^2+(7^4\cdot 7^2)^0-3^2$ [1]

1.54. $5^2:5\cdot[(3\cdot 5^2+4:2):7-2\cdot 5]^2+2^{\cdots}:2^2-5^2:5$ [8]

1.55. $[13^6\cdot(13^5:13)]^2:[13^13:(13^2\cdot 13^3)^2]^6$ [169]

1.56. $12^10:12^9+3^2\cdot 6^2:6^2+12^2:(5\cdot 2^2-19)-(5^4)^{\cdots}:5^10$ [140]

1.57. $(3\cdot 5-2^2\cdot 2)\cdot 3^2+3^3\cdot 2^2-7\cdot 3^2$ [108]

1.58. $(2^2)^3+(22-5\cdot 4)^2+\ldots^2-4^2\cdot 5$ [69]

1.59. $[(3^4)^3:3^10]^5:3^9+(5^4)^3:5^10-2^2\cdot 7^1$ [0]

1.60. $(3^5)^3:3^13+3^10:3^9+9^5\cdot 9^{\cdots}\cdot 9^4:9^16$ [13]

1.61. $[(7^4\cdot 2^4\cdot 9^4):(7^2\cdot 2^2\cdot 9^2)]\mathrm{t}:(504^8:4^8)$ [1]

1.62. $3^3\cdot 3^7\cdot 3^2:(3^6\cdot 3^6)+5^2-[6^2+2^2+2\cdot 50-(2^3\cdot\ldots)]:10^2$ [25]

1.63. $(13\cdot 3^3-2^6\cdot 5)^2:31+[(6-5)^6+(2^2+3^2-2^1)]:(2^4:2^2)$ [28]

1.64. $(2\cdot 5)^3:5^3-(2^{\cdots}:2^2)\cdot\{(6-2^2)\cdot[6-5^0-(2^4:2^2)]\}$ [4]

1.65. $(2^4-5^2:5\cdot 3):1+(2\cdot 3\cdot 6-2^2\cdot 3^2)+2^2\cdot 3^2:[2^3\cdot 3+2^2\cdot 3\cdot(2^3-7)]$ [2]

1.66. $2^2\cdot 2^6:2^5:2+2^6:(2^{\cdots}\cdot 2^2)-2^9:2^7+(6^2\cdot 2^2):18+7^3:7^2$ [16]

1.67. $25:5+(8^2-15\cdot 3-2^3)-27:(4^2+3-10)$ [13]

1.68. $1^4 + (21 + \ldots - 3^3)^2 - (2^2 + 4^2 + 6)$ [0]

1.69. $\{[(2^6 \cdot 2^4 : 2^8) : 2^2 + 1]^3 : 2^2\}^0$ [1]

1.70. $[(5^2)^3 \cdot 5^4] : [5^4 \cdot (5^2)^2]$ [25]

1.71. $(2^4)^5 : 2^{1}9 + (4^{\cdots})^8 : 4^{4}7$ [6]

1.72. $[(3^2 \cdot 3^4) \cdot (3^2 \cdot 3)]^2 : 3^{1}6$ [9]

1.73. $[(7^5 \cdot 7^{\cdots}) : [(7^3)^4] : 7^2$ [1]

1.74. $(2 \cdot 2^{\cdots} \cdot 2^3 \cdot 2^4) : 2^9 + (3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7) : 3^{1}4$ [4]

1.75. $\{[(3^3 \cdot 3^4)^2 : 3^6] : 3^{\cdots} - 2 \cdot 3^2\} : 3 + \{[(5^2 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2) : 10]^2 + 1\} : 5$ [5]

1.76. $1^3 + (2^2)^3 : (5 - 4 + 1)^4 + [7^2 : (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 13^4 : 13^3] : 2^2 + 1^5$ [11]

1.77. $1 + \{24^4 : 8^4 - 5^2 \cdot 2 : [2 + 2^4 : (2^3 - 2 \cdot 3)]\} : \{[20^{\cdots} : (2 \cdot 10)^6 - 2^2 \cdot 5^2] : 10^2 + 1\}$ [20]

1.78. $2^2 + \{[7 \cdot (5^3 : 5^2 \cdot 3^0 + 5^1) + (3^5 : 3^2 + 3)] : (5^4 : 5^2) - 2^2\} - [2^3 \cdot 5 : (2 \cdot 5)]^3 : 2^4$ [0]

1.8.1 Criteri di divisibilità

1.79 (Crivello di Eratostene). Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.8.1 Criteri di divisibilità

1.80. Per quali numeri sono divisibili? Segna i divisori con una crocetta.

a) 1320 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b) 2344 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c) 84 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d) 1255 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e) 165 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f) 720 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g) 792 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h) 462 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1.9 Scomposizione in fattori primi

1.81. I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

a) $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$;
b) $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$;
c) $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$;
d) $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$;
e) $17 = 17 \cdot 1$;
f) $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$;
g) $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6$;
h) $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$;
i) $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25$;
j) $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$.

1.82. Rispondi alle domande:

a) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
c) quando un numero è scomposto in fattori primi?

1.83. Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi

a) a e b sono due numeri primi;
b) a e b sono due numeri primi tra di loro.

Fai degli esempi che mettano in evidenza la differenza descritta.

1.84 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 52;
b) 60;
c) 72;
d) 81;
e) 105;
f) 120;
g) 135;
h) 180;
i) 225;
j) 525.

1.85 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 675
b) 715
c) 1900
d) 1078
e) 4050
f) 4536
g) 12150
h) 15246
i) 85050
j) 138600

$3^3 \cdot 2^5$ $\quad 2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$ $\quad 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ $\quad 2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ $\quad 2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$3 \cdot 5 \cdot 47$ $\quad 2 \cdot 7^2 \cdot 11$ $\quad 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$ $\quad 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$ $\quad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

1.10 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

1.86. Applicando la definizione 1.10 trova il MCD tra i numeri 54 e 132.

1.87. Calcola MCD e mcm dei numeri 180, 72, 90.
Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
$\text{MCD} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = \ldots$; $\text{mcm} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} \cdot 5^{\cdots} = \ldots$

1.88 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 15; 5; 10
b) 2; 4; 8
c) 2; 1; 4
d) 5; 6; 8
e) 24; 12; 16
f) 6; 16; 26
g) 6; 8; 12
h) 50; 120; 180
i) 20; 40; 60
j) 16; 18; 32
k) 30; 60; 27
l) 45; 15; 35

1.89 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 24; 12; 16
b) 6; 4; 10
c) 5; 4; 10
d) 12; 14; 15
e) 3; 4; 5
f) 6; 8; 12
g) 15; 18; 21
h) 12; 14; 15
i) 15; 18; 24
j) 100; 120; 150
k) 44; 66; 12
l) 24; 14; 40

1.90 (*). Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme? [3h]

1.91 (*). Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano? [90g]

1.92. Disponendo di 56 penne, 70matite e 63 gomme, quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?

1.93. Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni. Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederele di nuovo tutte e tre nello stesso anno?

1.11.2 Esercizi riepilogativi

1.94. Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?

a) $5+3-1$;
b) $6+4-10$;
c) $5-6+1$;
d) $7+2-10$;
e) $2\cdot 5:5$;
f) $2\cdot 3:4$;
g) $3\cdot 4-12$;
h) $12:4-4$;
i) $11:3+2$;
j) $27:9:3$;
k) $18:2-9$;
l) $10-1:3$.

1.95. Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale.

a) $5:5=\dots$;
b) $5:0=\dots$;
c) $1\cdot 5=\dots$;
d) $1-1=\dots$;
e) $10:2=\dots$;
f) $0:5=\dots$;
g) $5\cdot 1=\dots$;
h) $0:0=\dots$;
i) $10:5=\dots$;
j) $1:5=\dots$;
k) $0\cdot 5=\dots$;
l) $5:1=\dots$;
m) $0\cdot 0=\dots$;
n) $1\cdot 0=\dots$;
o) $1:0=\dots$;
p) $1:1=\dots$

1.96. Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato.

$2+5\cdot 3+2=35 \quad 2+5\cdot 3+2=27$

1.97 (*). Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato:

a) aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4;
b) sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27;
c) moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8;
d) al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5;
e) sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2;
f) moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2;
g) sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
h) il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2;
i) la somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2;
j) la differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5.

a) 36, b) 18, c) 126, d) 2, e) 26, f) 30.

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze. Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità.

1.98. $(11^2 - 10^4 : 10^2) : 3 + 2 \cdot [(5^2 - 2 \cdot 9)^2 - 14 \cdot 3] + 5 \cdot 2^2$ [41]

1.99. $2^2 \cdot 5 - (5^2 - 2^3) + (24 : 3 + \ldots : 2^3)^2 : (10^2 + 2^2 \cdot 11)$ [4]

1.100. $[10 \cdot (2 \cdot 5 - 7) - 3^4 : 3^2] : 3 + [(5 \cdot 2^2 + 2^2 + 2^1) : 13]^3$ [15]

1.101. $1 + (3 \cdot 2^4 : 2^3 + 26^3 : \ldots^3)^2 : (12^2 - 11^2 - 7 \cdot 3 + 5)^2 - 15 : 3 + 3$ [3]

1.102. $[14 + (13 - 6)^2 : (3^2 - 2^1) - 2^{\cdots} : 2^4] : 5 + 10 - [(5^3 : 5^2 + 7^2 - 6^2) : 3^2]^3$ [3]

1.103. $1 + [12^4 : 4^4 - 2 \cdot 5^2 : (2^3 + 2^4 : 2^3)] : \{[20^5 : (10 \cdot 2)^3 - 10^2] : (3 \cdot 5^2)\}$ [20]

1.104. $3^2 : \{5 \cdot 2^4 + 6 \cdot \ldots^2 - [(21 \cdot 5 - 3^2 \cdot 2^3) : 11 + 2]^3\}$ [1]

1.105. $(2^3)^2 : (5 \cdot 4 - 2^2) + [7^2 : (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 13^7 : 13^6] : 2^2 + 1^7$ [10]

1.106. $\{18^4 : 6^4 - 2 \cdot 5^2 : [2^4 : (\ldots^3 - 6) + 2]\} : \{[20^5 : (2 \cdot 10)^3 - 10^2] :^1 0^2 + 1\} + 1$ [20]

1.107. $(5 \cdot 2^2 - 2)^4 : (2^3 + 1)^4 + (2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 5)^3 : (3 \cdot 5 - 3^2)^3 - 2^3$ [9]

1.108. $35^4 : \{24^2 : [19^3 : (3^2 \cdot 2 + 4^{\cdots})^2 + 5]^2 + 2^17\}^3$ [35]

1.109. $(13 + 3 \cdot 5^2 : 3 + 15 + 19) : (3 \cdot 2^2) + (2^3 - 2^2 - 2) \cdot 170^0$ [7]

1.110. $(13 + 2^2 + 75 : \ldots + 2 \cdot 3^2) : (3 \cdot 2^2) + (2^3 - 2^2 - 2) \cdot 17^0$ [8]

1.111. $5^1 + 2 \cdot (4^2 + 2 \cdot 7 - 15) - (7^2 - 5^2 - 4^2) \cdot 2^2 + 7$ [10]

1.112. $35 : 7 + 13 \cdot 2^2 - \ldots : 2^3 - 11 \cdot 3 - 84 : 7$ [0]

1.113. $[2^4 + (2^5 : 2^4 + 2 \cdot 3) \cdot 2^2] : 2^3 + 10 - 4^2 + 3^3 : 3^2$ [3]

1.114. $(15 : 3 + 7^2 - 2 \cdot 5) : 4 + [(3 \cdot 2^2) + \ldots^2 - 4^2]^2$ [36]

1.115. $[(9^2 - 7^2) : (3^2 - 1) + (8^2 - 5^2) : (3^2 + 2^2)] \cdot 5$ [35]

1.116. $(5^2 - 3^2 \cdot 2) : 7 + (\ldots^2 - 4^3) : (3^0 + 3 + 3^2)$ [1]

1.117. $[(3^2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 5^2 + 2^11 : 2^4) : (3 \cdot 5) - 2] : (4^2 - 2^3)$ [1]

1.118. $[(2^{\cdots} \cdot 7 + 3^3 \cdot 2^2) : 11] : (2^3 \cdot 15 - 10^2) + (52 : 13) : 2$ [3]

1.119. $2^10 : 2^8 + 3^2 - 2^2 \cdot 3^0 + 4^2 - 2^3$ [17]

1.120. $3^7 : 3^5 + 8^2 + 2^{\cdots} \cdot 2^7 : 2^11$ [75]

1.121. $[5 + 2^2 \cdot 3^2 - 5 \cdot (2^4 - 2^2 - 2^2 + 3^2 - 27 : 3)] \cdot 3^0 \cdot 3^2$ [9]

1.122. $[(\ldots + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 11) \cdot 2^2 + (3^2 - 2^3)] \cdot (8^2 - 7 \cdot 9)$ [1]

1.123 (*). Un'automobile percorre 18km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432km e che deve arrivare a destinazione con almeno 4 litri di benzina nel serbatoio? [Almeno 16]

1.124 (*). Alla cartoleria presso la scuola una penna costa 3 euro più di una matita. Gianni ha comprato 2 penne e 3 matite e ha speso 16 euro. Quanto spenderà Marco che ha comprato 1 penna e 2 matite? [9 euro]

1.125. In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

1.126. Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

1.127. In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?

1.128. Un palazzo è costituito da 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?

1.129. Spiega brevemente il significato delle seguenti parole:

a) numero primo;
b) numero dispari;
c) multiplo;
d) cifra.

1.130. Rispondi brevemente alle seguenti domande:

a) cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
c) cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

Numeri interi relativi 2

2.1 I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5 - 12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di € 12 000 pur avendo soltanto risparmi in banca di soli € 5 000. In questo caso si tratta di togliere dai € 5 000 i € 12 000 che servono per acquistare l'auto: materialmente non è possibile e si ricorre a un prestito.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi». Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: «il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero», altri «domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero» e altri ancora «la temperatura sarà di -1 grado».

Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero $-10\,916$ e l'altezza del monte Everest con il numero $+8\,855$ (figura 2.1).

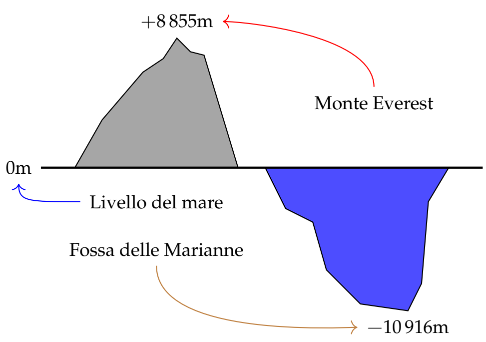


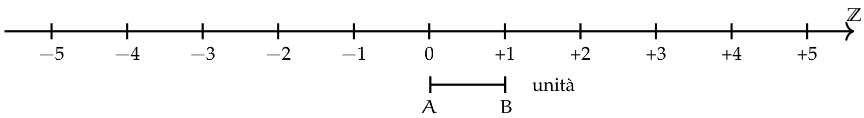
FIGURA 2.1: Il monte Everest e la fossa delle Marianne.

Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i numeri interi relativi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno "+" se sono numeri maggiori di 0 e dal segno "−" se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si costruisce raddoppiando i numeri naturali $\mathbb{N}$ e facendo precedere ciascun numero dal segno "+" o "−", ad eccezione dello 0, al quale non si attribuisce segno.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

2.2 I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi con segno positivo si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, l'insieme dei soli numeri interi negativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

Definizione 2.1. Due numeri relativi si dicono *concordi*, se hanno lo stesso segno; si dicono *discordi* se hanno segni opposti.

Esempio 2.1. Concordi-discordi.
$+3$ e $+5$ sono concordi; $+3$ e -5 sono discordi; -5 e -2 sono concordi.

Definizione 2.2. Il *valore assoluto* di un numero relativo è il numero senza il segno; quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali ($|\,|$). In linguaggio matematico:

$$|a| = a, \text{ se } a \geqslant 0, \qquad |a| = -a, \text{ se } a < 0.$$

Esempio 2.2. Valore assoluto.
$|+2| = 2$; $|-5| = 5$; $|-73| = 73$; $|+13| = 13$.

Definizione 2.3. Due numeri interi relativi sono *uguali* se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono *opposti* se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti $+3$ e -3; $+5$ e -5; $+19$ e -19.

❑ **Osservazione** Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno "+". Per esempio si può scrivere indifferentemente $+1$ o 1, $+12$ o semplicemente 12.

2.3 Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare:

a) ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
b) tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
c) ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
d) tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
e) 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

Per indicare che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo “$>$”; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo “$<$”.

Esempio 2.3. Confronto di numeri relativi.

- $+4 > +2$: i numeri sono positivi, il maggiore è $+4$ perché ha valore assoluto maggiore;
- $-1 > -3$: i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore;
- $+4 > -2$: il numero positivo è maggiore del numero negativo;
- $+4 > 0$: ogni numero positivo è maggiore di 0;
- $0 > -2$: ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l’ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

2.4.1 Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione $(+)$ è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno “$+$” al significato che esso ha. Almeno all’inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2) + (+5)$ per indicare la somma tra i numeri $+2$ e $+5$.

L’addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.

La *somma di due numeri relativi concordi* è il numero che ha per valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempio 2.4. $(+3)+(+5)=\dots$: i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è "+", i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8. Pertanto $(+3)+(+5)=+8$.

Esempio 2.5. $(-2)+(-5)=\dots$: i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è "−". Pertanto

$$(-2)+(-5)=-7.$$

La *somma di due numeri relativi discordi* è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

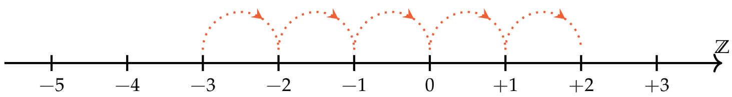
Esempio 2.6. $(-5)+(+2)=\dots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo. In definitiva $(-5)+(+2)=-3$.

Esempio 2.7. $(+5)+(-2)=\dots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è $+5$, pertanto il risultato ha lo stesso segno di $+5$, cioè è positivo. In definitiva $(-5)+(-2)=+3$.

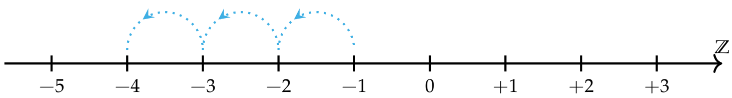
Esempio 2.8. $(+3)+(-7)=\dots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo. In definitiva $(+3)+(-7)=-4$.

L'addizione si può rappresentare nella retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicata dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

$(-3)+(+5)=2$



$(-1)+(-3)=-4$



2.4.2 Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.

Esempio 2.9. Sottrazione di numeri relativi.

a) $(+2)-(+3)=(+2)+(-3)=-1$;
b) $(+1)-(+3)=(+1)+(-3)=-2$;

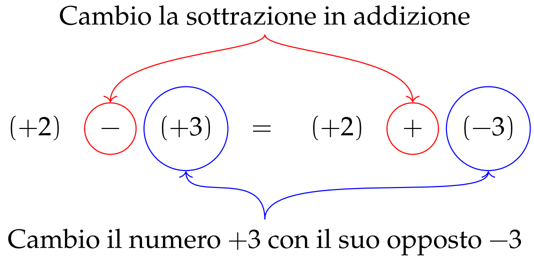


FIGURA 2.2: Esempio 2.9.a.

c) $(-2) - (-1) = (-2) + (+1) = -1$;
d) $(+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10$;
e) $(-5) - (+5) = (-5) + (-5) = -10$.

2.4.3 Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno "+" dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama somma algebrica.

Esempio 2.10. $(+1) + (-2) = -1$: se omettiamo il segno di addizione $(+)$ e le parentesi otteniamo $1 - 2$.

Esempio 2.11. $(+1) - (+3) = -2$: si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1) + (-3)$ omettendo il segno di addizione $(+)$ ed eliminando le parentesi si ottiene $1 - 3$.

Esempio 2.12. $(-1) + (+2) + (-3) + (+2) + (-7) + (-5) = -12$: si scrive in modo sintetico

$$-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5.$$

La somma algebrica gode delle proprietà associativa e commutativa, pertanto per sommare più numeri relativi si può procedere senza necessariamente rispettare l'ordine in cui sono scritti. Per esempio per calcolare il risultato di $-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5$ si possono prima sommare tra di loro i numeri positivi e $+2 + 2 = +4$ e poi tra di loro i numeri negativi $-1 - 3 - 7 - 5 = -16$. Quindi $+4 - 16 = -12$.

2.4.4 Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano fattori i due numeri e prodotto il risultato dell'operazione.

Il *prodotto di due numeri interi relativi* è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno "+" se i fattori sono concordi, il segno "−" se i fattori sono discordi.

Esempio 2.13. $(+3) \cdot (-2) = -6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Esempio 2.14. $(-2) \cdot (-3) = +6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.

Esempio 2.15. $(+5) \cdot (+3) = +15$: il numero 15 si ottiene da $5 \cdot 3$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.

Esempio 2.16. $(-1) \cdot (+2) = -2$: il numero 2 si ottiene da $1 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.

Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Perché meno per meno fa più; una possibile spiegazione.

$$0 = 0 \cdot (-2) = (-3+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (-2) = (-3)(-2) - 6.$$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3) \cdot (-2)$ affinché il numero ottenuto sommato a -6 dia 0? Evidentemente il numero $+6$.

Esempio 2.17. $(+3) \cdot (+2) \cdot (-2) = -12$: il risultato è negativo perché vi è un solo segno "$-$" tra i fattori.

Esempio 2.18. $(-2) \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) = +60$: il risultato è positivo perché ci sono quattro segni "$-$".

Esempio 2.19. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+2) \cdot (-3) = -72$: il risultato è negativo poiché ci sono cinque "$-$".

2.4.5 Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno "$+$" se i numeri da dividere sono concordi, il segno "$-$" se i numeri sono discordi.

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempio 2.20. $(+8) : (+2) = +4$: il risultato è 4 perché $8 : 2 = 4$, il segno è "+" perché sono concordi.

Esempio 2.21. $(+9) : (-3) = -3$: il risultato è 3 perché $9 : 3 = 3$, il segno è "−" perché sono discordi.

Esempio 2.22. $(-12) : (-4) = +3$: il risultato è 3 poiché $12 : 4 = 3$, il segno è "+" perché sono concordi.

2.4.6 Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempio 2.23. Potenze di numeri relativi.

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$;
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$;
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$;
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;
- $(-2)^4 = +16$;
- $(-2)^5 = -32$;
- $(-1)^6 = +1$;
- $(-1)^7 = -1$.

Ricordiamo che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0, \qquad a^1 = a.$$

Esempio 2.24. Potenze di numeri relativi, con esponente 0 o 1.

$$(-3)^0 = 1, \qquad (+5)^0 = 1, \qquad (-2)^1 = -2, \qquad (+7)^1 = +7$$

2.4.7 Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Le operazioni nei numeri relativi mantengono tutte le proprietà che hanno nell'insieme dei numeri naturali, inoltre vale la seguente proprietà:

Elemento inverso rispetto all'addizione

Ogni numero intero ha un inverso rispetto all'addizione, cioè per ogni intero esiste un altro intero che sommato al primo dà come risultato l'elemento neutro dell'addizione:
$a + (-a) = 0$; $\quad 147 + (-147) = 0$

2.5 Esercizi

2.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

2.3 Confronto di numeri relativi

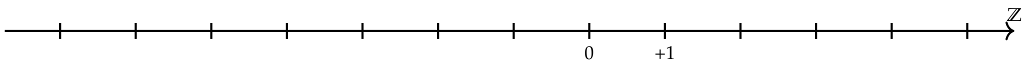
2.1. Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

$$+11 \qquad -3 \qquad 0 \qquad +2 \qquad -5 \qquad -7 \qquad +1$$

2.2. Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

$$-5 \qquad -2 \qquad +3 \qquad -1 \qquad 0 \qquad +7 \qquad -9 \qquad +13 \qquad -21$$

2.3. Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi $-3; +2; +5; -7; -5; -1; +3$.



2.4. Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto.

a) $|+3| = \ldots;$
b) $|-5| = \ldots;$
c) $|-1| = \ldots;$
d) $|+10| = \ldots;$
e) $|-11| = \ldots;$
f) $|+7| = \ldots$

2.5. Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra "$>$" e "$(<)$".

a) $-5 \ldots -2\,;$
b) $-3 \ldots +5\,;$
c) $-2 \ldots +2\,;$
d) $-5 \ldots 0\,;$
e) $-3 \ldots -5\,;$
f) $-1 \ldots +1\,;$
g) $+3 \ldots -3\,;$
h) $-1 \ldots -5\,;$
i) $0 \ldots +1\,;$
j) $+3 \ldots 0\,;$
k) $0 \ldots -2;$
l) $+7 \ldots +2;$
m) $-11 \ldots -101\,;$
n) $+100 \ldots -99\,;$
o) $-101 \ldots +110\,;$
p) $-1010 \ldots -1100\,;$
q) $+324 \ldots -282;$
r) $-714 \ldots -851.$

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

2.6. Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi.

a) $(+3) + (+2) =$
b) $(-5) + (-5) =$
c) $(-3) + (+5) =$
d) $(+12) + (+2) =$
e) $(-2) + (-3) =$
f) $(-3) + (+13) =$
g) $(+10) + (-5) =$
h) $(+1) + (+1) =$
i) $(-10) + 0 =$
j) $(-4) + (+4) =$
k) $(+7) + (-6) =$
l) $(-9) + (-3) =$
m) $(-101) + (+2) =$
n) $0 + (-9) =$
o) $(-10) + (+10) =$

2.7. Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto.

a) $+3 \to \ldots;$
b) $-2 \to \ldots;$
c) $+1 \to \ldots;$
d) $-11 \to \ldots;$
e) $-3 \to \ldots;$
f) $+5 \to \ldots$

2.8. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	-2	0	$+2$	-3	$+3$	-1	$+4$	-5	-10
b	0	-2	-3	$+1$	-5	-3	-10	-5	$+4$	$+4$
$a+b$										

2.9. Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi.

a) $(-1)-(+2)=$
b) $(-5)-(+3)=$
c) $(-2)-(+5)=$
d) $(+12)-(+2)=$
e) $(+1)-(-3)=$
f) $(-3)-(+1)=$
g) $(+11)-(-5)=$
h) $(+21)-(+11)=$
i) $(-1)-0=$
j) $(-3)-(+4)=$
k) $(+7)-(-2)=$
l) $(-3)-(-3)=$
m) $0-(-11)=$
n) $(-6)-(-6)=$
o) $(+5)-(-5)=$

2.10. Completa la seguente tabella.

a	-2	-2	-3	$+2$	-10	$+3$	-1	-7	$+8$	-9
b	0	-3	-3	-5	-5	-1	-10	-5	$+8$	$+4$
$a-b$										

2.11. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$a-(b+c)$										

2.12. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	$+2$	-2	-3	$+4$	-5	-1	$+6$	-7	$+10$
b	-1	0	-3	-2	$+4$	-2	$+1$	-4	-3	$+4$
c	0	-1	$+1$	-2	$+3$	-3	$+4$	-5	$+5$	-6
$a-(b+c)$										
$a-b+c$										
$a-b-c$										

2.13. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$
b	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$	-3	$+3$
$a+b$										
$-a+b$										
$-a-b$										
$-(a+b)$										
$-(a-b)$										
$-(-a+b)$										

2.14. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $+3-1=+\ldots;$
b) $+2-3=-\ldots;$
c) $-5+2=-\ldots;$
d) $-2+2=\ldots\ldots;$
e) $-5-2=\ldots 7;$
f) $-3+5=\ldots 2;$
g) $+8-0=\ldots\ldots;$
h) $-9+0=\ldots\ldots;$
i) $0-5=\ldots\ldots;$
j) $+1-1=\ldots\ldots;$
k) $-2-2=\ldots\ldots;$
l) $+9-3=\ldots 6;$
m) $+7-6=+\ldots;$
n) $-101+9=-\ldots;$
o) $-10+5=\ldots\ 5$

2.15. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $-5-2=$
b) $+3-4=$
c) $-1+2=$
d) $-3+4=$
e) $-6+7=$
f) $-1-9=$
g) $+8-7=$
h) $+2-1=$
i) $-6+2=$
j) $+5-2=$
k) $+4-3=$
l) $+4+1=$
m) $+4-6=$
n) $-10+5=$
o) $-16-4=$
p) $-3-9=$
q) $+14-7=$
r) $-10-10=$

2.16. Calcola i seguenti prodotti.

a) $(+3)\cdot(-2)=-\ldots$;
b) $(-5)\cdot(-2)=+\ldots$;
c) $(+2)\cdot(+4)=\ldots 8$;
d) $(+1)\cdot(-1)=\ldots 1$;
e) $(+3)\cdot 0=\ldots\ldots$;
f) $(-2)\cdot(-2)=\ldots\ldots$;
g) $0\cdot(-3)=\ldots\ldots$;
h) $(-2)\cdot(+2)=\ldots\ldots$;
i) $(+10)\cdot(-1)=\ldots$

2.17. Esegui le seguenti moltiplicazioni.

a) $(+3)\cdot(+1)=$
b) $(+1)\cdot(-2)=$
c) $(+3)\cdot(-3)=$
d) $(-5)\cdot(-1)=$
e) $(+3)\cdot(-3)=$
f) $(-2)\cdot(+5)=$
g) $(-1)\cdot(-7)=$
h) $(+3)\cdot(+11)=$
i) $(+1)\cdot(-10)=$
j) $(-4)\cdot(+3)=$
k) $(+5)\cdot(-6)=$
l) $(-3)\cdot(-2)=$

2.18. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
$a\cdot b$										

2.19. Esegui le seguenti divisioni.

a) $(+4):(+2)=$
b) $(+5):(-1)=$
c) $(+6):(+2)=$
d) $(+8):(-2)=$
e) $(-8):(+4)=$
f) $(-4):(+2)=$
g) $(-10):(+5)=$
h) $(+10):(-2)=$
i) $(-12):(+6)=$
j) $(-12):(+4)=$
k) $(+12):(-3)=$
l) $(-12):(+1)=$

2.20. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+12$	-6	$+20$	-10	-5	-21	-16	$+8$	-32
b	$+1$	-3	-2	-1	-5	$+1$	-7	-2	-4	-4
$a:b$										

2.21. Completa la seguente tabella.

a	0	+2	+1	−4	−6	−8	+10	+12	−14	−16
b	+1	−1	−1	+2	−3	+2	−5	−6	−7	+8
$a : b$										
$-a : b$										
$-(a : b)$										
$a : (-b)$										

2.22. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $(+3)^2 =$
b) $(-1)^2 =$
c) $(+1)^3 =$
d) $(-2)^2 =$
e) $(-2)^3 =$
f) $(+2)^3 =$
g) $(-3)^2 =$
h) $(-3)^3 =$
i) $(-4)^1 =$
j) $(+4)^1 =$
k) $(-4)^2 =$
l) $(-2)^4 =$
m) $(-3)^0 =$
n) $(-1)^5 =$
o) $(-2)^4 =$

2.23. Applica le proprietà delle potenze.

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{\cdots}$;
b) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\cdots}$;
c) $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)^{\cdots}$;
d) $(-10)^2 \cdot (-5)^2 = (\ldots\ldots)^2$;
e) $(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)^{\cdots}$;
f) $(-7)^3 : (-7)^3 = (-7)^{\cdots}$;
g) $(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{\cdots}$;
h) $(-6)^4 : (+2)^4 = (\ldots\ldots)^4$;
i) $\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{\cdots}$;
j) $\left[(-5)^2\right]^3 = (+5)^{\cdots}$;
k) $(-3)^3 \cdot (+3)^3 = \ldots$;
l) $(-8)^2 : (-4)^2 = \ldots$;
m) $\left[(-7)^2\right]^3 : (-7)^3 = \ldots$;
n) $\left[(-3)^3\right]^2 : (-3)^4 = \ldots$;

2.24. Completa la seguente tabella.

a	−2	+1	+2	−1	+3	−3	−4	−2	+2	−3
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5	2
a^b										

2.25. Completa la seguente tabella.

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−12
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4	−8
$(a-b)^2$										

2.26. Completa la seguente tabella.

a	−1	−2	+3	0	+1	+2	−4	+5	−5	−3
a^2										
$-a^2$										
$-(-a)^2$										

2.27. Completa la seguente tabella.

a	-2	-3	$+3$	-1	0	-2	-4	-3	$+4$	$+5$
b	0	$+1$	-1	-2	$+2$	-3	$+2$	-2	-3	-5
$a \cdot b$										
$-a \cdot b$										
$(-a) \cdot (-b)$										
$-a^2 \cdot b$										

2.28. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$(a+b) \cdot c$										

2.29. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+12$	-6	$+20$	-10	-5	-21	-16	$+8$	-12
b	$+1$	-3	-2	-1	-5	$+1$	$+19$	-14	-4	-8
$(a+b)(a-b)$										

2.30. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	0	-1	$+2$	-2	0	$+3$	-3	$+4$	-10
b	$+2$	0	$+1$	-1	-2	-3	$+2$	$+3$	$+4$	$+8$
c	$+3$	$+1$	$+1$	-2	-2	$+3$	-2	0	0	$+2$
$-2a+(b-c)$										

2.5.2 Esercizi riepilogativi

2.31. In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

a) misurare la temperatura;
b) contare le persone;
c) esprimere la data di nascita di un personaggio storico;
d) esprimere l'età di un personaggio storico;
e) indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente;
f) indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari.

2.32. La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.33. La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.34. Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile):

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.35. Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.36. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) ogni numero relativo è minore di zero V F
b) la somma di due numeri discordi è zero V F
c) il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo V F
d) la somma di due numeri opposti è nulla V F
e) il quoziente di due numeri opposti è l'unità V F
f) il quoziente di due numeri concordi è positivo V F
g) il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato V F
h) il doppio di un numero intero negativo è positivo V F
i) la somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo V F
j) il quadrato dell'opposto di un intero è uguale all'opposto del suo quadrato V F

2.37. Inserisci l'operazione corretta per ottenere il risultato.

a) $(+2)\ldots(-1) = -2$;
b) $(-10)\ldots(+5) = -2$;
c) $(-18)\ldots(-19) = +1$;
d) $(+15)\ldots(-20) = -5$;
e) $(-12)\ldots(+4) = -3$;
f) $(-4)\ldots 0 = 0$;
g) $(+1)\ldots(+1) = 0$;
h) $(+5)\ldots(-6) = +11$;
i) $-8\ldots(-2) = +16$.

2.38. Inserisci il numero mancante.

a) $+5 + (\ldots\ldots) = -5$
b) $-8 + (\ldots\ldots) = -6$
c) $+7 - (\ldots\ldots) = 0$
d) $0 - (\ldots\ldots) = -2$
e) $+3 \cdot (\ldots\ldots) = -3$
f) $-5 \cdot (\ldots\ldots) = 0$
g) $(+16) : (\ldots\ldots) = -2$
h) $(-6) : (\ldots\ldots) = -1$
i) $(-10) : (\ldots\ldots) = +5$

2.39. Scrivi tutti i numeri:

a) interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
b) interi relativi il cui prodotto è -12;
c) interi negativi maggiori di -5.

2.40. Inserisci "+" o "−" in modo da ottenere il numero più grande possibile:

$$-3\ldots(-3)\ldots3\ldots(-6).$$

2.41. Inserisci le parantesi in modo da ottenere il risultato indicato.

a) $-5\cdot+3-1+2=-20$;
b) $-5+2\cdot-1+2=+5$;
c) $-5+7-3\cdot2=+3$;
d) $-1\cdot+3-5\cdot-1-2=+12$;
e) $+1-1\cdot1-1+3-2\cdot-3-2=+5$.

2.42 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5+7+4-9$;
b) $+1-1+1-1+1-1+1$;
c) $+1-2+3-4+5-6$;
d) $+1-2+2-3+3-4+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10$;
e) $(-3+10)-(2-3)$.

2.43 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(+5-2-1)+(+2+4+6)$;
b) $(-5+7-9)+(+1-2+3)-(+4-6+8)$;
c) $+4-3-[+2-1-(8-3)-(-5-2)]-(2+3)$;
d) $-2+(-5+1)+(-7+4)-2\cdot(-6+1)$;
e) $15-9\cdot(-14+12)+8\cdot(-3+6)+5\cdot(-3+1)$.

2.44 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(50-36-25)\cdot(-15+5+20)-10\cdot(-3-7)$;
b) $[+3-(10-5+25)]\cdot[-16+5-(-2-14)]:(9+6)$;
c) $20:(+15-5)-30:(-10+5)+40:(15-20)$;
d) $18:(-3)+6\cdot[1-5\cdot(-2+4)+3]:(-6)$;
e) $3\cdot4-3\cdot[18:(-2)-17+(14-26+5)\cdot3-12]+[16-1\cdot(-1-3+5)-37+16]$.

2.45 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $100:2+3^2-2^2\cdot6$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $2^7:\ 2^3-2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $30-5\cdot3-7\cdot2^2-2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $(3^2+4^2)-(-3-4)^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.46 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $5\cdot5^3\cdot5^4:\left(5^2\right)^3+5$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $32^5:\ 16^4+(-2)^9$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $\left(3^4\cdot3^3:\ 3^6\right)^2+(7^2-5^2):2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $\left(3\cdot2^2-10\right)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot2^3$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.47 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5 \cdot (12-3+4) - 2 \cdot \left[3-16:(-2+4)\right]^2$;
b) $\left[-3+(-5)\cdot(-1)\right]^3 + \left[-4-(1-2)\right]^2$;
c) $\left[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)\right]^2 : \left[2^4-3\cdot(+6)\right]^2$;
d) $\left[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)\right]^3 : \left[2^2+5\cdot(-2)^2\right]^3$.

2.48 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(-3)^2\cdot(4-1)^5 : [(-4)^3:(2^5)-3^3:(-3)^3]$;
b) $[-(-2)\cdot 2+(-10)^2:(-5)^2]\cdot[3-5+2\cdot(-3)^2-5]$;
c) $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot(2^3-3^2)-6:(-3)-(4-7+3)^4$;
d) $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot(2^2+3^2)-(-12):(-3)$.

2.49 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $[10-6\cdot(-2)^2]:(-7)+(3^2:3)\cdot 2^3-15:(-3)+[(-3)^3:(-3)^0]$;
b) $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$;
c) $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$;
d) $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-\left(|3-5|\cdot(3-5)\right)^2\cdot(-2)$;
e) $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$.

2.50. Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità:

a) il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo;
b) il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo;
c) la differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5;
d) il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo.

2.51. Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di $+2$ e -2. Il risultato è?

2.52. Sottrarre dalla somma di -15 e $+27$ il prodotto di -3 e $+7$.

2.53. Aggiungere al prodotto di -5 e $+3$ la somma di $+5$ e -10.

2.54. Sottrarre dal prodotto di $+7$ e $+4$ la somma di $+1$ e -8.

2.55. Moltiplica la somma tra -3 e $+3$ con la differenza tra $+3$ e -3.

2.56. Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?

2.57. Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?

2.58 (*). Un polpo congelato è stato appena tolto dal congelatore, la sua temperatura è $-12°$; viene immerso nell'acqua bollente e la sua temperatura media è aumentata di $6°$. A quale temperatura media si trova ora il polpo?

2.59. Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?

2.60 (*). Un termometro segna all'inizio $-5°$, poi scende di $3°$, quindi sale di $2°$, infine discende di $6°$. Quale temperatura segna alla fine?

2.61 (*). Il prodotto di due numeri interi relativi è $+80$, aumentando di 1 il primo numero il prodotto è $+72$. Quali sono i due numeri?

2.62. Il prodotto di due numeri interi relativi è $+6$, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

2.63. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7.

2.64. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7.

2.65. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+2$ e come somma $+1$.

2.66. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+10$ e come somma -3.

2.67. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+14$ e come somma -9.

2.68. Determina due numeri relativi aventi come prodotto -15 e come somma -8.

2.69. Determina due numeri relativi aventi come prodotto -7 e come somma $+6$.

2.5.3 Risposte

2.42. a) -3, b) $+1$, c) -3, d) -8, e) $+8$.

2.43. a) $+14$, b) -11, c) -7, d) $+1$, e) $+47$.

2.44. a) -10, b) -9, c) 0, d) 0, e) $+183$.

2.45. a) $+35$, b) $+12$, c) -15, d) -24.

2.46. a) $+30$, b) 0, c) $+15$, d) 0.

2.47. a) -115, b) $+17$, c) $+225$.

2.48. a) -3^7, b) $+88$, c) -12.

2.49. a) $+4$, b) $+1592$, c) 0, d) 0.

2.60. $-6°$.

2.61. -10; -8.

3 Numeri razionali (e irrazionali)

3.1 Premessa storica

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.

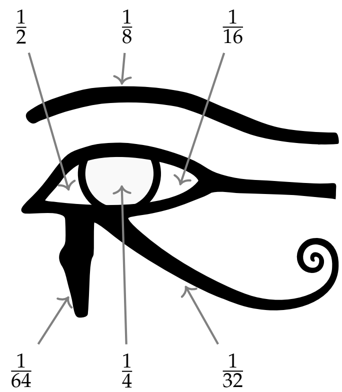
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni ed il valore corretto andava interpretato dal contesto.

Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata:

Nel *papiro di Ahmes* (detto anche *papiro di Rhind*) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$, con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



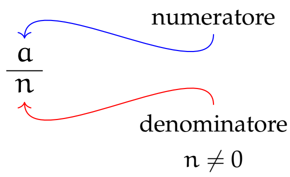
I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48... Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni. *Semis* per indicare $\frac{1}{2}$, il cui simbolo era S oppure Z; *sextans* per indicare $\frac{1}{6}$, *dracma* per indicare $\frac{1}{96}$ e *obolus* per indicare la sesta parte della *dracma*.

Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini *numeratore* e *denominatore*.

La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che con il suo *Liber Abaci* (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

3.2 Frazioni

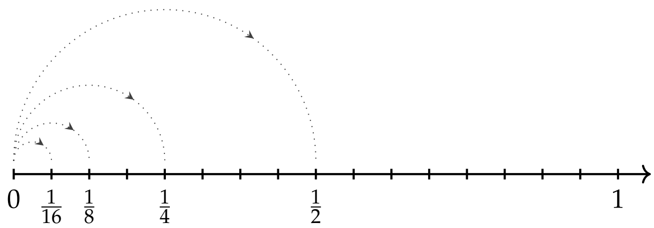
Definizione 3.1. Una *frazione* è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama numeratore e il secondo denominatore. Il denominatore deve essere diverso da zero.



Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}l$, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria litro per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come operatori che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

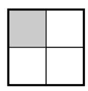
Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta *frazione unitaria*; indicata con A una grandezza (segmento, peso, superficie, angolo...) la scrittura $\frac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come il 'tutto', in n parti uguali.

Nella figura, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$; dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$; dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$; dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



Definizione 3.2. Il *denominatore* di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero. Poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}Q$.

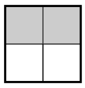
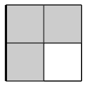
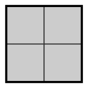


Una frazione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di A, dove A è il tutto che si deve dividere in n parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per n la frazione $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi:

$$\frac{2}{n}A, \frac{3}{n}A, \ldots, \frac{n}{n}A$$

che rappresentano il doppio di un ennesimo, il triplo di un ennesimo, l'intera grandezza A.
Riferendoci all'esempio del quadrato:

 $\frac{2}{4}Q$  $\frac{3}{4}Q$  $\frac{4}{4}Q$

La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge *emme ennesimi di* A) con $m < n$ indica il multiplo secondo m della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$; essa indica la grandezza che si ottiene dividendo A in n parti uguali e prendendone m.

Definizione 3.3. Il *numeratore* di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti secondo il denominatore, sono state prese.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore. Quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo, quarto, quinto,...) fino a 10 e se è maggiore di dieci si aggiunge la terminazione *-esimo*.

Esempio 3.1. Lettura di frazioni.

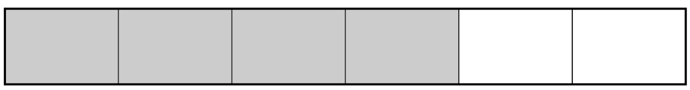
a) $\frac{1}{2}$ si legge *un mezzo*;
b) $\frac{1}{10}$ si legge *un decimo*;
c) $\frac{2}{3}$, si legge *due terzi*;
d) $\frac{1}{11}$ si legge *un undicesimo*;
e) $\frac{5}{7}$ si legge *cinque settimi*;
f) $\frac{1}{12}$ si legge *un dodicesimo*.

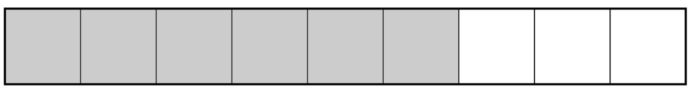
A volte per scrivere le frazioni si utilizza la scrittura del tipo a/b, quindi 2/3; 4/6; 6/9...

Definizione 3.4. Si chiamano *proprie* le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell'intero.

$\frac{2}{3}$ 

$\frac{4}{6}$ 

$\frac{6}{9}$ 

Definizione 3.5. Si dicono *equivalenti* due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

Proprietà 3.1 (Invariantiva delle frazioni)**.** *Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.*

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio 3.2. Trovare due frazioni equivalenti a $\frac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Definizione 3.6. Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* se il numeratore e il denominatore sono due interi primi tra loro.

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio 3.3. Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{8}{12}$.

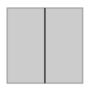
Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8 = 2^3$ e $12 = 3 \cdot 2^2$. Calcolo il MCD prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo; in questo caso 2^2 cioè 4. Divido numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{10}{10} = 1.$$

Per esempio, se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero,. . .



$\frac{2}{2} = 1$

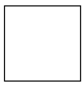
$\frac{3}{3} = 1$

Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato Q? Tutte le frazioni che hanno il numeratore che è multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

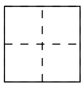
$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{15}{3} = 5, \qquad \frac{72}{6} = 12.$$

Definizione 3.7. Si chiamano *apparenti* le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

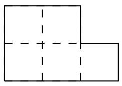
Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).



I $\frac{5}{4}$ si ottengono dividendo il quadrato in 4 parti uguali;



dovendone prenderne 5 l'unità non basta.



La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}.$$

Definizione 3.8. Si chiamano *improprie* le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate *frazioni equivalenti*. Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nella figura 3.3.

Definizione 3.9. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un *numero razionale assoluto* ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nel nostro esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento

$$\frac{2}{3} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \dots \right\}.$$

In questo modo abbiamo dato al simbolo a/b un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura a/b rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo $2 : 3 = 2/3$.

Definizione 3.10. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto *numero razionale*. L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

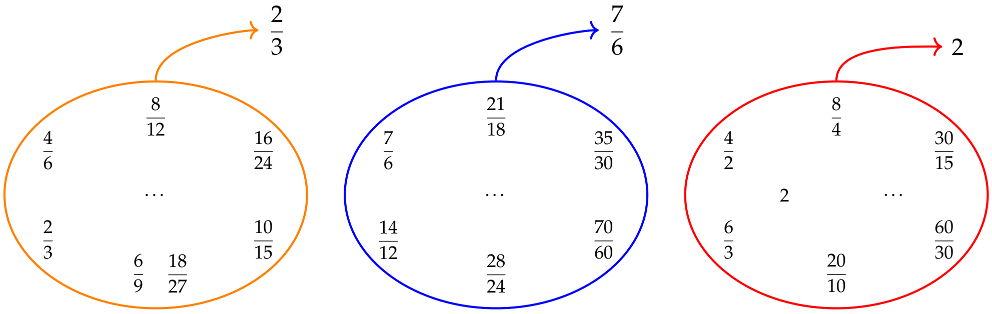


FIGURA 3.1: Esempi di frazioni equivalenti.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempio 3.4. Segno di numeri razionali.

$$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}; \qquad \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}; \qquad \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione propria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione propria è il denominatore stesso della frazione.

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{20}{5}, \frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \ldots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a 1, 2, 4, 3, 4.

Esempio 3.5. $\dfrac{11}{3} = 3 + \dfrac{2}{3}$.

- $11 \div 3 = 3$ il numero naturale;
- $11 \bmod 3 = 2$ numeratore della frazione propria;
- $3 =$ denominatore della frazione propria.

Esempio 3.6. $\dfrac{19}{7} = 2 + \dfrac{5}{7}$.

- $19 \div 7 = 2$ il numero naturale;
- $19 \bmod 7 = 2$ numeratore della frazione propria;
- $5 =$ denominatore della frazione propria.

3.4 La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & & & & & 3 \\ \cline{6-6}
1 & 0 & & & & 0\,,\,3\,3\,3\,3\,\ldots \\
 & 1 & 0 & & & \\
 & & 1 & 0 & & \\
 & & & 1 & 0 & \\
 & & & & \ldots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 1 & & & & 8 \\ \cline{6-6}
 & 3 & & & & 1\,,\,3\,7\,5 \\
 & 3 & 0 & & & \\
 & & 6 & 0 & & \\
 & & & 4 & 0 & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad\qquad \frac{11}{8} = 1,375$$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come $1,375$ e numeri decimali periodici come $1,333333\ldots$; quest'ultimo si scrive mettendo una barra sulla parte periodica: $1,\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1,(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.

I numeri decimali periodici semplici si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.

I numeri decimali periodici misti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempio 3.7. Alcuni numeri decimali finiti.

a) $\dfrac{11}{8} = \dfrac{11}{2^3} = \dfrac{11 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{1375}{1000} = 1,375$;

b) $\dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{5^2} = \dfrac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \dfrac{28}{100} = 0,28$;

c) $\dfrac{13}{40} = \dfrac{13}{2^3 \cdot 5} = \dfrac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{325}{1000} = 0,325$;

d) $\dfrac{50}{7} = \dfrac{\ldots}{10}$, non è possibile, non è un decimale finito.

Procedura 3.2. *Trasformare una frazione in numero decimale:*

a) eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;
b) se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 *il resto;*
c) continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;
d) se la divisione si conclude con resto 0 *si ottiene un numero decimale finito;*
e) se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.

Esempio 3.8. Trasformazione di frazioni in numeri decimali.

a)

```
  1 1 3     | 2 0
- 1 0 0     | 5 , 6 5
    1 3 0
  - 1 2 0
      1 0 0
    - 1 0 0
          0
```

b)

```
  1 7     | 6
- 1 2     | 2 , 8 3
    5 0
  - 4 8
      2 0
    - 1 8
        2
```

c)

```
  1 5             | 7
- 1 4             | 2 , 1 4 2 8 5 7
    1 0
  -   7
      3 0
    - 2 8
        2 0
      - 1 4
          6 0
        - 5 6
            4 0
          - 3 5
              5 0
            - 4 9
                1
```

a) $\dfrac{113}{20} = 5,65$, numero decimale finito;

b) $\dfrac{17}{6} = 2,8\overline{3}$, numero decimale periodico misto di periodo 3;

c) $\dfrac{15}{7} = 2,\overline{142857}$, numero decimale periodico di periodo 142857.

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura 3.3. *Trasformare un numero decimale finito in una frazione:*

a) scrivere una frazione che ha per numeratore il numero che si vuole trasformare e per denominatore uno;
b) moltiplicare numeratore e denominatore per dieci elevato al numero di cifre a destra della virgola.
c) semplificare la frazione così ottenuta.

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

Esempio 3.9. Trovare la frazione equivalente a 1,36:

$$\frac{1,36}{1} = \frac{1,36 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}.$$

.

Esempio 3.10. Trovare la frazione equivalente a 0,00043000:

$$\frac{0,00043}{1} = \frac{0,00043 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = \frac{43}{100000}.$$

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

la parte intera composta dalle cifre poste prima della virgola;

il periodo che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;

l'antiperiodo la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485795795795795... la parte intera è 253, il periodo è 579, l'antiperiodo è 48.

Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde.

Il numero 253,485795795795795... può essere scritto $253,48\overline{579}$, oppure $253,48(579)$.

I numeri decimali periodici si dividono in:

semplici se subito dopo la virgola è presente il periodo;

misti se dopo la virgola è presente l'antiperiodo.

Anche i numeri periodici possono essere trasformati in una frazione, che si dice *frazione generatrice* del numero.

Procedura 3.4. *Determinare la frazione generatrice di un numero periodico:*

a) il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola e con il periodo scritto una sola volta, il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo;
b) il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 *quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti* 0 *quante sono le cifre comprese tra il periodo e la virgola;*
c) semplificare la frazione ottenuta.

Passo a $\quad 2,5\overline{12} \rightarrow 2512.$

Passo b $\quad 2512 - 25 = 2487.$

Passo c $\quad 2,5\overline{12} = \dfrac{2487}{990}.$

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione Consideriamo il numero periodico semplice $2,\overline{3}$. Considero la frazione $\frac{2,\overline{3}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 10 $\frac{2,\overline{3}\cdot 10}{1\cdot 10}$ e ottengo $\frac{23,\overline{3}}{10}$.

L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale. Per ottenere questo risultato tolgo $2,\overline{3}$ da $23,\overline{3}$, cioè $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$.

Come mai $2,\overline{3}$ e non $1,\overline{3}$ o $0,\overline{3}$? Perché in questo modo posso sapere quanto vale il denominatore: se $23,\overline{3}$ è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 10$, 21 è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 9$ in quanto $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$. In definitiva

$$2,\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$

Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto $2,5\overline{12}$.

Considero la frazione $\frac{2,5\overline{12}}{1}$, moltiplico numeratore e denominatore per 1000 e ottengo: $\frac{2512,\overline{12}}{1000}$. L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale che contiene il periodo che si ripete all'infinito. Per ottenere questo risultato tolgo da $2512,\overline{12}$ questa volta $25,\overline{12}$, cioè $2512,\overline{12} - 25,\overline{12} = 2487$. Per avere una frazione equivalente occorre che al denominatore abbia 990 in quanto dal numeratore ho tolto 10 volte $2,5\overline{12}$.

$$2,5\overline{12} = \frac{2512 - 25}{990} = \frac{2487}{990}.$$

3.4.1 Numeri periodici particolari

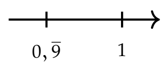
Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2,\overline{9}$, $1,1\overline{9}$, $21,22\overline{9}$ ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico otteniamo un risultato inatteso

$$2,\overline{9} = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Quindi $2,\overline{9}$ coincide con il numero intero 3.

Per lo stesso motivo $1,1\overline{9} = 2$, $21,22\overline{9} = 21,23$.

Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.



Se i due numeri fossero veramente diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere "buchi", tra un suo punto e un altro ci deve essere almeno un altro numero compreso tra i due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,9999999998 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1, di conseguenza i due numeri coincidono.

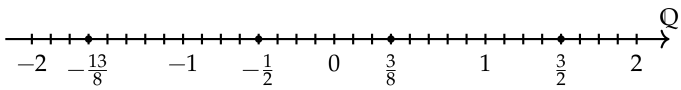
3.5 I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto O sulla retta e associare ad esso il numero zero. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$, il punto corrispondente al numero razionale sulla retta viene determinato nel seguente modo. Dividiamo il segmento unitario u in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore n della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto O procedendo verso destra, si contano a frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

Per le frazioni improprie la singola unità u non è sufficiente, occorre prendere la unità successiva di u e dividere anche questa in n parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da a. Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$. In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1 + \frac{1}{2}$, quindi rappresentiamo partendo dal numero 1 invece che da 0.

Se il numero razionale è negativo, ci comportiamo come prima con l'avvertenza di muoverci nel senso opposto a quello precedente cioè da destra verso sinistra.



3.6 Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ è *minore* del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

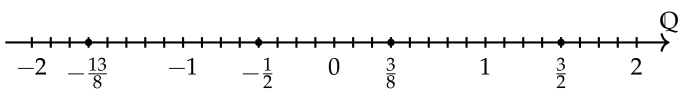
$$\frac{a}{n} < \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *maggiore* di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *equivalente* a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono.

Esempio 3.11. Confronto tra numeri razionali.



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} < \frac{3}{2}, \qquad -1 > -\frac{13}{8}.$$

Per certe frazioni è facile vedere se una frazione precede o segue un'altra. Per altre non è così semplice.

Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$, con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali?

Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno unità frazionarie dello stesso tipo: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura 3.5. *Confrontare due frazioni:*

a) *si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;*
b) *si trasforma ciascuna frazione come segue:*
il nuovo denominatore è il mcm *trovato;*
il nuovo numeratore si ottiene dividendo il mcm *per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data.*
c) *si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.*

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel *moltiplicare in croce* numeratori e denominatori delle frazioni, come nei seguenti esempi.

Esempio 3.12. Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$.
Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3}, \text{ perché } 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5.$$

Esempio 3.13. Confronta le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$.
$\operatorname{mcm}(7.9) = 63.$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63}, \qquad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63}.$$
$$\frac{54}{63} > \frac{49}{63} \Rightarrow \frac{6}{7} > \frac{7}{9}.$$

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

3.7.1 Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Definizione 3.11. La *somma di due frazioni con lo stesso denominatore* è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{3}=\frac{25}{15} \\[1ex] \frac{2}{3}=\frac{6}{15} \end{array} \rightarrow \boxed{+} \longrightarrow \frac{31}{15}$$

In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come

$$\frac{mq+pn}{nq}.$$

$$\begin{array}{l} \frac{m}{n}=\frac{mq}{nq} \\[1ex] \frac{p}{q}=\frac{pn}{nq} \end{array} \rightarrow \boxed{+} \longrightarrow \frac{mq+pn}{nq}$$

Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura 3.6. *Sommare due o più frazioni:*

a) *ridurre le frazioni ai minimi termini;*
b) *calcolare il* mcm *dei denominatori;*
c) *mettere il* mcm *come denominatore della frazione somma;*
d) *per ogni frazione dividere il* mcm *per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore della frazione mantenendo il segno;*
e) *calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;*
f) *mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;*
g) *ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.*

Esempio 3.14. Sommare le frazioni $\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-1$.

Passo a riduco ai minimi termini le frazioni $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{1}$

Passo b calcolo $\text{mcm}(3,6,5,1)=30$.

Passo c la frazione somma avrà come denominatore il mcm trovato $\dfrac{\dots}{30}$.

Passo d per ogni frazione divido il mcm per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\begin{aligned} \frac{2\cdot(30:3)-5\cdot(30:6)+8\cdot(30:5)-1\cdot(30:1)}{30} &= \frac{2\cdot 10-5\cdot 5+8\cdot 6-1\cdot 30}{30} \\ &= \frac{20-25+48-30}{30}. \end{aligned}$$

Passo e calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore $+13$.

Passo f metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\dfrac{13}{30}$.

Passo g vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\dfrac{13}{30}$.

Esempio 3.15. Sommare i numeri razionali $-0,2 - 1,\overline{2} + 25\% + \frac{7}{12}$.

Trasformo i numeri razionali in frazioni:

$$-\frac{2}{10} - \frac{12-1}{9} + \frac{25}{100} + \frac{7}{12} = -\frac{1}{5} - \frac{11}{9} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}.$$

Quindi $\mathrm{mcm}(5,9,4,12) = 180$.

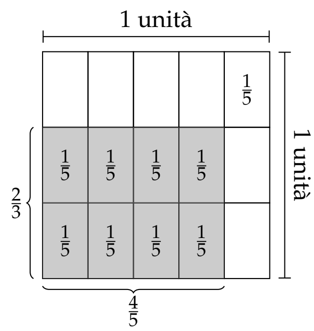
$$\begin{aligned}\frac{-1\cdot(180:5) - 11\cdot(180:9) + 1\cdot(180:4) + 7\cdot(180:12)}{180} &= \frac{-1\cdot 36 - 11\cdot 20 + 1\cdot 45 + 7\cdot 15}{180}\\ &= \frac{-36 - 220 + 45 + 105}{180}\\ &= -\frac{106}{180}\\ &= -\frac{53}{90}.\end{aligned}$$

3.7.2 Sottrazione di frazioni

La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parla di somma di frazioni si intende sempre somma algebrica di frazioni.

3.7.3 Moltiplicazione

Il risultato della moltiplicazione tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.



Moltiplicare $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$. Il denominatore indica in quante parti è stato diviso il quadrato unitario: sono $3 \cdot 5 = 15$ parti. Il numeratore indica quante parti prendiamo, sono le parti $2 \cdot 4 = 8$ in grigio.

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\begin{array}{c} \frac{m}{n} \searrow \\ \frac{p}{q} \nearrow \end{array} \boxed{\cdot} \longrightarrow \frac{mp}{nq}$$

3.7.4 Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa? Una operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.

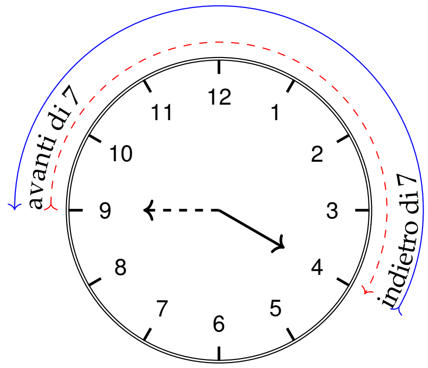
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici $(12 = 0)$. Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore. Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

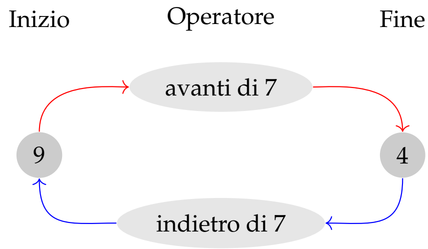
Consideriamo l'addizione $9 + 7 = 4$. Il primo elemento 9 può essere interpretato come stato iniziale, $+7$ come operatore formato dall'operazione «spostare le lancette avanti di...» e dall'argomento 7; il risultato 4 è lo stato finale.

Si indica come operazione inversa quella operazione che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello precedente dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.

Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro che è 0, ogni numero ha l'inverso.

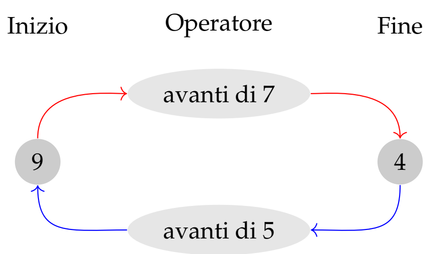
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

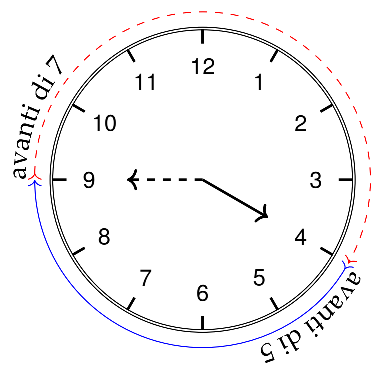




- L'inverso di 0 è 0 perché $0+0=0$;
- l'inverso di 1 è 11 perché $1+11=0$;
- l'inverso di 2 è 10 perché $2+10=0$;
- l'inverso di 3 è 9 perché $3+9=0$;
- l'inverso di 4 è 8 perché $4+8=0$;
- l'inverso di 5 è 7 perché $5+7=0$.

L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa, con l'operazione diretta che ha come argomento l'elemento inverso dell'argomento dell'operazione diretta.





Così per tornare allo stato iniziale invece di operare con portare indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

3.7.5 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni.

$$\begin{matrix}\frac{m}{n}\\[4pt]\frac{p}{q}\end{matrix} \rightrightarrows \boxed{\;:\;} = \begin{matrix}\frac{m}{n}\\[4pt]\frac{q}{p}\end{matrix} \rightrightarrows \boxed{\;\cdot\;} \longrightarrow \frac{mq}{np}$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempio 3.16. Quoziente di due frazioni.

- $\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$.

Il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$. Pertanto

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{4} \to \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}.$$

- $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$.

Il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$. Pertanto

$$-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) \to -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}.$$

- $\frac{2}{3} : 0$.

Il reciproco di 0 non esiste, quindi la divisione non è eseguibile.

- $0 : \frac{2}{3}$.

Il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$. Pertanto

$$0 : \frac{2}{3} \to 0 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

3.8 Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Esempio 3.17. Potenza di frazioni.

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$;
- $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$;
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$.

3.8.1 Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.

Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:

- $a^n : a^n = 1$, la divisione di due numeri uguali è 1;
- $a^n : a^n = a^0$, applicando le proprietà delle potenze.

Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero $a^0 = 1$. Non è invece possibile la potenza 0^0.

3.8.2 Potenza con esponente un numero intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo:

$$a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

La potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.

Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0. Il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

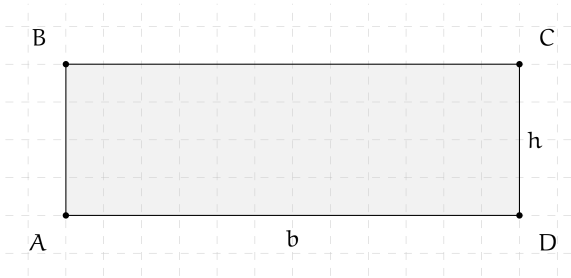
Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc, si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000m;
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000m/s;
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007m.

I primi due numeri sono 'molto grandi', mentre l'ultimo è 'molto piccolo' e operare con numeri simili, non è affatto semplice.

Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni $b = 0,00000006$m e $h = 0,0000002$m e calcoliamone l'area:

$$A = b \cdot h = 0,00000006 \cdot 0,0000002 = 0,000000000000012.$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri in questo caso 'molto piccoli', è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.

Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di *notazione scientifica*.

Definizione 3.12. Un numero α è scritto in *notazione scientifica* se si presenta nella forma:

$$\alpha = k \cdot 10^n,$$

dove k è un numero decimale maggiore o uguale a 1 e minore di 10 e n è un numero intero.

Esempio 3.18. I numeri $3,5 \cdot 10^7$ e $8,9 \cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0,5 \cdot 10^3$ e $10,3 \cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 10,3 che è maggiore di 10.

3.9.1 Come trasformare un numero in notazione scientifica

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero $0,000007$m. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0,000007\text{m} = 7 \cdot \frac{1}{1000000}\text{m} = 7 \cdot 10^{-6}\text{m}.$$

Allo stesso modo il numero 0,000000026 viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0,000000026 = 2,6 \cdot \frac{1}{100000000} = 2,6 \cdot \frac{1}{10^8} = 2,6 \cdot 10^{-8}.$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero k deve essere minore di 10.

Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6 400 000m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6,4 \cdot 10^6$.

Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3,4 \cdot 10^{11}$. Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero k deve essere minore di 10.

❑ **Osservazione** A numeri 'piccoli', corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri 'grandi', corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Procedura 3.7. *Scrivere un numero decimale in notazione scientifica:*

a) spostare la virgola di tanti posti in modo da avere una sola cifra diversa da zero a sinistra;
b) scrivere la moltiplicazione tra il numero ottenuto al passo precedente e dieci elevato ad un esponente pari al numero si spostamenti della virgola effettuati se la virgola è stata spostata verso sinistra o elevato al suo opposto se la virgola è stata spostata verso destra.

Esempio 3.19. Scrivi 348 000 000 000 000 in notazione scientifica. Per comodità riscrivo il numero evidenziando l'attuale posizione della virgola: 348 000 000 000 000,0.

Passo a Per ottenere un numero con una sola cifra diversa da zero a sinistra della virgola devo spostare la virgola di 14 posti verso sinistra;

Passo b ora scrivo la moltiplicazione tra il numero ottenuto: $3,48$ e 10 elevato alla 14: $3,48 \cdot 10^{14}$.

Esempio 3.20. Scrivi 0,0000340 in notazione scientifica.

Passo a Per ottenere un numero con una sola cifra diversa da zero a sinistra della virgola devo spostare la virgola di 5 posti verso destra;

Passo b ora scrivo la moltiplicazione tra il numero ottenuto: $3,40$ e 10 elevato alla -5: $3,40 \cdot 10^{-5}$.

Esempio 3.21. Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $b = 6 \cdot 10^{-8}\text{m}$, $h = 2 \cdot 10^{-7}\text{m}$. L'area sarà quindi:

$$\begin{aligned} A &= b \cdot h = \\ &= 6 \cdot 10^{-8}\text{m} \times 2 \cdot 10^{-7}\text{m} = \\ &= 12 \cdot 10^{-15}\text{m}^2 = \\ &= 1,2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-15}\text{m}^2 = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-14}\text{m}^2. \end{aligned}$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

Esempio 3.22. Trasforma in notazione scientifica e calcola $\frac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002} &= \frac{3 \cdot 10^3 : (6 \cdot 10^6)}{5 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^{-6})} \\
&= \frac{3 : 6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \\
&= \frac{0,5}{10} \cdot 10^{-3+3} \\
&= 0,05 \cdot 10^0 \\
&= 0,05 \\
&= 5 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

3.9.2 Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri 'molto grandi' o 'molto piccoli', non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto è grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

Definizione 3.13. Dato un numero scritto in forma scientifica, si definisce *ordine di grandezza* (abbreviato con la sigla o.d.g.), la potenza di 10.

Procedura 3.8. *Determinare l'ordine di grandezza di un numero:*

a) scrivi il numero in notazione scientifica $k \cdot 10^n$*;*
b) l'ordine di grandezza è 10^n.

Esempio 3.23. Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000074 e 47000000000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica:

$$0,000074 = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ e } 47000000000 = 4,7 \cdot 10^{10}.$$

L'o.d.g. del primo numero è 10^{-5}. L'o.d.g del secondo numero è 10^{10}.

3.10 Problemi con le frazioni

3.10.1 Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio 3.24. Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

- cornetti alla crema: $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$;
- cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$
- cornetti alla marmellata: 71.

3.10.2 Problemi inversi

Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio 3.25. Mario ha speso € 21 che corrispondono ai 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che € 21 corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. È sufficiente dividere 21 per la frazione: € $21 : \frac{3}{5} =$ € $21 \cdot \frac{5}{3} =$ € 35.

Esempio 3.26. Giuseppe possiede € 150. Se spende i 3/5 della somma posseduta e poi i 2/3 della somma rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi.

Calcoliamo prima i 3/5 di 150, cioè € $150 \cdot \frac{3}{5} =$ € 90. Quindi la prima volta Giuseppe spende € 90, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di € 60, cioè € $60\frac{2}{3} =$ € 40. In tutto ha speso € 90 + € 40 = € 130, gli rimangono € 20.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{13}{15},$$

gli rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono € $150 \cdot \frac{2}{15} =$ € 20.

3.11 Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.

Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

Definizione 3.14. Le *percentuali* sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100}; \qquad 7\% = \frac{7}{100}; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000}.$$

Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35; \qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0,07; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = 0,125.$$

Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0,02 = \frac{0,02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; \qquad 0,23 = \frac{0,23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; \qquad 1,21 = \frac{1,21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%.$$

Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = \frac{0,\overline{6}}{1} = \frac{66,\overline{6}}{100} = 66,\overline{6}\%.$$

3.11.1 Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio 3.27. In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere, si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100. Precisamente $\frac{95}{100} \cdot 857 = 814,15$. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio 3.28. Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli:

$$\frac{126}{652} \cdot 100\% \approx 0,19 \cdot 100\% = 19\%.$$

3.11.2 Problemi con gli sconti

Esempio 3.29. Un pantalone costava € 70 e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e po il prezzo scontato. Lo sconto è dato da

$$20\% \cdot 70\,€ = \frac{20}{100} \cdot 70\,€ = 14.$$

Il prezzo scontato è € 70− € 14 = € 56.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è 100% − 20% = 80%. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\% \cdot 70\,€ = \frac{80}{100} \cdot 70\,€ = 56\,€.$$

Esempio 3.30. Un paio di scarpe da € 120 viene venduto scontato a € 75 Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto € 120 − € 75 = € 45.

Calcolo la percentuale che € 45 rappresentano di € 120,

$$\frac{45}{120} \cdot 100\% = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%.$$

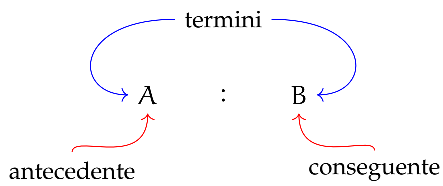
Esempio 3.31. Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del 15%, ha risparmiato cosi 120 euro. Quanto costa il computer di listino?

€ 120 corrispondono al 15% del prezzo di listino. Per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$$120 : 15\% = 120 : \frac{15}{100} = 120 \cdot \frac{100}{15} = €\,800.$$

3.12 Proporzioni

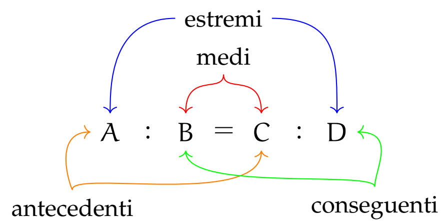
Definizione 3.15. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice *antecedente*, il secondo *conseguente*.



Definizione 3.16. Una *proporzione* è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo

$$A : B = C : D,$$

che si legge A *sta a* B *come* C *sta a* D, con B e D diversi da zero.



Esempio 3.32. $4 : 2 = 12 : 6$.
Formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.

Esempio 3.33. $7 : 14 = 16 : 4$.
Non formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

Proprietà 3.9 (Fondamentale delle proporzioni). *In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

$$A : B = C : D \Rightarrow A \cdot D = B \cdot C.$$

Esempio 3.34. $4 : 6 = 6 : 9$.
Il prodotto dei medi è $6 \cdot 6 = 36$ e il prodotto degli estremi è $4 \cdot 9 = 36$. Quindi è una proporzione.

Esempio 3.35. $20 : 30 = 30 : 40$.
Il prodotto dei medi è $30 \cdot 30 = 900$ il prodotto degli estremi è $20 \cdot 40 = 800$. Quindi non è una proporzione.

Proprietà 3.10 (del permutare). *Se in una proporzione scambiamo tra di loro i medi otteniamo ancora una proporzione; in modo analogo otteniamo ancora una proporzione se scambiamo tra di loro gli estremi, o ancora se scambiamo tra di loro sia i medi sia gli estremi.*

$$A : B = C : D \Rightarrow A : C = B : D \Rightarrow D : B = C : A \Rightarrow D : C = B : A.$$

Esempio 3.36. Data la proporzione $12 : 16 = 18 : 24$ e scambiando tra di loro:

- i medi si ottiene la proporzione $12 : 18 = 16 : 24$;
- gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 16 = 18 : 12$;
- sia i medi sia gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 18 = 16 : 12$.

Proprietà 3.11 (dell'invertire). *Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il rispettivo conseguente otteniamo ancora una proporzione.*

$$A : B = C : D \Rightarrow B : A = D : C.$$

Esempio 3.37. Data la proporzione $15 : 9 = 5 : 3$, applicando la proprietà dell'invertire otteniamo la proporzione $9 : 15 = 3 : 5$.

Proprietà 3.12 (del comporre). *In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la somma dei primi due termini sta al secondo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.*

$$A : B = C : D \Rightarrow (A + B) : A = (C + D) : C.$$

$$A : B = C : D \Rightarrow (A + B) : B = (C + D) : D.$$

Esempio 3.38. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni

$$26 : 16 = 65 : 40, \qquad 26 : 10 = 65 : 25.$$

Analogamente alla proprietà del comporre si ha la seguente:

Proprietà 3.13 (dello scomporre). *In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la differenza dei primi due termini sta al secondo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.*

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : A = (C - D) : C.$$

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : B = (C - D) : D.$$

Esempio 3.39. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni

$$6 : 16 = 15 : 40, \qquad 6 : 10 = 15 : 25.$$

3.12.1 Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a : b = x : d \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$x : b = c : d \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}.$$

Esempio 3.40. Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione.

- $5 : 7 = 20 : x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 20}{5} = 28$;
- $2 : x = 3 : 16 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$;
- $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{9}$.

Definizione 3.17. Una proporzione si dice *continua* se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo $A : B = B : C$, per esempio

$$3 : 9 = 9 : 27, \qquad 5 : 10 = 10 : 20, \qquad 4 : 16 = 16 : 64.$$

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a : x = x : d \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot d}.$$

Esempio 3.41. Trovare il valore di x nella seguente proporzione continua $36 : x = x : 9$.

Svolgimento $x = \sqrt{36 \cdot 9} = 18$.

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

---

Esempio 3.42. $(11 - x) : x = 15 : 5$.

Applicando la proprietà del comporre si ha la proporzione

$$(11 - x + x) : x = (15 + 5) : 5 \Rightarrow 11 : x = 20 : 5$$
$$\Rightarrow x = \frac{11 \cdot 5}{20} = \frac{11}{4}.$$

Esempio 3.43. $\left(\frac{1}{2} + x\right) : \frac{5}{8} = x : 5$.

Permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2} + x\right) : x = \frac{5}{8} : 5$. Applicando la proprietà dello scomporre si ha:

$$\left(\frac{1}{2} + x - x\right) : x = \left(\frac{5}{8} - 5\right) : 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} : x = \frac{-35}{8} : 5$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 5 : \left(\frac{-35}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{8}{35}\right) = -\frac{4}{7}.$$

3.12.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$2p = 3l.$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc.

Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

Definizione 3.18. Due grandezze x e y si dicono *direttamente proporzionali* se il loro rapporto è costante, cioè

$$\frac{y}{x} = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = kx, \text{ con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.2).

Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta € 10 di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre € 10.

Prezzo benzina al litro p (€)	1,126	1,156	1,212	1,248
Benzina ricevuta b (l)	8,881	8,650	8,251	8,013
Costo $c = p \cdot b$ (€)	10,00	10,00	10,00	10,00

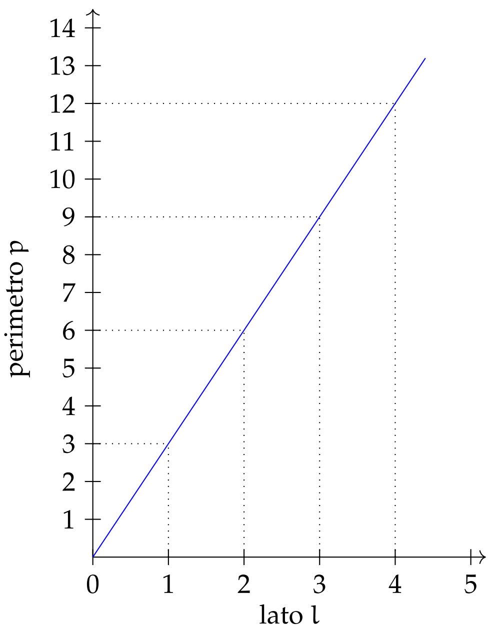


FIGURA 3.2: Proporzionalità diretta.

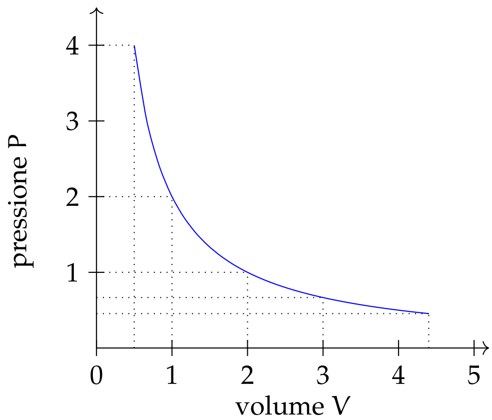


FIGURA 3.3: Proporzionalità inversa.

Definizione 3.19. Due grandezze x e y si dicono *inversamente proporzionali* se il loro prodotto è costante, cioè se:

$$x \cdot y = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}, \text{ con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.3).

3.13 Espressioni con le frazioni

Esempio 3.44. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) : 5 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 = \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\left(\frac{4-3}{9}\right) : 5 + \left(\frac{15-14}{35}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left[\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1}{9} : 5 + \frac{1}{35} : \frac{1}{14} + \frac{1}{45}\right) + \frac{2}{15}\right] : 2 \\
&= \left[\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{35} \cdot \frac{14}{1} + \frac{1}{45}\right) + \frac{2}{15}\right] : 2 \\
&= \left[\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{7 \cdot 5} \cdot \frac{7 \cdot 2}{1} + \frac{1}{45}\right) + \frac{2}{15}\right] : 2 \\
&= \left[\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{2}{5} + \frac{1}{45}\right) + \frac{2}{15}\right] : 2 \\
&= \left[\frac{3}{20} \cdot \left(\frac{1+18+1}{45}\right) + \frac{2}{15}\right] : 2 \\
&= \left(\frac{3}{20} \cdot \frac{20}{45} + \frac{2}{15}\right) : 2 \\
&= \left(\frac{3}{20} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{15}\right) : 2 \\
&= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right) : 2 \\
&= \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15}\right) : 2 \\
&= \frac{3}{15} : 2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.45. Calcola il valore della seguente espressione.

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{13}{5} : \left(3+\frac{9}{10}\right) + \frac{7}{8} + \left(\frac{13}{4}-2\right) \cdot \frac{4}{15} - \frac{7}{8}\right] \cdot \frac{11}{3} : \left(6-\frac{1}{2}\right) = \\
&\qquad = \left[\frac{13}{5} : \left(\frac{30+9}{10}\right) + \frac{7}{8} + \left(\frac{13-8}{4}\right) \cdot \frac{4}{15} - \frac{7}{8}\right] \cdot \frac{11}{3} : \left(\frac{12-1}{2}\right) \\
&\qquad = \left(\frac{13}{5} : \frac{39}{10} + \frac{7}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{15} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{11}{3} : \frac{11}{2} \\
&\qquad = \left(\frac{13}{5} : \frac{39}{10} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{11} \\
&\qquad = \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{11} \\
&\qquad = \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{2}{3} \\
&\qquad = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \\
&\qquad = 1 \cdot \frac{2}{3} \\
&\qquad = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Esempio 3.46. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right) = \\
&\qquad = \left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{3+2-6}{3}\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(\frac{25+40+1}{25}\right) \\
&\qquad = \left[\left(\frac{9}{10}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(\frac{66}{25}\right) \\
&\qquad = \left[1-\frac{1}{9}\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(\frac{66}{25}\right) \\
&\qquad = \left[\frac{8}{9}\right]^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{66}{25} \\
&\qquad = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{64}{25} \\
&\qquad = \frac{16}{25} - \frac{66}{25} \\
&\qquad = -\frac{50}{25} \\
&\qquad = -2.
\end{aligned}
$$

3.14 La leggenda di Pitagora e la scoperta di un numero inquietante

La vita e l'opera di Pitagora hanno costituito oggetto di approfondite ricerche da parte degli storici di tutti i tempi. Nonostante le indagini più accurate, i fatti della vita di Pitagora realmente accertati sono veramente pochi. Si dice sia nato a Samo nel 572 a.C.[1] dove vi regnava il tiranno Policrate; non sopportando la tirannia, si trasferì in Egitto con un incarico di lavoro presso il faraone Amasi. Sembra che poi abbia viaggiato in Babilonia prima di approdare a Crotone dove fondò una Scuola che accolse numerosi discepoli. Pitagora propose un sistema matematico della natura: la spiegazione dei fenomeni naturali doveva avvenire attraverso la ricerca di relazioni tra numeri. Pensava che tutti i corpi fossero formati da punti materiali o monadi combinate in modo da formare le varie figure geometriche e il numero totale di tali unità rappresentava l'oggetto materiale. Da qui nasceva la dottrina secondo la quale tutte le cose che si conoscono hanno un numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere; la spiegazione dei fenomeni naturali può essere raggiunta solo attraverso l'aritmetica.

Per i pitagorici esistono due soli tipi di numeri: gli interi e le frazioni. Ogni numero aveva sia una rappresentazione simbolica che un significato simbolico: il numero 5 veniva assunto a rappresentare il matrimonio, essendo la somma del primo numero dispari, il 3, con il primo numero pari, il 2.

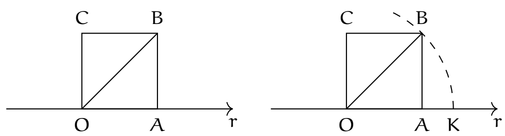
Fu dunque terribile la scoperta di un nuovo tipo di numero che non è né intero né frazionario, questo numero si ottiene calcolando per mezzo del teorema di Pitagora la misura della diagonale di un quadrato di lato uno. Questo nuovo numero, che oggi scriviamo $\sqrt{2}$, non poteva essere espresso in nessun modo come frazione, cioè rapporto di numeri interi. Ad esso i pitagorici diedero il nome di *arreton*, cioè indicibile, inesprimibile. La scoperta fu mantenuta segreta. La leggenda narra che Ippaso, discepolo della Scuola, morì affogato perché violò il giuramento che aveva fatto di non diffondere questa terribile verità.

Oggi questi numeri li chiamiamo *numeri irrazionali*, termine che riflette la stessa idea di inesprimibilità attribuita loro dai pitagorici [2].

3.15 I numeri irrazionali

Applicando il teorema di Pitagora a un quadrato di lato unitario per calcolare la misura della diagonale i pitagorici individuarono un nuovo tipo di numero, oggi indicato con $\sqrt{2}$.

Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale OB.



[1] O nel 575 a.C. per altri autori.

[2] Per approfondire l'argomento: G. Masini, *Storia della matematica*, SEI; John D. Barrow, *La luna nel pozzo cosmico*, CDE; Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, vol. 1; David Bergamini e redattori di Life, *La matematica*, Mondadori; Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, A. Mondadori.

Il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$. Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Sappiamo che 'estrarre la radice quadrata' di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta r che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB e determinando su r il punto K estremo del segmento con $OK = OB$.

Dalla posizione del punto K possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ oppure $\sqrt{2} = 1,5$ commettiamo un errore minore di $1/10$.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/100$. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K. Ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	Numero	Valore per eccesso	Ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
…	$\sqrt{2}$	…	…

Per arrivare a concludere che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a e b primi tra loro; si avrebbe, elevando al quadrato, $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Se si eleva un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di a^2 e di b^2 sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati. Quindi anche a^2 e b^2 sono primi tra di loro e a^2 non può essere il doppio di b^2. Se lo fosse dovrebbe essere almeno il quadruplo. Quindi $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione.

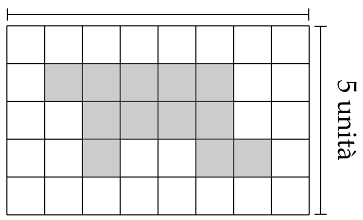
Le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti e che non sono il quadrato di alcuna frazione sono numeri decimali con infinite cifre decimali non periodiche; essi perciò possono essere scritti solo in maniera approssimata. Questi numeri sono detti *numeri irrazionali* e insieme ad altri, che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali.

3.16 Esercizi

3.16.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 Frazioni

3.1. Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.

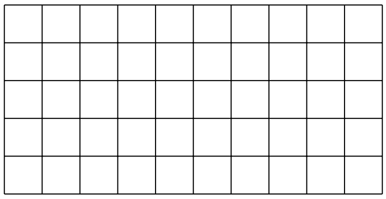


Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?

a) La forma ottenuta è più piccola del cartoncino;
b) la forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato;
c) la forma ottenuta rappresenta i $12/40$ del cartoncino.

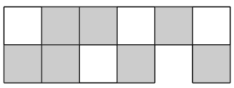
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i $3/10$ del cartoncino?

3.2. Il monte-premi di una lotteria è di € 50 000. Il primo premio è di € 25 000, il secondo di € 10 000, il terzo di € 5 000, il quarto di € 4 000, il quinto e il sesto premio sono uguali. Nella figura un quadretto rappresenta € 1 000.



a) Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio;
b) quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione;
c) Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

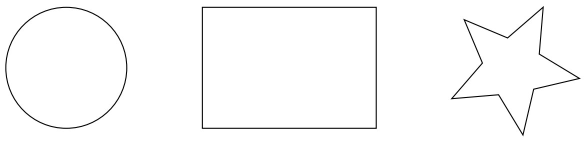
3.3. La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi.



Completa: la figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta .... dell'intera figura, mentre la parte bianca ne è ....

3.4. Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione.

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$



3.5. Indica se le frazioni sono proprie (P), improprie (I) o apparenti (A).

a) $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ c) $\frac{12}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ e) $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

b) $\frac{8}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ d) $\frac{5}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ f) $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

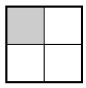
3.6. Trova le frazioni equivalenti completando.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$; $\qquad$ b) $\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots}$; $\qquad$ c) $\frac{5}{2} = \frac{\dots}{10}$; $\qquad$ d) $\frac{21}{35} = \frac{\dots}{5}$.

3.7. Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

a) $\frac{5}{6}$; $\qquad$ b) $\frac{3}{5}$; $\qquad$ c) $\frac{12}{60}$; $\qquad$ d) $\frac{2}{3}$; $\qquad$ e) $\frac{1}{2}$; $\qquad$ f) $\frac{5}{2}$.

3.8. Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta 1/4 del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti 8/4 del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali.



3.9. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{4}{6}$; $\qquad$ d) $\frac{18}{16}$; $\qquad$ g) $\frac{80}{100}$; $\qquad$ j) $\frac{10}{15}$; $\qquad$ m) $\frac{16}{6}$; $\qquad$ p) $\frac{21}{9}$;

b) $\frac{8}{2}$; $\qquad$ e) $\frac{3}{12}$; $\qquad$ h) $\frac{8}{12}$; $\qquad$ k) $\frac{14}{49}$; $\qquad$ n) $\frac{18}{15}$; $\qquad$ q) $\frac{24}{30}$;

c) $\frac{2}{10}$; $\qquad$ f) $\frac{6}{20}$; $\qquad$ i) $\frac{9}{6}$; $\qquad$ l) $\frac{15}{21}$; $\qquad$ o) $\frac{20}{12}$; $\qquad$ r) $\frac{25}{15}$.

3.10. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{27}{21}$; $\qquad$ d) $\frac{32}{24}$; $\qquad$ g) $\frac{40}{6}$; $\qquad$ j) $\frac{48}{60}$; $\qquad$ m) $\frac{121}{22}$; $\qquad$ p) $\frac{110}{30}$;

b) $\frac{28}{14}$; $\qquad$ e) $\frac{35}{10}$; $\qquad$ h) $\frac{42}{21}$; $\qquad$ k) $\frac{12}{30}$; $\qquad$ n) $\frac{87}{99}$; $\qquad$ q) $\frac{240}{75}$;

c) $\frac{30}{16}$; $\qquad$ f) $\frac{36}{81}$; $\qquad$ i) $\frac{45}{27}$; $\qquad$ l) $\frac{135}{77}$; $\qquad$ o) $\frac{15}{360}$; $\qquad$ r) $\frac{140}{294}$.

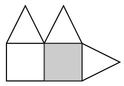


FIGURA 3.4: Esercizio 3.11

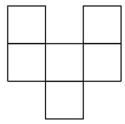
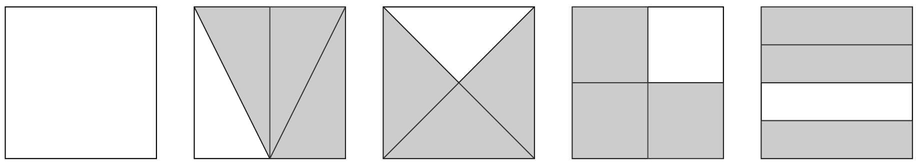


FIGURA 3.5: Esercizio 3.12

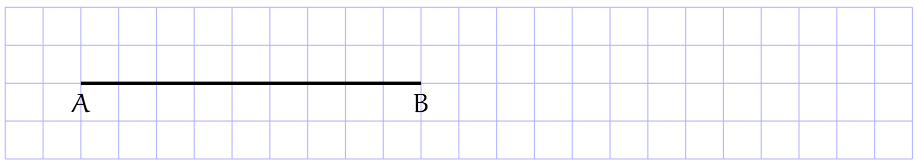
3.11. Si può dire che la parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?

3.12. Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura seguente.

3.13. Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\dfrac{3}{4}$ del quadrato bianco?



3.14. Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero.



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

3.15. Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25.

3.16. Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{8}{4} \qquad \frac{9}{4}.$$

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

3.17. Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini.

$$\frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ -\frac{5}{2};\ \frac{6}{-14};\ \frac{-12}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{-3}{-9};\ \frac{10}{-4};\ \frac{10}{20};\ \frac{-18}{42};\ \frac{5}{15};\ -\frac{9}{21};\ -\frac{15}{6};\ \frac{4}{12}.$$

3.18. Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria.

$$\frac{10}{3};\ \frac{17}{9};\ \frac{11}{2};\ \frac{25}{3};\ \frac{17}{10};\ \frac{15}{6}.$$

3.4 La scrittura dei numeri razionali

3.19. Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito (DF), quali come numero decimale periodico (DP) e quali come numero intero (I):

a) $-\frac{3}{2}$ DF DP I
b) $-\frac{6}{5}$ DF DP I
c) $\frac{2}{25}$ DF DP I
d) $\frac{5}{8}$ DF DP I
e) $\frac{5}{6}$ DF DP I
f) $-\frac{5}{12}$ DF DP I
g) $\frac{12}{6}$ DF DP I
h) $\frac{5}{10}$ DF DP I

3.20. Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

a) $\frac{13}{2}$
b) $\frac{11}{3}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{15}{6}$
e) $\frac{17}{7}$
f) $\frac{15}{8}$
g) $\frac{12}{9}$
h) $\frac{127}{10}$
i) $\frac{122}{11}$
j) $\frac{13}{12}$
k) $\frac{35}{121}$
l) $\frac{121}{35}$
m) $\frac{12}{10}$
n) $\frac{127}{100}$
o) $\frac{122}{1100}$
p) $\frac{13}{100}$
q) $\frac{35}{1000}$
r) $\frac{121}{10000}$
s) $\frac{12}{5}$
t) $\frac{13}{7}$
u) $\frac{15}{4}$
v) $\frac{5}{8}$
w) $\frac{32}{9}$
x) $\frac{21}{20}$
y) $\frac{37}{18}$
z) $\frac{2}{21}$

3.21 (*). Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.

a) 12,5
b) 4,2
c) 6,25
d) 3,75
e) 0,1
f) 2,5
g) 100,100
h) 0,12
i) 1,1030
j) 0,00100
k) 100,0010
l) 0,0001
m) 1,25
n) 0,08
o) 1,002
p) 15,675
q) 1,7
r) 1,46
s) 0,13
t) 0,149
u) 5,015
v) 3,21
w) 2,3
x) 1,086

3.22. Completa la tabella.

Numero decimale	Parte intera	Parte decimale	Periodo	Antiperiodo	Frazione
1,7521					
$3,\overline{75}$					
$12,\overline{124}$					
$1,0\overline{5}$					
$0,13\overline{57}$					

3.23. Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

a) $-1,25$;
b) 0,03;
c) $-2,\overline{1}$;
d) $0,\overline{13}$;
e) 5,080;
f) $3,7\overline{52}$;
g) $-0,38$;
h) $11,\overline{175}$;
i) $0,01\overline{02}$
j) $0,12\overline{345}$;
k) $100,\overline{100}$;
l) $100,\overline{001}$;
m) 0,08;
n) 0,2;
o) 0,1;
p) 0,03;
q) $23,\overline{5}$;
r) $22,\overline{32}$;
s) 0,25;
t) $31,\overline{02}$;
u) $0,\overline{21}$;
v) $2,3\overline{4}$;
w) $3,21\overline{8}$;
x) $0,03\overline{4}$.

3.24. Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$. Qual è la 614-esima cifra decimale del numero?

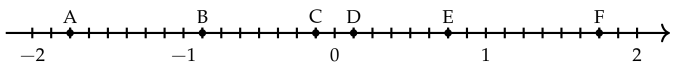
3.25. Calcola $0,\overline{9}-3,\overline{9}$. Cosa osservi?

3.5 I numeri razionali e la retta

3.26. Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta.

a) $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{12}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{11}{6}$, $\frac{9}{4}$;
b) $\frac{0}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{19}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{2}$;
c) $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, $\frac{0}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{6}$;
d) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $-\frac{5}{16}$;
e) $\frac{8}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $-\frac{7}{4}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{11}{10}$.

3.27. Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura.



3.28. Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta.

a) $0,6 \quad 2,3 \quad -1,2 \quad -0,06$;
b) $+1,4 \quad -0,3 \quad -1,5 \quad 0,2$;
c) $-0,8 \quad -1,6 \quad +4,91 \quad -1,17$;
d) $1,55 \quad 2,01 \quad -3,0 \quad -2,10$.

3.6 Confronto tra numeri razionali

3.29. Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \dots \frac{5}{7}$;
b) $-\frac{9}{5} \dots -\frac{8}{3}$;
c) $-1 \dots \frac{1}{12}$;
d) $\frac{2}{7} \dots \frac{6}{21}$;
e) $-\frac{1}{2} \dots -\frac{3}{4}$;
f) $\frac{3}{5} \dots \frac{6}{9}$.

3.30. Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}.$$

3.31. Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{5}.$$

3.32. Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande).

$$-\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{2}, \quad -1, \quad -\frac{2}{5}, \quad 0.$$

3.33. Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo).

$$-\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad -\frac{6}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad -1, \quad \frac{5}{2}, \quad 0$$

3.34. Qual è la minore delle seguenti frazioni?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{7}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$.

3.35. Metti in ordine le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{3}.$$

3.36. Ordina dal più piccolo al più grande.

a) 10,011 10,110 11,001 11,100;
b) 10,01 11,11 10,101 10,001;
c) 0,101 0,011 0,110 0,0101;
d) 1,0101 1,1001 1,0011 1,0110;

3.37. Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$.

3.38. Scrivi una frazione compresa tra:

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$; b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

3.39. Quali disuguaglianze sono vere?

a) $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3.40. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

$\boxed{\text{A}}$ 0,10 $\boxed{\text{B}}$ 0,99 $\boxed{\text{C}}$ 0,01 $\boxed{\text{D}}$ 0,90

3.41. Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

$\boxed{A}$ 0,01 $\boxed{B}$ 0,90 $\boxed{C}$ 1,01 $\boxed{D}$ 0,19

3.42. Scrivi due numeri compresi tra:

a) 2,3 e 3,4;
b) 3,4 e 3,6;
c) $2,\overline{3}$ e $2,\overline{4}$;
d) $1,1\overline{3}$ e $1,2\overline{3}$;
e) $3,\overline{4}$ e $3,\overline{6}$;
f) $1,\overline{35}$ e $1,\overline{36}$.

3.43. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente:

$$\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{2}{5}; \frac{6}{3}; \frac{5}{6}; \frac{12}{4}; \frac{19}{8}; \frac{16}{5}.$$

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

3.44. Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$;
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$;
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$;
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$;
e) $\frac{6}{5}+0$;
f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$;
g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;
h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$;
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$;
j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$;
k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$;
l) $1-\frac{3}{2}$;
m) $\frac{11}{5}+5$;
n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$;
o) $3-\frac{2}{3}$;
p) $\frac{1}{5}-1$;
q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$;
r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$;
s) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$;
t) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

3.45. Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\overline{6}+\frac{2}{3}$;
b) $5,1-1,\overline{5}$;
c) $0,03+\frac{0}{3}$;
d) $0,1\overline{6}-1,\overline{45}$;
e) $50\%+\frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{5}-1,2+5\%$;
g) $-1,\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$;
h) $\frac{3}{2}-13\%+0,15$;
i) $1,\overline{2}+1,2+\frac{1}{2}+1,2\%$;
j) $7,9892+3,1218$;
k) $3,999 +$ un centesimo.

3.46. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

3.47. Calcola a mente:

a) $0,1+0,1$;
b) $0,2+0,8$;
c) $0,01+0,9$
d) $0,91+0,19$;
e) $1,10+1,01$;
f) $0,999+0,10$;
g) $1,1-0,9$;
h) $100-0,99$;
i) $2-0,1$;
j) $3-1,1$;
k) $4-1,4$;
l) $10-0,10$.

3.48. Calcola i seguenti prodotti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$;
b) $6\cdot\frac{5}{2}$
c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$;
d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$d;
e) $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$;
f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$;

3.49. Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$$-1,\overline{1}\cdot\frac{18}{5};\qquad 2\%\cdot 5\%;\qquad -\frac{3}{4}\cdot(-120\%).$$

3.50. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\overline{6}$	$+\frac{17}{3}$	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\overline{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		-1		0	

3.51. Calcola a mente:

a) $0,1\cdot 0,1$;
b) $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$;
c) $0,1\cdot 100$;
d) $1\cdot 0,1$;
e) $2\cdot 0,1$;
f) $20\cdot 0,02$;
g) $0,01\cdot 10$;
h) $\frac{1}{100}\cdot 10$;
i) $0,1\cdot 0,2$;
j) $\frac{3}{10}\cdot 30$;
k) $0,01\cdot 0,1$;
l) $1000\cdot 0,0001$.

3.52. Calcola i seguenti quozienti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$;
b) $-\frac{6}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$;
c) $\frac{+3}{2}:\left(\frac{-3}{2}\right)$;
d) $\frac{2}{5}:\frac{5}{8}:\left(-\frac{5}{6}\right)$.

3.53. Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\overline{1}:\frac{18}{5}$;
b) $2\%:5\%$;
c) $\frac{1}{2}:0,5$;
d) $-\frac{3}{4}:1,4:(-120\%)$.

3.54. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a : b$							
$b : a$							

3.55. Calcola a mente:

a) $0,30 \cdot 0,40$;
b) $0,5 : 0,1$;
c) $0,5 \cdot 0,2$;
d) $0,1 \cdot 0,1$;
e) $0,4 \cdot 3$;
f) $0,1 : 0,1$;
g) $0,5 \cdot 20$;
h) $0,1 \cdot 0,010$.

3.8 Potenza di una frazione

3.56. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$;
d) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$;
e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$;
f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$;
g) -2^4;
h) $(-2)^4$;
i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;
j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$;
k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$;
l) -2^{-4};
m) $(-2)^{-4}$;
n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$.

3.57. Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze.

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$; proprietà

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$;

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$;

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$;

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$.

3.58. Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$\left(-\frac{2}{3}\right)$							
$-1,\overline{6}$							
$-0,1$							
$\frac{3}{10}$							

3.59. Calcola a mente.

a) $3,4 \cdot 10^2$;
b) $3,4 : 10^2$;
c) $0,34 \cdot 10^4$;
d) $34,4 : 10^2$;
e) $0,34 \cdot 10^3$;
f) $34,10 \cdot 10^3$;
g) $3,04 \cdot 10$;
h) $0,34 : 10^2$.

3.60. Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni.

a) $-(-2)^2$;
b) $[-(-1)^2]^3$;
c) $-(-2)^{-4}$;
d) $-[-(-1)^{-1}]^{-2}$;
e) $\dfrac{2^{-1}+3^{-2}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
f) $\dfrac{2^{-2}-3^{-1}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
g) $(-3)^3 \cdot \dfrac{2^{-2}-5^{-1}}{2^{-2}+5^2}$.

3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

3.61. Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri.

a) $780000000000000 = 7,8 \cdot 10^{\cdots}$;
b) $423000000000 = 4,23 \cdot 10^{\cdots}$;
c) $76000000000000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$;
d) $0,00000000098 = 9,8 \cdot 10^{\cdots}$;
e) $0,0000045 = 4,5 \cdot 10^{\cdots}$;
f) $0,000000987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$.

3.62. Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?

A $5,67 \cdot 10^{-12}$ B $4,28 \cdot 10^8$ C $10,3 \cdot 10^{-2}$ D $9,8 \cdot 10^7$

3.63. Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura $0,00000000021\text{m}$.

3.64. Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.

34000; $0,000054$; 26; $0,54000$; 5; $0,00001$; 990000; 222.

3.65. Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

a) $0,00036 \cdot 20000000 = \ldots$
b) $8400 : 42 = \ldots$
c) $900000000 : 0,0003 = \ldots$
d) $3 : 10000000 = \ldots$

3.66. Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica.

a) $3 \cdot 10^{24} + 4 \cdot 10^{24}$;
b) $0,3 \cdot 10^{104} + 4 \cdot 10^{103}$;
c) $6 \cdot 10^{101} \cdot 0,15 \cdot 10^{101}$;
d) $12 \cdot 10^{2000} : 6 \cdot 10^{200}$.

3.67 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(0,00002)^2 : 30000000 \cdot (0,1)^5}{4000 \cdot 0,02 : 0,000003}.$$

3.68 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(3000)^2 : 0,000003 : 20000000}{0,00002 : 0,00000004}.$$

3.69 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(2000)^3 \cdot (0,000001)^5 : 20}{(0,0003)^2 : 3.000.000}.$$

3.70 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{4000^2 \cdot 0,000012}{3 \cdot 10^9 \cdot 2000^3}.$$

3.71. Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media riportata tra parentesi: Mercurio $(5,8 \cdot 10^7)$, Nettuno $(4,5 \cdot 10^9)$, Giove $(7,8 \cdot 10^8)$, Plutone $(6,1 \cdot 10^9)$, Urano $(2,7 \cdot 10^9)$, Terra $(1,5 \cdot 10^8)$, Marte $(2,3 \cdot 10^8)$.

3.72. Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

a) 126 000 000; b) 0, 0000098; c) 7 000 000; d) 0, 0000000027.

3.73. Completare la seguente tabella.

Numero	26000000	0,000083	490000	0,0000081
Notazione scientifica				
o.d.g.				

3.74. Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli.

a) $5,3 \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^3 - 2,5 \cdot 10^6$;
b) $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3)^3$.

3.10 Problemi con le frazioni

3.75. La distanza Roma - Bari è di 450km. Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

3.76 (*). Lucia ha letto 3/5 di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro?

3.77. Una persona possiede € 525. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

3.78. Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre, che a sua volta ha i 4/5 dell'età del marito. Quali sono l'età del padre e della madre di Luigi?

3.11 Le percentuali

3.79. Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.

$$12\%; \quad 0,03\%; \quad 4,3\%; \quad 80\%; \quad 3,5\%; \quad -0,2\%; \quad 15\%; \quad -0,38\%.$$

3.80. Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.

$$-1,25; \quad 0,03; \quad -2,\overline{1}; \quad 0,\overline{13}; \quad 5,080; \quad 3,7\overline{52}; \quad -0,38.$$

3.81. Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.

$$12\%; \quad 0,03\%; \quad 4,3\%; \quad 80\%; \quad 3,5\%; \quad -0,2\%; \quad 15\%; \quad -0,38\%.$$

3.82. Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.

$$-\frac{3}{2}; \quad \frac{4}{3}; \quad -\frac{6}{5}; \quad \frac{2}{25}; \quad \frac{5}{8}; \quad \frac{5}{6}; \quad -\frac{5}{12}.$$

3.83. A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

3.84. Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

3.85. A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

3.86. Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era € 175. Quanto costa ora?

3.87 (*). Una canna da pesca da € 125 è in vendita promozionale a € 70. Qual è la percentuale di sconto applicata?

3.88 (*). Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben € 120. Qual era il prezzo senza sconto dell'armadio?

3.89. Completa la seguente tabella.

Prezzo di listino (€)	Sconto (€)	sconto (%)	Prezzo scontato (€)
120	12	10	108
250	10		
125	5		
170		10	
1 100		15	
220			20
12 000			700
	15	15	
	30		50
		25	140
	120	30	

3.90. Calcola:

a) il 10% di 100;
b) il 30% di 700;
c) il 20% di 500;
d) il 15% di 150;
e) il 25% di 1250;
f) il 16% di 120.

3.91. Quale percentuale è:

a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è . . . . . . ;
b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è . . . . . . ;
c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è . . . . . . ;
d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è . . . . . .

3.92. Se aumenta il prezzo:

a) un chilo di pane lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è aumentato del 3%, allora costa . . . . . . ;
b) un litro di benzina lo scorso anno costava € 1,514, quest'anno costa € 1,629 allora è aumentata del . . . . . . %;
c) un litro di latte lo scorso anno costava € 1,25, quest'anno è aumentato di $0,05\%$, allora costa € . . . . . . ;
d) un chilo di formaggio parmigiano lo scorso anno costava € 23,50 quest'anno costa € 25,80 allora è aumentato del . . . . . . %.

3.93. Se il prezzo diminuisce:

a) un chilo di pomodori lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è diminuito del 5%, allora costa € . . . . . . ;
b) un chilo di peperoni lo scorso anno costava € 2,10, quest'anno costa € 1,80 allora è diminuito del . . . . . . %;
c) un chilo di cicoria lo scorso anno costava € 0,80, quest'anno due chili costano € 1,20, allora la cicoria è diminuita del . . . . . . %;
d) un chilo di arance lo scorso anno costava € 1,40, quest'anno le arance sono diminuite del 15%, allora costano al chilo € . . . . . .

3.94. Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	21	
1 250	21	
17,40	4	
	21	170
	21	12 240
101,00		105,60

3.95. Dati imponibile (costo senza IVA) e IVA determina il costo comprensivo di IVA, e viceversa

Imponibile (€)	IVA (%)	IVA (€)	Totale
100	21	21	121
1 100	21		
1	23		1 100
1 000			1 100
	21	141	
1 100		100	

3.96. La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza di una classe prima di una scuola secondaria.

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

a) Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?
b) qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?
c) qual è la percentuale di alunni che non provengono dalle scuole A o B o C?
d) qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?

3.97. Agli esami di stato un gruppo di allievi (A) ha riportato i seguenti punteggi (P) in centesimi.

P	60	64	68	70	74	75	80	82	83	84	85	86	87	88	89	90	92	94	98	100
A	2	3	1	5	4	2	1	2	3	2	4	1	3	2	1	3	2	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

3.98. Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.

	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

a) Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?
b) qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

3.99. Sapendo che $\overline{AB} = 12cm$ e che $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ calcola la lunghezza di BC.

3.100. Sapendo che $\overline{AB} = 36cm$ e che $\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{BC}$ calcola la lunghezza di BC.

3.101. Sapendo che $\overline{AB} + \overline{BC} = 15cm$ e che $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC.

3.102. Sapendo che $\overline{AB} - \overline{BC} = 4cm$ e che $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC.

3.103. Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.

3.104. Determina le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che uno è i $2/3$ dell'altro.

3.105. Determina le misure dei due lati di un rettangoli sapendo che ha perimetro di 128cm e che l'altezza è $3/2$ della base.

3.106. La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo (3 235km^2), Firenze (3 514km^2), Grosseto (4 504km^2), Livorno (1 211km^2), Lucca (1 773km^2), Massa e Carrara (1 156km^2), Pisa (2 444km^2), Pistoia (965km^2), Prato (365km^2), Siena (3 821km^2).

3.107. La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per $1/5$ la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per $2/3$ da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?

3.108 (*). In 30kg di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono?

3.109. Una soluzione di 6kg è concentrata al 45%. Quanta sostanza concentrata devo aggiungere per avere una nuova soluzione concentrata al 60%.

3.110. Quanta acqua bisogna aggiungere a una soluzione di 2kg concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%?

3.111. Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occorre miscelare le due soluzioni in modo da ottenere 6kg di soluzione concentrata al 15%?

3.112. Una società ha acquistato dei PC nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti ha ottenuto uno sconto dell'8%, versando di conseguenza l'importo di € 24 500. Qual è il valore iniziale della merce acquistata?

3.113. Una persona paga un tappeto € 1200, lo stesso tappeto l'anno precedente costava € 900. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro?

3.114. Quanto vale il 2012% di 2012?

3.12 Proporzioni

3.115. Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione.

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ c) 35; 7; 48; 6 d) 14; 3,5; 4; 1 e) $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

3.116. Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione.

a) $10 : 11 = 12 : 13$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$
b) $7 : 14 = 21 : 42$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$
c) $64 : 48 = 8 : 6$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$
d) $18 : 15 = 12 : 10$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$
e) $10 : 6 = 5 : 3$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$
f) $1{,}2 : 1{,}4 = 3{,}6 : 4{,}2$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

3.117. Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione.

a) 7 5 20 28;
b) 8 3 2 12;
c) 5 6 2 15;
d) 3 5 9 15;
e) 6 7 2 21;
f) 3 8 6 16.

3.118. Completa la seguente tabella.

1° termine	2° termine	Antecedente	Conseguente	Rapporto	Rap. inverso
32	8	32	8	$32:8=4$	$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$	
					$\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$

3.119. Completa la seguente tabella.

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore rapporto
$3:5=21:35$	3 e 21	5 e 35	5 e 21	3 e 35	0,6
$54:12=36:8$					
$7:21=9:27$					
$\frac{5}{4}:\frac{15}{8}=4:6$					

3.120. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $269\,2:24=3:x$;

b) $x:0,\overline{6}=0,8:1,\overline{3}$;

c) $\frac{7}{3}:x=\frac{4}{3}:\frac{8}{35}$;

d) $\left(1-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=x:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{8}\right)$.

3.121. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{8}\right):x=\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{7}\right)$;

b) $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right):x$;

c) $\left(\frac{4}{5}+1\right):\left(3-\frac{1}{5}\right)=x:\left(2+\frac{1}{3}\right)$.

3.122 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-3\right):x=x:\left(1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)$;

b) $\left\{\frac{5}{2}:\left[\frac{1}{2}\cdot\left(3+\frac{1}{3}:\frac{5}{3}-\frac{14}{5}\right)\right]\right\}:x=x:\left\{\frac{3}{11}\left[\left(5-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{21}+\frac{3}{2}\right]\right\}$;

c) $(70-x):6=x:8$;

d) $\left(\frac{5}{6}-x\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=x:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$.

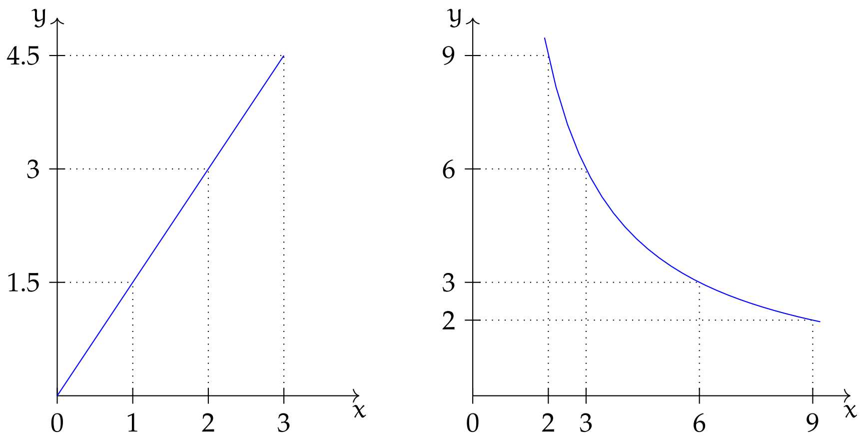
3.123 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $x : y = 5 : 3$, con $x + y = 24$;
b) $\left(6 + \frac{3}{5}\right) : y = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\right) : x$, con $x + y = \frac{13}{4}$;
c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20}\right) = x : y$, con $x - y = \frac{1}{3}$;
d) $x : \frac{2}{7} = y : \frac{1}{2} = z : \frac{3}{14}$, con $x + y + z = \frac{1}{2}$.

3.124. Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi.

a) $y = 5x$;
b) $y = \frac{1}{2x}$;
c) $y = \frac{2}{3}x$;
d) $y = \frac{1}{x} + 3$;
e) $y = 6x + 1$;
f) $y = \frac{24}{x}$;
g) $y = 4x$;
h) $y = \frac{18}{x}$;
i) $y = \frac{1}{2}x$;
j) $y = \frac{6}{x}$;
k) $y = 5 + x$;
l) $y = 3x + 2$;
m) $y = \frac{2}{x}$;
n) $y = 2x$;
o) $y = 2x - 1$;
p) $y = \frac{1}{2x} + 1$;
q) $y = 2x - 2$.

3.125. Osserva i grafici e rispondi alle domande:



a) quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è ...... del secondo è ......
c) qual è la funzione? Del primo grafico è .... del secondo grafico è ....

3.126. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega y a x?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.127. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega s a t?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.16.2 Esercizi riepilogativi

3.128. Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.

a) $\frac{2}{3} \cdot 0$;
b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$;
c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{0}$;
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2}$;
e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{3} : 0$;
g) $\frac{2}{3} - 0$;
h) $1 : \frac{2}{3}$;
i) $\frac{1}{4} \cdot 4$;
j) $\frac{1}{4} : 4$;
k) $0,3 : 3$;
l) $1,5 : 1,\overline{5}$;
m) $1,5 : 1,5$;
n) $1,5^0$;
o) $(1-1)^0$;
p) $(-1)^{-1}$;
q) $3^0 : 2^0$;
r) $\frac{(-2)^{-2}}{(-1)^{-1}}$.

3.129. Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice.

$$\frac{1,\overline{7}}{1,\overline{3}} = 1,\overline{3}; \qquad \frac{2,\overline{7}}{1,\overline{6}} = 1,\overline{6}; \qquad \frac{1,\overline{16}}{2,\overline{3}} = 0,5; \qquad \frac{2,\overline{3}}{1,\overline{6}} = 1,4.$$

3.130. Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti.

$$\frac{6}{10}; \qquad \frac{25}{100}; \qquad \frac{12}{10}; \qquad \frac{5}{25}.$$

3.131. Completa le seguenti uguaglianze.

a) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10}$;
b) $\frac{75}{10} = \frac{\dots}{100}$;
c) $\frac{7}{\dots} = \frac{1}{2}$;
d) $3 = \frac{24}{\dots}$.

3.132. Completa:

$$\frac{3}{4} + \dots = 1; \qquad 1 - \dots = \frac{4}{13}; \qquad \frac{11}{12} \cdot \dots = \frac{8}{55}; \qquad \dots : \frac{5}{3} = \frac{3}{5}.$$

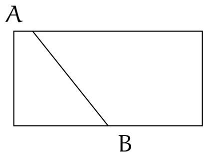


FIGURA 3.6: 3.136

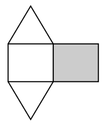


FIGURA 3.7: 3.137

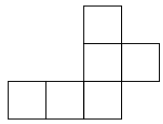


FIGURA 3.8: 3.138

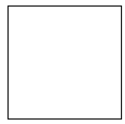


FIGURA 3.9: 3.139

3.133. Correggi le seguenti operazioni.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7}; \qquad \frac{8}{25}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{50}; \qquad 3\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{39}.$$

3.134. Completa le seguenti tabelle.

		Sottraendo			
	$-$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
Minuendo	$\frac{23}{12}$				
	$\frac{13}{2}$				
	$\frac{9}{4}$				

		Primo fattore			
	$\times$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
Minuendo	$\frac{3}{4}$				
	$\frac{5}{2}$				
	$\frac{7}{3}$				
	$\frac{8}{5}$				

3.135. Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione:

a) il triplo di un terzo è l'unità;
b) la somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti;
c) un ottavo è maggiore di un quinto.

3.136. Relativamente alla figura 3.6, quale proposizione è vera?

a) Il segmento AB la divide in due parti uguali;
b) il segmento AB la divide in due quadrilateri.

3.137. La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura 3.7?

3.138. Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura 3.8.

3.139. Colora i 3/4 della figura 3.9.

3.140. Costruire la frazione $\frac{N}{D}$ significa dividere l'unità in ... parti uguali e prendere ... parti.

3.141. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4};\quad \frac{3}{8};\quad \frac{1}{3};\quad \frac{5}{4};\quad \frac{2}{5};\quad \frac{6}{3};\quad \frac{5}{6};\quad \frac{12}{4};\quad \frac{19}{8};\quad \frac{16}{5}.$$

3.142 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$;

b) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$;

d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$.

3.143 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$;

b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0,75-\frac{5}{6}\right]$;

c) $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$;

d) $-\left(\frac{3}{4}+1,4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$.

3.144 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$;

c) $\frac{63}{55}\cdot\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\cdot\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\cdot 10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$;

d) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0,6)$.

3.145 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\cdot\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}+1$;

c) $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$;

d) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$.

3.146 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$;

b) $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$;

c) $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-1,25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$;

d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$.

3.147 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$;

b) $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$;

d) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$.

3.148 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$;

c) $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$;

d) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$.

3.149 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$;

b) $\left[(0,4-1)^2:0,01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$;

c) $\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5}$;

d) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 : \left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$.

3.150 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3 : \frac{1}{4}$;

b) $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10} : \left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{8}{3}\right)^8 : \left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\} : \left(\frac{8}{3}\right)^{11}$;

c) $\left(1+\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}$;

d) $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3-\frac{1}{30}$.

3.151 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)} : \dfrac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)}$;

b) $8{,}75\cdot\left(\frac{2}{5}-0{,}2\right)\cdot\left\{\left[2-1{,}\overline{6}-\left(0{,}2+\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{17}{4}\right)\right\}-\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)+7{,}5-0{,}\overline{3}$;

c) $\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}-\frac{1}{25}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{6}+0{,}1\right)\cdot 0{,}16\cdot(1-1{,}0\overline{1})^{-1}$.

3.152 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{11}{4}\right)\right]:(-3{,}5)\right\}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right):7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}(-3)^2(-1)^2:(-3)^2}$;

b) $\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right):\left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{11}{6}$;

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$.

3.153 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^4\right] : \left(\frac{3}{5}-1\right)^2\right\}^6$$
$$: \left\{\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^2\right]^2\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)^4\right]^2\right\}^2.$$

3.154 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$;

b) $\left[0,625+4,5\cdot(0,75-0,\overline{6})\right]:\left[0,875+0,75\cdot(2,5-2,\overline{3})\right]$;

c) $\left\{3-\left[0,\overline{6}-\left(0,1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0,25\right\}^2\cdot(0,\overline{6}-0,625)$;

d) $\left(\frac{12}{9}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right]-\frac{1}{(-4)^2}$.

3.155 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}-\frac{\left(\frac{1}{3}+0,5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0,5\right)^{-2}}+\left(\frac{0,5-0,1}{1-0,5}\right)^{-2}-4^{-2}$;

b) $\left[0,1\overline{6}+(0,1\overline{36}+0,41\overline{6}-0,2\overline{27}):0,3\overline{90}\right]:\left[0,\overline{36}+2.25\cdot(0,\overline{5}-0,\overline{27})\right]$;

c) $\dfrac{1,6-0,5\cdot(0,\overline{6}-0,5):(1-0,\overline{6})^2-0,7}{3\cdot(1-0,5)^2+0,875-(1-0,5)^2:0,2-0,6\cdot0,5}$;

d) $0,1\overline{6}^2+\left[1,5:1,5^2+(1,\overline{6}-0,5):(2-0,\overline{3})+(0,\overline{6}+0,5-0,2)\cdot0,75:5,8\right]\cdot0,\overline{6}$.

3.156 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{0,8\overline{3}-\left[0,\overline{6}+(0,75-0,\overline{6}^2-(1-2,\overline{3}\cdot0,25))\right]+0,\overline{6}:0,\overline{8}\right\}:1,02\overline{7}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^3}}-\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}}$;

c) $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot5}+\sqrt{48:6-3\cdot2+10:5}$;

d) $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\left\{\left[\frac{11}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\frac{7}{4}\right)+\frac{10}{3}\right]\right\}}$.

3.157 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\sqrt{\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2}$;

b) $\left(1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)^{-3}$.

3.158. Calcola il valore dell'espressione $E=A-B$, dove

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2},\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^5\right)^2.$$

3.159 (*). L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo?

3.160 (*). L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco?

3.161 (*). I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa. Le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quantepagine è formato il libro?

3.162 (*). Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i 3/7 e i 2/7 del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola?

3.163 (*). Al supermercato ho speso 7/10 della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai 13/20 della somma iniziale e ho speso 2/15 sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente?

3.164 (*). In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli sono i 2/5 di tutti gli animali, mentre le capre sono i 2/3 degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono?

3.165 (*). Tre casse pesano complessivamente 220kg; la seconda pesa 1/2 della prima e la terza pesa 1/3 della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa.

3.166 (*). Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni i tre operai potrebbero eseguire tutto il lavoro?

3.167 (*). Un collezionista vende i 3/7 della sua collezione costituita da 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono?

3.168 (*). In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono i 4/10 degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli

3.169 (*). Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15%?

3.170 (*). Su 1020 alunni di una scuola, 153 sono stati respinti; qual è la percentuale dei promossi?

3.171 (*). La differenza di età fra Marco e Antonio è di 18 anni e l'età di Marco è i 7/4 di quella di Antonio. Quanti anni hanno Marco e Antonio?

3.172. Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di 280g e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene?

3.173 (*). Mario va in pizzeria e, nell'attesa di essere servito, conta le persone che vi si trovano: gli uomini sono i 5/9 delle donne, queste superano gli uomini di 8 unità, infine vi sono 17 bambini. Quante persone ci sono in tutto? Quanti sono gli uomini e le donne?

3.174 (*). Gino compra un'auto da 5 400 euro. Paga i 4/9 in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata?

3.175 (*). Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i 3/4 della sua capacità. Dopo aver consumato i 2/3 della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio?

3.176. Un misurino contiene 1/8 di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5kg?

3.177. In un'azienda 3/10 degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?

3.178. A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica";
- 70 leggono "Il Corriere della sera";
- 30 leggono "La stampa";
- 10 leggono "La gazzetta dello sport".

Trasforma in percentuali i dati ottenuti.

3.179. A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?

3.180 (*). Un'auto usata è stata acquistata a € 11 800 in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata?

3.181 (*). Un gestore di un bar acquista i cornetti a € 0,60 rivende a € 0,75. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto?

3.182. In un supermercato si vende il pomodoro pelato a € 0,60 in confezioni da 250g e a 1,00 euro in confezioni da 500g. Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?

3.183 (*). In una piscina contenente 2800m^3 di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per 1000m^3 di acqua?

3.184 (*). La somma di due segmenti misura 34cm, sapendo che le loro lunghezze sono in proporzione con $3/2$, calcola la loro lunghezza.

3.185 (*). Gli angoli interni di un triangolo hanno misure proporzionali ai numeri 1; 3; 5. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, calcola le misure degli angoli.

3.186. Un televisore a $16/9$ ha la base di 18 pollici. Quanti pollici misura l'altezza?

3.187. Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?

3.188 (*). Un negoziante, durante il periodo di Natale, aumenta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era € 70,00 qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i nuovi i prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe?

3.189. Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?

3.190 (*). Pierino oggi ha incrementato il suo capitale del 10%. Se anche domani l'incremento sarà del 10%, quanto sarà l'incremento totale in percentuale?

3.191. Tizio ha perso il 20% dei suoi soldi; quanto dovrà guadagnare, in percentuale, per recuperare?

3.192 (*). Un paio di scarpe scontato del 20% costa € 40 quanto costava prima dello sconto?

3.193. Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?

3.194. Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.

3.195 (*). Una tariffa telefonica ha un costo di 10 cent al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti?

3.196. Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?

3.197. Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca 5 930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?

3.198. Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?

3.199. Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i $2/3$ dei candidati superano il primo test e $1/5$ di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?

3.200. L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di € 23 000 all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012, il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?

3.201. Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?

3.202. Una ragazza, di 46kg, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?

3.203. Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?

3.204. Una certa bevanda è ottenuta mescolando 1 parte di sciropppo con 5 parti di acqua. Per errore Adolfo ha mescolato 5 parti di sciroppo con 1 di acqua, ottenendo 3 litri di miscuglio. Aggiungendo una opportuna quantità di acqua, Adolfo può ottenere una bevanda in cui sono rispettate le proporziioni stabilite? Quanti litri di acqua deve aggiungere?

3.16.3 Risposte

3.21 a) $25/2$, b) $21/5$, c) $25/4$, d) $15/4$, e) $1/10$, f) $5/2$.

3.67 $5 \cdot 10^{-30}$.

3.68 $3 \cdot 10^{2}$.

3.69 $1{,}3 \cdot 10^{-8}$.

3.70 $8 \cdot 10^{-18}$.

3.76 300.

3.87 44%.

3.88 480.

3.108 21kg, 9kg.

3.122 a) $\pm\frac{3}{2}$, b) $\pm\frac{5}{2}$, c) 40, d) $\frac{25}{48}$.

3.123 a) $x = 15; y = 9$, b) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{11}{4}$, c) $x = \frac{5}{6}; y = \frac{1}{2}$, d) $x = \frac{1}{7}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{3}{28}$.

3.142 a) $-\frac{2}{11}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{5}{6}$, d) $-\frac{3}{20}$.

3.143 a) $-\frac{673}{1680}$, b) $\frac{31}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{55}{96}$.

3.144 a) $-\frac{8}{5}$, b) $-\frac{46}{45}$, c) 1, d) $\frac{13}{5}$.

3.145 a) $\frac{11}{28}$, b) $\frac{15}{14}$, c) $\frac{1}{50}$, d) $\frac{5}{3}$.

3.146 a) $\frac{5}{6}$, b) 10, c) $\frac{13}{15}$, d) $\frac{11}{6}$.

3.147 a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{12}$, c) $\frac{139}{40}$, d) 1.

3.148 a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{10}{3}$, d) $\frac{1}{3}$.

3.149 a) $\frac{1}{144}$, b) 540, c) $\frac{77}{50}$, d) $\frac{46}{9}$.

3.150 a) $\frac{44}{3}$, b) $\frac{64}{9}$, c) 400, d) $-\frac{2}{3}$.

3.151 a) $\frac{100}{303}$, b) 10, c) -2, d) -4.

3.152 a) $-\frac{2}{27}$, b) $-\frac{60}{11}$, c) $\frac{8}{81}$,

3.153 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}$.

3.154 a) 2, b) 1, c) $\frac{8}{27}$, d) $\frac{25}{4}$.

3.155 a) $-\frac{9}{2}$, b) 1, c) 2, d) $\frac{38}{45}$.

3.156 a) $\frac{40}{37}$, b) $\frac{1}{15}$, c) 7, d) $\frac{1}{3}$.

3.157 a) $\frac{7}{3}$, b) $-\frac{8}{81}$.

3.159 20.

3.160 9.

3.161 105.

3.162 189.

3.163 270.

3.164 30, 18, 27.

3.165 132, 66, 22.

3.166 6.

3.167 220.

3.168 76, 190.

3.169 € 24,65.

3.170 85%.

3.171 42, 24.

3.173 45, 10, 18.

3.174 € 600, 1/9.

3.175 88.

3.180 € 737,50.

3.181 25%.

3.183 5, 36l.

3.184 13, 6cm, 20, 4cm.

3.185 20°, 60°, 100°.

3.188 € 77; € 69,30.

3.189 21%.

3.191 € 50.

3.194 € 2,15.

3.201 19,19%.

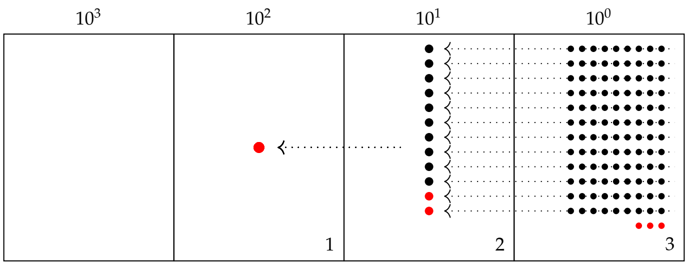
4 I sistemi di numerazione

4.1 La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema decimale. Ciò ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione ottale, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema quattrale, millepiedi fino a mille. Come conta un computer? Un computer capisce solo due stati: passa corrente o non passa corrente: è come se avesse due dita. Tutti i sistemi che oggi usiamo nell'informatica sono a due stati, si dicono *bistabili*: i circuiti elettrici possono trovarli nello stato di acceso o di spento, i dischi magnetici dell'hard disk sono fatti di microscopici magneti che possono essere magnetizzati in un verso o nel verso opposto, i dischi ottici come i CD-ROM e i DVD si comportano come microscopici specchi che riflettono la luce oppure non la riflettono.

Nell'antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano segni o si mettevano sassolini.

Per contare un certo numero di oggetti e ricordarci quanti sono, utilizziamo un abaco:



Cominciamo a contare con le mani: per ogni raggruppamento di 10 segniamo un'unità di ordine superiore, fino a contare tutti gli elementi del nostro insieme. Le unità che rimangono, perché non riescono a formare un raggruppamento di 10, vengono segnate con la cifra che le rappresenta: nel nostro caso 3.

Passiamo all'unità di ordine superiore: le decine. Anche con queste formiamo raggruppamenti di 10, se ci riusciamo. Ogni raggruppamento forma un'unità di ordine superiore. Se rimangono unità di questo ordine esse rappresentano decine. Se non rimane alcuna unità scriviamo 0. Nel nostro caso ne rimangono 2.

Il procedimento continua finché non abbiamo finito di contare tutti gli elementi. Nel nostro esempio finiamo dopo aver formato un'unità di ordine superiore. Il nostro numero è 123.

Naturalmente i due numeri 123 e 312 sono due numeri diversi anche se sono formati dalle stesse cifre: sono diversi perché la posizione delle cifre è diversa.

In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un *sistema posizionale*: è chiamato decimale o a base dieci perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.

Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il significato dei simboli dipende dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.

Ad esempio: $1846 = 1 \cdot (1000) + 8 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 6 \cdot (1)$.

In particolare, scritto con le potenze del 10: $1846 = 1 \cdot (10)^3 + 8 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10)^1 + 6 \cdot (10)^0$.

Se il numero è indicato come somma delle cifre per le potenze della base la scrittura si chiama *notazione polinomiale*.

Dieci è la *base* della rappresentazione, ovvero il numero di simboli usati, la potenza del 10 indica il *peso* (la posizione) che i simboli hanno nel numero.

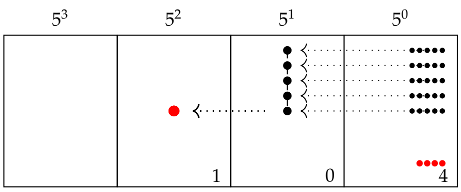
Una volta compreso il meccanismo fondamentale su cui si basa il sistema di numerazione decimale, il procedimento si può estendere ad una base qualunque.

Se B è la base di un sistema, quando si formano B unità di un certo ordine, queste formano un'unità di ordine superiore. In questo modo si può costruire un sistema di numerazione con qualsiasi base maggiore di 1.

4.2 Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Il procedimento usato per scrivere un numero in base 10 può essere usato per scrivere un numero in una base qualsiasi.

Esempio 4.1. Contare 29 oggetti in base 5.



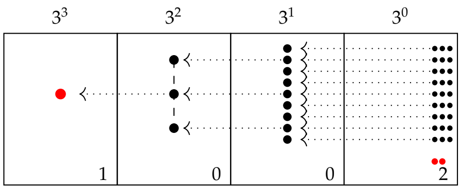
Come nel caso della numerazione in base 10, utilizziamo un abaco.

Invece di contare per dieci proviamo a contare per cinque. Invece di raggruppare per unità, decine, decine di decine e così via, conteremo raggruppando per unità, per cinquine, per cinquine di cinquine e così via.

Il numero rappresentato nell'abaco si scrive $(104)_5$ e si legge *uno-zero-quattro in base cinque* per distinguerlo da centoquattro scritto in base 10.

Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 5 occorre sviluppare il numero in base 5 nella sua scrittura polinomiale: $(104)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 4 = (29)_{10}$.

Esempio 4.2. Contare 29 oggetti in base 3.



Questa volta dobbiamo contare per tre.

Il numero che otteniamo si scrive $(1002)_3$ e si legge *uno-zero-zero-due in base tre* per distinguerlo da milledue scritto in base 10.

Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 3 occorre sviluppare il numero in base 3 nella sua scrittura polinomiale.

$$(1002)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 5^0 = 27 + 0 + 0 + 2 = (29)_{10}.$$

Riflettiamo su quanto abbiamo fatto negli esempi precedenti: i simboli che occorrono per scrivere un numero in base 10 sono dieci: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 5 sono cinque: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 3 sono tre: $\{0, 1, 2\}$. Analogamente i simboli che serviranno per scrivere un numero in base 2 sono due $\{0, 1\}$. Possiamo generalizzare e dire che i simboli necessari per scrivere un numero in una base B qualsiasi sono B e precisamente $\{0, 1, \dots, B-1\}$

Possiamo scrivere i numeri anche in una base superiore a 10. Una base molto usata nell'informatica, insieme alla base 2, è la base esadecimale: cioè la base 16.

In questo caso, per contare devo fare raggruppamenti di 16. Sono necessari perciò 16 simboli per indicare questi raggruppamenti, pertanto occorrono simboli anche per i numeri 10, 11, 12, 13, 14, 15...

I simboli convenzionalmente usati sono i seguenti:

$$(A)_{16} = (10)_{10}; (B)_{16} = (11)_{10}; (C)_{16} = (12)_{10}; (D)_{16} = (13)_{10}; (E)_{16} = (14)_{10}; (F)_{16} = (15)_{10}.$$

I numeri seguenti sono

$$(10)_{16} = (16)_{10}; (11)_{16} = (17)_{10}; (12)_{16} = (18)_{10};$$
$$(13)_{16} = (19)_{10}; (14)_{16} = (20)_{10}; (15)_{16} = (21)_{10}.$$

4.2.1 Convertire un numero da una base diversa da 10 a base 10

Per scrivere un numero da una base diversa da 10 a base 10 bisogna sviluppare il numero nella sua forma polinomiale.

Se $(x)_B$ è un numero qualsiasi scritto nella base B e se $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ sono le cifre del numero da 0 a $B-1$ avremo:

$$(x)_{10} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \dots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0.$$

4.2.2 Convertire un numero da base 10 a una base diversa da 10

Successive divisioni per 3 di 29	*Quozienti* delle successive divisioni per 3	*Resti* delle successive divisioni per 3
29 : 3	9	2
9 : 3	3	0
3 : 3	1	0
1 : 3	0	1

Abbiamo visto che per contare e scrivere un numero in una base diversa da dieci, per esempio 29 in base 3, dobbiamo raggruppare per 3. Raggruppare per 3 ha lo stesso significato che dividere per 3. Nella prima divisione per tre dei 29 oggetti il quoziente indica quante terzine otteniamo, mentre il resto indica quante unità di ordine 0 verranno considerate.

Nel nostro esempio si ottengono nove terzine, mentre rimangono 2 unità di ordine 0. Il 2 sarà il primo numero a destra che verrà considerato. Con nove terzine si ottengono tre terzine di terzine con resto 0. Questo 0 diventa la cifra che scriviamo a sinistra del 2. Con tre terzine di terzine otteniamo una terzina di terzina di terzina, mentre rimangono 0 terzine di terzine. Questo 0 diventa il numero che scriviamo a sinistra dello zero precedente. Ora il quoziente di 1 diviso 3 dà come quoziente 0 con resto 1. Qui ci fermiamo e scriviamo 1 a sinistra dello 0 trovato precedentemente.

Il numero si scrive da destra verso sinistra prendendo i resti dal basso verso l'alto, si ha $(29)_{10} = (1002)_3$.

Controlliamo con la notazione polinomiale: $1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 2 = 29$.

Esempio 4.3. Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59.

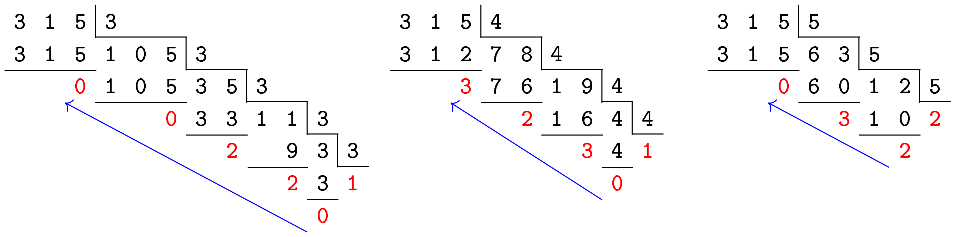
Successive divisioni per 3 di 59	*Quozienti* delle succesive divisioni per 2	*Resti* delle succesive divisioni per 2
59 : 2	29	1
29 : 2	14	1
14 : 2	7	0
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo. Il numero 59 scritto in base 2 sarà $(111011)_2$.

Verifichiamo con la scrittura polinomiale $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$.

Esempio 4.4. Trasforma da base 10 a base diversa di 10.

`base 3` $315_{10} = 102200_3$ `base 4` $315_{10} = 10323_4$ `base 5` $315_{10} = 2230_5$



Un altro metodo per trasformare un numero decimale in un numero binario

Per trasformare i numeri da base 10 a base 2 basta scrivere il numero come somma delle potenze del 2:

a) si parte dalla potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero da convertire;
b) si vede se la potenza precedente di ordine inferiore può fare parte della sequenza, cioè se la somma tra le potenze non diventa più grande del numero. Se può farne parte allora si scrive 1, altrimenti 0;
c) si prosegue in questo modo fino ad arrivare a 2^0;
d) la sequenza di 1 e 0, da sinistra verso destra, ottenuti è il numero binario corrispondente.

Esempio 4.5. Consideriamo ancora il numero 59:

- qual è la potenza del 2 più vicina, per difetto al 59? Il numero 32, cioè 2^5. Quindi 2^5 fa parte del numero binario. Scrivo 1 come primo numero della sequenza
- vediamo ora $2^4 = 16$. Anche 16 può far parte del numero binario perché 32 + 16 = 48 che è minore di 59. Segno 1 come secondo numero della sequenza;

- per lo stesso ragionamento anche $2^3 = 8$ fa parte del numero binario. Infatti 32 + 16 + 8 = 56, minore di 59. Segno ancora 1 come terzo numero della sequenza;
- invece $2^2 = 4$ non può farne parte perché $32 + 16 + 8 + 4 = 60$, maggiore di 59. Segno 0 come quarto numero della sequenza;
- $2^1 = 2$ e $2^0 = 1$ vanno bene e si arriva al totale voluto 59. Segno 1 come quinto e 1 come sesto numero della sequenza.

Riassumendo: $59 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111011)_2$.

4.3 Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

Esempio 4.6. Scrivere il numero $(1023)_4$ in base 7.

Per scrivere un numero da una base B a una base K tutte e due diverse da 10 occorre:

a) trasformare il numero in base B in un numero decimale attraverso la sua scrittura polinomiale;
b) trasformare il numero decimale nella base K attraverso i resti delle divisione successive per K.

Applichiamo la procedura indicata:

a) $(1023)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 64 + 0 + 8 + 3 = (75)_{10}$;
b) Il numero scritto da destra verso sinistra con i resti delle successive divisioni per 7 presi dal basso verso l'alto è $(135)_7$.

Successive divisioni per 7 di 75	*Quozienti* delle succesive divisioni per 7	*Resti* delle succesive divisioni per 7
75 : 7	10	5
10 : 7	1	3
1 : 7	0	1

Le trasformazioni eseguite sono: $(1023)_4 \to (75)_{10} \to (135)_7$.

4.3.1 Conversione tra base 4, base 8, base 16 e base 2

Consideriamo il numero scritto in base 2 $(11010011100101)_2$ vogliamo scriverlo in base 4, in base 8, in base 16 senza passare dalla sua scrittura in base 10. Infatti gruppi di due cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 4, gruppi di 3 cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 8, e gruppi di 4 cifre nella base 2 rappresentano tutte le cifre della base 16, come indicato nella seguente tabella.

Base 10	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16
0	0	00 = 0	000 = 0	0000 = 0
1	1	01 = 1	001 = 1	0001 = 1
2		10 = 2	010 = 2	0010 = 2
3		11 = 3	011 = 3	0011 = 3
4			100 = 4	0100 = 4
5			101 = 5	0101 = 5
6			110 = 6	0110 = 6
7			111 = 7	0111 = 7
8				1000 = 8
9				1001 = 9
10				1010 = A
11				1011 = B
12				1100 = C
13				1101 = D
14				1110 = E
15				1111 = F

Da base 2 a base 4

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di due cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 4.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 1	0 1
Numero scritto in base 4	3	1	0	3	2	1	1

$$(11010011100101)_2 = (3103211)_4.$$

Convertire il numero da base 2 a base 8

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di tre cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 8.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1
Numero scritto in base 8	3	2	3	4	5

$$(11010011100101)_2 = (32345)_8.$$

Convertire il numero da base 2 a base 16

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 partendo da sinistra in gruppi di quattro cifre e tradurre con la corrispondente cifra in base 16.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0 0	1 1 1 0	0 1 0 1
Numero scritto in base 16	3	4	E	5

$$(11010011100101)_2 = (34E5)_{16}.$$

Perché è importante la base 2?

Tutti gli strumenti elettronici che utilizziamo hanno bisogno di tradurre le informazioni che inseriamo in stati fisici della macchina. Il metodo più semplice per tradurre in linguaggio macchina le nostre informazioni è utilizzare la base 2: composta solo dai simboli 0 e 1. La base due è quindi l'alfabeto a disposizione delle macchine per comprendere e rispondere alle nostre richieste. Se si utilizzasse la base 10 dovremo far riconoscere dall'apparato dieci differenti simboli che devono essere tradotti in dieci differenti stati.

A partire da questa informazione elementare detta *bit* (compressione dall'inglese di *bi*nary digi*t*) è possibile costruire informazioni più complesse sotto forma di sequenze finite di zero e di uno. Attraverso la codifica binaria si è in grado di rappresentare caratteri, numeri, istruzioni di programma ma anche immagini, suoni e video.

Il primo multiplo del bit è il *Byte* che è formato da una sequenza di 8 bit:

0	1	0	1	0	0	0	0

Con una sequenza di 8 bit possiamo codificare fino a 256 caratteri attraverso il codice ASCII[1]. Quando digitiamo un carattere nella tastiera del calcolatore mandiamo un impulso che è una sequenza di 8 bit. Vediamo alcuni esempi della codifica binaria dei caratteri.

Carattere	In base 2	Numero decimale
A	0 1 0 0 0 0 0 1	65
a	0 1 1 0 0 0 0 1	97
M	0 1 0 0 1 1 0 1	77
m	0 1 1 0 1 1 0 1	109
0	0 0 1 1 0 0 0 0	48
1	0 0 1 1 0 0 0 1	49
à	1 0 1 0 0 0 0 0	160
ò	1 0 1 0 0 0 1 0	162

Anche il byte ha i suoi multipli. Eccone alcuni indicati nella seguente tabella.

Nome	Marca	Sistema internazionale		Utilizzo in informatica	
		Potenze del 10	Valore decimale rispetto ai byte	Potenze del 2	Valore decimale rispetto ai byte
byte	B	10^0	1	2^0	1
kilobyte	kB	10^3	1.000	2^{10}	1.024
megabyte	MB	10^6	1.000.000	2^{20}	1.048.576
gigabyte	GB	10^9	1.000.000.000	2^{30}	1.073.741.824
terabyte	TB	10^{12}	1.000.000.000.000	2^{40}	1.099.511.627.776

❑ **Osservazione** È noto che i prefissi *kilo-*, *Mega-* e *Giga-* corrispondono a 1.000, 1.000.000 (un milione) e 1.000.000.000 (un miliardo), mentre nell'informatica vengono impropriamente usati per indicare particolari potenze di 2.

[1] Acronimo di *American Standard Code for Information Interchange*.

Tutto questo genera confusione; per esempio un disco fisso che da specifiche dovrebbe garantire una capacità di archiviazione pari a 160 gigabyte, quando ne viene visualizzata la dimensione arriva poco oltre 149 gigabyte e i produttori giocano su questa "incertezza". I produttori fanno i conti "imbrogliando". Un PC che viene dichiarato con un hard disk da 160GB vengono trasformati in byte moltiplicando per 10^9. Ma quando verifichiamo la grandezza del disco sull'elaboratore, il computer divide per 2^{30}.

$(1,6 \cdot 10^{11}) : (1,07410^9) = 1,49 \cdot 10^2$. Solo per questo "imbroglio" ci siamo persi 11GB.

4.4 Operazioni in base diversa da dieci

Le quattro operazioni con i numeri in base diversa da dieci possono effettuarsi con gli stessi algoritmi utilizzati per i numeri naturali.

4.4.1 Addizione

Esempio 4.7. Eseguire l'addizione in base 2 tra 101011_2 e 10011_2.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola di addizione in base due che riportiamo a lato. La tavola, o tabellina, è piuttosto semplice, bisogna solo fare attenzione che in base due si ha $1+1=10$, perché il 2 si scrive appunto 10 in base due.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{Riporti} & & & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Mettiamo i numeri in colonna (vedi a fianco) e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=0$, scrivo 0 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+1)+1=10+1=11$, scrivo 1 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $1+0+0=1$, scrivo 1 senza riportare alcunché. Continuo in questo modo fino ad esaurire tutte le cifre da addizionare.

Facciamo la verifica nell'usuale sistema decimale:

$$(101011_2 = 43) + (10011_2 = 19) = (111110_2 = 62).$$

Esempio 4.8. Eseguire la somma in base 5 tra 34231_5 e 4341_5.

Costruiamo la tavola di addizione in base cinque: ricordiamo che $4+1=10$, $4+2=11$, ecc.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=2$, scrivo 2 senza riporto. Nella colonna di ordine superiore trovo $3+4=12$. Scrivo 2 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+2)+3=3+3=11$ scrivo 1 e riporto 1. Procedendo verso sinistra ora trovo $(1+4)+4=10+4=14$ scrivo 4 e riporto 1. Infine $1+3=4$. L'addizione è terminata.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Riporti		1	1	1		
	3	4	2	3	1	+
		4	3	4	1	
	4	4	1	2	2	

Verifica nel sistema decimale:

$$(34231_5 = 2441) + (4341_5 = 596) = (44122_5 = 3037).$$

4.4.2 Sottrazione

Per la sottrazione ci possiamo servire delle stesse tabelle dell'addizione.

Esempio 4.9. $101011_2 - 11111_2$.

Riporti	-1	-1	-1				
	1	0	1	0	1	1	−
		1	1	1	1	1	
	0	0	1	1	0	0	

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo a sottrarre partendo dalle unità: $1 - 1 = 0$ scrivo 0. Nella colonna di ordine superiore trovo di nuovo $1 - 1 = 0$ scrivo 0. Procedendo verso sinistra trovo $0 - 1$ devo quindi prendere in prestito un unità di ordine superiore che messa davanti a 0 diviene $10 - 1 = 1$. scrivo 1 e riporto -1. Mi sposto ancora a sinistra e trovo $(-1 + 1) - 1 = 0 - 1$. Occorre prendere in prestito un'unità di ordine superiore $10 - 1 = 1$. Scrivo 1 e riporto -1. Nella colonna a sinistra ho 0 del minuendo, -1 del riporto e -1 del sottraendo. Occorre prendere a prestito un'unità di ordine superiore quindi $10 - 1 = 1$ a cui devo togliere 1 del sottraendo: $1 - 1 = 0$. Infine nella unità di ordine superiore devo addizionare il riporto -1 a 1 e scrivo ancora 0. Il risultato della sottrazione è: 1100

Verifica nel sistema decimale: $(101011_2 = 43) - (11111_2 = 31) = (1100_2 = 12)$.

Esempio 4.10. $34231_5 - 4341_5$.

Ci serviamo della tavola di addizione in base cinque.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Riporti	-1	-1	-1			
	3	4	2	3	1	−
		4	3	4	1	
	2	4	3	4	0	

Verifica: $(34231_5 = 2441) - (4341_5 = 596) = (24340_5 = 1845)$.

4.4.3 Moltiplicazione

Adoperiamo lo stesso algoritmo usato per moltiplicare due numeri decimali utilizzando la tabella della moltiplicazione.

Esempio 4.11. $101011_2 \times 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base due.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale: $(101011_2 = 43) \times (101_2 = 5) = (11010111_2 = 215)$.

Esempio 4.12. $231_5 \times 24_5$.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 1 & \times \\
 & & & 2 & 4 \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 2 & - \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & 4
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale: $(231_5 = 66) \times (24_5 = 14) = (12144_5 = 924)$.

4.4.4 Divisione

Anche per la divisione il procedimento è del tutto analogo a quello usato nel sistema decimale, la tavola da utilizzare è quella della moltiplicazione.

Esempio 4.13. $11101_2 : 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

La cifra di ordine più alto si ottiene dalla divisione di 111 con 101. Il quoziente è 1, il resto si ottiene dalla differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per il divisore. In questo caso il resto è 10.

Si abbassa lo 0 e otteniamo 100. Si ha 100 : 111 = 0. La seconda cifra del divisore è 0.

La moltiplicazione di 0 per il divisore dà 0. Il nuovo resto è 100 a cui aggiungiamo l'ultima cifra del dividendo.

Otteniamo 1001 che viene divisa 101. Il quoziente termina con 1 con il resto uguale a 100.

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\cline{7-9}
- & 1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & 1 \\
\cline{2-4}
 & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & - & 1 & 0 & 1 & & & \\
\cline{4-6}
 & & & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale:

$$(11101_2 = 29) : (101_2 = 5) = (\mathit{Quoziente} : 101_2 = 5; \mathit{Resto} : 110 = 4).$$

Eseguiamo la prova della divisione direttamente in base 2: *dividendo* $=$ *quoziente* $\times$ *divisore* $+$ *resto*.

Il quoziente moltiplicato il divisore è uguale a 11001. Se a questo risultato aggiungiamo il resto 100 otteniamo il dividendo 11101.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & \times \\
 & & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 0 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & - & \\
1 & 0 & 1 & - & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & + \\
 & & 1 & 0 & 0 & \\
\cline{1-5}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Esempio 4.14. $3402_5 : 42_5$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

Il 42 nel 34 non ci sta. Prendiamo allora tre cifre 340. Il 4 nel 34 ci sta 4 volte. 4 è la cifra di ordine più alto del quoziente. Dobbiamo trovare il resto. Il resto si ottiene sottraendo il risultato della moltiplicazione tra 4 e 42 che è 323. Il resto è uguale 12. Si abbassa il 2 e otteniamo 122. Il 4 nel 12 in base 5 ci sta una sola volta, infatti $4 \times 2 = 13$. La seconda cifra del divisore è 1. La moltiplicazione di 1 per il divisore dà 42. Sottraendo 42 da 122 si ottiene 30. Dato che 30 è minore di 42 la divisione intera è terminata.

$$
\begin{array}{cccc|cc}
3 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\
\cline{5-6}
3 & 2 & 3 & & 4 & 1 \\
\cline{1-4}
 & 1 & 2 & 2 & & \\
 & & 4 & 2 & & \\
\cline{3-4}
 & & 3 & 0 & &
\end{array}
$$

Verifica: $(3402_5 = 477) : (42_5 = 22) = (\mathit{Quoziente} : 41_5 = 21; \mathit{Resto} : 30 = 15)$.

4.5 Esercizi

4.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.2 Scrittura di un numero in una base qualsiasi

4.1. Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) la scrittura 1234 può esprimere un numero in base 4. V F
b) il valore numerico espresso in base 10 della cifra 2 nel numero $(1523)_6$ è 72. V F
c) il valore numerico espresso in base 10 della cifra 3 nel numero $(321)_4$ è 12. V F
d) il valore numerico espresso in base 10 del numero $(321)_4$ è 57. V F

4.2. Scrivi il numero $(3411)_5$ in forma polinomiale e trova il corrispondente numero decimale.

$$(3411)_5 = 3 \cdot 5^{\cdots} + \ldots \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + \ldots\ldots = 375 + \ldots\ldots + 5 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

4.3. Trasforma i seguenti numeri scritti in base diversa da 10 in un numero decimale

$$(11101)_2; (2001)_3; (3023)_4; (41)_5; (3005)_6.$$

4.4. Trasforma i seguenti numeri scritti in base 2 in un numero decimale.

$$(110111)_2; (1001)_2; (111)_2; (111111)_2; (101)_2.$$

4.5. Trasforma i seguenti numeri scritti in base 16 in un numero decimale.

$$(20\mathrm{F})_{16}; (\mathrm{AA})_{16}; (19)_{16}; (3\mathrm{E})_{16}.$$

4.6. Scrivere in base 2 i seguenti numeri in base dieci: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $\ldots\ldots$; $(100)_2$; $\ldots\ldots$; $(1100)_2$; $\ldots\ldots\ldots$; $(100001)_2$.

4.7. Scrivere in base 3 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_3$; $(\ldots\ldots)_3$; $(120)_3$; $(\ldots\ldots)_3$; $(1000)_3$; $(\ldots\ldots\ldots)_3$.

4.8. Scrivere in base 4 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_4$; $(10)_4$; $(33)_4$; $(\ldots\ldots)_4$; $(\ldots\ldots)_4$; $(201)_4$.

4.9. Scrivere in base 5 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_5$; $(\ldots\ldots)_5$; $(\ldots\ldots)_5$; $(22)_5$; $(\ldots\ldots\ldots)_5$; $(113)_5$.

4.10. Scrivere in base 6 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_6$; $(4)_6$; $(\ldots\ldots)_6$; $(20)_6$; $(\ldots\ldots)_6$; $(\ldots)_6$.

4.11. Scrivere in base 7 i seguenti numeri decimali: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(45)_7$.

4.12. Scrivere in base 8 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots)_8$; $(\ldots)_2$; $(17)_8$; $(\ldots\ldots)_8$; $(33)_8$; $(\ldots\ldots)_8$.

4.13. Scrivere in base 9 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(16)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(36)_9$.

4.14. Scrivere in base 16 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(\mathrm{F})_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(1\mathrm{B})_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$.

4.3 Conversione da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

4.15. Trasformare in base 7 i seguenti numeri scritti in base 4.

$$(103)_4;\ (120)_4;\ (203)_4;\ (1301)_4;\ (123)_4;\ (301)_4.$$

Risultati: $(25)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(50)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(36)_7$; $(\ldots\ldots)_7$.

4.16. Trasformare in base 9 i seguenti numeri scritti in base 3.

$$(10002)_3;\ (2020)_3;\ (11201)_3;\ (120122)_3;\ (1001)_3.$$

Risultati: $(102)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(518)_9$; $(\ldots\ldots)_9$.

4.17. Trasformare in base 16 i seguenti numeri scritti in base 4.

$$(133)_4;\ (120)_4;\ (203)_4;\ (2301)_4;\ (223)_4.$$

Risultati: $(1F)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(23)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(2B)_{16}$.

4.18. Convertire in base 4, 8 e 16 i seguenti numeri scritti in base 2:

$$(101)_2;\quad (100011)_2;\quad (1111110101)_2;\quad (10100100)_2;\quad (1101)_2.$$

4.19. Convertire in base 2 i seguenti numeri scritti in base 16:

$$(12)_{16};\quad (A)_{16};\quad (1C3)_{16};\quad (AB)_{16};\quad (223)_{16}.$$

4.20 (*). Perché un DVD scrivibile quando si compra dichiara una capacità di $4,7$GB e invece ha una capacità reale di 4,3? Un CD-R dichiara una capacità di 700MB. Qual è la sua capacità reale?

4.4 Operazioni in base diversa da dieci

4.21. Eseguire le seguenti addizioni in base 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ + \\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ + \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

4.22. Eseguire le seguenti addizioni in base 5.

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 2\ 4\ 0\ 1\ + \\ 2\ 3\ 1\ 4\ 2 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4\ 0\ 1\ + \\ 4\ 3\ 4 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 1\ + \\ 4\ 4\ 4 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 4\ 0\ 1\ + \\ 3\ 1\ 1\ 2 \\ 3\ 4\ 4 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 2\ 1\ + \\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 0 \\ \hline \end{array}$$

4.23. Eseguire le seguenti addizioni in base 3.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ + \\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 1\ 0\ 1\ + \\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\ 2\ 1\ 1\ + \\ 2\ 0\ 2 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ 0\ 2\ 2\ 1\ + \\ 1\ 2\ 0\ 2 \\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\ 2\ 2\ + \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ \hline \end{array}$$

4.24. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 2.

$$\begin{array}{r} 111101\ - \\ 10110 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 101101\ - \\ 11111 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1011\ - \\ 111 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111\ - \\ 111 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10001\ - \\ 1111 \\ \hline \end{array}$$

4.25. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 5.

$$\begin{array}{r} 342401\ - \\ 23142 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 202401\ - \\ 434 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2341\ - \\ 444 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3444\ - \\ 3123 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 13242\ - \\ 4224 \\ \hline \end{array}$$

4.26. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 3.

$$\begin{array}{r} 210201\ - \\ 21212 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 202101\ - \\ 12110 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2211\ - \\ 202 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1201\ - \\ 222 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 21001\ - \\ 12102 \\ \hline \end{array}$$

4.27. Moltiplica in base 2: $111101_2 \times 10110_2$; $101101_2 \times 11111_2$; $1011_2 \times 111_2$.

4.28. Moltiplica in base 5: $2401_5 \times 42_5$; $431_5 \times 34_5$; $214_5 \times 41_5$.

4.29. Moltiplica in base 3: $10201_3 \times 212_3$; $2101_3 \times 212_3$; $1211_3 \times 22_3$.

4.30 (*). Eseguire le seguenti divisioni in base 2.

a) 11101 : 11; b) 1011101 : 100; c) 100011 : 10.

4.31 (*). Eseguire le seguenti divisioni in base 5.

a) 2304 : 43; b) 3310 : 24; c) 2012 : 31.

4.5.2 Risposte

4.3 29, 55, 203, 21, 653.

4.4 55, 9, 7, 63, 5.

4.5 527, 170, 25; 62.

4.20 667, 57MB.

4.30 a) Q=11; R=1, b) Q=1011; R=1, c) Q=10001; R=0.

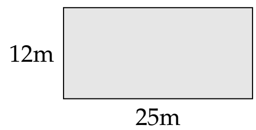
4.31 a) Q=24; R=12, b) Q=112; R=12, c) Q=31; R=1.

Espressioni letterali e valori numerici 5

5.1 Espressioni letterali

5.1.1 Lettere per esprimere formule

Esempio 5.1. In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?



Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S = (25 \cdot 12)m^2 = 300m^2$.

Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?

La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con la formula $A = b \cdot h$ nella quale abbiamo indicato con b la misura di una dimensione e con h la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

❑ **Osservazione** La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.

5.1.2 Lettere per descrivere schemi di calcolo

Esempio 5.2. L'insegnante chiede agli alunni di scrivere «il doppio della somma di due numeri».

- Antonella scrive: $2 \cdot (3 + 78)$;
- Maria chiede «Quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta»;
- Giulia scrive: $2 \cdot (a + b)$.

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

❑ **Osservazione** L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo.

Definizione 5.1. Un'*espressione letterale* o *espressione algebrica* è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.

Per esempio, la scrittura "$3 \cdot 4+$" non è corretta, in quanto il simbolo "$+$" dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale "$a \cdot c+$".

Come nelle espressioni numeriche, anche nelle espressioni letterali le parentesi indicano la priorità di alcune operazioni rispetto ad altre. La formula $a \cdot (x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri". Essa è diversa da $a \cdot x + y$ che rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

5.1.3 Lettere per esprimere proprietà

Le proprietà delle operazioni tra numeri si esprimono con lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi. La scrittura "$(a+b)+c = a+(b+c)$" per esempio esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

5.2 Valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2 \cdot x^2 + x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".

Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico

$$x \to x^2 \to \ 2 \cdot x^2 \to \ 2 \cdot x^2 + x$$

e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.

Calcoliamo il valore dell'espressione $2 \cdot x^2 + x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5. Seguiamo la schematizzazione $x \to x^2 \to \ 2 \cdot x^2 \to \ 2 \cdot x^2 + x$ e otteniamo: $5 \to \ 25 \to \ 50 \to \ 55$. Il risultato è 55. Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica $2 \cdot 5^2 + 5$ il cui risultato è 55.

E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?

Eseguiamo la sostituzione: $2 \cdot (-5)^2 + (-5) = \ldots$ Lasciamo a te il calcolo finale. Ti sarai accorto che il risultato è cambiato.

Definizione 5.2. In un'espressione letterale le *lettere* rappresentano le *variabili* che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri. Chiamiamo *valore* di un'espressione letterale il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale dipende dal *valore assegnato* alle sue variabili.

Esempio 5.3. Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per $a = 1$, $b = 1$.

Svolgimento: $3 \cdot 1 \cdot (1-1) = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

5.3 Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari per l'espressione $E = \frac{x-y}{3 \cdot x}$.

Caso I

x	y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3} = 0$. Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

Caso II

x	y	E
0	25	?

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo punto di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0; il calcolo finale è dunque $-\frac{25}{0}$, impossibile. Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali (x, y) l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non possiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero. Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la *Condizione di Esistenza* (C. E.) $x \neq 0$.

L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un'espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.

Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la C. E., eliminando quei valori che rendono nullo il divisore. Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.

Quanto fa 15 diviso 5? Perché? In forma matematica: $15 : 5 = 3$ perché $3 \cdot 5 = 15$. Quindi, generalizzando $a : b = c$ se $c \cdot b = a$.

Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0:

➡ quanto fa 0:5? Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0 \cdot 5 = 0$.
➡ quanto fa 15:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15 : 0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x \cdot 0 = 15$.

- quanto fa 0:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non ne trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0 : 0 = 33$; infatti $33 \cdot 0 = 0$. Anche $0 : 0 = -189,6$; infatti $-189,6 \cdot 0 = 0$. Anche $0 : 0 = 0$; infatti $0 \cdot 0 = 0$. Ancora $0 : 0 = 10^{99}$ infatti $10^{99} \cdot 0 = 0$. Quindi $0 : 0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x \cdot 0 = 0$, per qualunque valore di x si ha $x \cdot 0 = 0$.

Consideriamo l'espressione letterale $E = \frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo:

a) la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma";
b) la domanda che riguarda il denominatore: "quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore?";
c) la C. E.: "a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
$E = \frac{a-b}{a+b}$					

Dalla C. E., ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$. La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

Cosa succede per la coppia (0,0)?

5.4 Esercizi

5.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

5.1 Espressioni letterali

5.1. Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC.

Svolgimento: l'area del quadrato è ......, l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è .... Pertanto l'area della superficie in grigio è ......

5.2. Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase "eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato".

Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di a si indica con ..., il doppio quadrato di a si indica con ... e infine il quadrato della differenza sarà: ...

5.3. Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$

Svolgimento: "Eleva al ...... la differenza tra ......"

5.4. Individua tra le espressioni letterali sottostanti, quelle scritte correttamente:

a) $b \cdot \frac{4}{5} + \left(3 - \frac{7}{2}\right) \cdot a - a$;
b) $a \cdot +2 - b^4$;
c) $x \cdot (a-b)^2 + (x-3)$;
d) $x^y - a : 2$;
e) $-a + 4b + c$;
f) $\frac{a \cdot 1}{2} - \frac{a}{2}$.

5.5. Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

Commutativa dell'addizione	$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$
Associativa della moltiplicazione	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva prodotto rispetto alla somma	$a + b = b + a$

5.6. Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione

Svolgimento: "considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione ......; cioè ...."

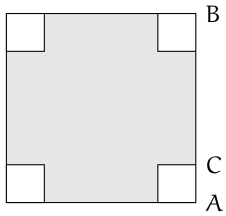


FIGURA 5.1: Esercizio 5.1

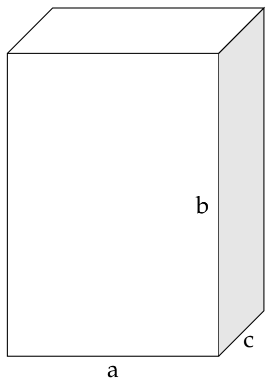


FIGURA 5.2: Esercizio 5.10

5.7. Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B = 5\text{cm}$, base minore $b = 2\text{cm}$ e altezza $h = 4\text{cm}$.

5.8. Scrivi la formula che permette di calcolare il lato di un quadrato di perimetro l.

5.9. Determina l'altezza h relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC.

Caso *numerico*: $\overline{AB} = 8\text{m}$, $\overline{AC} = 15\text{m}$.

Caso *generale*: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i.

5.10. Il volume della scatola (figura 5.2) avente le dimensioni di 7cm, 10cm, 2cm è . . .

Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni . . . . . .

Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

a) $2 \cdot a \cdot b \cdot c$;
b) $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$;
c) $6 \cdot a \cdot b \cdot c$;
d) $8 \cdot a \cdot b \cdot c$.

5.11. Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi:

a) moltiplica a per l'opposto del cubo di a:
b) somma al triplo di a il doppio quadrato di b;
c) moltiplica l'inverso di b per il quadrato dell'inverso di a;
d) somma al cubo di a il quadrato della somma di a e b;
e) dividi il quadrato di a per il triplo cubo di b;
f) moltiplica il quadrato di b per l'inverso del cubo di a;
g) il cubo di un numero, aumentato di 2, è uguale al quadrato della differenza tra lo stesso numero e uno;
h) il reciproco della somma dei quadrati di a e di b;
i) il cubo della differenza tra 1 e il cubo di a;
j) la somma dei quadrati di a e di b per il quadrato della differenza tra a e b.

5.2 Valore numerico di un'espressione letterale

5.12. Consideriamo l'espressione letterale $E = -3 \cdot a + 2 \cdot (-a + 1)$.

Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera a; supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni valori della variabile:

$$
\begin{aligned}
a = -2 &\rightarrow \quad E = -3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-(-2) + 1) = 6 + 2 \cdot (2 + 1) = 6 + 6 = 12 \\
a = +1 &\rightarrow \quad E = -3 \cdot (1) + 2 \cdot (-(1) + 1) = -3 + 2 \cdot (-1 + 1) = -3 + 0 = -3 \\
a = -1 &\rightarrow \quad E = -3 \cdot (\ldots) + 2 \cdot (\ldots + 1) = \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Completa la seguente tabella.

a	-2	1	-1	$0,1$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-11	0
$E = -3a + 2(-a + 1)$	12	-3						

5.13. Calcolare il valore numerico dell'espressione: $\dfrac{a}{a-3} + \dfrac{b}{3-b}$ per $a = -1$, $b = 0$.

Svolgimento: $\dfrac{-1}{-1-3} + \dfrac{0}{3-0} = \ldots\ldots$

5.14. Calcola il valore dell'espressione $E = \frac{x-y}{3x}$ costruita con le variabili x e y che rappresentano numeri razionali. L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo: "la divisione tra la differenza di due numeri e il triplo del primo numero". Completa la seguente tabella:

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{3}{4}$	-4	...	...
y	-2	0	0	-2	...	...
$E = \frac{x-y}{3x}$						

Ti sarai accorto che in alcune caselle compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto?

Vi sono, secondo te, altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

5.15. Scrivi con una frase le seguenti espressioni

a) $2b - 5a$; b) $a\frac{1}{a}$; c) $(a+b)^2$; d) $\frac{3x+y}{2x^2}$.

5.16. Completa la tabella sostituendo nella espressione della prima colonna i valori indicati.

Espressione	$x=1$	$x=-1$	$x=0$	$x=2$	$x=\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=0,1$	$x=\frac{1}{10}$
$2x+1$								
$-(3x-2)$								
x^2+2x+2								
x^2-x								
$-x^2+x-1$								
x^3-1								
x^3+3x^2								
$-x^3+x^2-x$								
$-(x+1)^2$								

5.17. Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $3x^2 - \frac{1}{4}x^2$ per $x = \frac{1}{2}$ *Svolgimento*: $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots = \frac{11}{16}$;

b) $5a^2b$ per $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{5}$ *Svolgimento*: $5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

c) $\frac{3}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2}a - 1$ per $a = 0$, per $a = -1$ e $a = 2$;

d) $2 \cdot x^5 - 8 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 8$ per $x = +1$ e $x = -1$.

5.18. Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ per $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$;

b) $x^2 + 2x + 1$ per $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$;

c) $-a^2 \cdot b \cdot c^3$ per $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ e $a = -1$, $b = \frac{9}{16}$, $c = \frac{4}{3}$;

d) $-\frac{3}{2}a+2b^2+11$ per $a=-20$, $b=-\frac{1}{2}$ e $a=\frac{2}{3}$, $b=0$;

e) $-a^2+\frac{1}{a}-3\cdot a^3$ per $a=\frac{1}{3}$, $a=-1$ e $a=+1$.

5.19 (*). Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $4a+a^3$ per $a=2$ e $a=1$ [2; 5]

b) $2a+5a^2$ per $a=-1$ e $a=0$ [3; 0]

c) $3x+2y^2(xy)$ per $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$ e $x=\frac{1}{3}$, $y=-1$ [$\frac{11}{4}$]

d) $a^2-b^{-1}+ab$ per $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ e $a=0$, $b=-1$ [$-\frac{1}{2}$]

e) $3a^2b-7ab+a$ per $a=1$, $b=3$ e $a=-1$, $b=-3$ [-11]

5.20 (*). Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2}$, $y=2$ e $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ [$\frac{29}{2}$]

b) $\frac{2}{3}a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3$, $b=-1$ e $a=\frac{1}{3}$, $b=0$ [-16]

c) $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2$, $y=-1$ e $x=-2$, $y=+1$ [-7]

d) $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4}$, $b=-2$ e $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ [$\frac{5}{8}$]

e) $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2$, $y=\frac{3}{4}$ e $x=-1$, $y=-1$ [$\frac{311}{8}$]

5.21 (*). Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $\frac{4a-7b}{(2a+3b)^3}\cdot ab^3$ per $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ e $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{2}{3}$ [$\frac{9}{16}$]

b) $\frac{4x^2-5xy+3y}{6x+y^2}$ per $x=-1$, $y=2$ e $x=0$, $y=-2$ [-10]

c) $\frac{x}{x+3}+y^2-\frac{xy-3x+y}{(xy)^2}$ per $x=3$, $y=\frac{1}{3}$ e $x=1$, $y=-1$ [$\frac{149}{18}$]

d) $\frac{(4a-2b)\cdot 2a^2}{3b^3}\cdot\frac{3}{4}ab+a^3$ per $a=1$, $b=-1$ e $a=0$, $b=-3$ [4]

5.3 Condizione di esistenza di un'espressione letterale

5.22. Se $E=-\frac{x-2}{2}x^2$ completa la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

5.23. Calcola il valore numerico dell'espressione: $\dfrac{3x-1}{x}$ per $x=0$.
Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per ... e quindi ...

5.24 (*). Sostituendo alle lettere i numeri, a fianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

a) $\dfrac{x+3}{x}$ per $x=0$. [Sì] [No]
b) $\dfrac{x^2+y}{x}$ per $x=3, y=0$. [Sì] [No]
c) $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ per $a=1, b=1$ [Sì] [No]
d) $\dfrac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ per $x=2, y=-2$ [Sì] [No]
e) $\dfrac{a^3+b+6a^2}{a^2+b^2+3ab-3a^2}$ per $a=1, b=\dfrac{4}{3}$ [Sì] [No]

5.25. Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono vere o false

a) $a^2+b^2=(a+b)^2$ [V] [F]
b) $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$ [V] [F]
c) $(5a-3b)\cdot(a+b)=5a^2+ab-3b^2$ [V] [F]

5.26. Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n+1$ dà origine:

[A] ad un numero primo
[B] ad un numero dispari
[C] ad un quadrato perfetto
[D] ad un numero divisibile per 3

5.27. Quale formula rappresenta un multiplo di 5, qualunque sia il numero naturale n?

[A] $5+n$ [B] n^5 [C] $5\cdot n$ [D] $\dfrac{n}{5}$

5.28. La tabella mostra i valori assunti da y al variare di x. Quale delle seguenti è la relazione tra x e y?

x	1	2	3	4
y	0	3	8	15

[A] $y=x+1$ [B] $y=x^2-1$ [C] $y=2x-1$ [D] $y=2x^2-1$

5.29. Verifica che sommando tre numeri dispari consecutivi si ottiene un multiplo di 3. Utilizza terne di numeri dispari che cominciano per 3; 7; 11; 15; 21. Per esempio $3+5+7=\ldots$ multiplo di? Vero. Continua tu.

Monomi 6

6.1 L'insieme dei monomi

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione $5 \cdot a^2 + \frac{3}{8} \cdot a \cdot b - 7 \cdot b^2$ verrà scritta in modo più compatto $5a^2 + \frac{3}{8}ab - 7b^2$.

Definizione 6.1. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama *monomio*.

Esempio 6.1. L'espressione nelle due variabili a e b, $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8} ab7b^2$ è un monomio perché numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.

Esempio 6.2. L'espressione $E = 2a^2 - ab^2$ non è un monomio poiché compare anche il segno di sottrazione.

❑ **Osservazione** Gli elementi di un monomio sono *fattori*, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche *potenze*, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

Definizione 6.2. Un monomio si dice *ridotto in forma normale* quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio 6.3. Il monomio $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8} ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna.

Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con la stessa base otteniamo a^3b^3. Il monomio in forma normale è $E = \frac{105}{4}a^3b^3$.

Procedura 6.1. *Ridurre in forma normale un monomio:*

a) moltiplicare tra loro i fattori numerici;
b) moltiplicare le potenze con la stessa base.

Definizione 6.3. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama *coefficiente*.

Esempio 6.4. Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti.

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

Definizione 6.4. Se il coefficiente del monomio è zero il *monomio* si dice *nullo*.

Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la *parte letterale*.

Esempio 6.5. L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è un monomio; il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3, b, c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione; il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Esempio 6.6. Controesempi:

a) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3 + bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione;
b) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Definizione 6.5. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono *simili*.

Esempio 6.7. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0,5a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

❑ **Osservazione** Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

Definizione 6.6. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono *monomi opposti*.

Esempio 6.8. I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Esempio 6.9. Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$ ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti.

Definizione 6.7. Il *grado complessivo* di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il *grado* del monomio *rispetto a quella variabile*.

Esempio 6.10. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale $(3+1+2=6)$. Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado, rispetto alla variabile c è di secondo grado.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o piùvariabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?

Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo $56a^3 \cdot 1 \cdot c^2 = 56a^3c^2$. Se in un monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0 = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

❑ **Osservazione** Esistono *monomi di grado 0*; essi presentano solo il coefficiente e pertanto *sono* equiparabili ai *numeri razionali*.

6.2 Valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio 6.11. Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x=-3$, $y=5$ e $z=0$.

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3 \cdot (-3)^4 \cdot 5^5 \cdot 0 = 0$ essendo uno dei fattori nullo.

❑ **Osservazione** Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo $\frac{1}{2}bh$; area del quadrato l^2; perimetro del quadrato $4l$; area del rettangolo bh; volume del cubo l^3 ecc. Esse acquistano significato quando alle lettere sostituiamo numeri che rappresentano le misure della figura considerata.

6.3 Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.

Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.

La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

Definizione 6.8. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempio 6.12. Assegnati i monomi $m_1 = -4x^2yz^3$ e $m_2 = \frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3 = \left(-4 \cdot \frac{5}{6}\right)\left(x^2 \cdot x^3\right) \cdot y \cdot \left(z^3 \cdot z^6\right) = -\frac{10}{3}x^5yz^9.$$

Procedura 6.2 (per moltiplicare due monomi)**.** *La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:*

a) nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;
b) nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.

6.3.1 Proprietà della moltiplicazione

a) commutativa: $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$;
b) associativa: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$;
c) 1 è l'elemento neutro: $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$;
d) se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$.

6.4 Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente.

$$\text{Potenza} = \text{base}^{\text{esponente}} = \underbrace{(\text{base} \cdot \text{base} \cdot \text{base} \cdot \ldots \cdot \text{base})}_{\text{tanti fattori quanti ne indica l'esponente}}.$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

Definizione 6.9. La *potenza di un monomio* è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio 6.13. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2b$.

$$m_1 = -\frac{1}{2}a^2b \qquad \text{elevo al quadrato}$$

$$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(a^2\right)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4b^2.$$

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{2}a^2b && \text{elevo al cubo} \\ \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6b^3. \end{aligned}$$

Esempio 6.14. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3b^2c^2$.

$$\begin{aligned} m_2 &= 5a^3b^2c^2 && \text{elevo al quadrato} \\ (5a^3b^2c^2)^2 &= (5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 = 25a^6b^4c^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= 5a^3b^2c^2 && \text{elevo al cubo} \\ (5a^3b^2c^2)^3 &= (5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^2)^3 = 125a^9b^6c^6. \end{aligned}$$

Procedura 6.3. *Eseguire la potenza di un monomio:*

a) *applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio;*
b) *applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l'esponente della variabile per l'esponente delle potenza.*

6.5 Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2 \neq 0$, eseguire la divisione $d_1 : d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ basta la condizione $d_2 \neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Definizione 6.10. Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempio 6.15. $(36x^5y^2) : (-18x^3y)$.

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2) = q \cdot (-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q = -2x^2y$. Infatti $(-2x^2y) \cdot (-18x^3y) = (36x^5y^2)$. Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura 6.4 (Calcolare il quoziente di due monomi). *Il quoziente di due monomi è così composto:*

a) *il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati;*
b) *la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili;*
c) *se la potenza di alcune lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.*

Esempio 6.16. $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$.

Seguiamo i passi descritti sopra

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right) = \frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1} = -\frac{4}{3}a^2x^2y.$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione le Condizioni di Esistenza (C. E.): C. E. $= a \neq 0$ e $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Esempio 6.17. $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$.

La C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$, il quoziente è

$$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right) = \left(\frac{9}{20}\right)\cdot(-8)a^{2-5}b^{4-2} = -\frac{18}{5}a^{-3}b^2.$$

Osserviamo che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

6.6 Addizione di due monomi

L'addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell'addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

6.6.1 Addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio 6.18. Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$.

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$.

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

Proprietà della addizione

a) commutativa: $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$;
b) associativa: $m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$;
c) 0 è l'elemento neutro: $0 + m = m + 0 = m$;
d) per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m^* tale che

$$m + m^* = m^* + m = 0.$$

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

❑ **Osservazione** Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio 6.19. Assegnati $m_1 = \frac{1}{2}a^2b$, $m_2 = -5a^2b$ determina $m_1 - m_2$.

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b - (-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b + 5a^2b = \frac{11}{2}a^2b$.

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo *somma algebrica di monomi*.

❑ **Osservazione** La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 6.20. Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{5} - 2 - \frac{1}{2}\right)x^4 = -\frac{13}{30}x^4.$$

6.6.2 Addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2 = (7a^3b^2 + a^3b^2) - 5a^2b^3 = 8a^3b^2 - 5a^2b^3.$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato *riduzione dei termini simili*.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempio 6.21. Calcola la seguente somma: $3a - 7a + 2a + a$.

Il risultato è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili, precisamente $-a$.

Esempio 6.22. Calcola la seguente somma: $\frac{1}{2}a^3 + b - \frac{3}{4}a^3 - \frac{6}{5}b$.

Il risultato non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $-\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{5}b$.

6.7 Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E = (-\frac{1}{2}a^2b)^3 : (a^5b) + (-2ab) \cdot (\frac{1}{2}b + b) + 5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che vi compaiono sono monomi.

Se volessimo calcolare il valore di E per $a = 10$; $b = -2$ dovremmo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

Esempio 6.23.

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b) + (-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right) + 5ab^2 && \text{sviluppiamo per prima il cubo}\\
=&\left(-\frac{1}{8}a^6b^3 : a^5b\right) + (-2ab)\cdot\frac{3}{2}b + 5ab^2 && \text{eseguiamo divisione e moltiplicazione}\\
=&-\frac{1}{8}ab^2 - 3ab^2 + 5ab^2 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{15}{8}ab^2.
\end{aligned}$$

Ora è più semplice calcolarne il valore: per $a = 10$ e $b = -2$ si ha $= \frac{15}{8}\cdot 10\cdot(-2)^2 = \frac{15}{8}\cdot 10\cdot 4 = 75$.

Esempio 6.24.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : \left(-3ab^3\right) - \frac{2}{9}abc^2 && \text{Sviluppiamo le potenze}\\
=&\frac{4}{9}a^2b^4c^2 : \left(-3ab^3\right) - \frac{2}{9}abc^2 && \text{eseguiamo la divisione e moltiplichiamo le frazioni}\\
=&-\frac{4}{27}abc^2 - \frac{2}{9}abc^2 && \text{somiamo i monomi simili}\\
=&\frac{-4-6}{27}abc^2 && \text{il risultato è}\\
=&-\frac{10}{27}abc^2
\end{aligned}$$

Esempio 6.25. $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right) : \left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$. Eseguiamo per prima la divisione tra le parentesi quadre.

$$\begin{aligned}
=&\left[+\frac{14}{16}\cdot\frac{4}{14}xy\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{eseguiamo la moltiplicazione tra le frazioni}\\
=&\left[\frac{1}{4}xy\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{sviluppiamo il cubo}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{moltiplichiamo i due monomi}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3 + \frac{1}{8}x^3y^3 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{1+8}{64}x^3y^3 && \text{il risultato è}\\
=&\frac{9}{64}x^3y^3.
\end{aligned}$$

6.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

6.8.1 Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.

Definizione 6.11. Un monomio A si dice *multiplo* di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A = B \cdot C$; in questo caso diremo anche che B è *divisore* del monomio A.

Definizione 6.12. Il massimo comune divisore tra due o piùmonomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro MCD, se non sono interi è opportuno scegliere 1.

Esempio 6.26. Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni:

$$1; 2; 4; a; a^2; b; ab; a^2b; 2a.$$

$$2a^2; 2b; 2ab; 2a^2b; 4a; 4a^2; 4b; 4ab; 4a^2b.$$

Il monomio di grado massimo è a^2b, il MCD tra i coefficienti è 4. Pertanto il MCD dei monomi è $4a^2b$.

Procedura 6.5 (Calcolare il MCD tra monomi)**.** *Il* MCD *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) per coefficiente numerico il MCD *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.

Esempio 6.27. Calcolare $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c)$.

Per prima cosa calcoliamo il MCD tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2.

In definitiva, $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c) = 2ab^2$.

Esempio 6.28. Calcolare il massimo comune divisore tra $5x^3y^2z^3; -\frac{1}{8}xy^2z^2; 7x^3yz^2$.

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del MCD. Le lettere in comune sono xyz, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha xyz^2.

Quindi, $\text{MCD}(5x^3y^2z^3; -\frac{1}{8}xy^2z^2; 7x^3yz^2) = xyz^2$.

❑ **Osservazione** La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del MCD, nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del MCD Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

Definizione 6.13. Due monomi si dicono *monomi primi tra loro* se il loro MCD è 1.

6.8.2 Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo.

Definizione 6.14. Il *minimo comune multiplo di due o più monomi* è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro mcm, se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio 6.29. Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$$5a^3b \text{ alcuni multipli: } 10a^3b, 10a^3b^2, 10a^4b, 15a^3b \dots$$

$$10a^2b^2 \text{ alcuni multipli: } 10a^2b^3, 10a^3b^2, 10a^4b^2, 20a^2b^2 \dots$$

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il mcm, è utile invece la seguente procedura.

Procedura 6.6 (Calcolo del mcm tra due o più monomi)**.** *Il* mcm *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) *per coefficiente numerico il* mcm *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) *la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.*

Esempio 6.30. Calcola il minimo comune multiplo tra $5a^3bc$, $12ab^2c$ e $10a^3bc^2$.

Il mcm tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado maggiore delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $\text{mcm}(5a^3bc; 12ab^2c; 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempio 6.31. Calcola il minimo comune multiplo tra $6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il mcm avrà come coefficiente 1.

La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z.

In definitiva $\text{mcm}(6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz) = x^3y^2z$.

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z, calcoliamo MCD e mcm.

$\text{MCD}(x^2y; xy^2z) = xy$ e $\text{mcm}(x^2y; xy^2z) = x^2y^2z$.

Moltiplichiamo ora MCD e mcm, abbiamo: $xy \cdot x^2y^2z = x^3y^3z$.

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo: $(x^2y) \cdot (xy^2z) = x^3y^3z$.

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il MCD e il mcm. Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale.

Proprietà 6.7. *Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.*

6.9 Esercizi

6.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.1 L'insieme dei monomi

6.1. Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi.

$$E_1 = 35x^2 + y^2; E_2 = -4^{-1}ab^4c^6; E_3 = \frac{4}{x}y^2; E_4 = -\frac{87}{2}x^2z.$$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la . . . .; pertanto sono monomi . . . .

6.2. Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$\frac{4}{9}ab18c^3 2^{-2}a^3b = \frac{\dots}{\dots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots}$; $\quad -x^5\frac{1}{9}y^4(-1+5)^2y^7 = \dots\dots\dots\dots$

6.3. Nell'insieme $M = \left\{-\frac{34}{5}a^3b, 3^2a^2b^4, \frac{1}{3}ab^3, a^3b, -a, 7a^2b^4, -\frac{1}{3}ab^3, -89a^3b\right\}$, determina i sottoinsiemi dei monomi simili; rappresenta con un diagramma di Venn.

6.2 Valore di un monomio

6.4. Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h = 2,5$ e base $b = \frac{3}{4}$.

6.5. Calcola il valore dei seguenti monomi in corrispondenza dei valori indicati per ciascuna lettera.

a) $-\frac{2}{9}xz$ per $x = \frac{1}{2}, z = -1$;
b) $-\frac{8}{5}x^2y$ per $x = -1, y = +10$;
c) $-\frac{1}{2}a^2bc^3$ per $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = -1$;
d) $\frac{7}{2}a^3x^4y^2$ per $a = \frac{1}{2}, x = 2, y = -\frac{1}{2}$;
e) $\frac{8}{3}abc^2$ per $a = -3, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$.

6.6. Il grado complessivo di un monomio è:

a) l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
b) la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
c) il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
d) la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

6.7. Due monomi sono simili se:

a) hanno lo stesso grado;
b) hanno le stesse variabili;
c) hanno lo stesso coefficiente;
d) hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

6.8. Individua e sottolinea i monomi tra le seguenti espressioni letterali:

$$3 + ab; -2a; -\frac{7}{3}ab^2; -(\frac{4}{3})^3; a^2bc \cdot \frac{-2}{a^3}; 4a^{-3}b^2c^5; -x; 8x^4 - 4x^2; -y \cdot (2x^4 + 6z); \frac{abc^9}{3+7^{-2}}$$

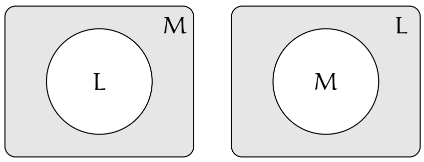
6.9. Nel monomio $m = -\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo: coefficiente = ..., parte letterale = ..., grado complessivo = ..., il grado della lettera x = ...

6.10. Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:

a) “Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili”
$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ perché ....

b) “Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado”
$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ perché ....

6.11. Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione: «alcune espressioni letterali non sono monomi». L: insieme delle espressioni letterali, M: insieme dei monomi.



A B

6.12. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) Il monomio b^6 è il cubo di b^2. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) L’espressione ab^{-1} è un monomio. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) Il valore del monomio ab è nullo per $a = 1eb = -1$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.3 Moltiplicazione di due monomi

6.13. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $(-x^2y^4) \cdot \left(-\frac{8}{5}x^2y\right)$;
b) $\left(-\frac{15}{28}xy^3\right) \cdot \left(-\frac{7}{200}x^2y^2\right)$;
c) $(a^5b^5y^2) \cdot \left(-\frac{8}{5}a^2y^2b^3\right)$;
d) $2,5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot 1,5a$;
e) $\left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$;
f) $-8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$;
g) $5x^3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$;
h) $6ab \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2\right) \cdot \frac{1}{2}ab \cdot 4a^2$;
i) $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) \cdot \left(-\frac{8}{21}ax^2y\right)$.

6.14. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $(-2xy) \cdot (+3ax)$;
b) $6a(-2ab)\left(-3a^2b^2\right)$;
c) $(-1)(-ab)$;
d) $1,5a^2b \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$;
e) $-\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$;
f) $-x(14x^2)$.

6.15. Determina il prodotto delle seguenti coppie di monomi.

a) $1,\overline{6}xa(1,2xy^2)$;
b) $\left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$;
c) $\left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$;
d) $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$;
e) $\left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$;
f) $\left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$.

6.16. Sulla base degli esercizi precedenti puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:

a) il prodotto dei gradi dei suoi fattori;
b) la somma dei gradi dei suoi fattori;
c) minore del grado di ciascuno dei suoi fattori;
d) uguale al grado dei suoi fattori.

6.4 Potenza di un monomio

6.17. Esegui le potenze indicate.

a) $\left(-\frac{3}{5}abx^3y^5\right)^3 = \frac{\dots}{\dots}a^3b^3x^{\cdots}y^{\cdots}$;
b) $\left(-a^4b^2\right)^7 = \dots$;
c) $\left(-3x^3y^4z\right)^2 = 9x^6y^{\cdots}z^{\cdots}$;
d) $\left(\frac{1}{2}a^2bc^5\right)^4 = \frac{1}{\dots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots}$;
e) $\left(a^3b^2\right)^8 = \dots$;
f) $\left(-5ab^2c\right)^3 = \dots$

6.18. Esegui le potenze indicate.

a) $\left(+2ax^3y^2\right)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$;
c) $\left(\frac{3}{4}x^4y\right)^3$;
d) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$;
e) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$;
f) $\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$.

6.19. Esegui le operazioni indicate.

a) $\left[\left(-rs^2t\right)^2\right]^3$;
b) $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2\right]^3$;
c) $\left[\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2\right]^2$;
d) $\left(-xy\right)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3$;
e) $-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^0\cdot\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$;
f) $-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

6.20. Esegui le operazioni indicate.

a) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2\cdot\left(-3ab^3\right)^2$;
b) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\frac{2}{3}a^2b\right]^2$;

c) $\left(\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{6}x\cdot\frac{1}{2}x\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2$.

6.5 Divisione di due monomi

6.21. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $15b^8:\left(-\frac{40}{3}b^3\right)$;

b) $\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right):\left(-\frac{26}{27}xyz\right)$;

c) $(-a^7):(8a^7)$;

d) $\left(\frac{1}{2}a^3\right):(-4a^5)$;

e) $\left(-\frac{12}{2}a^7b^5c^2\right):(-18ab^4c)$;

f) $(-34x^5y^2):(-2yz^3)$.

6.22. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $21a^3x^4b^2:7ax^2b$;

b) $a^6:20a^2$;

c) $20ax^4y:2xy$;

d) $-72a^4b^2y^2:(-3ab^2)$.

6.23. Esegui le operazioni indicate e poni le C. E.:

a) $48a^5bx:a^2b$;

b) $\left[-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2:\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2:(x^3y^2)^2$;

c) $\left[\frac{3}{5}x^4:\left(\frac{1}{3}x^4\right)\right]\cdot\left[x^4:\left(\frac{4}{5}x^4\right)\right]$;

d) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2:(-3ab^3)$.

6.6 Addizione di due monomi

6.24. Determina la somma dei monomi simili $8a^2b+(-\frac{2}{3})a^2b+\frac{1}{6}a^2b$.

La somma è un monomio .... agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\ldots$, la parte letterale è .... Quindi la somma è ....

6.25. Determina la somma $S=2a-3ab-a+17ab+41a$.

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando le proprietà associativa e commutativa in modo da affiancare i monomi simili:

$$S=2a-3ab-a+17ab+41a=(\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$$

La somma ottenuta non è un ....

6.26. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $6x+2x-3x$;
b) $-3a+2a-5a$;
c) $5a^2b-3a^2b$;
d) $a^2b^2-3a^2b^2$;
e) $2xy-3xy+xy$;
f) $2y^2-3y^2+7y^2-4y^2$.

6.27. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $-2xy^2+xy^2$;
b) $-3ax-5ax$;
c) $5ab-2ab$;
d) $-3xy^2+3xy^2$;
e) $7xy^3-2xy^3$;
f) $+2xy^2-4xy^2$.

6.28. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a^2-a^2$;
b) $+2xy^2-4xy^2+xy^2$;
c) $-5x^2+3x^2$;
d) $\frac{1}{2}a+2a$;
e) $5a^2b+2a^2b+a^2b-3a^2b-a^2b$;
f) $0,1x-5x-1,2x+3x$.

6.29. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^3b^2$;
b) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}x-2x+\frac{3}{10}x$;
c) $\frac{2}{5}ab-\frac{1}{2}ab+\frac{27}{2}ab-\frac{1}{10}ab-\frac{5}{2}ab$;
d) $-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)-3ax^2$;
e) $-\frac{9}{2}xy-(-xy)$;
f) $2xy^2-\frac{3}{2}xy^2-xy^2$.

6.30. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a+2a+(2a-a)-\left(3a-\frac{1}{2}a\right)$;
b) $6xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{4}xy^2-6xy^2$;
c) $\frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{2}xy^2$;
d) $\left(\frac{2}{3}a+a\right)-\left(\frac{2}{3}a-a\right)$;
e) $5ab-2ab+(-ab)-(+2ab)+ab$;
f) $-1,2x^2+0,1x^2+(-5x)^2-(-25x)^2$.

6.31. Esegui le operazioni indicate.

a) $6ab-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}ab+4a^2$;
b) $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x^2+x^2\right)-\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^2\right)$;
c) $-\frac{4}{3}a^2b^3-2a^2b^3+\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^3$;
d) $(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)+\frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$.

6.32. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}x^2-2x^2-\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2-2x^2-\frac{3}{5}x^2\right)$;
b) $5x^3y^2+\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(x^3y^2)+\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$;
c) $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-(xy^2+2xy^2-4xy^2)+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right)$.

6.7 Espressioni con i monomi

6.33 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2a\right)+(2a-a)\left(3a-\frac{1}{2}a\right)a;$

b) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}a\right)a+\left(7a-\frac{1}{3}a\right)^2:2;$

c) $\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{6}x^3\left(12x-\frac{18}{5}x\right);$

d) $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a;$

e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a\right)^2:\left(\frac{3}{2}a-2a\right);$

f) $(3a-2a)(2x+2x):2a.$

6.34 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right);$ $\left[\frac{7}{72}x^3\right]$

b) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)-\frac{7}{60}x;$ $[-2x]$

c) $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3a-a)+0,5a\right]-a\right\};$ $\left[-\frac{3}{4}a\right]$

d) $-12x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[0,1x^2(-5x)^2-(-x^2)^2\right];$ $\left[\frac{1}{6}x^4\right]$

e) $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0,\overline{6}x^4yz(-0,\overline{7}xy^2z);$ $[]$

f) $\frac{1}{2}ab^2c+\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3-\left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^2\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right]:\left(-\frac{5}{4}a^2b^4c^2\right).$ $\left[-\frac{1}{8}ab^2c\right]$

6.35 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-(xy^2+2xy^2-4xy^2)+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right);$ $[3xy^2]$

b) $\frac{1}{4}x^4y^2-\left[\frac{3}{2}x^5y^4:\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-3x^3y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2;$ $\left[\frac{3}{2}x^4y^2\right]$

c) $a^2-\left\{a-\left[2\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\right]\right\}^2+\left(\frac{2}{3}a+a\right)\left(\frac{2}{3}a-a\right);$ $[0]$

d) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^3a^2\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}a\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2\left(-\frac{2}{5}ab^2\right);$ $\left[-\frac{1}{90}a^3b^6\right]$

6.36 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\frac{2}{3}a^2b - \left[3a - \frac{1}{3}a^2b - \left(\frac{2}{5}a + \frac{1}{2}a - 3a\right) + \left(\frac{2}{5}a^2b + \frac{1}{2}a^2b - 2a^2b\right)\right] - \frac{1}{10}a^2b + \frac{51}{10}a;$ $[2a^2b]$

b) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x - 2x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - 2x^2\right)\left(-\frac{3}{5}x\right) - \frac{4}{3}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^3\right);$ $\left[-\frac{2}{3}x^3\right]$

c) $\left[\left(\frac{3}{2}xy\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{15}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}xy^2\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{8}{75}x^2y^4\right] : \left(\frac{10}{3}x^2y\right);$ $\left[-\frac{3}{25}y^3\right]$

d) $\left(\frac{1}{2}x + 2x\right)\left(\frac{1}{2}x - 2x\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - 4x^2\right) - \frac{1}{4}x\left(\frac{27}{4}x^3 - \frac{61}{3}x^3\right) - 16(x^4 + x^4) - \frac{1}{12}x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{8}x^4.$

6.37. Assegnati i monomi: $m_1 = \frac{3}{8}a^2b^2$, $m_2 = -\frac{8}{3}ab^3$, $m_3 = -3a$, $m_4 = -\frac{1}{2}b$ e $m_5 = 2b^3$. Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C. E.:

a) $m_1 \cdot m_2 \cdot (m_4)^2;$
b) $-m_2 \cdot m_1 \cdot (m_3)^2 \cdot m_5;$
c) $(m_3 \cdot m_4)^2 - m_1;$
d) $m3 \cdot m_5 - m_2;$
e) $m_2 : m_3 + m_5;$
f) $m_1 : m_2.$

6.38. Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo:

a) il doppio del primo termine;
b) il doppio del secondo termine;
c) il monomio nullo;
d) 0.

6.39. Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

A -1 B 0 C 1 D il quadrato del primo monomio

6.40. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) la somma di due monomi opposti è il monomio nullo V F
b) il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti V F
c) la somma di due monomi è un monomio V F
d) il prodotto di due monomi è un monomio V F
e) l'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo V F

6.41 (*). Un quadrato è formato da 9 quadrati più piccoli, tutti di lato $2x$. Determina perimetro e area del quadrato. $[24x; 36x^2]$

6.42 (*). Di un triangolo equilatero di lato a si raddoppiano due lati e si dimezza il terzo lato, si ottiene un triangolo ....Qual'è la differenza tra i perimetri dei due triangoli? $\left[\frac{3}{2}a\right]$

6.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

6.43. Vero o falso?

a) $12a^3b^2c$ è un multiplo di abc V F
b) $2xy$ è un divisore di x^2 V F
c) $2a$ è divisore di $4ab$ V F
d) $-5b^2$ è divisore di $15ab$ V F

e) $8ab$ è multiplo di a^2b^2 V F
f) $12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$ V F
g) 5 è divisore di $15a$ V F

6.44. Vero o falso?

a) il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati V F
b) il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato V F
c) il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro V F

6.45 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $14x^3y^2$, xy e $4x^3y^4$ $[28x^3y^4; xy]$
b) xyz^5e $x^3y^2z^2$ $[x^3y^2z^5; xyz^2]$
c) $4ab^2$, a^3b^2 e $5ab^5$ $[20a^3b^5; ab^2]$

6.45 a) , b) , c) .

6.48 a) , b) , c) , d) .

6.46. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $2a^2bc^3$, ab^4c^2 e $24a^3bc$;
b) $6a^2x$, $2ax^3$ e $4x^2c^3$;
c) $30ab^2c^4$, $5a^2c^3$ e $12abc$.

6.47. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $x^2y^4z^2$, xz^3 e $24y^2z$;
b) $4a^2y$, y^3c e $15ac^5$;
c) $13xyc^2$, $x^2y^3c^2$ e $6c^4$.

6.48 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $a^nb^mz^{2m+1}, \quad a^{3n}b^{m+3} \quad e \quad a^{4n}b^{m+4}$ $[a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1}; a^nb^m]$
b) $-2xy^3z, \quad -6x^3yz \quad e \quad 8x^3z$ $[24x^3y^3z; 2xz]$
c) $\frac{1}{4}ab^2c, \quad -3a^2b^2c \quad e \quad -\frac{1}{2}ab^2c^2$ $[a^2b^2c^2; ab^2c]$
d) $\frac{2}{3}x^2y^2, \quad \frac{1}{6}xy^2 \quad e \quad \frac{2}{5}xyz^2$ $[x^2y^2z^2; xy]$

6.49. Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) calcola il loro MCD;
b) calcola il loro mcm;
c) verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro mcm e il loro MCD;
d) verifica che il loro MCD è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro mcm.

7 Polinomi

7.1 Definizioni fondamentali

Definizione 7.1. Un polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi.

Esempio 7.1. Sono polinomi: $6a + 2b$, $5a^2b + 3b^2$, $6x^2 - 5y^2x - 1$, $7ab - 2a^2b^3 + 4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in *forma normale* o *ridotto*; se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.

Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato *termine noto*.

Esempio 7.2. Il polinomio $3ab + b^2 - 2ba + 4 - 6ab^2 + 5b^2$ ridotto in forma normale diventa $ab + 6b^2 - 6ab^2 + 4$. Il termine noto è 4.

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempio 7.3. Binomi, trinomi, quadrinomi.

a) $xy - 5x^3y^2$ è un binomio;
b) $3ab^2 + a - 4a^3$ è un trinomio;
c) $a - 6ab^2 + 3ab - 5b$ è un quadrinomio.

Definizione 7.2. Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono *uguali*, più precisamente vale il *principio di identità dei polinomi*: due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.

Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi *opposti*.

Definiamo, inoltre, un polinomio *nullo* quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempio 7.4. Polinomi uguali, opposti, nulli.

a) I polinomi $\frac{1}{3}xy + 2y^3 - x$; $2y^3 - x + \frac{1}{3}xy$ sono uguali;
b) i polinomi $6ab - 3a + 2b$; $3a - 2b - 6ab$ sono opposti;
c) il polinomio $7ab + 4a^2 - ab + b^3 - 4a^2 - 2b^3 - 6ab + b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Definizione 7.3. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, *grado di un polinomio rispetto ad una data lettera* l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio, dopo che è stato ridotto a forma normale.

Esempio 7.5. Grado di un polinomio.

- Il polinomio $2ab + 3 - 4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado;
- il grado del polinomio $a^3 + 3b^2a - 4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più grande con cui tale lettera compare è 3.

Definizione 7.4. Un polinomio si dice *omogeneo* se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio 7.6. Il polinomio $a^3 - b^3 + ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

Definizione 7.5. Un polinomio si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera*, quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio 7.7. Il polinomio $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2y - 2xy^2 + \frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Definizione 7.6. Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice *completo* se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio 7.8. Il polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

❑ **Osservazione** Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4 - x + 1 + 4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - x + 1$.

7.2 Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.

Definizione 7.7. La *somma di due o più polinomi* è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

La differenza di polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo polinomio.

Esempio 7.9. Differenza di polinomi.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - \left(2a^2 + ab - \frac{1}{2}b\right) &= 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - 2a^2 - ab + \frac{1}{2}b \\ &= a^2 + \frac{-1-2}{2}ab + \frac{4+1}{2}b \\ &= a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}b. \end{aligned}$$

7.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

Per eseguire il prodotto tra il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy + 5x^3y^2$; indichiamo il prodotto con $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2)$. Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2) = 6x^3y^2 + 15x^5y^3$.

❑ **Osservazione** Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio 7.10. Prodotto di un monomio per un polinomio.

$$\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)$$
$$=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4.$$

7.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.

Definizione 7.8. Si dice che un *polinomio è divisibile per un monomio*, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice *divisore* del polinomio.

Esempio 7.11. Quoziente tra un polinomio e un monomio.

$$\left(6x^5y+9x^3y^2\right):\left(3x^2y\right)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy.$$

❑ **Osservazione**

a) Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero;
b) un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore letterale del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo;
c) la divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio;
d) il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

7.5 Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Esempio 7.12. Prodotto di polinomi.

a) $\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$. Riducendo i termini simili:

$$\begin{aligned}\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right) &= \frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+\underline{3a^3b^3}+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2\\ &\quad +9a^2b^2-\underline{2a^3b^3}+4a^2b-12a^2b^3\\ &= \frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3.\end{aligned}$$

b) $\left(x-y^2-3xy\right)\cdot\left(-2x^2y-3y\right)$. Moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo otteniamo.

$$\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y-3y\right)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2+9xy^2;$$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)$.

$$\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{3}{8}x^4+\underline{\frac{1}{2}x^3}-\underline{\frac{3}{2}x^3}-2x^2=\frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2.$$

7.6 Esercizi

7.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1 Definizioni fondamentali

7.1. Riduci in forma normale il seguente polinomio:

$$5a^3 - 4ab - 1 + 2a^3 + 2ab - a - 3a^3.$$

Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro:

$$\underline{5a^3} - \overline{4ab} + 1 + \underline{2a^3} + \overline{2ab} - a - \underline{3a^3}$$

in modo da ottenere ... Il termine noto è ...

7.2. Il grado di:

a) $x^2y^2 - 3y^3 + 5yx - 6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è .., il grado complessivo è ..
b) $5a^2 - b + 4ab$ rispetto alla lettera b è , il grado complessivo è ....

7.3. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

a) $x^3y + 2y^2x^2 - 4x^4$;
b) $2x + 3 - xy$;
c) $2x^3y^3 - y^4x^2 + 5x^6$.

7.4. Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti:

a) $2 - \frac{1}{2}x^2 + x$;
b) $\frac{2}{3} - x + 3x^2 + 5x^3$;
c) $3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{7}{8}$.

7.5. Relativamente al polinomio $b^2 + a^4 + a^3 + a^2$:

- Il grado massimo è .... Il grado rispetto alla lettera a è ... Rispetto alla lettera b è ...
- il polinomio è ordinato rispetto alla a?
- è completo?
- è omogeneo?

7.6. Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

7.7. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

7.8. Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

7.9. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

7.10. Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

7.11. Calcola il valore numerico dei polinomi per i valori a fianco indicati.

a) $x^2 + x$ per $x = -1$;
b) $2x^2 - 3x + 1$ per $x = 0$;
c) $3x^2 - 2x - 1$ per $x = 2$;
d) $3x^3 - 2x + x$ per $x = -2$;
e) $\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}ab$ per $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$;
f) $4x - 6y + \frac{1}{5}x^2$ per $x = -5$, $y = \frac{1}{2}$.

7.2 Somma algebrica di polinomi

7.12. Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2 + 5 - 3y^2x$, $x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$.

Svolgimento: Indichiamo la somma $(2x^2+5-3y^2x)+(x^2-xy+2-y^2x+y^3)$, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio $2x^2+5-3y^2x+x^2-xy+2-y^2x+y^3$, sommando i monomi simili otteniamo $3x^2-4x^{\cdots}y^{\cdots}-\ldots xy+y^3+\ldots$

7.13. Esegui le seguenti somme di polinomi.

a) $a+b-b$;
b) $a+b-2b$;
c) $a+b-(-2b)$;
d) $a-(b-2b)$;
e) $2a+b+(3a+b)$;
f) $2a+2b+(2a+b)+2a$;
g) $2a+b-(-3a-b)$;
h) $2a-3b-(-3b-2a)$;
i) $(a+1)-(a-3)$.

7.14 (*). Esegui le seguenti somme di polinomi.

a) $\left(2a^2-3b\right)+\left(4b+3a^2\right)+\left(a^2-2b\right)$;
b) $\left(3a^3-3b^2\right)+\left(6a^3+b^2\right)+\left(a^3-b^2\right)$;
c) $\left(\frac{1}{5}x^3-5x^2+\frac{1}{5}x-1\right)-\left(3x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{1}{4}x-1\right)$;
d) $\left(\frac{1}{2}+2a^2+x\right)-\left(\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}ax\right)+\left[-\left(-\frac{3}{2}-2ax+x^2\right)+\frac{1}{3}a^2\right]-\left(\frac{3}{2}ax+2\right)$;
e) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}ab\right)-\left(\frac{9}{8}ab+\frac{1}{2}a^2-2b\right)+ab-\frac{3}{4}a$.

7.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

7.15. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

a) $(a+b)b$;
b) $(a-b)b$;
c) $(a+b)(-b)$;
d) $(a-b+51)b$;
e) $(-a-b-51)(-b)$;
f) $(a^2-a)a$;
g) $(a^2-a)(-a)$;
h) $(a^2-a-1)a^2$;
i) $(a^2b-ab-1)(ab)$;
j) $(ab-ab-1)(ab)$;
k) $(a^2b-ab-1)(a^2b^2)$;
l) $(a^2b-ab-1)(ab)^2$;
m) $ab(a^2b-ab-1)ab$;
n) $-2a(a^2-a-1)(-a^2)$;
o) $(x^2a-ax+2)(2x^2a^3)$.

3

7.16. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

a) $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$;
b) $\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$;
c) $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$;
d) $\left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)(3x^2y)$;
e) $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$;
f) $-\frac{1}{3}y\,(6x^2y-3xy)$;
g) $-3xy^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)$;
h) $\left(\frac{7}{3}b-b\right)\left(a-\frac{1}{2}b+1\right)(3a-2a)$.

7.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

7.17. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $\left(2x^2y+8xy^2\right):(2xy)$;
b) $\left(a^2+a\right):a$;
c) $\left(a^2-a\right):(-a)$;
d) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$;
e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):2$;
f) $(2a-2):\frac{1}{2}$;
g) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$.

7.18. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $\left(a^2-a\right):a$;
b) $\left(a^3+a^2-a\right):a$;
c) $\left(8a^3+4a^2-2a\right):2a$;
d) $\left(a^3b^2+a^2b-ab\right):b$;
e) $\left(a^3b^2-a^2b^3-ab^4\right):(-ab^2)$;
f) $\left(a^3b^2+a^2b-ab\right):ab$;
g) $\left(16x^4-12x^3+24x^2\right):\left(4x^2\right)$.
h) $\left(-x^3+3x^2-10x+5\right):(-5)$;

7.19. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $\left[\left(-3a^2b^3-2a^2b^2+6a^3b^2\right):(-3ab)\right]\cdot\left(\frac{1}{2}b^2\right)$;
b) $\left(\frac{4}{3}a^2b^3-\frac{3}{4}a^3b^2\right):\left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)$;
c) $\left(2a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}\right):\left(\frac{a}{2}\right)$;
d) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}\right):\left(\frac{1}{2}a\right)$;
e) $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$;
f) $\left(a^3b^2-a^4b+a^2b^3\right):\left(a^2b\right)$;
g) $\left(a^2-a^4+a^3\right):\left(a^2\right)$.

7.5 Prodotto di polinomi

7.20. Esegui i seguenti prodotti di polinomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^2+\frac{3}{4}a^3b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)$;
b) $\left(x^3-x^2+x-1\right)(x-1)$;
c) $\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)$;
d) $(a-1)(a-2)(a-3)$;
e) $(a+1)(2a-1)(3a-1)$;
f) $(a+1)\left(a^2+a\right)\left(a^3-a^2\right)$.

7.6.2 Esercizi riepilogativi

7.21 (*). Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $(-a-1-2)-(-3-a+a)$;
b) $\left(2a^2-3b\right)-\left[\left(4b+3a^2\right)-\left(a^2-2b\right)\right]$;
c) $\left(2a^2-5b\right)-\left[\left(2b+4a^2\right)-\left(2a^2-2b\right)\right]-9b$;
d) $3a\left[2(a-2ab)+3a\left(\frac{1}{2}-3b\right)-\frac{1}{2}a(3-5b)\right]$;

e) $2(x-1)(3x+1)-\left(6x^2+3x+1\right)+2x(x-1)$.

7.22. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $\left(\frac{1}{3}x-1\right)(3x+1)-2x\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)(x+1)-\frac{1}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)$;
b) $\left(b^3-b\right)(x-b)+(x+b)\left(ab^2-a\right)+(b+a)\left(ab-ab^3\right)+2ab\left(b-b^3\right)$;
c) $ab\left(a^2-b^2\right)+2b\left(x^2-a^2\right)(a-b)-2bx^2(a-b)$;
d) $\left(\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy\right)\left(2x-\frac{1}{3}y\right)4x$;
e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2\right)(1-a)\left[a^2+2a-\left(a^2+a+1\right)\right]$.

7.23. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $(1-3x)(1-3x)-(-3x)^2+5(x+1)-3(x+1)-7$;
b) $3\left(x-\frac{1}{3}y\right)\left[2x+\frac{1}{3}y-(x-2y)\right]-2\left(x-\frac{1}{3}y+2\right)(2x+3y)$;
c) $\frac{1}{24}(29x+7)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x-3)(x-3)-2-\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)\right]$;
d) $-\frac{1}{4}\left(2abx+2a^2b^2+3ax\right)+a^2(b^2+x^2)-\left[\left(\frac{1}{3}ax\right)^2-\left(\frac{2}{3}bx\right)^2\right]$;
e) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{5}\right)-\left[\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$.

7.24. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x\right)^3+2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$;
b) $(3a-2)(3a+2)-(a-1)(2a-2)+a(a-1)\left(a^2+a+1\right)$;
c) $-4x(5-2x)+\left(1-4x+x^2\right)\left(1-4x-x^2\right)$;
d) $-(2x-1)(2x-1)+\left[x^2-\left(1+x^2\right)\right]^2-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$.

7.25. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $4(x+1)-3x(1-x)-(x+1)(x-1)-\left(4+2x^2\right)$;
b) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)(x-1)-\left(x^2-1\right)$;
c) $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)-(2x-1)(2x+1)(x-2)+2x^3$.

7.26 (*). Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)\left[2a^2(a-b)-a\left(a^2-2ab\right)\right]$;
b) $\left(3x^2+6xy-4y^2\right)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$;
c) $(2a-3b)\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{6}b^2\right)-\frac{1}{6}a\left(12a^2-\frac{18}{5}b^2\right)+\frac{37}{30}ab^2-\frac{1}{2}a\left(a^2-\frac{11}{2}ab\right)$;
d) $\frac{1}{3}xy\left[\left(x-y^2\right)\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)-3x\left(-\frac{1}{9}xy\right)(3y)\right]-\frac{1}{3}x\left(x^3y+\frac{1}{4}xy^2\right)$.

7.27. Se $A = x - 1$, $B = 2x + 2$, $C = x^2 - 1$ determina

a) $A + B + C$;
b) $A \cdot B - C$;
c) $A + B \cdot C$;
d) $A \cdot B \cdot C$;
e) $2AC - 2BC$;
f) $(A + B) \cdot C$.

7.28 (*). Operazioni tra polinomi con esponenti letterali.

a) $\left(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3}\right) : \left(a^{1+n}\right)$;
b) $\left(1 + a^{n+1}\right)\left(1 - a^{n-1}\right)$;
c) $\left(16a^{n+1}b^{n+2} - 2a^{2n}b^{n+3} + 5a^{n+2}b^{n+1}\right) : (2a^n b^n)$;
d) $\left(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3}\right)\left(a^{n+1} - a^n\right)$;
e) $\left(a^n - a^{n+1} + a^{n+2}\right)\left(a^{n+1} - a^{n-1}\right)$;
f) $\left(a^n + a^{n+1} + a^{n+2}\right)\left(a^{n+1} - a^n\right)$;
g) $\left(a^{n+2} + a^{n+1}\right)\left(a^{n+1} + a^{n+2}\right)$;
h) $\left(1 + a^{n+1}\right)\left(a^{n+1} - 2\right)$;
i) $\left(a^{n+1} - a^n\right)\left(a^{n+1} + a^n\right)\left(a^{2n+2} + a^{2n}\right)$;
j) $\left(\frac{1}{2}x^n - \frac{3}{2}x^{2n}\right)\left(\frac{1}{3}x^n - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}x^n - 1\right)(x^n + x)$.

7.29. Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

7.30. Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

7.31. Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

7.32. Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

7.33. Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

7.34. Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

7.6.3 Risposte

7.14 d) $-x^2 + x + \frac{29}{15}a^2$,
e) $-\frac{a^2}{2} - \frac{7}{24}ab + \frac{5}{2}b$.

7.21 a) $-a$, b) $-9b$, c) $-18b$,
d) $6a^2 - \frac{63}{2}a^2b$, e) $2x^2 - 9x - 3$.

7.26 a) $a^4 - \frac{1}{2}a^3b - \frac{1}{3}a^4b + a^3$,
b) $\frac{3}{2}x^3y + x^2y^2 - 6xy^3 + \frac{8}{3}y^4$,
c) $\frac{1}{2}b^3$, d) $\frac{1}{6}xy^4 - \frac{1}{4}x^2y^2$.

7.28 a) $1 - a + a^2$,
b) $1 - a^{n-1} + a^{n+1} - a^2n$,
c) $8ab^2 - a^n b^3 + \frac{5}{2}a^2b$,
d) $a^{2n+4} - 2a^{2n+3} + 2a^{2n+2} - a^{2n+1}$,
e) $a^{2n+3} - a^{2n+2} - a^{2n-1} + a^{2n}$,
f) $-a^2n + a^{2n+3}$,
g) $a^{2n+4} + 2a^{2n+3} + a^{2n+2}$,
i) $a^{2n+2} - a^{n+1} - 2$, h) $a^{4n+4} - a^{4n}$,
j) $\frac{7}{12}x^{2n} + \frac{3}{4}x^n - \frac{1}{2}x^{3n} - \frac{1}{3}x^{n+1} + x$.

Prodotti notevoli 8

Con l'espressione prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi aventi caratteristiche particolari facili da ricordare.

8.1 Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $A + B$ in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A + B)(A + B)$, che sotto forma di potenza si scrive $(A + B)^2$.

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

❑ **Osservazione** Il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.

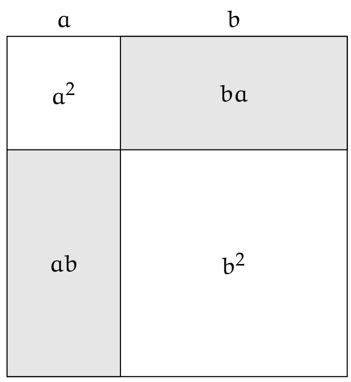
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A + B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.

Ne consegue che:

a) A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi;
b) $2AB$ è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.

È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti.

Prendiamo due segmenti di lunghezza a e b, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo a con il primo estremo del segmento di lunghezza b: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a + b$. Costruiamo il quadrato di lato $a + b$, il quale avrà area $(a + b)^2$ e dividiamolo come nella figura a fianco.



Puoi notare che il quadrato di lato $a + b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area ab. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$.

8.2 Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= (A+B+C)\cdot(A+B+C)\\ &= A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+CB+C^2\\ &= A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC.\end{aligned}$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

$$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC.$$

❑ **Osservazione** Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi.

Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2 = x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt.$$

8.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$$(A+B)(A-B) = A^2-AB+AB-B^2 = A^2-B^2. \tag{8.1}$$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$.

❑ **Osservazione** Il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.

Esempio 8.1. $\left(3a^2+5ab\right)\cdot\left(3a^2-5ab\right)$.

Moltiplichiamo $3a^2\cdot 3a^2$ e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^2-25a^2b^2$.

Esempio 8.2.

$$\left(-\frac{1}{4}x^2+b\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}x^2+b\right).$$

Osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (8.1) occorre porre $A=b$; $B=\frac{1}{4}x^2$. Il risultato è quindi $A^2-B^2=b^2-\frac{1}{16}x^4$.

Esempio 8.3. Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28\cdot 32$.

Svolgimento: $28\cdot 32=(30-2)(30+2)=900-4=896$.

Esempio 8.4. $(2x+1-y)(2x+1+y)$.

Possiamo riscrivere il prodotto nella forma

$$\big(\underbrace{(2x+1)}_{A}-\underbrace{y}_{B}\big)\big(\underbrace{(2x+1)}_{A}+\underbrace{y}_{B}\big)=\underbrace{(2x+1)^2}_{A^2}-\underbrace{y^2}_{B^2}=4x^2+4x+1-y^2.$$

8.4 Cubo di un binomio

Si consideri il binomio $A+B$, il suo cubo sarà dato da:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B)=\left(A^2+2AB+B^2\right)(A+B)\\ &= A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3\\ &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.\end{aligned}$$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

❑ **Osservazione** Il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio.

Essendo $(A-B)^3=[A+(-B)]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

8.5 Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a+b$ fino all'ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n\in\mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

$$\begin{aligned}(a+b)^0&=1\\(a+b)^1&=a+b\\(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto *triangolo di Tartaglia*.

```
                  1
                1   1
              1   2   1
            1   3   3   1
          1   4   6   4   1
        1   5  10  10   5   1
      1   6  15  20  15   6   1
```

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente. Nella figura che segue evidenziamo come costruire il triangolo:

```
                  1

              1       1
                ↘ + ↙
          1       2       1
            ↘ + ↙   ↘ + ↙
      1       3       3       1
        ↘ + ↙   ↘ + ↙   ↘ + ↙
  1       4       6       4       1
```

Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

- $(a+b)^0 = 1$;
- $(a+b)^1 = a+b$;
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;
- $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

8.6 Esercizi

8.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

8.1 Quadrato di un binomio

8.1. Completa:

a) $(3x+y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2 = \dots\dots\dots$;
b) $(-2x+3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(3y) + (3y)^2 = \dots\dots\dots$;
c) $(-3x-5y)^2 = (-3x)^2 + 2(-3x)(-5x) + (-5x)^2 = \dots\dots\dots$;
d) $(3x-y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-y) + (-y)^2 = \dots\dots\dots$;
e) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\,(3y) + (3y)^2 = \dots\dots\dots$;
f) $\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)^2 = (x^2)^{\cdots} + 2\cdot(\dots\dots)\,(-\dots\dots) + \left(-\frac{1}{2}y\right)^{\cdots} = \dots\dots\dots$.

8.2. Quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi?

a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ Sì No
b) $a^2 - 2ab - b^2$ Sì No
c) $25a^2 - 15ab + 3b$ Sì No
d) $\frac{49}{4}a^4 - 21a^2b^2 + 9b^2$ Sì No
e) $a^6 + b^4 + 2a^3b^2$ Sì No
f) $25a^2 + 4b^2 - 20ab^2$ Sì No
g) $-25a^4 - \frac{1}{16}b^4 + \frac{5}{2}a^2b^2$ Sì No
h) $\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{9}b^4 + \frac{1}{6}a^3b^2$ Sì No

8.3. Completa in modo da formare un quadrato di binomio.

a) $\frac{9}{16}x^2 + \dots + y^2$;
b) $x^2 + 2x + \dots$;
c) $4x^2y^2 - 2xyz\dots$;
d) $\frac{a^4}{4} - \dots + 4b^4$;
e) $9 + 6x + \dots$;
f) $1 - x + \dots$;
g) $x^2 + 4y^2 - \dots$;
h) $4x^2 - 4xy + \dots$;
i) $4x^2 - 20x + \dots$

8.4. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $(x+1)^2$;
b) $(x+2)^2$;
c) $(x-3)^2$;
d) $(2x-1)^2$;
e) $(x+y)^2$;
f) $(x-y)^2$;
g) $(2x+y)^2$;
h) $(x+2y)^2$.

8.5. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $(-a+b)^2$;
b) $(-a-1)^2$;
c) $(-a+3)^2$;
d) $(-a+2b)^2$;
e) $(2a+3b)^2$;
f) $(2a-3b)^2$;
g) $(3a+2b)^2$;
h) $(-2+3b)^2$.

8.6. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b\right)^2$;
b) $\left(-2x^2 - \frac{7}{4}y\right)^2$;
c) $\left(5x^3 - \frac{4}{3}y^2\right)^2$;
d) $\left(-1 + \frac{3}{2}a^2x\right)^2$;
e) $\left(3a - \frac{1}{3}a^2\right)^2$;
f) $\left(-2 - \frac{1}{2}x\right)^2$;
g) $(x+1)^2$;
h) $(a^2+a)^2$.

8.7. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2$;
b) $\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2$;
c) $\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)^2$;
d) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)^2$;
e) $\left(x^{2n}-\frac{1}{2}x^n\right)^2$;
f) $\left(-2^2-\frac{1}{2}x^n\right)^2$;
g) $\left(-2x^{2n}-\frac{1}{4}y^m\right)^2$;
h) $(x^{n+1}+x^n)^2$.

8.8 (*). Semplifica le seguenti espressioni contenenti quadrati di binomi.

a) $(x-2y)^2-(2x-y)^2$;
b) $3(x-y)^2-2(x+2y)^2$;
c) $3(2x+5)^2-4(2x+5)(2x-5)+10(2x-5)^2$;
d) $\left(x^2+1\right)^2-6\left(x^2+1\right)+8$.

8.9 (*). Semplifica le seguenti espressioni contenenti quadrati di binomi.

a) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$;
b) $\frac{1}{2}x(y-1)^2-\frac{3}{2}y(x+1)^2+\frac{1}{2}xy(3x-y+8)$;
c) $\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2+3x(2-y)^2-3y^2\left(x-\frac{1}{4}\right)+4x(4y-3)$;
d) $(x-1)^2-(2x+3)^2$.

8.10 (*). Semplifica le seguenti espressioni contenenti quadrati di binomi.

a) $\frac{1}{2}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$;
b) $(2a+b)^2(a-b)^2-2(3-b)^2(3+b)^2-(6b+2a^2)^2+a^2b[4a+3(b+8)]$;
c) $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$;
d) $(x+1)^2+(x-2)^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-2x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

8.2 Quadrato di un polinomio

8.11. Completa i seguenti quadrati.

a) $(x+3y-1)^2=x^2+\ldots\ldots+1+6xy-2x-6y$;
b) $\left(x^2-\frac{1}{2}y+1\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^2+\ldots\ldots-x^2y+\ldots\ldots-y$;
c) $\left(2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\ldots\ldots+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}-2x^{\cdots}+2x^{\cdots}-\frac{\cdots}{\cdots}\ldots$

8.12. Sviluppa i seguenti quadrati di polinomi.

a) $(a+b-c)^2$;
b) $(a-b+c)^2$;
c) $(x^2+x+1)^2$;
d) $(x-x^2+1)^2$;
e) $(3x^2+2z-y^2)^2$;
f) $(-a+b-c)^2$;
g) $(6a-3y^3-2z^2)^2$;
h) $(1-x-x^2)^2$;
i) $\left(-2ba+4-6ab^2+5b^2\right)^2$;
j) $(2ab+3-4a^2b^2-2b^3)^2$.

8.13. Sviluppa i seguenti quadrati di polinomi.

a) $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x\right)^2$;
b) $\left(3x^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}\right)^2$;
c) $\left(5a^3-\frac{1}{2}ab-1-a\right)^2$;
d) $\left(\frac{1}{2}x+2y^2-3\right)^2$;
e) $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^4+\frac{7}{4}z\right)^2$;
f) $\left(2a+\frac{1}{2}ab^2-3b\right)^2$;
g) $\left(2x^3y^2-y^2x+5x^2+\frac{1}{2}\right)^2$;
h) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2x-2xy+\frac{3}{8}y\right)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^2+\frac{3}{4}xy\right)^2$;
j) $\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2$.

8.14 (*). Semplifica le seguenti espressioni che contengono quadrati di polinomi.

a) $(x+y-1)^2-(x-y+1)^2$;
b) $(2a+b-x)^2+(2x-b-a)^2-5(x+a+b)^2+b(4a+3b)$;
c) $\left(x^2+x+1\right)^2-(x+1)^2$;
d) $(a+b+1)^2-(a-b-1)^2$.

8.15. Semplifica le seguenti espressioni che contengono quadrati di polinomi.

a) $(a-3b+1)^2-(a-3b)^2-(3b-1)^2+(a-3b)(a+3b-1)$;
b) $\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)^2+\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2$;
c) $(a+b-1)^2-(a+b)^2-(a-1)^2-(b-1)^2$.

8.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

8.16. Calcola a mente i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

a) $18 \cdot 22$; b) $15 \cdot 25$; c) $43 \cdot 37$; d) $195 \cdot 205$.

8.17. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

a) $(x-1)(x+1)$;
b) $(a+1)(a-1)$;
c) $(b-2)(b+2)$;
d) $(2a+b)(2a-b)$;
e) $(a+2b)(a-2b)$;
f) $(2a+3b)(2a-3b)$.

8.18. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

a) $\left(l+\frac{1}{2}m\right)\left(l-\frac{1}{2}m\right)$;
b) $\left(\frac{1}{2}u+v\right)\left(\frac{1}{2}u-v\right)$;
c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$;
d) $(3a-5y)(-3a-5y)$;
e) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$;
f) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$.

8.19. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

a) $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$;
b) $\left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$;
c) $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$;
d) $\left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$;
e) $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$;
f) $\left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$.

8.20. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

a) $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$;
b) $\left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$;
c) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-x+\frac{1}{2}\right)$;
d) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right)$;
e) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$;
f) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x\right)$;
g) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$;
h) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$.

8.21 (*). Applica la regola della somma per differenza ai seguenti casi.

a) $(2a+b+1)(2a+b-1)$;
b) $(3x-b+c)(3x+b-c)$;
c) $[(2x+y)+(3y-1)]\,[(2x+y)-(3y-1)]$;
d) $(ab-2b-a)(-ab+2b-a)$;
e) $\left(\frac{1}{2}a+1+b+ab\right)\left(\frac{1}{2}a+1-b-ab\right)$;
f) $\left(a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}-5ab\right)$;
g) $(3x-y-1)(3x+y-1)$.

8.22 (*). Semplifica le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

a) $(a+b)(a-b)-(a+b)^2$;
b) $[(x-1)(1+x)]^2$;
c) $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)-\frac{2}{3}(a-b)^2+2\left(\frac{1}{3}a\right)^2$;

8.23 (*). Semplifica le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

a) $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(b^2+\frac{4}{9}a^2\right)$;
b) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$;
c) $(a+b-1)^2+(a-b)^2+\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)+2a\left(a-\frac{1}{2}\right)-a(5a+3)-(2b-1)$;
d) $(x^2+2x)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{1}{2}x^2(x+5)$.

8.4 Cubo di un binomio

8.24. Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi.

a) $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ Sì No
b) $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ Sì No
c) $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ Sì No
d) $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ Sì No

8.25. Sviluppa i seguenti cubi di binomio.

a) $\left(2a+b^2\right)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3\,(2a)\cdot\left(b^2\right)^2+\left(b^2\right)^3=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
b) $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\dots y^{\cdots}$
c) $(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a+b)^3-a^3-b^3-a^2-b^2-ab$.

8.26. Sviluppa i seguenti cubi di binomio.

a) $(x+y)^3$;
b) $(x-y)^3$;
c) $(-x+y)^3$;
d) $(a+2)^3$;
e) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$;
f) $(a+1)^3$;
g) $(a-1)^3$;
h) $(x+2y)^3$;
i) $(y-2x)^3$;
j) $\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$;
k) $(2x+y)^3$;
l) $(x^2y-3)^3$;
m) $(xy-1)^3$;
n) $(x^2-2y)^3$;
o) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$.

8.27. Sviluppa i seguenti cubi di binomio.

a) $(a-3)^3$;
b) $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a\right)^3$;
c) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)^3$;
d) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$;

e) $\left(\frac{1}{2}xy-2x\right)^3$;

f) $(x+3)^3$;

g) $\left(\frac{2}{5}x^2y-5yx^2a\right)^3$;

h) $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3$;

i) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^2-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)^3$;

j) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}xy^2z^3\right)^3$;

k) $(x^2-y^2)^3$;

l) $\left(-3xy^2+\frac{3}{2}zx^2\right)^3$;

m) $\left(2x^2z+\frac{2}{3}y^2z^3x\right)^3$;

n) $-\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3$;

o) $\left(\frac{1}{4}ab^2c-4a^2b\right)^3$.

8.5 Potenza n-esima di un binomio

8.28. Sviluppa la seguente potenza del binomio.

$$\left(2a-b^2\right)^4=(2a)^4+4\cdot(2a)^3\cdot\left(-b^2\right)+6\,(2a)^2\cdot\left(-b^2\right)^2+\ldots(2a)\cdot\left(-b^2\right)^{\cdots}+\left(-b^2\right)^{\cdots}$$

8.29. Sviluppa le seguenti potenze di binomio.

a) $(a+1)^5$;

b) $(x-1)^6$;

c) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$;

d) $(1-y)^7$;

e) $(a+2)^5$;

f) $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$;

g) $(a-2)^6$;

h) $(2a-1)^2$;

i) $\left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$;

j) $\left(3x^2a-a^2\right)^5$;

k) $\left(2x^2-1\right)^6$;

l) $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$.

8.30. Trova la regola generale per calcolare il cubo del trinomio $(A+B+C)^3$.

8.6.2 Esercizi riepilogativi

8.31 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $[a+2(b-c)][a-2(b-c)]+4b(b-2c)$;

b) $\left[(a-2b)^2-a^3\right]\left[-a^3-(a-2b)^2\right]+a^2(a^2-8ab+24b^2-a^4)$;

c) $x(x-1)^2+(x+1)(x-1)-x(x+1)(x-3)-(x+2)^2$;

d) $(x+1)^2-(x-1)^2$;

e) $(x+1)^3-(x-1)^3-6x^2$.

8.32 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $(x+1)^2+(x-2)^2-(x-1)^2-(x+1)(x-1)$;

b) $(x+2)(x-2)+(x+2)^2$;

c) $(x+1)^3-(x-1)\left(x^2+x+1\right)+3x(x-1)$;

d) $(x+1)(x-1)+(x+1)^2+(x-1)^2$;

e) $(x+y+1)(x+y-1)+(x+y)^2-2(x+y)(x-y)-(2y-1)(2y+1)$.

8.33 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}-3b+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}-3b-\frac{1}{3}ab\right)+\frac{1}{9}ab(31+ab)-\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}\right)$;

b) $(x-y)^2+(x+y)(y-x)$;

c) $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2-2(x-y-z)^2$;

d) $(a-3b)^2+(2a+3b)(2a-3b)-(a+2b)(b-2a)$;

e) $\left[3x^2-(x+2y)(x-2y)\right]^2-2x\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right)^2-3xy\left(x+\frac{3}{2}y\right)-\left(2x^2+4y^2\right)^2$.

8.34. Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $\left[(x+2y)^2-\left(x^2-2y\right)^2\right]\left[(x+2y)^2+\left(x^2-2y\right)^2\right]$;

b) $(a+2b-3c)(a+2b+3c)\left(a^2-b\right)\left(-a^2-b\right)+(2a-b)^3$;

c) $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$;

d) $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$.

8.35 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $-2x(x-1)^2+2x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}x\left(2x-\frac{4}{3}\right)$;

b) $(a-2b)^4-b(2a-b)^3-a^2(a+6b)^2$;

c) $[(x-1)^2-2]^2-\left(x^2+x-1\right)^2+6x(x-1)(x+1)$;

d) $(x+1)^4-(x+1)^2(x-1)^2-4x(x+1)^2$;

e) $\frac{(x-2)(x+2)}{4}+\frac{(x-2)^2}{(-2)^2}+x$.

8.36 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^3+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$;

b) $(x+1)^3-3(x-1)(-1-x)+(x-4)(x+1)$;

c) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-(x+1)^2-\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$;

d) $(x-3)^3-x^2(x-9)-9(x-3)-9$;

e) $x(x-1)^2(x+1)+(x-1)^2-x(x-1)^3$.

8.37 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $-\frac{1}{2}x\left(x+\frac{3}{4}\right)(2x+1)-\left[x+1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{8}(5x+1)$;

b) $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{41}{18}$;

c) $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2-\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3-\frac{1}{6}(x+1)^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{6}\left(x^3-11\right)$;

d) $-x^2\left(x^2-1\right)+\left(x^2-4x+2\right)^2+4(x-1)^2+8(x-1)^3$;

e) $x\left(2x^2+3x\right)^2-2x^3\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+x^3(x-2)^3-x^2\left(x^3+2x^2\right)(x-12)$.

8.38. Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$;

b) $-2t(t-x)-3t^2+x(x+t)(t-x)+(x-t)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}t\right)^3$;

c) $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)^2-x\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-x\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2$.

8.39 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $\left[\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)^2-\left(\frac{1}{3}x\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}y\right)+\left(\frac{1}{3}y-1\right)^3+\frac{1}{3}(y-8)(y-7)+\frac{1}{3}(1+8y)$;

b) $-\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2-\frac{1}{16}(2x-1)^2-\frac{1}{2}(3-x)^2-\frac{3}{16}x^2+5+\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$;

c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(7x^2-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{8}(2x-1)$;

8.6.3 Risposte

8.8 a) $3y^2-3x^2$, b) $x^2-14xy-5y^2$.

8.9 b) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$, c) $\frac{35}{4}x^2$, d) $-3x^2-14x-8$.

8.10 a) $-6x^2+5x-\frac{3}{8}$, b) $2ab^3-b^4-162$.

8.14 a) $4xy-4x$, b) $-18ax-16bx$, c) $x^4+2x^3+2x^2$, d) $4ab+4a$.

8.21 d) $a^2-a^2b^2+4ab^2-4b^2$, e) $-a^2b^2+\frac{1}{4}a^2-2ab^2+a-b^2+1$, g) $9x^2-6x-y^2+1$.

8.22 a) $-2ab-2b^2$, b) x^4-2x^2+1, c) $\frac{4}{3}ab-\frac{5}{3}b^2$,

8.23 a) $\frac{16}{81}a^4-b^4$, c) $\frac{7}{4}b^2-4b-6a+2$, d) x.

8.31 a) a^2-4c^2, b) $+32ab^3-16b^4$, c) -5, d) $4x$, e) 2.

8.32 a) 5, b) $2x^2-4x$, c) $6x2+2$, d) $3x^2+1$, e) $4xy$.

8.33 a) $9b^2$, b) $2y^2-2xy$, c) $4xy+4xz-8yz$, d) $7a^2-3ab-2b^2$, e) $-\frac{1}{2}x^3-9xy^2$.

8.35 a) 0, b) $17b^4-38ab^3-28a^3b$, c) $3x^2$, d) 0, e) $\frac{1}{2}x^2$.

8.36 a) $8x^3+\frac{14}{3}x+\frac{26}{27}$, b) x^3+7x^2-6, c) $1-2x$, d) $18x-9$, e) $2x^3-3x^2+1$.

8.37 a) $8x^3-\frac{11}{4}x^2$, b) $\frac{4}{3}x^2-\frac{47}{18}x$, c) $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2$, d) x^2, e) $52x^4+\frac{1}{2}x^3$.

8.39 a) $\frac{4}{3}x+\frac{y^3}{27}+18$, b) $\frac{17}{4}x$, c) $-6x^2$,

Geometria analitica II

"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

9 Il piano cartesiano

9.1 Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

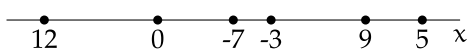
Nonostante queste intuizioni, per migliaia di anni la geometria e l'algebra sono state due discipline completamente separate nella matematica.

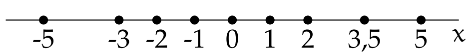
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri. Il *piano cartesiano* è uno strumento che permette di trattare elementi geometrici con metodi algebrici ed elementi algebrici con metodi geometrici. Così, a volte, problemi algebrici difficili possono a trovare una soluzione geometrica semplice e viceversa. In matematica, ma anche nelle altre scienze, quando si riesce a trovare un collegamento tra due rami della disciplina che fino a quel momento erano rimasti separati, si fa un grande passo avanti.

La geometria analitica permette di descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra e viceversa.

9.2 Asse cartesiano

Lo strumento che ci permette di fare tutto ciò è il *riferimento cartesiano*. L'idea di base è che su una retta ci sono infiniti punti e anche i numeri sono infiniti possiamo quindi far corrispondere ai punti della retta tutti gli elementi di un insieme numerico. Possiamo farlo a fantasia o seguendo un metodo che permette a tutti di disporre i numeri esattamente nello stesso modo.

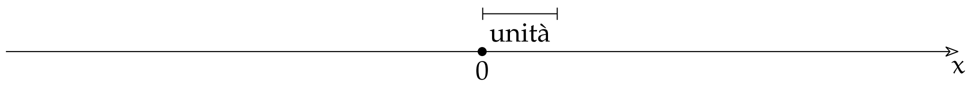




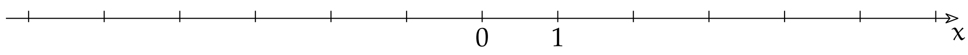
Per farlo in modo preciso abbiamo bisogno di aggiungere ad una retta alcuni elementi ottenendo così un asse cartesiano:

Definizione 9.1. Un *asse cartesiano* è una retta dotata di:

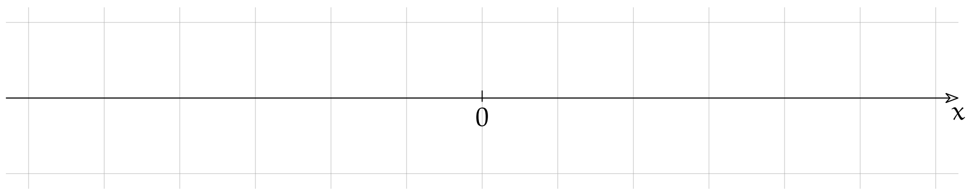
- *origine*, un punto della retta che rappresenta lo zero, a questo punto normalmente viene dato il nome "O";
- *verso*, una freccia che indica da quale parte i numeri aumentano;
- *unità di misura*, un segmento che indica la distanza tra un numero intero e il successivo.



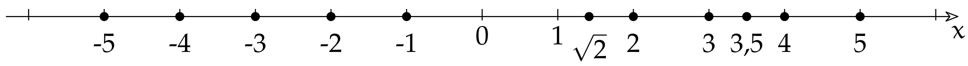
Normalmente, invece di indicare l'unità di misura al di fuori dell'asse indichiamo sull'asse i punti 0 e 1.



Quando lavoriamo su un foglio a quadretti, indichiamo esplicitamente l'unità solo se è diversa dal quadretto e evitiamo anche di tracciare tutti i trattini verticali.



In questo modo possiamo far corrispondere ad ogni numero un punto della retta e ad ogni punto della retta un numero *reale*. Il numero che corrisponde al punto si chiama *coordinata* del punto.



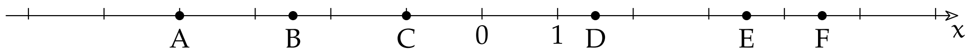
9.3 Problemi sulla retta

9.3.1 Convenzioni

Nei testi si trovano di solito queste convenzioni:

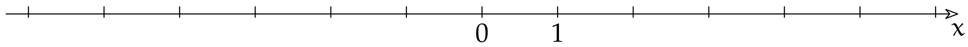
- Agli assi cartesiani di solito si dà un nome di una lettera prendendo le lettere tra le ultime dell'alfabeto: *asse* x, *asse* y o *asse* z.
- Ai punti diamo come nome delle lettere maiuscole: P, A, B, ...
- La coordinata di P sull'asse x viene indicata con x_P.
- Per indicare il punto P che ha coordinata a scriviamo P(a;)

Esempio 9.1. Trova le coordinate dei punti.



Con riferimento alla figura precedente possiamo dire che:
$x_A = \dots \quad ; x_B = \dots \quad ; x_C = \dots \quad ; x_D = \dots \quad ; x_E = \dots \quad ; x_F = \dots \quad ;$

Esempio 9.2. Date le coordinate disegna i punti.



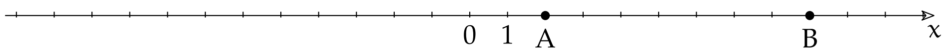
In questo altro asse cartesiano inserisci i seguenti punti:
$A(7;)$; $B(2;)$; $C(-4;)$; $D(-1;)$; $E(6,5;)$; $F(-5,5;)$.

9.3.2 Lunghezza di un segmento

Un primo problema che possiamo affrontare e risolvere avendo un riferimento cartesiano è quello di trovare la lunghezza di un segmento date le coordinate dei suoi estremi. Andiamo per gradi.

Primo caso: gli estremi sono entrambi positivi

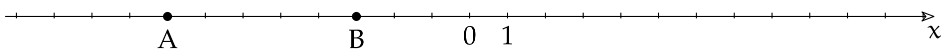
Disegniamo su un asse cartesiano i due punti: $A(2;)$ e $B(9;)$. Il segmento AB si ottiene togliendo dal segmento OB il segmento OA: $AB = OB - OA$.



Le distanze di A e B dall'origine si trovano senza calcoli, sono proprio le coordinate dei due punti e quindi la distanza di A da B si ottiene calcolando la differenza delle coordinate di B e di A:
$\overline{AB} = x_B - x_A = 9 - 2 = 7$
Risultato che possiamo verificare facilmente.

Secondo caso: gli estremi sono entrambi negativi

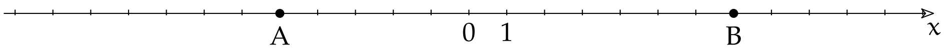
Consideriamo ora due punti negativi ad esempio: $A(-8;)$ e $B(-3;)$.



La lunghezza del segmento AB si ottiene togliendo dalla lunghezza di AO la lunghezza di BO. La lunghezza di AO è l'opposto della coordinata di A e la lunghezza di BO è l'opposto della coordinata di B, quindi:
$\overline{AB} = (-x_A) - (-x_B) = x_B - x_A = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$
Dopo aver verificato il risultato nel disegno osserviamo che la formula usata è identica a quella utilizzata nel caso precedente.

Terzo caso: gli estremi sono uno negativo e uno positivo

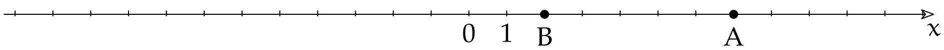
Ora prendiamo un punto negativo e uno positivo: $A(-5;)$ e $B(7;)$.



È chiaro che il segmento AB si ottiene sommando i due segmenti: AO e OB. Ma la lunghezza di AO è l'opposto della sua coordinata, quindi otteniamo:
$\overline{AB} = -x_A + x_B = x_B - x_A = 7 + 5 = 12$
Anche qui possiamo verificare facilmente il risultato ottenuto.

Situazione strana: segmento di lunghezza negativa

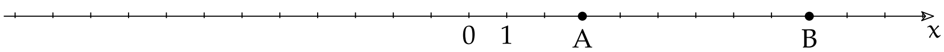
Abbiamo visto che in tutti questi casi la formula:
$\overline{AB} = x_B - x_A$ funziona quindi non dobbiamo preoccuparci del segno delle coordinate per trovare la lunghezza di un segmento facciamo sempre la coordinata del secondo punto meno la coordinata del primo.
Ma cosa succede se questa regola la applichiamo al segmento: $A(7;)$ e $B(2;)$?



Applicando la solita regola: $\overline{AB} = x_B - x_A = 2 - 7 = -5$ otteniamo un numero negativo, strano per una lunghezza! I matematici, piuttosto che complicare la formuletta preferiscono dare un senso anche alle lunghezze negative parlando di *segmento orientato*. Un segmento orientato ha lunghezza positiva se il verso del segmento è uguale al verso del sistema di riferimento, ha lunghezza negativa se il verso del segmento è opposto a quello del sistema di riferimento. Qualche volta questo meccanismo può risultare scomodo, in questo caso si applica la funzione *valore assoluto* al risultato ottenuto, cioè, se è negativo gli si cambia il segno.

9.3.3 Punto medio di un segmento

Un altro problema che possiamo affrontare e risolvere avendo un riferimento cartesiano è quello di trovare il punto medio M date le coordinate degli estremi.
Disegniamo su un asse cartesiano i due punti: $A(3;)$ e $b(9;)$.



Per trovare la coordinata del punto medio dobbiamo sommare alla coordinata di A la lunghezza di metà segmento:
$x_M = x_A + \frac{\overline{AB}}{2}$
Riprendendo la formula precedente:
$x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{2x_A + x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$
Detto a parole: *La coordinata del punto medio è uguale alla media delle coordinate degli estremi.*
Verifica questa formula con le coppie di punti degli esempi precedenti.

9.4 Piano cartesiano

Abbiamo visto qualche problema sull'asse cartesiano, ma in realtà un solo asse non è molto interessante. Se invece prendiamo due assi cartesiani non paralleli la situazione diventa più complessa, interessante e divertente.

Due assi non paralleli permettono di realizzare una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri: ad ogni punto corrisponde una ben precisa coppia di numeri e ad ogni coppia di numeri un ben preciso punto. La coppia ordinata di numeri prende il nome di *coordinate* del punto.

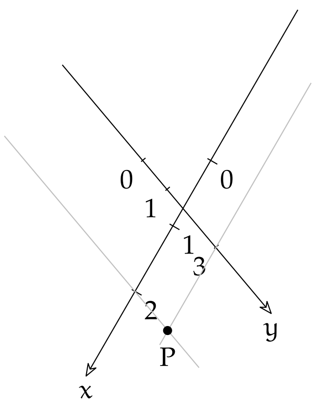


FIGURA 9.1: Riferimento cartesiano.

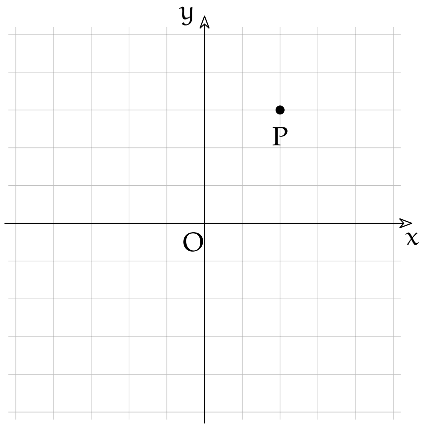


FIGURA 9.2: Rif. cart. ortogonale monometrico.

In entrambi questi riferimenti cartesiani al punto P corrisponde la coppia di numeri (2; 3). Pur essendo validi entrambi, per noi sarà molto più comodo usare il secondo riferimento cartesiano. Cioè un riferimento in cui gli assi:

- hanno l'origine in comune;
- sono perpendicolari;
- hanno la stessa unità di misura.

Un asse, di solito quello orizzontale, si chiama asse delle *ascisse* o asse x; l'altro asse di solito quello verticale, si chiama asse delle *ordinate* o asse y. La prima delle due coordinate si riferisce alla coordinata dell'asse x, la seconda alla coordinata dell'asse y: $(x;\ y)$.

Un riferimento di questo tipo si chiama: *Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico*, (*rcom*). E noi d'ora in poi, quando parleremo di piano cartesiano o di riferimento cartesiano, ci riferiremo sempre ad un *rcom*.

Riassumendo possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 9.2. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di assi cartesiani perpendicolari, con l'origine in comune e dotati di uguale unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura 9.3.

Tutti i punti che appartengono all'asse x hanno l'ordinata (la y) uguale a zero. Tutti i punti che appartengono all'asse y hanno l'ascissa (la x) uguale a zero. L'intersezione degli assi, l'origine, ha coordinate $(0;0)$

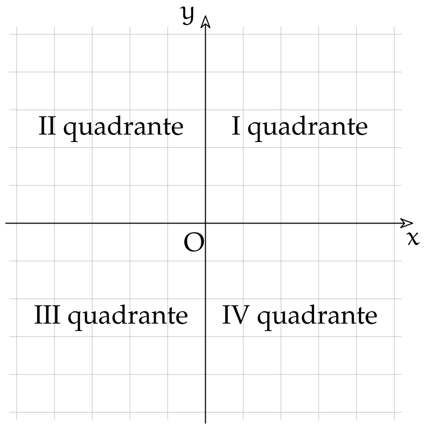


FIGURA 9.3: I quattro quadranti.

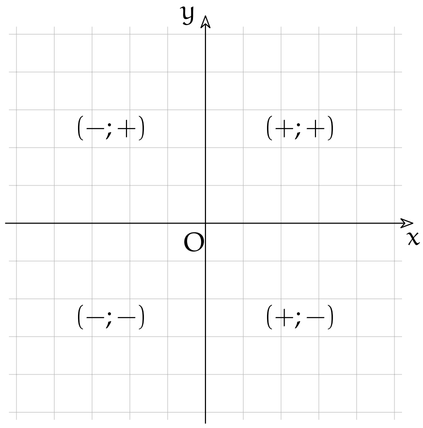


FIGURA 9.4: Collocazione delle coordinate positive e negative.

Per rappresentare un punto P date le sue coordinate $(x_p;y_p)$ si procede nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale x_P ;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale y_P ;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

L'intersezione delle parallele tracciate, è il punto P che ha per coordinate la coppia ordinata $(x_P;y_P)$.

Il procedimento inverso permette di passare da un punto del piano alle sue coordinate,

---

Esempio 9.3. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2;3)$, $(-1;4)$, $(-3;-2)$, e $(4;-3)$.

Nella figura 9.5 sono riportati i punti: A che è l'immagine della coppia $(2;\ 3)$, B immagine della coppia $(-1;\ 4)$, C immagine della coppia $(3;\ -2)$ e D della coppia $(4;\ -3)$.

Esempio 9.4. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $R(0;4)$, $S(0;-2)$, $H(-4;0)$, $K(3;0)$.

Osserviamo (figura 9.6) che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia $(0;\ 4)$ sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia $(0;\ -2)$ al punto S dello stesso asse. Analogamente le coppie $(-4;\ 0)$ e $(3;\ 0)$ sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

9.5 Problemi nel piano cartesiano

9.5.1 Punto medio di un segmento

Utilizzando i risultati ottenuti nel caso dei punti posti su un asse cartesiano possiamo osservare che anche per quanto riguarda un segmento posto nel piano le coordinate del punto medio sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.

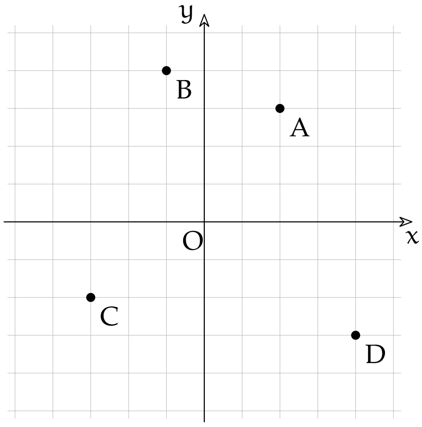


FIGURA 9.5: Punti interni ai quadranti.

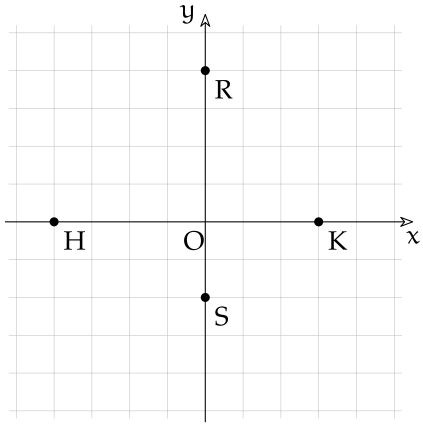
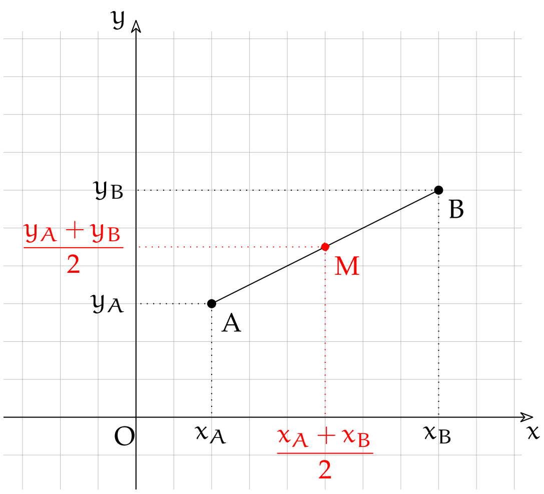


FIGURA 9.6: Punti sugli assi.

Conoscendo le coordinate degli estremi $A(x_A; y_A$ e $B(x_B; y_B)$ le coordinate del suo punto medio sono (figura 9.7):



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

o

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

FIGURA 9.7: Il punto medio.

Esempio 9.5. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-3; -2)$ e $B(5; 7)$. Trova il punto medio usando il righello disegnalo e assegnagli l'etichetta "M". Poi calcola le coordinate del punto medio con la formula precedente e controlla che le coordinate ottenute siano proprio quelle del punto trovato precedentemente.

Esempio 9.6. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-9; 8)$ e $M(-6; 7)$. Usando il righello trova il punto B in modo che M sia il punto medio del segmento AB. Applica la formula precedente per verificare la correttezza di quanto trovato.

9.5.2 Lunghezza di un segmento

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, date le coordinate degli estremi.

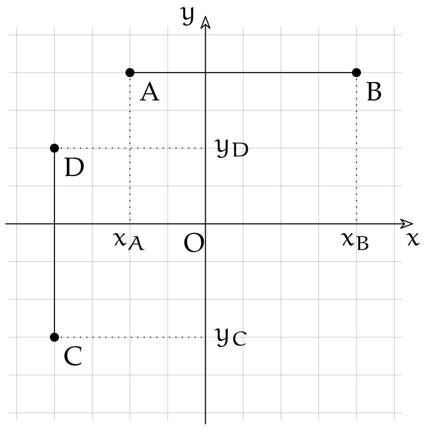


FIGURA 9.8: Lunghezza segmenti paralleli agli assi.

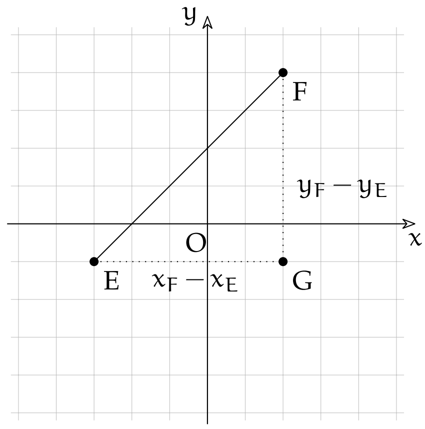


FIGURA 9.9: Lunghezza di un segmento.

Possiamo distinguere due casi:

Primo caso: segmenti paralleli agli assi

i due punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata (figura 9.8). È facile osservare in questo caso che il problema si riduce a quello analogo risolto per segmenti su un asse cartesiano. Se i due punti hanno la stessa ordinata, la stessa y:
$\overline{AB} = x_B - x_A$.
Se hanno la stessa ascissa, la stessa x:
$\overline{CD} = y_D - y_C$.

Secondo caso: segmento qualunque

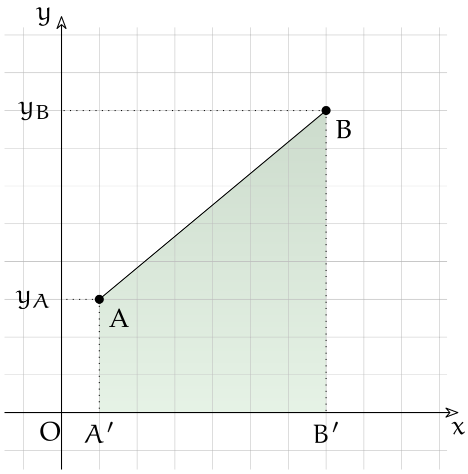
è questo il caso generale, il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 9.9).
Dati: $E(x_E; y_E)$, $F(x_F; y_F)$.
Obiettivo: $\overline{EF}$.
Procedura risolutiva: tracciando da E la parallela all'asse x e da F la parallela all'asse y si determina il vertice G del triangolo rettangolo EGF di cui EF è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{EF} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_G - y_F)^2}$.

Poiché $x_G = x_F$ e $y_G = y_E$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}$.
In conclusione, la *misura del segmento* AB, *note le coordinate* dei suoi estremi è:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}.$$

9.5.3 Area sottesa a un segmento

Dati gli estremi di un segmento trovare la superficie compresa tra il segmento e l'asse x. Partiamo da una situazione particolare: i punti A e B non appartengono all'asse x e il segmento AB non è parallelo all'asse x.



Che forma ha l'area sottesa a questo segmento? È un quadrilatero, ha solo due lati paralleli ha due angoli retti... questa è la descrizione di un trapezio! Forse non hai mai disegnato un trapezio messo in questo modo. Puoi verificare facilmente che è un trapezio, ti basta ruotare il quaderno do 90°. L'area del trapezio è uguale alla somma delle basi per l'altezza diviso due:

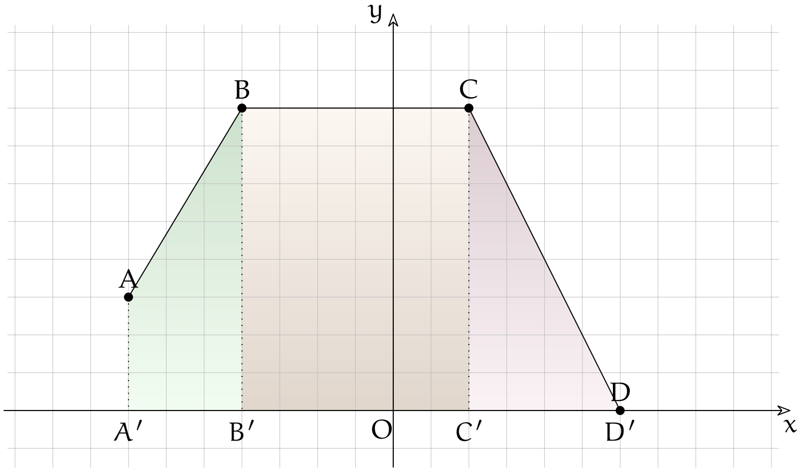
$$Area_{trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Ma quali sono le basi e quale è l'altezza? Nel trapezio le basi sono i due lati paralleli e l'altezza è la distanza tra i due lati paralleli. Uno dei lati paralleli è AA' cioè l'ordinata di A (la y_A) e l'altro è BB' cioè l'ordinata di B (la y_B). L'altezza del trapezio è la lunghezza del segmento $A'B'$ cioè $x_B - x_A$.

Mettendo assieme tutti gli ingredienti otteniamo che l'area sottesa al segmento AB è:

$$\mathcal{A}_{AB} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{2}$$

E se il segmento è messo in un altro modo? Anche limitandoci al primo quadrante possiamo osservare che ci sono svariati casi:



L'area sottesa al segmento AB è un trapezio rettangolo, l'area sottesa al segmento CD è un rettangolo, l'area sottesa al segmento EF è un triangolo rettangolo.

Nel paragrafo precedente abbiamo risolto il primo caso, quello del trapezio, dovremo ripetere tutti quei ragionamenti anche per gli altri due? No! I matematici, che sono un po strani, ritengono che:

- un triangolo rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con una base lunga zero;
- un rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con le basi uguali.

A questo punto non dobbiamo preoccuparci di casi diversi, la formula trovata per il trapezio rettangolo risolverà anche gli altri casi

---

Esempio 9.7. Dopo aver trovato le coordinate dei punti della figura precedente calcola le aree sottese ai tre segmenti sia usando le formule della geometria sia usando la formula dell'area sottesa e confronta i risultati.

Esempio 9.8. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(3; -2)$ e $B(8; -6)$. Calcola l'area sottesa a questo segmento sia usando la formula dell'area del trapezio sia usando la formula dell'area sottesa... Cosa puoi osservare?

Anche per le aree sottese abbiamo una situazione strana: in certi casi l'area di una figura risulta negativa. Questo fatto può essere irritante, ma in certi casi risulterà comodo.

Ci sono certi segmenti che formano con l'asse x una figura con una superficie diversa da zero ma che hanno area sottesa uguale a zero. Quando avviene questo?

9.5.4 Area di un triangolo

Date le coordinate dei vertici di un triangolo trova l'area della sua superficie.

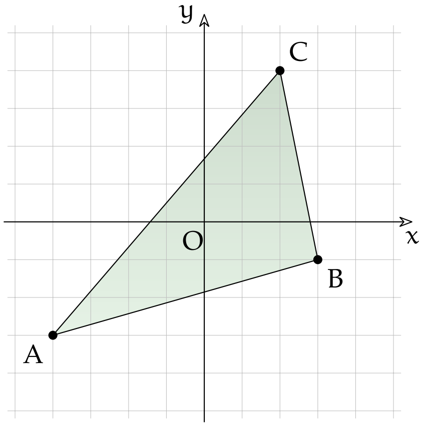


FIGURA 9.10: Area con la formula di Erone.

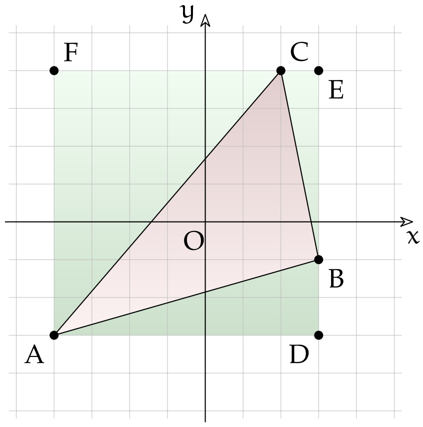


FIGURA 9.11: Area come differenza di superfici.

Formula di Erone

Se conosciamo le coordinate dei tre vertici possiamo trovare le lunghezze dei tre lati e conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo possiamo trovare la sua area utilizzando la formula di Erone. Chiamando: a, b e c i tre lati e p il semiperimetro:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ma spesso le lunghezze dei lati sono numeri approssimati e quindi la formula di Erone, già complicata di suo, risulta piuttosto scomoda.

Differenza di superfici

Un altro metodo consiste nell'iscrivere il triangolo in un rettangolo, trovare l'area del rettangolo e sottrarre da questa le aree dei tre triangoli complementari.

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \mathcal{A}_{rettangolo} - \mathcal{A}_{tri1} - \mathcal{A}_{tri2} - \mathcal{A}_{tri3}$$

Casi particolari

Se il triangolo ha un lato parallelo ad uno degli assi allora è facile calcolare l'altezza rispetto a questo lato e quindi si può usare la solita formula:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Dopo aver trovato le coordinate dei vertici delle figure precedenti:

Esempio 9.9. Con riferimento alla figura 9.10 calcola la lunghezza dei lati e l'area del triangolo con la formula di Erone.

Esempio 9.10. Con riferimento alla figura 9.11 calcola l'area del triangolo come differenza di aree. Confronta poi il risultato con quello ottenuto nel calcolo precedente.

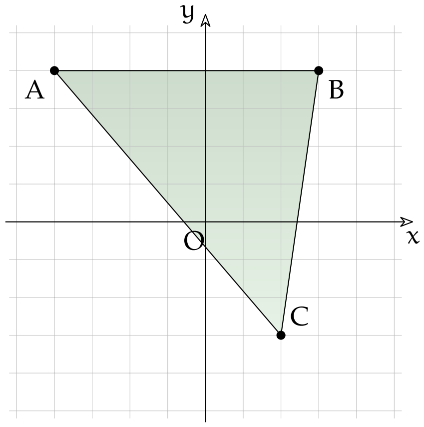


FIGURA 9.12: Area con la formula di Erone.

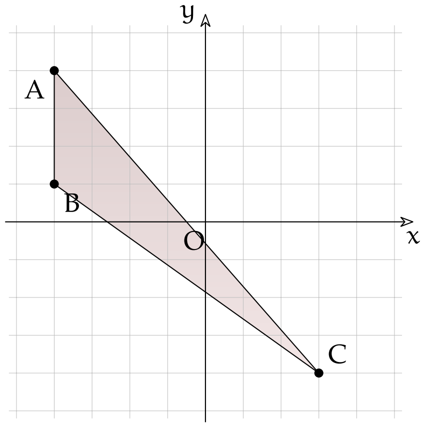


FIGURA 9.13: Area come differenza di superfici.

Esempio 9.11. Con riferimento alla figura 9.12 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

Esempio 9.12. Con riferimento alla figura 9.13 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

9.6 Esercizi

9.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

9.3 Problemi sulla retta

9.1. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, calcola il il punto medio e la lunghezza dei seguenti AB:

a) $A = (9;); B = (-12;)$ $[M_{AB} = -1.5; \overline{AB} = -21]$
b) $A = (-6;); B = (-11;)$ $[M_{AB} = -8.5; \overline{AB} = -5]$
c) $A = (-8;); B = (-10;)$ $[M_{AB} = -9.0; \overline{AB} = -2]$
d) $A = (-9;); B = (-12;)$ $[M_{AB} = -10.5; \overline{AB} = -3]$
e) $A = (1;); B = (-11;)$ $[M_{AB} = -5.0; \overline{AB} = -12]$
f) $A = (-2;); B = (7;)$ $[M_{AB} = 2.5; \overline{AB} = 9]$
g) $A = (-3;); B = (3;)$ $[M_{AB} = 0.0; \overline{AB} = 6]$
h) $A = (-4;); B = (9;)$ $[M_{AB} = 2.5; \overline{AB} = 13]$
i) $A = (-5;); B = (-12;)$ $[M_{AB} = -8.5; \overline{AB} = -7]$
j) $A = (3;); B = (6;)$ $[M_{AB} = 4.5; \overline{AB} = 3]$
k) $A = (11;); B = (8;)$ $[M_{AB} = 9.5; \overline{AB} = -3]$
l) $A = (-3;); B = (1;)$ $[M_{AB} = -1.0; \overline{AB} = 4]$
m) $A = (-8;); B = (11;)$ $[M_{AB} = 1.5; \overline{AB} = 19]$
n) $A = (8;); B = (-2;)$ $[M_{AB} = 3.0; \overline{AB} = -10]$
o) $A = (-7;); B = (4;)$ $[M_{AB} = -1.5; \overline{AB} = 11]$

9.5 Problemi nel piano cartesiano

9.2. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-5; 1); B = (-2; -4)$ $[M_{AB} = (-3.5, -1.5); \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83; A_AB = -4.5]$
b) $A = (-3; 0); B = (-1; -4)$ $[M_{AB} = (-2.0, -2.0); \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47; A_AB = -4.0]$
c) $A = (-3; 0); B = (0; -5)$ $[M_{AB} = (-1.5, -2.5); \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83; A_AB = -7.5]$
d) $A = (-7; -2); B = (0; -6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -4.0); \overline{AB} = \sqrt{65} = 8.06; A_AB = -28.0]$
e) $A = (-4; -1); B = (1; -4)$ $[M_{AB} = (-1.5, -2.5); \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83; A_AB = -12.5]$
f) $A = (-7; -3); B = (-6; -7)$ $[M_{AB} = (-6.5, -5.0); \overline{AB} = \sqrt{17} = 4.12; A_AB = -5.0]$
g) $A = (-4; -3); B = (-1; -6)$ $[M_{AB} = (-2.5, -4.5); \overline{AB} = \sqrt{18} = 4.24; A_AB = -13.5]$
h) $A = (-5; 0); B = (-3; -3)$ $[M_{AB} = (-4.0, -1.5); \overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61; A_AB = -3.0]$
i) $A = (-7; -2); B = (-2; -5)$ $[M_{AB} = (-4.5, -3.5); \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83; A_AB = -17.5]$
j) $A = (-2; -3); B = (2; -6)$ $[M_{AB} = (0.0, -4.5); \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0; A_AB = -18.0]$
k) $A = (-4; 0); B = (-3; -6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -3.0); \overline{AB} = \sqrt{37} = 6.08; A_AB = -3.0]$
l) $A = (-7; 2); B = (-3; -1)$ $[M_{AB} = (-5.0, 0.5); \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0; A_AB = 2.0]$
m) $A = (-2; -2); B = (0; -6)$ $[M_{AB} = (-1.0, -4.0); \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47; A_AB = -8.0]$
n) $A = (-5; 0); B = (-1; -2)$ $[M_{AB} = (-3.0, -1.0); \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47; A_AB = -4.0]$
o) $A = (-3; -2); B = (-1; -8)$ $[M_{AB} = (-2.0, -5.0); \overline{AB} = \sqrt{40} = 6.32; A_AB = -10.0]$

9.3. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A = (-8; 0); B = (0; -4); C = (2; 3)$ $[2p = 26.66\ A = 32.0]$
b) $A = (-7; 0); B = (-1; -2); C = (5; 7)$ $[2p = 31.03\ A = 33.0]$

c) $A = (-3; -3);\ B = (-2; -6);\ C = (3; 5)$ $[2p = 25.25\ A = 13.0]$
d) $A = (-4; 0);\ B = (-2; -8);\ C = (6; 1)$ $[2p = 30.34\ A = 41.0]$
e) $A = (-7; -3);\ B = (1; -6);\ C = (5; 3)$ $[2p = 31.81\ A = 42.0]$
f) $A = (-6; 2);\ B = (0; -8);\ C = (2; 3)$ $[2p = 30.90\ A = 43.0]$
g) $A = (-5; -1);\ B = (-3; -3);\ C = (5; 7)$ $[2p = 28.44\ A = 18.0]$
h) $A = (-6; 0);\ B = (-5; -3);\ C = (-2; 7)$ $[2p = 21.66\ A = 9.5]$
i) $A = (-2; -1);\ B = (2; -4);\ C = (5; 3)$ $[2p = 20.68\ A = 18.5]$
j) $A = (-3; 0);\ B = (-2; -6);\ C = (5; 4)$ $[2p = 27.23\ A = 26.0]$
k) $A = (-4; 0);\ B = (0; -4);\ C = (2; 7)$ $[2p = 26.06\ A = 26.0]$
l) $A = (-6; 2);\ B = (-2; -3);\ C = (4; 4)$ $[2p = 25.82\ A = 29.0]$
m) $A = (-5; 2);\ B = (2; 0);\ C = (3; 7)$ $[2p = 23.79\ A = 25.5]$
n) $A = (-7; 0);\ B = (1; -7);\ C = (4; 2)$ $[2p = 31.30\ A = 46.5]$
o) $A = (-7; 2);\ B = (-1; -7);\ C = (5; 6)$ $[2p = 37.78\ A = 66.0]$

9.6.2 Esercizi riepilogativi

9.4. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, calcola il il punto medio e la lunghezza dei seguenti AB:

a) $A = (4;);\ B = (-7;)$ $[M_{AB} = -1.5;\ \overline{AB} = -11]$
b) $A = (-12;);\ B = (-4;)$ $[M_{AB} = -8.0;\ \overline{AB} = 8]$
c) $A = (-5;);\ B = (5;)$ $[M_{AB} = 0.0;\ \overline{AB} = 10]$
d) $A = (-11;);\ B = (2;)$ $[M_{AB} = -4.5;\ \overline{AB} = 13]$
e) $A = (-10;);\ B = (-3;)$ $[M_{AB} = -6.5;\ \overline{AB} = 7]$
f) $A = (9;);\ B = (-6;)$ $[M_{AB} = 1.5;\ \overline{AB} = -15]$
g) $A = (-10;);\ B = (2;)$ $[M_{AB} = -4.0;\ \overline{AB} = 12]$
h) $A = (3;);\ B = (8;)$ $[M_{AB} = 5.5;\ \overline{AB} = 5]$
i) $A = (-5;);\ B = (-10;)$ $[M_{AB} = -7.5;\ \overline{AB} = -5]$
j) $A = (2;);\ B = (0;)$ $[M_{AB} = 1.0;\ \overline{AB} = -2]$
k) $A = (10;);\ B = (-12;)$ $[M_{AB} = -1.0;\ \overline{AB} = -22]$
l) $A = (-4;);\ B = (-11;)$ $[M_{AB} = -7.5;\ \overline{AB} = -7]$
m) $A = (8;);\ B = (9;)$ $[M_{AB} = 8.5;\ \overline{AB} = 1]$
n) $A = (-4;);\ B = (-9;)$ $[M_{AB} = -6.5;\ \overline{AB} = -5]$
o) $A = (2;);\ B = (-8;)$ $[M_{AB} = -3.0;\ \overline{AB} = -10]$

9.5. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-7; 0);\ B = (-6; -5)$ $[M_{AB} = (-6.5, -2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{26} = 5.10;\ A_AB = -2.5]$
b) $A = (-5; 2);\ B = (-4; 0)$ $[M_{AB} = (-4.5, 1.0);\ \overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24;\ A_AB = 1.0]$
c) $A = (-4; 0);\ B = (-3; -6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{37} = 6.08;\ A_AB = -3.0]$
d) $A = (-4; 0);\ B = (0; -6)$ $[M_{AB} = (-2.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{52} = 7.21;\ A_AB = -12.0]$
e) $A = (-3; 1);\ B = (2; -5)$ $[M_{AB} = (-0.5, -2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{61} = 7.81;\ A_AB = -10.0]$
f) $A = (-3; -3);\ B = (0; -5)$ $[M_{AB} = (-1.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61;\ A_AB = -12.0]$
g) $A = (-4; -2);\ B = (-3; -4)$ $[M_{AB} = (-3.5, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24;\ A_AB = -3.0]$
h) $A = (-8; 0);\ B = (-6; -6)$ $[M_{AB} = (-7.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{40} = 6.32;\ A_AB = -6.0]$
i) $A = (-5; -2);\ B = (-2; -6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_AB = -12.0]$
j) $A = (-6; -2);\ B = (-4; -4)$ $[M_{AB} = (-5.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{8} = 2.83;\ A_AB = -6.0]$

k) $A = (-5;-1)$; $B = (2;-7)$ $[M_{AB} = (-1.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{85} = 9.22;\ A_A B = -28.0]$
l) $A = (-5;0)$; $B = (-4;-3)$ $[M_{AB} = (-4.5, -1.5);\ \overline{AB} = \sqrt{10} = 3.16;\ A_A B = -1.5]$
m) $A = (-8;-1)$; $B = (-3;-3)$ $[M_{AB} = (-5.5, -2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{29} = 5.39;\ A_A B = -10.0]$
n) $A = (-4;-1)$; $B = (1;-3)$ $[M_{AB} = (-1.5, -2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{29} = 5.39;\ A_A B = -10.0]$
o) $A = (-2;-3)$; $B = (2;-6)$ $[M_{AB} = (0.0, -4.5);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_A B = -18.0]$

9.6. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A = (-8;-3)$; $B = (1;-6)$; $C = (3;-2)$ $[2p = 25.00\ A = 21.0]$
b) $A = (-6;-3)$; $B = (-4;-5)$; $C = (4;7)$ $[2p = 31.39\ A = 20.0]$
c) $A = (-4;2)$; $B = (2;-5)$; $C = (6;4)$ $[2p = 29.27\ A = 41.0]$
d) $A = (-5;-2)$; $B = (-1;-5)$; $C = (7;1)$ $[2p = 27.37\ A = 24.0]$
e) $A = (-8;-1)$; $B = (1;-4)$; $C = (4;1)$ $[2p = 27.48\ A = 27.0]$
f) $A = (-6;0)$; $B = (-3;-4)$; $C = (-2;5)$ $[2p = 20.46\ A = 15.5]$
g) $A = (-2;2)$; $B = (1;-8)$; $C = (4;5)$ $[2p = 30.49\ A = 34.5]$
h) $A = (-3;-2)$; $B = (-2;-7)$; $C = (-1;2)$ $[2p = 18.63\ A = 7.0]$
i) $A = (-8;-3)$; $B = (-2;-6)$; $C = (-1;-1)$ $[2p = 19.09\ A = 16.5]$
j) $A = (-7;0)$; $B = (-2;-3)$; $C = (2;5)$ $[2p = 25.07\ A = 26.0]$
k) $A = (-3;-2)$; $B = (1;-5)$; $C = (6;1)$ $[2p = 22.30\ A = 19.5]$
l) $A = (-5;-2)$; $B = (2;-8)$; $C = (6;-1)$ $[2p = 28.33\ A = 36.5]$
m) $A = (-4;2)$; $B = (0;0)$; $C = (3;6)$ $[2p = 19.24\ A = 15.0]$
n) $A = (-8;-1)$; $B = (-2;-7)$; $C = (6;0)$ $[2p = 33.15\ A = 45.0]$
o) $A = (-5;-2)$; $B = (-4;-7)$; $C = (6;4)$ $[2p = 32.50\ A = 30.5]$

9.7. Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$. $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$.
Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del ....;
- tutte le coppie del tipo $(\dots;\dots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del ....;
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del ....;
- tutte le coppie del tipo $(\dots;0)$ individuano punti del ....;
- tutte le coppie del tipo $(\dots;\dots)$ individuano punti dell'asse y.

9.8. Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$. È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

9.9. Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$. Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$.

9.10. Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

9.11. Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$.

9.12. Determina la distanza di $P(-3;2,5)$ dall'origine del riferimento.

9.13. Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$.

9.14. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$.

9.15. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

9.16. Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$.

9.17. Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

9.18. Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$.

9.19. I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

9.20. I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$.

9.21. Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$;
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$;
c) $A(-1;4), B(1;-4)$;
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B(-2;-1)$;
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$;
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

9.22. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

9.23. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

9.24. Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

9.25. Verifica che i segmenti AB e CD di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

9.26. Verifica che il triangolo di vertici $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-4;\ 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

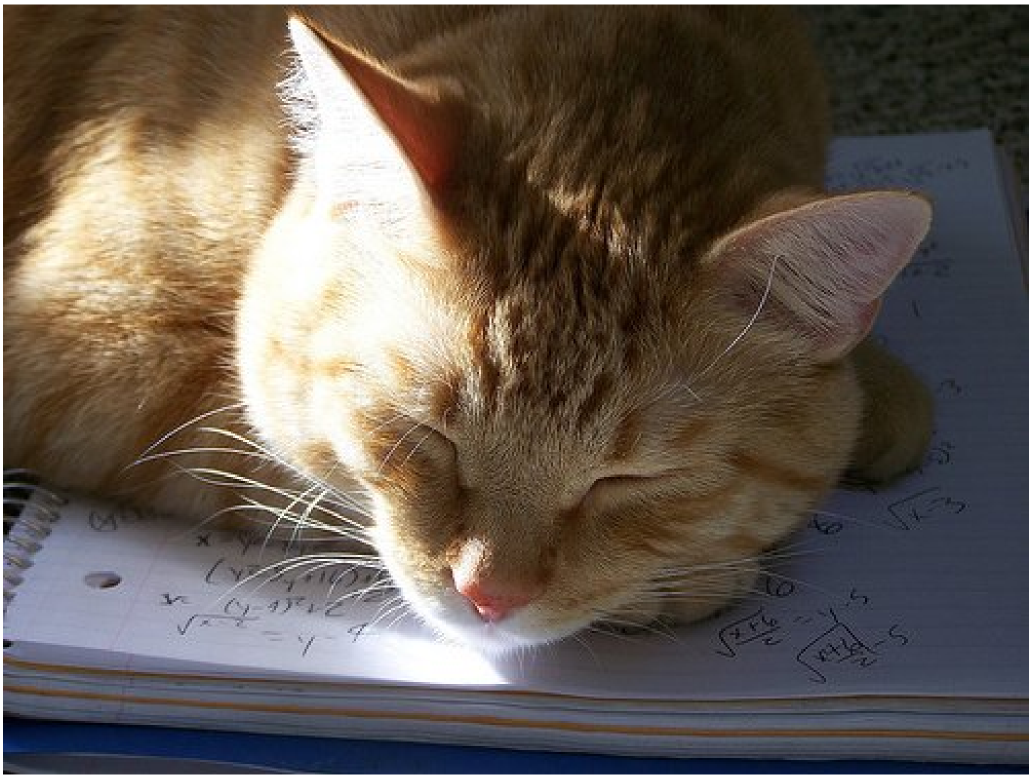
9.27. Verifica che il triangolo di vertici $A(-4;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(1;\ 6)$ è isoscele e calcola l'area. [17]

9.28. Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici $A(0;\ 4)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ -2)$. [5]

9.29. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(2;\ -3)$. [(2; 0)]

9.30. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(-3;\ 4)$, $B(-1;\ -3)$, $C(1;\ 5)$. [(-1; 2)]

Relazioni e funzioni III



"Ernest!"
Foto di Ssmallfry
http://www.flickr.com/photos/ssmallfry/2262374892/

Generalità sugli insiemi 10

10.1 Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure che sono detti *elementi* dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.

La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempio 10.1. Sono insiemi:

a) l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
b) l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
c) l'insieme delle città della Puglia con più di 15 000 abitanti;
d) l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
e) l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
f) l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1 000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:

- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:

- i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
- le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
- le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
- l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

In generale, gli insiemi si indicano con lettere maiuscole $A, B, C \dots$; gli elementi con lettere minuscole $a, b, c \dots$. Se un elemento a sta nell'insieme A si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Il simbolo "$\in$" si chiama simbolo di *appartenenza*.

Se un elemento b non sta nell'insieme A si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive $b \notin A$, si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo "$\notin$" si chiama simbolo di *non appartenenza*.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama *proprietà caratteristica*.

Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe: $A = \{a, b, c, d\}$.

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:

- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12, 34, 0, \overline{25} \ldots\}$.

Esempio 10.2. Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$$\text{lunedì} \in A, \text{martedì} \in A, \text{gennaio} \notin A, \text{giovedì} \in A, \text{dicembre} \notin A, \text{estate} \notin A.$$

Consideriamo l'insieme $A = \{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono *insiemi uguali*.

Definizione 10.1. Due insiemi A e B si dicono *uguali* se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli $A = B$. Due insiemi A e B si dicono *diversi* se non contengono gli stessi elementi: in simboli $A \neq B$.

10.2 Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

Consideriamo l'insieme $A = \{\text{consonanti della parola "AIA"}\}$. Poiché la parola "AIA" non contiene consonanti, l'insieme A è privo di elementi.

Definizione 10.2. Un insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto*, lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o $\{\ \}$.

❑ **Osservazione** $\{\ \} = \emptyset$ ma $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ dato che $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

Esempio 10.3. Alcuni insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto;

b) l'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto;

c) l'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

La frase «l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino» non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1C gli elementi saranno certamente diversi, probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama *Insieme Universo* e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale un insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente si indica con U l'insieme universo.

10.2.1 Cardinalità

Definizione 10.3. Si definisce cardinalità (o potenza) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Viene indicata con uno dei seguenti simboli $|A|$, $\#(A)$ o $\operatorname{card} A$.

Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempio 10.4. Esempi di cardinalità.

a) L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi $\operatorname{card} A = 5$;
b) l'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi $\operatorname{card} B = 3$.

10.3 Esercizi

10.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi

10.1 Insiemi ed elementi

10.1. Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi.

a) I fiumi più lunghi d'Italia;
b) le persone con più di 30 anni;
c) i numeri 1, 20, 39, 43, 52;
d) i libri più pesanti nella tua cartella;
e) i punti di una retta;
f) gli animali con 2 zampe;
g) le vocali dell'alfabeto italiano;
h) i professori bravi;
i) i gatti con due code;
j) i calciatori che hanno fatto pochi gol.

10.2. Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra "$\in$" e "$\notin$". A è l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano. b ... A, i ... A, j ... A, e ... A, w ... A, z ... A.

10.3. Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

$\boxed{\text{A}}$ sito $\boxed{\text{B}}$ micio $\boxed{\text{C}}$ zitto $\boxed{\text{D}}$ fiocco $\boxed{\text{E}}$ lecito $\boxed{\text{F}}$ dito.

10.4. Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali:

a) vocali della parola "SASSO";
b) consonanti della parola "SASSO";
c) vocali della parola "PIETRA";
d) vocali della parola "PASSO".

10.5. Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) i laghi d'Italia; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) le città vicine a Roma; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) i calciatori della Juventus; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) i libri di Mauro; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) i professori bassi della tua scuola; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) i tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) i tuoi compagni di classe che sono gentili; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) gli zaini neri della tua classe. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

10.6. Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra "$\in$" e "$\notin$".

a) La Polo ...... all'insieme delle automobili Fiat;
b) il cane ...... all'insieme degli animali domestici;
c) la Puglia ...... all'insieme delle regioni italiane;
d) Firenze ...... all'insieme delle città francesi;
e) il numero 10 ...... all'insieme dei numeri naturali;
f) il numero 3 ...... all'insieme dei numeri pari.

10.7. Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a) Essere città italiana il cui nome inizia per W; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) essere un bravo cantante; V F
c) essere un monte delle Alpi; V F
d) essere un ragazzo felice; V F
e) essere un numero naturale grande; V F
f) essere un ragazzo nato nel 1985; V F
g) essere gli alunni della classe 1ªC; V F
h) essere le lettere dell'alfabeto inglese; V F
i) essere le rette del piano; V F
j) essere i libri interessanti della biblioteca; V F
k) essere gli italiani viventi nati nel 1850; V F
l) essere gli italiani colti. V F

10.8. Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra "=" e "≠".

a) L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono . . . . . . ;
b) l'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono . . . . . . ;
c) l'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono . . . . . . ;
d) l'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono . . . . . . ;
e) l'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono . . . . . . ;
f) l'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono . . . . . . ;
g) l'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono . . . . . . ;
h) l'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono . . . . . . ;
i) l'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono . . . . . . ;
j) l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono . . . . . .

10.9. Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

10.2 Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

10.10. Indica se gli insiemi $G = \{\text{gatti con 6 zampe}\}$ e $P = \{\text{polli con 2 zampe}\}$ sono o non sono vuoti.

10.11. Barra con una croce gli insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri positivi minori di 0;
b) l'insieme dei numeri negativi minori di 100;
c) l'insieme dei numeri pari minori di 100;
d) l'insieme delle capitali europee della regione Lombardia;
e) l'insieme dei triangoli con quattro angoli;
f) l'insieme delle capitali italiane del Lazio
g) l'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

10.12. Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?

A $\emptyset$ B 0 C $\{\emptyset\}$ D $\{0\}$ E $\{\,\}$.

10.13. Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità.

a) L'insieme degli uccelli con 6 ali;
b) l'insieme delle lettere della parola "VOLPE";

c) l'insieme dei cani con 5 zampe;
d) l'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO";
e) l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano;
f) l'insieme degli abitanti della luna;
g) l'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino.

10.14. Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo.

a) l'insieme dei rettangoli;
b) l'insieme dei multipli di 3;
c) l'insieme delle lettere della parola "MATEMATICA";
d) l'insieme dei libri di matematica;
e) l'insieme dei ragazzi che hanno avuto un'insufficienza in matematica.

10.15. Dato l'insieme $A = \{0, 3, 5\}$ determina se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $0 \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $5 \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $\emptyset \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $\emptyset \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) $A \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $3, 5 \in A$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Rappresentazione degli insiemi 11

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

11.1 Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.

Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura: $X = \{1, 2, 3, 5\}$. Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X = \{1, 2, 3, 5\} = \{2, 1, 5, 3\}.$$

È invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola autunno, scriviamo

$$Y = \{a, u, t, n, o\}.$$

Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.

Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare:

$$X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}.$$

Esempio 11.1. Rappresentazione degli insiemi:

a) l'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: $G = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì}\}$;
b) l'insieme A delle lettere della parola "Associazione" si indica: $A = \{a, s, o, c, i, z, n, e\}$.

11.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.

Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come:

$$Y = \{x / x \text{ è un divisore di } 10\}$$

e si legge "Y è l'insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".

In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme. La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è $Y = \{1, 2, 5, 10\}$.

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme X dei naturali minori di 15 è:

$$X = \{x \in \mathbb{N} / x < 15\}$$

e si legge "X è l' insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".

L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'*insieme universo* definito precedentemente. Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

Esempio 11.2. Esempi di proprietà caratteristica:

a) l'insieme A delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare come:

$$A = \{r / r \text{ è una retta incidente a } t\}.$$

b) l'insieme B dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:

$$B = \{n \in \mathbb{N} / n > 100\}.$$

c) l'insieme P dei numeri pari può essere rappresentato come:

$$P = \{n \in \mathbb{N} / n = 2 \cdot m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}.$$

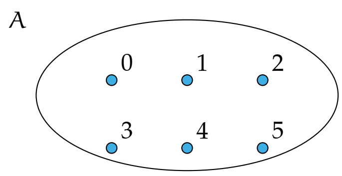
d) l'insieme C dei numeri interi relativi compresi tra -10 e $+100$, estremi inclusi:

$$C = \{n \in \mathbb{Z} / -10 \leqslant n \leqslant 100\}.$$

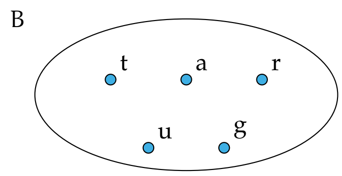
11.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche *rappresentazione di Eulero-Venn*[1] si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

Esempio 11.3. A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.



Esempio 11.4. B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", $B = \{t, a, r, u, g\}$.



[1] In onore dei matematici Leonhard Euler (1707-1783) e John Venn (1834-1923).

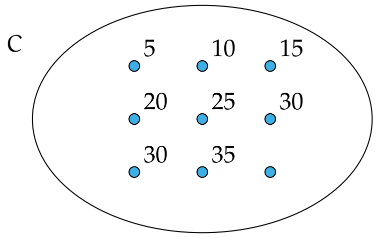
Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

Esempio 11.5. Rappresentare l'insieme C dei multipli di 5.

Per caratteristica: $C = \{n \in \mathbb{N} / n$ è multiplo di $5\}$ oppure $C = \{n \in \mathbb{N} / n = 5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

Tabulare: $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$. I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



11.4 Esercizi

11.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

11.1 Rappresentazione tabulare

11.1. Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme A dei numeri naturali minori di 6.

11.2. Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

a) delle vocali della parola "ESERCIZI";
b) delle lettere della parola "RIFLETTERE";
c) dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi;
d) dei numeri dispari compresi tra 10 e 20;
e) delle lettere dell'alfabeto italiano;
f) dei numeri naturali minori di 10;
g) dei multipli di 7;
h) delle preposizioni con più di due lettere.

11.3. Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$ ....
b) $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x < 5\}$ ....
c) $C = \{x \in \mathbb{N} / 5 \leqslant x \leqslant 10\}$ ....
d) $D = \{x \in \mathbb{N} / 2x \leqslant 10\}$ ....
e) $E = \{e \in \mathbb{N} / 5 \leqslant e < 10\}$ ....
f) $F = \{f \in \mathbb{N} / f$ è multiplo di 3 e $f < 15\}$ ....
g) $G = \{g \in \mathbb{N} / g$ è una cifra del numero 121231$\}$ ....
h) $H = \{h \in \mathbb{N} / h = 3n + 1,\ \text{con}\ n \in \mathbb{N}\}$ ....

11.4. Elenca per tabulazione gli elementi di $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x$ è pari, $x \leqslant 10, x \neq 0\}$.

11.5. Elenca per tabulazione gli elementi di $L = \{l$ è una lettera della parola MATEMATICA$\}$.

11.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

11.6. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme $D = \{S, T, U, D, I, A, R, E\}$.

$$D = \{x / x \text{ è } \ldots\}$$

11.7. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}.$$

$$X = \{x \in \mathbb{N} / x \ldots\}$$

11.8. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

11.9. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} / n$ è divisore di 12$\}$.

11.10. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} / n$ è multiplo di 3 minore di 20$\}$.

11.11. Dato l'insieme $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?

a) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è numero pari minore di $65\}$;
b) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è una potenza di $2\}$;
c) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è una potenza di 2 minore di $65\}$;
d) $A = \{n \in \mathbb{N} / n = 2^m,$ con $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

11.12. Indica con una proprietà caratteristica l'insieme $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.

11.13. Indica con una proprietà caratteristica l'insieme $B = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.

11.14. Quale delle seguenti frasi indica la proprietà caratteristica di $A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

$\boxed{\text{A}}$ I multipli di 2; $\boxed{\text{B}}$ i numeri pari; $\boxed{\text{C}}$ i multipli di 4; $\boxed{\text{D}}$ i divisori di 20

11.15. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 98, 99, 100\}$;
c) $C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

11.16. Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme

$$D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

a) $D = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 18\}$;
b) $D = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di 3 e $x < 20\}$;
c) $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3x\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3\}$.

11.17. Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica.

a) $A = \{$gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto$\}$;
b) $B = \{$Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine$\}$;
c) $C = \{$sabato, domenica$\}$;
d) $D = \{10, 20, 30, 40, 50\}$;
e) $E = \{$Puglia, Piemonte$\}$.

11.18. Individua una proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici.

a) $A = \{4, 9, 16, 25, \dots\}$;
b) $B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right\}$;
c) $C = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$;
d) $D = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots\right\}$;
e) $E = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \dots\right\}$;
f) $F = \{+1, -2, +4, -8, +16, -32, +64, \dots\}$.

11.19. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leqslant x < 2\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{N} / -4 \leqslant x \leqslant 1$ o $5 < x \leqslant 7\}$.

11.20. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;

b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$;
c) $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;
d) $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$;
e) $E = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$;
f) $F = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$.

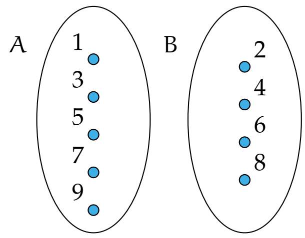
11.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

11.21. Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:

a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
b) delle note musicali;
c) dei numeri primi minori di 20;
d) delle consonanti della parola "MATEMATICA";
e) delle province della Toscana.

11.22. In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn, stabilisci quali affermazioni sono vere.

a) $5 \notin B$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $A = \emptyset$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $3 + 2 \in A$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $B \neq \emptyset$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $6 \in B$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $9 \notin A$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$



11.4.2 Esercizi riepilogativi

11.23. Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x/x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;
b) $B = \{x/x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C = \{x/x = 2n^2, n \in \mathbb{N}\}$;
d) $D = \{x/x = 2n + 2, n \in \mathbb{N}\}$;
e) $E = \{x/x = n^2 - n, n \in \mathbb{N}\}$;
f) $E = \{x/x = \dfrac{n+1}{n-1}, x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

11.24. Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica.

a) Insieme A dei divisori di 30;
b) insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10;
c) l'insieme C delle province della Puglia;
d) l'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

11.25. Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:

a) i numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000;
b) i colori dell'arcobaleno;
c) i numeri razionali maggiori o uguali a $2/7$;
d) i punti di una superficie S;
e) le lettere di cui è composto il tuo nome.

11.26. Rappresenta con una modalità a tua scelta l'insieme dei numeri interi multipli di 5 maggiori di 10 e minori di 100 che non sono dispari.

11.27. Dati gli insiemi: $X = \{8, 9, 10\}$, $Y = \{0, 8, 9, 10\}$, $H = \{10, 9, 8\}$, $W = \{w \in \mathbb{N} / 8 \leqslant w \leqslant 10\}$, $Z = \{z \in \mathbb{N} / 8 < z \leqslant 10\}$ e $J = \{j \in \mathbb{N} / 7 < j < 11\}$, individua le uguaglianze corrette.

a) $X = Y$;
b) $X = H$;
c) $W = H$;
d) $X = Z$;
e) $\operatorname{card} Z = 2$;
f) $X = J$.

11.28. Dati gli insiemi: $A = \{g, a, t, o\}$, $B = \{o, g, t, a\}$, $C = \{c/c$ è una lettera della parola "gatto"$\}$, $D = \{g, t\}$, $E = \{gatto\}$, $F = \{f/f$ è una consonante della parola "gatto"$\}$, segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

a) $A = B$;
b) $A = D$;
c) $A = C$;
d) $E = A$;
e) $C = E$;
f) $D = F$;
g) $C = D$:
h) $D = E$.
i) $\operatorname{card} C = 5$;
j) $\operatorname{card} E = 5$;

11.29. Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X = \{x \in \mathbb{N} / x - 1$ è pari $\}$ ....
b) $Y = \{y \in \mathbb{N} / y = 3n,$ con $n \in \mathbb{N}\}$ ....
c) $Z = \{z \in \mathbb{N} / z = 3n$ e z non è divisibile per $2, n \in \mathbb{N}\}$ ....
d) $W = \{w \in \mathbb{N} / w < 0\}$ ....

11.30. Quali delle seguenti scritture sono vere?

a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$ V F
b) $15 \in \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant 10\}$ V F
c) $7 \in \{n \in \mathbb{N} / n + 5 < 10\}$ V F
d) $l \notin \{x/x$ è una lettera della parola "scuola"$\}$ V F

11.31. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{1 + 3, 5 - 2, 1 + 1, 9 - 8, 1 - 1\}$;
b) $B = \{n \in \mathbb{N} / n < 5\}$;
c) $C = \{6 - 4, 6 + 4, 6 - 6\}$.

11.32. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leqslant x \leqslant 12\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3n$ con $1 \leqslant n \leqslant 4\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 13\}$;
d) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n$ con $n = 1, 2, 3, 4\}$.

12 Operazioni con gli insiemi

12.1 Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme A degli abitanti di Milano e l'insieme B degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme B sono anche elementi di A: si dice che B è sottoinsieme di A, si scrive $B \subseteq A$.

Nel caso in cui tutti gli elementi di Y siano elementi di X e tutti gli elementi di X siano elementi di Y si ha che $X = Y$, e Y si dice *sottoinsieme improprio* di X. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $Y = X$.

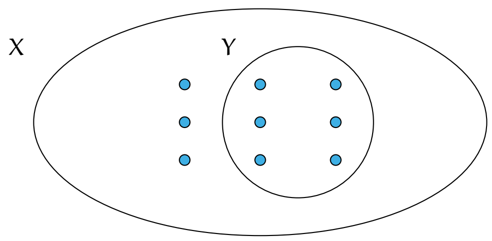
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset \subset X$. L'insieme vuoto è considerato un *sottoinsieme improprio* di qualunque insieme. Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.

Se Y è un sottoinsieme di X e X ha altri elementi oltre a quelli di Y si dice che Y è un *sottoinsieme proprio* di X e si scrive $Y \subset X$. La scrittura $A \subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A = B$ o $A \subset B$.

Definizione 12.1. Dati due insiemi X e Y, si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se ogni elemento di Y è anche elemento di X.

In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge "Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



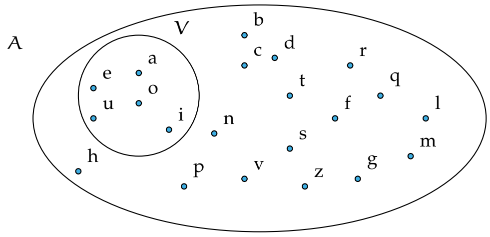
Se a è un elemento del sottoinsieme Y, allora lo sarà anche dell'insieme X:

$$\text{se } a \in Y \text{ e } Y \subseteq X, \text{ allora } a \in X.$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$. Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme X risulta $\emptyset \subseteq X$.

Esempio 12.1. Consideriamo l'insieme $X = \{$lettere della parola "autunno"$\}$ e l'insieme $Y = \{$lettere della parola "notaio"$\}$; possiamo affermare che "ogni" elemento di Y è anche elemento di X? La risposta è negativa: $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi Y non è sottoinsieme di X e si scrive $Y \not\subset X$.

Esempio 12.2. Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e V l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di A, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



Esempio 12.3. Sia $C = \{1\}$, allora C non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Esempio 12.4. Sia A l'insieme delle auto esposte in un autosalone e U l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che U è un sottoinsieme di A, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

12.2 Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme A possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di A.

Esempio 12.5. Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3\}$.

$\emptyset \subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}. Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}. L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$. In tutto 8 sottoinsiemi.

Definizione 12.2. Dato un insieme A, si chiama *insieme delle parti* l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e A quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di A.

Esempio 12.6. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Esempio 12.7. Dato l'insieme $A = \{a\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$.

Esempio 12.8. Dato l'insieme $B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$, $S_3 = \{\text{matita}\}$, $S_4 = \{\text{penna}\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Esempio 12.9. Dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$, $S_5 = \{3\}$, $S_6 = \{1, 2\}$, $S_7 = \{1, 3\}$, $S_8 = \{2, 3\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, , S_8\}$.

Riassumendo:

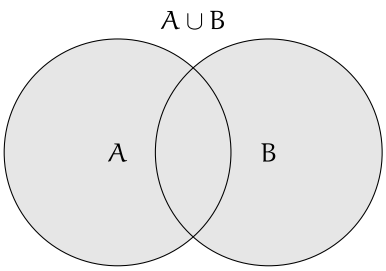
- se $A = \emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8.

Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

12.3 Insieme unione

Prendiamo l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari e l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari; allora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi $\mathbb{P}$ e $\mathbb{D}$.

Definizione 12.3. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme unione* l'insieme C, composto da tutti gli elementi appartenenti ad A o a B o a entrambi. In simboli: $C = A \cup B$, si legge "A unito a B" o "A unione B".

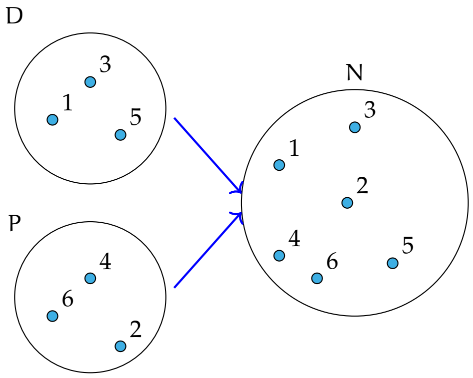


Mediante la proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cup B = \{x / (x \in A) \text{ o } (x \in B)\}$.

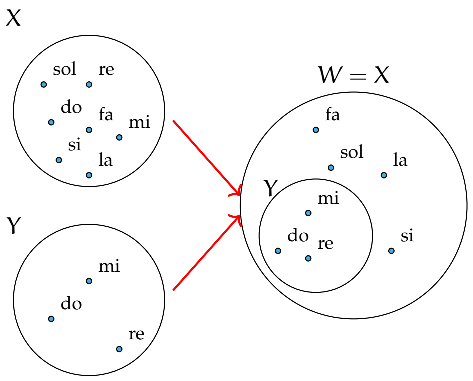
12.3.1 Proprietà dell'unione tra insiemi

a) $A \cup B = B \cup A$: proprietà *commutativa* dell'unione;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: proprietà *associativa* dell'unione;
c) se $B \subset A$, allora $A \cup B = A$;
d) $A \cup \emptyset = A$;
e) $A \cup A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'unione.

Esempio 12.10. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Esempio 12.11. Siano $X = \{$do, re, mi, fa, sol, la, si$\}$ e $Y = \{$do, re, mi$\}$, allora, poiché $Y \subset X$, $W = X \cup Y = X = \{$do, re, mi, fa, sol, la, si$\}$.

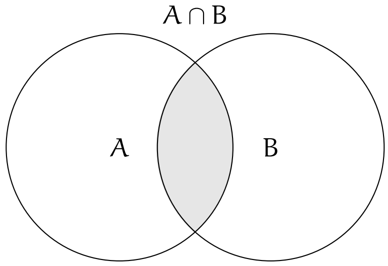


12.4 Insieme intersezione

Esempio 12.12. Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

- L'insieme degli elementi di A che stanno in B è $\{$m, a, t, e, i$\}$;
- l'insieme degli elementi di B che stanno in A è $\{$m, a, t, e, i$\}$;
- l'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è $\{$m, a, t, e, i$\}$.

Definizione 12.4. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme intersezione* di A e B, l'insieme C composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C = A \cap B$, che si legge "A intersecato a B" o "A intersezione B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cap B = \{x/(x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$, ossia se A e B non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono *disgiunti*.

12.4.1 Proprietà dell'intersezione tra insiemi

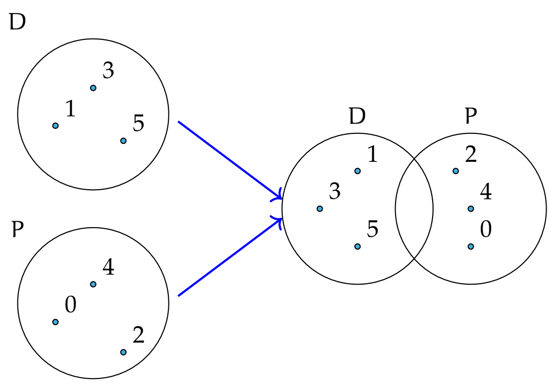
a) $A \cap B = B \cap A$: proprietà *commutativa* dell'intersezione;
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: proprietà *associativa* dell'intersezione;
c) Se $B \subset A$, allora $A \cap B = B$;
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
e) $A \cap A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'intersezione;
f) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

12.4.2 Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: proprietà *distributiva* dell'intersezione rispetto l'unione;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: proprietà *distributiva* dell'unione rispetto l'intersezione.

Esempio 12.13. Siano $X = \{\text{do, re, mi. fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$. Allora poiché, $Y \subset X$, si ha: $W = X \cap Y = Y = \{\text{do, re, mi}\}$.

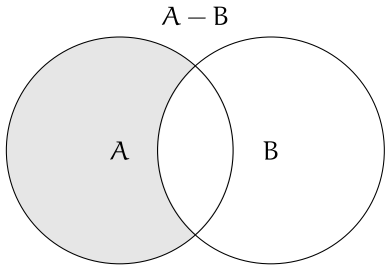
Esempio 12.14. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cap D = \emptyset$.



12.4.3 Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi A e B formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: A ={a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z} e B ={b, c, d, f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z}, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme A ma non in B formano un nuovo insieme chiamato insieme *differenza*.

Definizione 12.5. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme differenza* l'insieme C, composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B. In simboli: $C = A - B$ che si legge "A differenza B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A - B = \{x/(x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.

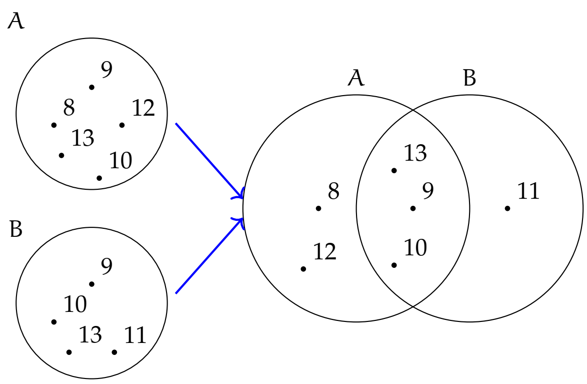
12.4.4 Proprietà della differenza tra insiemi

a) Se $A \cap B = \emptyset$, ossia sono disgiunti allora $A - B = A$, e $B - A = B$;
b) se $B \subset A$, ossia B è sottoinsieme proprio di A allora $B - A = \emptyset$;
c) $A - A = \emptyset$;
d) $A - \emptyset = A$.

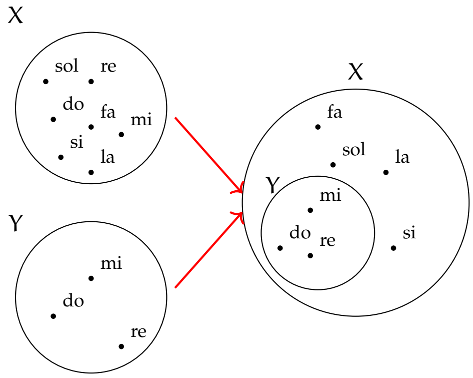
Esempio 12.15. Siano $A = \{8, 9, 10, 12, 13\}$ e $B = \{9, 10, 11, 13\}$ allora $C = A - B = \{8, 12\}$ e $D = B - A = \{11\}$.

Poiché $A - B \neq B - A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempio 12.16. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4\}$. I due insiemi sono disgiunti $P \cap D = \emptyset$ allora $D - P = \{1, 3, 5\} = D$ e $P - D = \{0, 2, 4\} = P$.



Esempio 12.17. Siano $X = \{$do, re, mi, fa, sol, la, si$\}$ e $Y = \{$do, re, mi$\}$ allora poiché $Y \subset X$, $W = X - Y = \{$fa, sol, la, si$\}$.



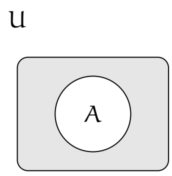
12.5 Insieme complementare

Sia $W = \{$sabato, domenica$\}$ l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per "dì". L'insieme W può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana $G = \{$lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica$\}$. L'insieme degli elementi di G che non appartengono a W forma un insieme che chiameremo *complementare* di W rispetto a G. L'insieme G invece si dice in questo caso insieme *universo*. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A = \{x \in N / x \leqslant 100\}$, N è l'insieme universo di A.

Definizione 12.6. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono A come sottoinsieme si dice *insieme universo* o *insieme ambiente*.

Definizione 12.7. Dato l'insieme A e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A si dice *insieme complementare* di A rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $\complement_U A$.

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte in grigio è il complementare di A rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$. Come si può vedere dal disegno, essendo $A \subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.

Esempio 12.18. Insiemi complementari.

a) Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$;
b) Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme C delle consonanti: $\overline{V}_U = C$;

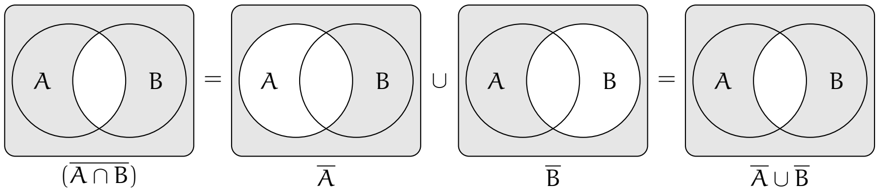
c) Dati gli insiemi $U = \{x \in N/1 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in N/1 \leqslant x \leqslant 5\}$, poiché $B \subset U$ si può determinare $\overline{B}_U = \{x \in N/6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

12.6 Leggi di De Morgan

Dati due insiemi A e B ci sono alcune proprietà, dette *leggi di De Morgan* che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: Prima legge di De Morgan;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: Seconda legge di De Morgan.

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.



12.7 Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce - Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3, 2\}$ e $\{2, 3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una *coppia ordinata* di numeri.

Definizione 12.8. Un insieme di due elementi a e b presi in un certo ordine si dice *coppia ordinata*. Se il primo elemento della coppia è a ed il secondo è b si scrive: (a, b).

Definizione 12.9. Dati due insiemi A e B non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B. In simboli: $A \times B$ che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in B\}$. Nel caso in cui $B = A$, il prodotto cartesiano diventa $A \times A = A^2 = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Esempio 12.19. Sia $C = \{x, y, z\}$, il prodotto cartesiano $C \times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$.

12.7.1 Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

a) $A \times \emptyset = \emptyset$;
b) $\emptyset \times A = \emptyset$;
c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 12.20. Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$.

Si può notare che $A \times B \neq B \times A$.

Poiché $A \times B \neq B \times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

12.7.2 Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

Tabulazione delle coppie ordinate Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di A con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di A con tutti gli elementi di B e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}.$$

Diagramma a frecce Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.

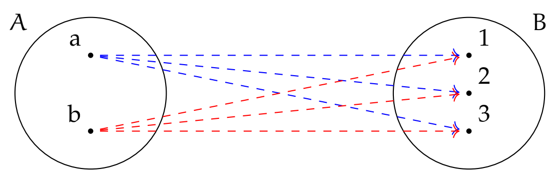


Tabella a doppia entrata Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

		B		
		1	2	3
A	a	(a;1)	(a;2)	(a;3)
	b	(b;1)	(b;2)	(b;3)

Diagramma cartesiano Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate *assi cartesiani*. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

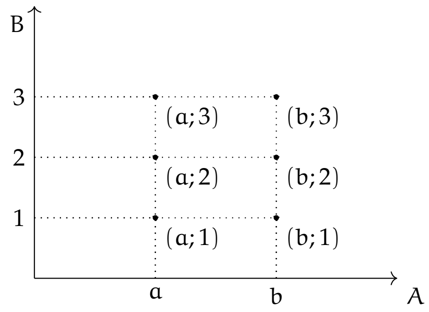
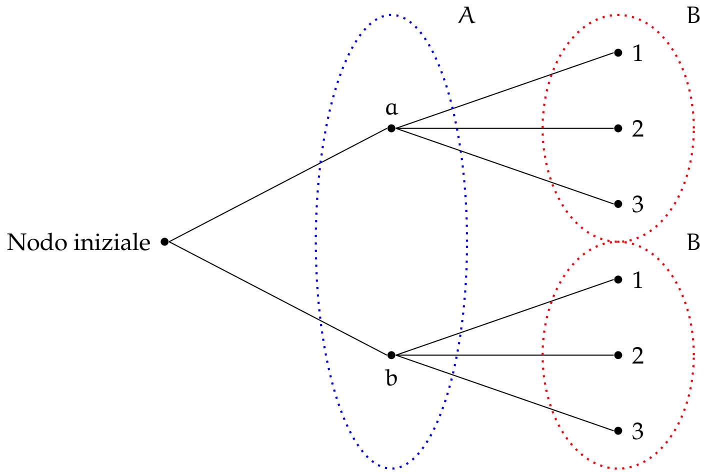


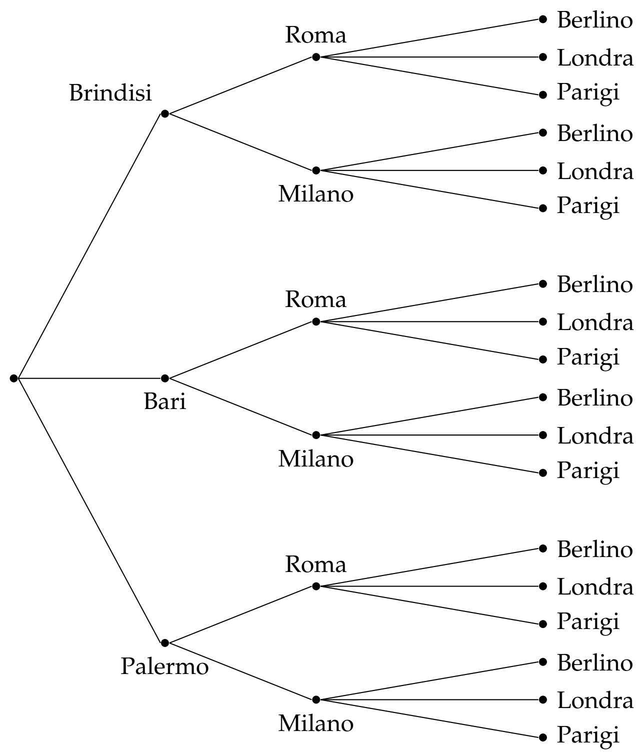
Diagramma ad albero È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.

Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



Esempio 12.21. Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P = \{\text{Brindisi}, \text{Bari}, \text{Palermo}\}$ l'insieme delle città di partenza, $S = \{\text{Roma}, \text{Milano}\}$ l'insieme delle città di scalo e $A = \{\text{Parigi}, \text{Berlino}, \text{Londra}\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P \times S \times A$. Rappresentiamo $P \times S \times A$ tramite un diagramma ad albero:



12.8 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

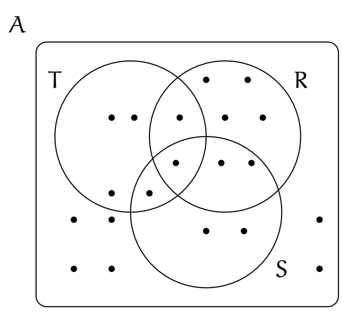
Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Esempio 12.22. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano

a) *nessuno* dei balli indicati?
b) *almeno uno* dei balli tango, samba, rumba?
c) *almeno* il samba?
d) *solo* la rumba?
e) la rumba *e* il tango?
f) *tutti* i balli indicati?



Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno. Si ha card $A = 20$.

Rispondiamo ora alle altre domande.

a) Quanti tra loro ballano *nessuno* dei balli indicati? Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme A, ma in nessuno degli insiemi R, S,T quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme A, dunque $\text{card}(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.

b) Quanti tra loro ballano *almeno uno* dei balli tra tango, samba, rumba? Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $\text{card}(R \cup S \cup T) = 14$.

c) Quanti tra loro ballano *almeno* il samba? Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme S, quindi card $S = 6$.

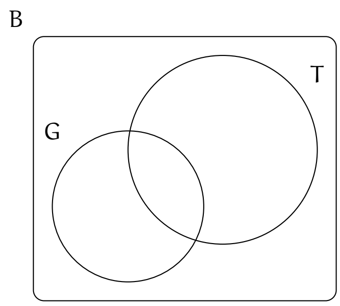
d) Quanti tra loro ballano *solo* la rumba? Nell'insieme R sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme R gli elementi che stanno in S o in T: $\text{card}(R - (T \cup S)) = 4$.

e) Quanti tra loro ballano la rumba *e* il tango? Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap T) = 2$.

f) Quanti tra loro ballano *tutti* i balli indicati? Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap S \cap T) = 1$.

Esempio 12.23. A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?

Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con B l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che $\text{card}(G) = 7$, $\text{card}(G \cap T) = 3$, $\text{card}(T - G) = 3$ e $\text{card}(B - (G \cup T)) = 2$.



Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

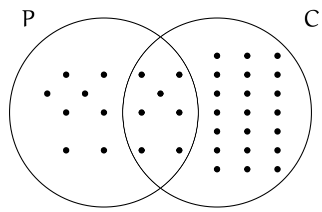
Esempio 12.24. Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi P e C sono disgiunti: $P \cap C = \emptyset$. Quindi: $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) = 15 + 28 = 43$.

Esempio 12.25. Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$ e $\text{card}(P \cap C) = 7$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

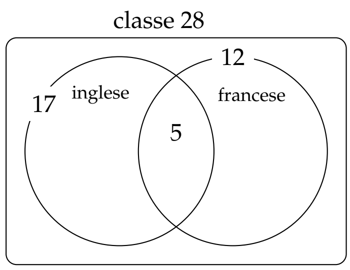
Soluzione $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) - \text{card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$.

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti A e B la cardinalità dell'insieme $A \cup B$ è data dalla seguente formula: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Esempio 12.26. A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso *non* sono $17 + 12 = 29$, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono $17 + 12 - 5 = 24$. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono $28 - 24 = 4$.

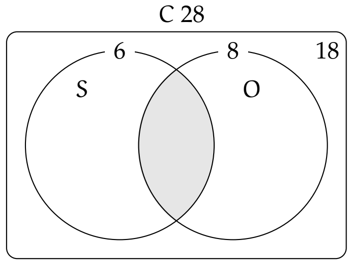


Esempio 12.27. Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi.

Gli elementi di $\overline{S \cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.



L'insieme $S \cup O$ è quindi costituito da $28 - 18 = 10$ elementi.
Ricordiamo che

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(S \cup O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cap O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cup O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = 6 + 8 - 10 = 4. \end{aligned}$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

12.9 Esercizi

12.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

12.1 Sottoinsieme

12.1. Siano $T = \{t/t \text{ un triangolo}\}$, $R = \{r/r \text{ un rettangolo}\}$, $E = \{e/e \text{ un triangolo equilatero}\}$. Quale affermazione è vera?

a) $R \subset T$; b) $E \subset T$; c) $E \subset R$; d) $T \subset E$.

12.2 Insieme delle parti

12.2. Se $A = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x < 3\}$, allora $\wp(A)$ ha:

$\boxed{\text{A}}$ 2 elementi, $\boxed{\text{B}}$ 3 elementi, $\boxed{\text{C}}$ 4 elementi, $\boxed{\text{D}}$ 8 elementi

12.3. Considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N}/1 < x < 5\}$ e $\wp(B)$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

a) $\{1\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $\emptyset \subset \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $\{2, 5\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $\{\emptyset\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) $0 \in \emptyset$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $\emptyset \subseteq B$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) $\{1, 2, 3\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) $\{1, 2, 3\} \notin \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

12.4. Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{8, 10\}, \{8\}, \{10\}\}$.

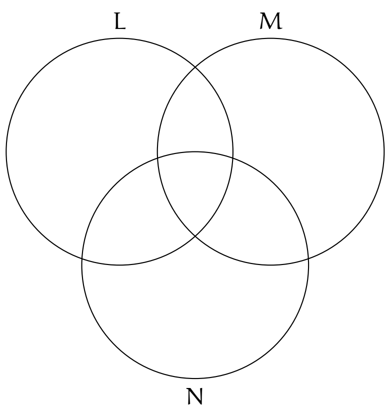
12.5. Dato $H = \{h/h \text{ è una lettera della parola “MAMMA”}\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

12.6. Dato $A = \{x \in \mathbb{N}/n < 5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

12.3 Insieme unione

12.7. Dati $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

12.8. Dati gli insiemi $L = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{4, 5, 6, 7, 10\}$ e $N = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



12.9. Dati gli insiemi C delle lettere della parola "GIARDINO" e D delle lettere della parola "ORA", determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

12.4 Insieme intersezione

12.10. Dati $A = \{1,2,4,5\}$ e $B = \{1,3,4,5,8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

12.11. Dati gli insiemi C delle lettere della parola "LIBRO" e D delle lettere della parola "PASTA" determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

12.12. Considerando i 3 insiemi $S = \{a, b, c, e, f, s, t\}$, $T = \{a, c, g, h, l, s\}$ e $U = \{b, c, d, g, s, t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

12.13. Determina l'intersezione tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$; $A \cap B = \dots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 7\}$; $B \cap A = \dots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -15 \leqslant x < 3\}$; $A \cap B = \dots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 20\}$; $B \cap A = \dots$
e) $A = \{l$ lettera di "SATURNO"$\}$, $B = \{l$ lettera di "NETTUNO"$\}$; $A \cap B = \dots$

12.4.3 Insieme differenza

12.14. Dati gli insiemi $E = \{x / x$ è una lettera della parola "cartellone"$\}$ e $F = \{x / x$ è una lettera della parola "martello"$\}$, determina $E - F$ e $F - E$.

12.5 Insieme complementare

12.15. Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che

a) $\overline{A}_U \cup A = U$;
b) $(A - B) \cup (B - A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$.

12.16. Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E \cap F}$ è uguale a:

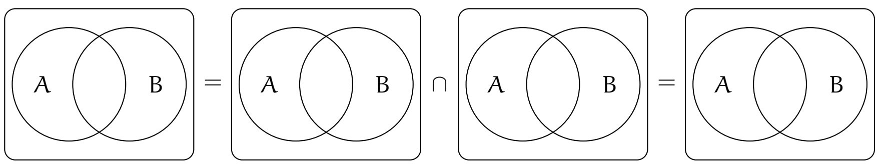
$\boxed{A}$ $E \cup F$ $\boxed{B}$ $\overline{E \cup F}$ $\boxed{C}$ $E \cap F$ $\boxed{D}$ $\overline{E} \cup \overline{F}$

12.17. Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G \cup H}$ è uguale a:

$\boxed{A}$ $\overline{G \cap H}$ $\boxed{B}$ $\overline{G} \cap \overline{H}$ $\boxed{C}$ $\overline{G \cap \overline{H}}$ $\boxed{D}$ nessuno dei precedenti

12.6 Leggi di De Morgan

12.18. Dimostra la seconda legge di De Morgan, annerendo gli spazi opportuni.



$(\overline{A \cup B})$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

12.7 Prodotto cartesiano fra insiemi

12.19. Sia $E = \{x \in N / 1 \leqslant x < 3\}$, $F = \{x/x$ è una vocale della parola "TELEFONO"$\}$ e $G = \{x \in N/x < -6\}$. Allora:

a) $E = \{1, \ldots\ldots\ldots\ldots\};$
b) $F = \{e, \ldots\ldots\ldots\ldots\};$
c) $G = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\};$
d) $E \times F = \{(1; e), \ldots\ldots\ldots\ldots\};$
e) $F \times E = \{(e; 1), \ldots\ldots\ldots\ldots\};$
f) $F \times G = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\};$
g) $G \times E = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$

12.20. Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$, dove A ha 6 elementi, B ne ha 3:

$\boxed{A}$ 9 $\boxed{B}$ 18 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ Non si può sapere.

12.21. Sapendo che $E \times F = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z)\}$, indica gli elementi di E e di F:

a) $E = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\};$ b) $F = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$

12.22. Se $A \times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti A e B?

$\boxed{A}$ 1; 5 $\boxed{B}$ 3; 2 $\boxed{C}$ 6; 1 $\boxed{D}$ 2; 3.

12.23. Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{-2, 1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A \times B$ ed elencane gli elementi.

12.24. Dato $A = \{0, 1, 2\}$ calcola $A \times A$.

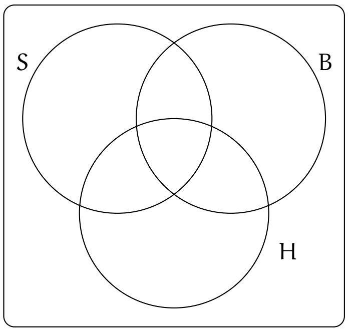
12.8 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

12.25. La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

a) Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98;
b) 6 frequentano tutti e tre i corsi;
c) 37 frequentano il corso di Salsa;
d) 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop;
e) 7 solo i corsi Salsa e Break Dance;
f) 9 almeno Hip Hop e Break Dance;
g) 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?
Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

"Step" 98



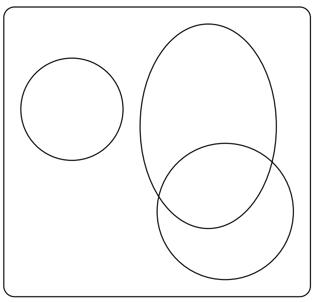
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, B l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

12.26. Il club "Argento vivo" ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

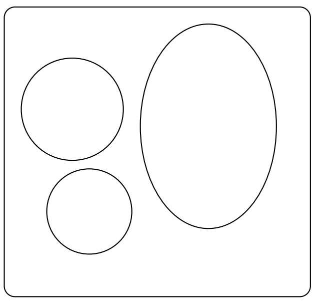
12.27 (*). In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:

a) che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
b) iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
c) che frequentano il corso di violino sono 46;
d) che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

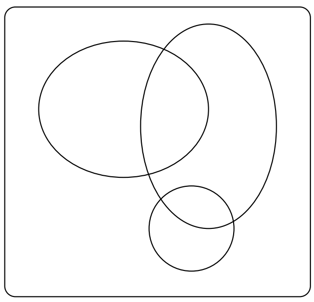
Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



A



B



C

12.28 (*). I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno ballato, cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia?

12.29 (*). Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

a) Quante persone bevono una sola bevanda?
b) quante bevono almeno una bevanda?
c) quante sono le persone intervistate?

12.30 (*). In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco?

12.31. In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 3 non frequentano alcun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanto allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

12.32. In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn, assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

12.33. In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

12.34 (Test di ammissione a architettura 2008). Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?

$\boxed{A}$ 13 $\boxed{B}$ 9 $\boxed{C}$ 16 $\boxed{D}$ 22 $\boxed{E}$ 6

12.35 (Test di ammissione a medicina 2008). In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:

$\boxed{A}$ $N > 14$ $\boxed{B}$ $N < 14$ $\boxed{C}$ $N > 22$ $\boxed{D}$ $N = 22$ $\boxed{E}$ $N \geqslant 14$

12.36. In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

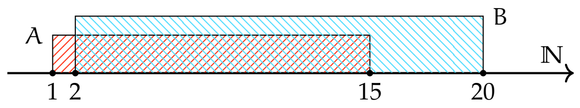
12.37. In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

12.38. In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo

Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

12.9.2 Esercizi riepilogativi

12.39. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \not\subset A$

12.40. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è pari e $(1 \leqslant x \leqslant 20)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di 6 e $(2 \leqslant x \leqslant 18)\}$. Quale affermazione è vera?

$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \subset A$

12.41. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 20\}$. Quali delle seguenti affermazioni è vera:

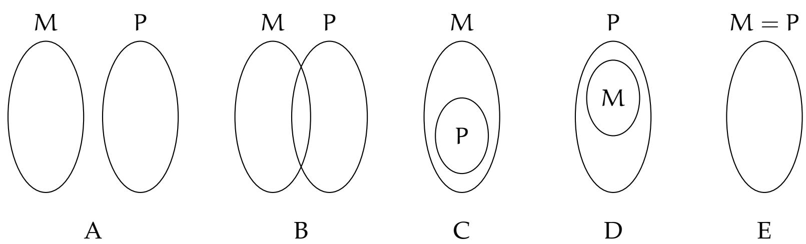
$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \not\subset A$

12.42. Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme C ={a, e, i, o, u}.

12.43. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di A.

12.44. Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica. Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.

a) $M \subset P$	A	B	C	D	E
b) $P \supseteq M$	A	B	C	D	E
c) $M \subseteq (M \cup P)$	A	B	C	D	E
d) $M \not\subset P$	A	B	C	D	E
e) $P \subset (P \cup M)$	A	B	C	D	E
f) $M \neq P$	A	B	C	D	E



12.45. Determina l'unione tra i seguenti insiemi.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N}/2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 7\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-15 \leqslant x < 3\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/10 < x < 20\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots$;
e) $A = \{l$ lettera di SATURNO$\}$, $B = \{l$ lettera di NETTUNO$\}$.$A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots$

12.46. Sia M_3 l'insieme dei multipli 3 e M_4 l'insieme dei multipli di 4, in generale M_n l'insieme dei multipli del numero n.

a) Calcola $M_3 \cap M_4$. Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
b) calcola $M_6 \cap M_4$. Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
c) calcola $M_{60} \cap M_{48}$;
d) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli $M_m \cap M_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

12.47. Sia D_4 l'insieme dei divisori di 4 e D_6 l'insieme dei divisori di 6, in generale D_n l'insieme dei divisori del numero n.

a) Calcola $D_4 \cap D_6$. Si tratta di $D \dots$ l'insieme dei divisori di $\dots$;
b) calcola $D_{60} \cap D_{48}$;
c) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli $D_m \cap D_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

12.48. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \frac{3}{2}\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

12.49. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 0\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

12.50. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -5 < x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

12.51. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x \leqslant 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

12.52. Dato l'insieme $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32\}$ e il suo sottoinsieme B dei multipli di 3, determina gli insiemi $A - B$ e $B - A$.

12.53. Dato l'insieme $X = \{x \in N/10 \leqslant x \leqslant 100\}$ e $Y = \{y \in N/10 < y < 100\}$ determina $X - Y$ e $Y - X$.

12.54. Determina la differenza tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A - B = \dots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N}/2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 7\}$. $B - A = \dots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-15 \leqslant x < 3\}$. $A - B = \dots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/10 < x < 20\}$. $B - A = \dots$;
e) $A = \{l$ lettera di SATURNO$\}$, $B = \{l$ lettera di NETTUNO$\}$. $A - B = \dots$

12.55. Dati gli insiemi C e D tali che $C \subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D - C =$
b) $D \cap \overline{C} =$
c) $\overline{C \cap D} =$
d) $C \cup \overline{C} =$
e) $C - D =$
f) $C \cap \overline{C} =$

12.56. Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X \cap \overline{Y}}$:

a) $\overline{X} \cup \overline{Y}$ b) $\overline{X} \cap \overline{Y}$ c) $\overline{X} \cup Y$ d) $X \cup \overline{Y}$

12.57. Esegui le operazioni indicate $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 6, 9\}$
b) $A =$ {a,e,i,o,u} $B =$ {a,b,c,d,e}
c) $A = \emptyset$ $B = \{0\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è pari$\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è dispari$\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $2\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $4\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leqslant x \leqslant 8\}$
g) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è lettera di casa$\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è lettera di caserma$\}$

12.58. Dato $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $2\}$ determina $\complement_{\mathbb{N}} A$.

12.59. Dato $A = \{I, II, III\}$ e $B = \{a, b\}$ determina $A \times B$.

12.60. Dato $B = \{1, 2, 3\}$ calcola $(B \cup B) \cap B$.

12.61. $A =$ {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, $B =$ {3, 6, 9, 12, 15, 18}, $C =$ {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} calcola $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

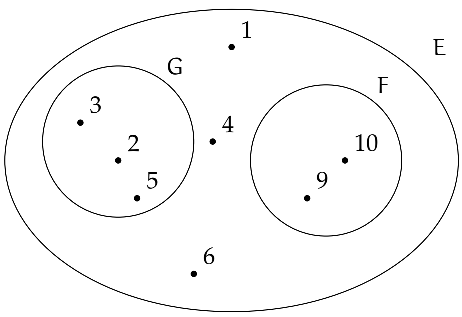
12.62. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / -3 < x \leqslant 2\}$ calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $\complement_A B$, $A \times (A \cap B)$ e $\wp(B - A)$.

12.63. Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio.

a) $A \cup B = A$;
b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;
c) se x è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4;
d) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cup B = 7$;
e) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cap B = 2$.

12.64. In base alla figura rispondi alle domande:

a) L'insieme E ha 5 elementi	V	F
b) $2 \in E$	V	F
c) $3 \notin G$	V	F
d) $F \subset G$	V	F
e) $F \subset E$	V	F
f) $\emptyset \subseteq G$	V	F
g) $\mathrm{card}(E) = 8$	V	F
h) $10 \in E$	V	F
i) $F \cap E = F$	V	F
j) $F \cup G = E$	V	F
k) $(E - F) - G = \{1, 4\}$	V	F



12.65. Dato l'insieme $A = \{0; 1; 5; 6; 9\}$ stabilisci quali dei seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

a) $B = \{1; 5; 6\}$ $B \ldots\ldots\ldots A$

b) $C = \{0; 1; 3; 5\}$ $C \ldots\ldots\ldots A$

c) $D = \{\}$ $D \ldots\ldots\ldots A$

d) $E = \{0\}$ $E \ldots\ldots\ldots A$

e) $F = \{5; 6; 7\}$ $F \ldots\ldots\ldots A$

f) $G = \{6; 0; 1; 5; 9\}$ $G \ldots\ldots\ldots A$

12.66. Siano dati i seguenti insiemi $C = \{x/x$ è una lettera della parola "REMARÈ'$\}$, $D = \{x/x$ è una lettera della parola "VOLARÈ'$\}$, $E = \{x/x$ è una lettera della parola "AMARÈ'$\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

$\boxed{\text{A}}$ $D \subseteq C$ $\boxed{\text{B}}$ $D \not\subset E$ $\boxed{\text{C}}$ $C = E$ $\boxed{\text{D}}$ $E \supseteq C$

12.67. Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d.
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A.
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A.
$B \subset A$	L'insieme B è ...... nell'insieme A, ovvero B è un ...... di A.
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A.
....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B.
$D = A \cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi A e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L = \complement_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra A e B.

12.68. Rappresenta graficamente l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}/x \leqslant 25$ e x è pari$\}$ e $B = \{x \in N/x \leqslant 27$ e x è multiplo di $4\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$.

12.69. Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo $\subset$ viene sostituito con $\subseteq$?

12.70. Dato $A = \{do, re, mi\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$.

12.71. Considerato l'insieme $X = \{a, c, d, t, o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\{x/x$ è una vocale della parola "CAROTA"$\} \subset X$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $\{a, t\} \not\subset \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) $\{a, t\} \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) $0 \in X$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

e) $\emptyset \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

f) $X \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

12.72. Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$;
b) $L \cap D$;
c) $\overline{L \cup D \cup S}$;
d) $L - S$;
e) $\overline{L} \cap S$;
f) $\overline{L \cap D \cap S}$.

12.73. Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

[A] 49 [B] 64 [C] 128 [D] 7 [E] 14

12.74. Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{\text{Mauro}\}, \{\text{Mario}\}\{\text{Mauro, Mario}\}\}$.

12.75. Se $A \cup B = B$ cosa puoi dire di A e B?

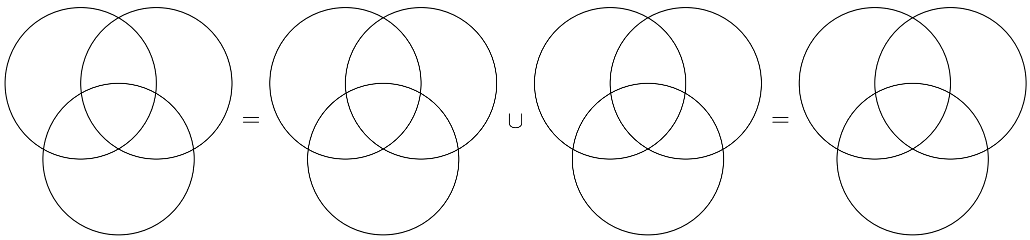
[A] $B \subseteq A$ [B] $A \notin B$ [C] $A \subseteq B$ [D] $A \subset B$ [E] $A \cap B = \emptyset$

12.76. Dati gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, $B = \{20, 30, 50\}$, determina un insieme C tale che:

a) $B \cup C = A$;
b) $A \cap C = B$;
c) $C \cup C = B$;
d) $C \cap C = A$.

12.77. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant\ 10$ e x pari$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant\ 20$ e x divisibile per $4\}$, $C = \{1, 2\}$ determina $(A \cap B)xC$.

12.78. Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.

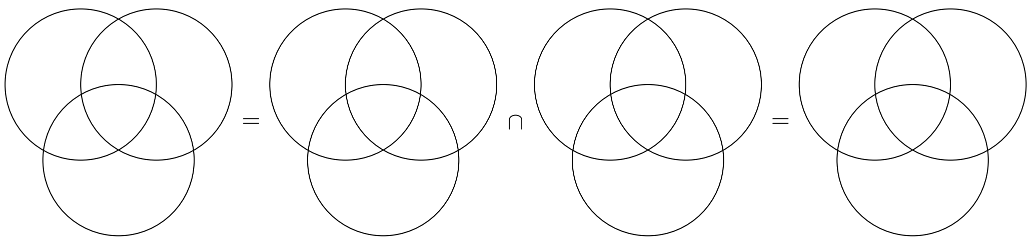


$X \cap (Y \cup Z)$ $X \cap Y$ $X \cap Z$ $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

12.79. Se $E - F = E$ cosa puoi dire di E e F?

[A] $E \cup F = E$ [B] $E = F$ [C] $E \subseteq F$ [D] $F \subset E$ [E] $E \cap F = \emptyset$

12.80. Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



... ...

12.81. Dati i seguenti insiemi $A = \{x \in N / x \leqslant 25\}$, $B = \{x \in N / 4 < x \leqslant 9\}$, $C = \{x \in N / x < 25\}$ e $D = \{x \in N / x > 7\}$. Scegli fra i seguenti i loro complementari.

a) $E = \{x \in N / x \geqslant 25\}$;
b) $F = \{x \in N / x \leqslant 6\}$;
c) $G = \{x \in N / x > 25\}$;
d) $H = \{x \in N / x < 7\}$;
e) $I = \{x \in N / x < 4 \text{ e } x \geqslant 8\}$;
f) $L = \{x \in N / x < 4 \text{ o } x \geqslant 10\}$;
g) $M = \{x \in N / x \leqslant 4 \text{ e } x \geqslant 9\}$.

12.82. Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

$\boxed{A}$ multipli di 4 $\boxed{B}$ multipli di 3 $\boxed{C}$ multipli di 6 $\boxed{D}$ numeri primi

12.83 (*). In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

a) quanti allievi hanno debito in entrambe le materie;
b) quanti allievi hanno almeno un debito;
c) quanti allievi non hanno debito in italiano;
d) quanti allievi non hanno debito in matematica.

12.84. Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei:

a) quadrati;
b) rombi;
c) trapezi;
d) triangoli equilateri;
e) poligoni;
f) cerchi;
g) parallelogrammi.

12.85. Dati gli insiemi $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $B = \{x / x \in \mathbb{N}, 5 < x \leqslant 16\}$, $C = \{x / x \in \mathbb{N}, x \geqslant 7\}$ determina:

a) $A \cup B \cup C$;
b) $A \cap B \cap C$;
c) $(A \cup B) \cap C$;
d) $(B \cap C) \cup A$.

12.86. Dato $A = \{x / x \text{ è un numero naturale, } x \text{ è pari e } x > 12\}$ determina l'insieme complementare di A.

12.87. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

12.88. $A = \{x / x \text{ è divisore di } 12\}$, $B = \{x / x \text{ è divisore di } 6\}$, $C = \{x / x \text{ è divisore di } 15\}$, determina:

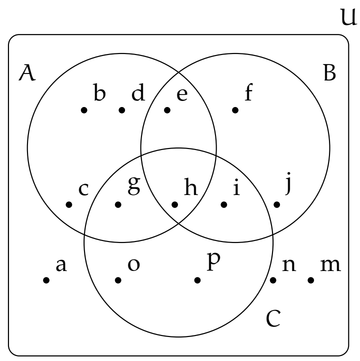
a) $A \cup B$;
b) $A \cup C$;
c) $A \cup B \cup C$;
d) $A \cap B$;
e) $B \cap C$;
f) $A \cap C$;
g) $A \cap B \cap C$;
h) $A \cap (B \cup C)$.

12.89. Dato l'insieme $U = \{x / x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant 5\}$:

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri A e B di U tali che $A \cap B = \emptyset$;
c) determina $A \cup B$ e $A - B$, dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

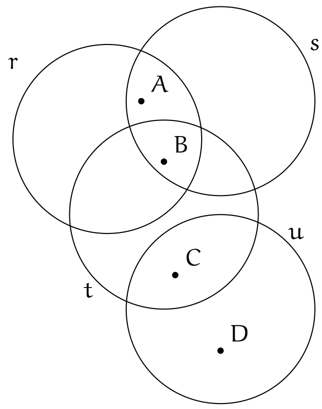
12.90. In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A \cup B$;
b) $\overline{A \cup B \cup C}$;
c) $A \cap B$;
d) $B \cap C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $A \cap (B \cup C)$;
g) $A \cup (B \cap C)$;
h) $B \cap \overline{C}$;
i) $(A \cup B) - C$;
j) $B \cap \overline{C}$
k) $C - (A \cap B)$;
l) $\overline{(A \cup B)} - C$.



12.91. Determina l'insieme $\wp(A)$, insieme delle parti di A, dove A è l'insieme delle lettere della parola "NONNA".

12.92. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi r, s, t sono rette, gli elementi A, B, C, D sono punti. Dai una rappresentazione geometria, rappresentando le rette e che corrispondono alla seguente situazione.



12.9.3 Risposte

12.27 3; A

12.28 22.

12.29 a) 1048, b) 1279, c) 1350.

12.30 36; 84.

12.84 a) 16, b) 20, c) 10, d) 14.

13 Identità, equazioni

13.1 Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) "cinque è uguale alla differenza tra sette e due";
b) "la somma di quattro e due è uguale a otto";
c) "il doppio di un numero naturale è uguale alla differenza tra nove e il numero stesso";
d) "la somma di due numeri interi è uguale a dieci".

Notiamo che sono tutte costruite con il predicato "essere uguale a". Riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) $5 = 7 - 2$; b) $4 + 2 = 8$; c) $2x = 9 - x$; d) $x + y = 10$.

Notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.

Le formule del primo tipo si dicono *chiuse* e di esse si può subito stabilire se sono vere o false; così in $\mathbb{N}$ la formula $5 = 7 - 2$ è vera, mentre $4 + 2 = 8$ è falsa.

Definizione 13.1. Le *formule chiuse* costruite con il predicato «essere uguale» si chiamano *uguaglianze*; stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio 13.1. La formula chiusa $1 - 6 = -5$ è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono *aperte*; le variabili che compaiono sono chiamate *incognite*. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.

Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio 13.2. Nella formula $2x = 9 - x$ sostituiamo alla variabile x il valore 0; otteniamo: $2 \cdot 0 = 9 - 0 \Rightarrow\ 0 = 9$, falsa.

Sostituiamo ora alla variabile x il valore 3; otteniamo $2 \cdot 3 = 9 - 3 \Rightarrow\ 6 = 6$, vera.

Esempio 13.3. Nella formula $x + y = 10$ sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come $x = 2$ e $y = 5$; otteniamo $2 + 5 = 10 \Rightarrow\ 7 = 10$, falsa. Se sostituiamo $x = 4$ e $y = 6$ ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è *vera*. Esistono molte altre coppie di numeri interi rendono vera l'uguaglianza.

Definizione 13.2. Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano *equazioni*; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente *primo membro* e *secondo membro*.

L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'*insieme soluzione* (I. S.) o più semplicemente la *soluzione* dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in *una sola incognita* che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a *grado* 1 e i cui *coefficienti* sono *numeri razionali*. Cercheremo la sua soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempio 13.4. Cercare le soluzioni nell'insieme indicato.

a) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{N}$. Risulta vera solo se a x sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è $\{1\}$.
b) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{Z}$. Risulta vera se a x sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è $\{-1, 1\}$.
c) $x^2 + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$. Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, si ottiene sempre un numero $\geqslant 1$ e non si può ottenere 0, pertanto è impossibile trovare una soluzione.
d) $2x + 3 = (3 + x) + x$ con $x \in \mathbb{Q}$. Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è $\mathbb{Q}$.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

a) *determinata*, quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio dell'insieme numerico considerato;
b) *impossibile*, quando l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$;
c) *indeterminata* o *identità*, quando l'insieme soluzione coincide con l'insieme considerato.

Esempio 13.5. Analizziamo le equazioni:

a) $3 \cdot x = 0$; b) $0 \cdot x = 5$; c) $0 \cdot x = 0$.

Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.

a) Per trovare l'insieme soluzione della prima equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. L'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\{0\}$. L'equazione è determinata.

b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.

c) Per trovare l'insieme soluzione della terza equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.

13.1.1 Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando semplicemente le proprietà delle operazioni.

Esempio 13.6. Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x - 1 = 17$ con $x \in \mathbb{N}$.
Si opera sul valore incognito x per ottenere 17:

$$\textit{entra } x, \text{ si moltiplica per tre} \to\ 3 \cdot x \text{ si sottrae } 1 \to\ 3 \cdot x - 1 \text{ si ottiene } 17.$$

Qual è il valore in ingresso?
Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:

$$\textit{da } 17 \text{ aggiungi } 1 \to\ 18 \text{ dividi per tre } \to\ 18 : 3 \to x.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 6$ e I. S. (insieme soluzione) è $\{6\}$.

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot (-5 + x) = 12x + \frac{1}{2}x^2$ con $x \in \mathbb{Q}$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita alcuni valori scelti a caso e verificando se il valore assunto dal primo membro risulta uguale a quello assunto dal secondo membro. È evidente però che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

❑ **Osservazione** Per risolvere un'equazione, cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni, si procede applicando i principi d'equivalenza.

13.2 Prinicipi di equivalenza

Definizione 13.3. Due equazioni sono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Principio 13.1 (Primo principio di equivalenza)**.** *Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione data uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Principio 13.2 (Secondo principio di equivalenza)**.** *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

La forma più semplice di un'equazione di primo grado in un'incognita è del tipo:

$$x = \text{ numero.}$$

L'insieme soluzione di una equazione di questo tipo è semplicemente:

$$\text{I. S.} = \{\text{ numero}\}.$$

Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è $\text{I. S.} = \{-3\}$.

I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata.

13.2.1 Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d'equivalenza prima enunciati per condurre un'equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

Definizione 13.4. Risolvere un'equazione significa determinare il suo Insieme Soluzione.

Cominciamo con alcuni esempi.

Esempio 13.7. Applicazione del 1° principio di equivalenza.

a) $x - 5 = 3$: aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $x - 5 + 5 = 3 + 5 \Rightarrow x = 8$, $\text{I. S.} = \{8\}$.
b) $3x = 2 + 2x$: sottraiamo $2x$ a entrambi i membri: $3x - 2x = 2 + 2x - 2x \Rightarrow x = 2$, $\text{I. S.} = \{2\}$.

Esempio 13.8. Applicazione del 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 12$ dividiamo entrambi i membri per 3, si ha

$$\frac{3}{3}x = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \to \text{I. S.} = \{4\}.$$

b) $\frac{1}{2}x = 2$ moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 4 \to \text{I. S.} = \{4\}.$$

Esempio 13.9. $-2x + 1 = 3x - 5$.

a) Sottraiamo 1 a entrambi i membri $-2x + 1 - 1 = 3x - 5 - 1$ quindi $-2x = 3x - 6$;
b) sottraiamo $3x$ a entrambi i membri $-2x - 3x = 3x - 3x - 6$ quindi $-5x = -6$;
c) dividiamo entrambi i membri per -5: $\frac{-5}{-5}x = \frac{-6}{-5} \Rightarrow x = \frac{6}{5} \to \text{I. S.} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

Esempio 13.10. Prendiamo l'equazione $(x + 1) + 3 \cdot (2 + x) = 12x - 1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica "$x =$ numero" applicando i principi di equivalenza.

Passo I: svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x+1+6+3x=12x-1$.

Passo II: sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x+7=12x-1$.

Passo III: sottraiamo ad ambo i membri il monomio $12x$, applicando il primo principio: $4x-12x+7=12x-1-12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x+7=-1$.

Passo IV: sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x+7-7=-1-7 \Rightarrow -8x=-8$.

Passo V: dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x=\frac{-8}{-8} \Rightarrow x=1$.

L'equazione assegnata $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ risulta equivalente all'ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è $\text{I.S.}=\{1\}$.

❑ **Osservazione** La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune *regole pratiche* che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che discendono direttamente dal primo principio d'equivalenza.

a) Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.

$2x-3=2$, per lasciare da sola la x al primo menbro devo aggiungere $+3$ al primo e al secondo membro, ottengo $2x-3+3=2+3$ da cui $2x=2+3$.

L'effetto che si ha è che si è spostato il -3 al secondo membro cambiandolo di segno.

b) Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.

Infatti: $2x-3+x=2+x$. La x che sta al secondo membro va portata al primo, cambiandola di segno $2x-3+x-x=2$ da cui $2x-3=2$.

L'effetto che si ha è che si possono eliminare le due x che stanno una al primo membro e una al secondo membro.

c) Se il coefficiente dell'incognita è -1, l'equazione si presenta nella forma $-x=n$, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma $x=-n$. Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.

Infatti:

$x-3=2x+1$. Dobbiamo portare $2x$ al primo membro e -3 al secondo membro, otteniamo $x-2x=3+1$ da cui $-x=4$.

Poiché il coefficiente della x è negativo moltiplichiamo per -1 primo e secondo membro $-1\cdot(-x)=-1\cdot(4)$ da cui $x=-4$.

Problema 13.11. Risolvi la seguente equazione applicando queste regole pratiche.

$$5x + 2 \cdot (3 - x) + 1 = -(4x - 1) + 2 \cdot (6 - x).$$

Soluzione I passi da effettuare sono

a) svolgiamo i calcoli: $5x + 6 - 2x + 1 = -4x + 1 + 12 - 2x$;
b) eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:

$$5x + 6 \cancel{-2x} \cancel{+1} = -4x \cancel{+1} + 12 \cancel{-2x} \Rightarrow 5x + 6 = -4x + 12;$$

c) spostiamo il monomio $-4x$ del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero $+6$ da sinistra a destra, ottenendo: $5x + 4x = -6 + 12$;
d) sommando i termini simili nei due membri, otteniamo $9x = +6$ da cui divedendo per nove ambo i membri si ottiene

$$x = \frac{2}{3} \to \text{I. S.} = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

♦

13.3 Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede.

Esempio 13.12. $\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x = \frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1.$

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso mcm(2,3) = 6

Passo II Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione:

$$6\left(\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x\right) = 6\left(\frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1\right).$$

Passo III Eseguiamo i calcoli: $4x + 24 - 3 + 12x = 2x + 4 - 15x + 6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti. Il risultato è $x = -\frac{11}{25}$.

13.3.1 Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio 13.13. $(2x + 1) \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 5x$.

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

Passo I svolgiamo i calcoli e otteniamo: $2x^2-4x+x-2=2x^2+4x+2-5x \Rightarrow 2x^2-3x-2=2x^2-x+2$.

Passo II applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x+x=+2+2$.

Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I. S..

Passo III ....

13.3.2 Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio 13.14. $\frac{4}{5}-\frac{x}{2}=\frac{2-5x}{10}$.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(5,2,10)=10$.

Passo II Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5}-\frac{x}{2}\right)=10\left(\frac{2-5x}{10}\right)$.

Passo III Eseguiamo i calcoli: $8-5x=2-5x$.

Passo IV Applichiamo la regola pratica: $-5x+5x=2-8$ i monomi in x si annullano!

Passo V Sommando i monomi simili si ottiene: $0\cdot x=-6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi I. S. $=\emptyset$, l'equazione risulta impossibile.

Esempio 13.15. $\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}=-\frac{x}{2}$.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(6,3,2)=6$.

Passo II Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}\right)=6\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Passo III Eseguiamo i calcoli: $x-4x=-3x$.

Passo IV Applicando il primo principio si ottiene $0\cdot x=0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi I. S. $=\mathbb{Q}$, l'equazione è indeterminata (identità).

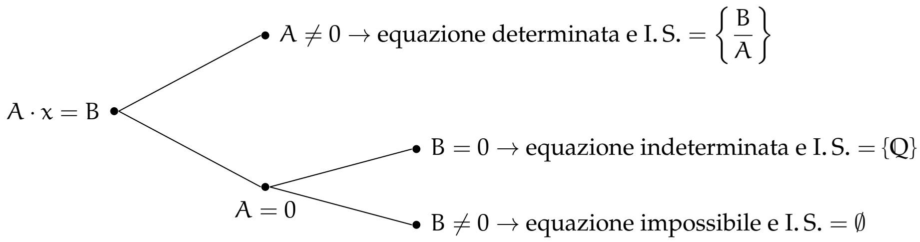
13.3.3 Riassunto

$A \cdot x = B$ con A e B numeri razionali è la forma canonica dell'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici.

Possono presentarsi i casi:

- se $A \neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $\text{I.S.} = \left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.
- se $A = 0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:
  - $B = 0$ allora $\text{I.S.} = \mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.
  - $B \neq 0$ allora $\text{I.S.} = \emptyset$. L'equazione è impossibile.

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:



13.4 Esercizi

13.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

13.1 Identità ed equazioni

13.1. Risolvi in $\mathbb{Z}$ la seguente equazione: $-x+3=-1$.

Suggerimento. Lo schema operativo è: entra x, cambia il segno in $-x$, aggiunge 3, si ottiene -1. Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 togli 3 ottieni … cambia segno ottieni come soluzione $x = \ldots$.

13.2 Prinicipi di equivalenza

13.2. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $x+2=7$;
b) $2+x=3$;
c) $16+x=26$;
d) $x-1=1$;
e) $3+x=-5$;
f) $12+x=-22$.

13.3. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $3x=2x-1$;
b) $8x=7x+4$;
c) $2x=x-1$;
d) $5x=4x+2$;
e) $3x=2x-3$;
f) $3x=2x-2$.

13.4. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $7+x=0$;
b) $7=-x$;
c) $-7=x$;
d) $1+x=0$;
e) $1-x=0$;
f) $0=2-x$.

13.5. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $3x-1=2x-3$;
b) $7x-2x-2=4x-1$;
c) $-5x+2=-6x+6$;
d) $-2+5x=8+4x$;
e) $7x+1=6x+2$;
f) $-1-5x=3-6x$.

13.6. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $2x=8$;
b) $2x=3$;
c) $6x=24$;
d) $0x=1$;
e) $\frac{1}{3}x=-1$;
f) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$.

13.7. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $\frac{3}{2}x=12$;
b) $2x=-2$;
c) $3x=\frac{1}{6}$;
d) $\frac{1}{2}x=4$;
e) $\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$;
f) $2x=\frac{1}{2}$.

13.8. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 6$;
b) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$;
c) $\frac{2}{5}x = \frac{10}{25}$;
d) $-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$;
e) $0,1x = 1$;
f) $0,1x = 10$;
g) $0,1x = 0,5$;
h) $-0,2x = 5$.

13.9. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $2x + 1 = 7$;
b) $3 - 2x = 3$;
c) $6x - 12 = 24$;
d) $3x + 3 = 4$;
e) $5 - x = 1$;
f) $7x - 2 = 5$.

13.10. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $2x + 8 = 8 - x$;
b) $2x - 3 = 3 - 2x$;
c) $6x + 24 = 3x + 12$;
d) $2 + 8x = 6 - 2x$;
e) $6x - 6 = 5 - x$;
f) $-3x + 12 = 3x + 18$.

13.11. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $3 - 2x = 8 + 2x$;
b) $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{3}x + 1$;
c) $\frac{6}{5}x = \frac{24}{5} - x$;
d) $3x - 2x + 1 = 2 + 3x - 1$;
e) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{10}$;
f) $\frac{5}{6}x + \frac{3}{2} = \frac{25}{3} - \frac{10}{2}x$.

13.12. Risolvi l'equazione $10x + 4 = -2 \cdot (x + 5) - x$ seguendo la traccia:

1. svolgi i calcoli al primo e al secondo membro: . . . . ;
2. somma i monomi simili in ciascun membro dell'equazione: . . . . ;
3. applica il primo principio d'equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l'incognita e nell'altro membro solo numeri: . . . . ;
4. somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro: . . . . ;
5. applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . . .in forma canonica: . . . .;
6. scrivi l'Insieme Soluzione: I. S. = ...

13.13. Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x - (3x + 5) = (4x + 8) - 4 \cdot (x + 1)$:

1. svolgi i calcoli: . . . . ;
2. somma i monomi simili: . . . . ;
3. porta al primo membro i monomi con la x e al secondo quelli senza: . . . . ;
4. somma i monomi simili al primo membro e al secondo membro: . . . . ;
5. dividi ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . . ;
6. l'insieme soluzione è: . . . .

13.14 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $3(x-1)+2(x-2)+1=2x$;
b) $x-(2x+2)=3x-(x+2)-1$;
c) $-2(x+1)-3(x-2)=6x+2$;
d) $x+2-3(x+2)=x-2$.

13.15 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $2(1-x)-(x+2)=4x-3(2-x)$;
b) $(x+2)^2=x^2-4x+4$;
c) $5(3x-1)-7(2x-4)=28$;
d) $(x+1)(x-1)+2x=5+x(2+x)$.

13.16 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $2x+(x+2)(x-2)+5=(x+1)^2$;
b) $4(x-2)+3(x+2)=2(x-1)-(x+1)$;
c) $(x+2)(x+3)-(x+3)^2=(x+1)(x-1)-x(x+1)$;
d) $x^3+6x^2+(x+2)^3+11x+(x+2)^2=(x+3)\left(2x^2+7x\right)$.

13.17 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $(x+2)^3-(x-1)^3=9(x+1)^2-9x$;
b) $(x+1)^2+2x+2(x-1)=(x+2)^2$;
c) $2(x-2)(x+3)-3(x+1)(x-4)=-9(x-2)^2+\left(8x^2-25x+36\right)$.

13.18. Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $(2x-3)^2-4x(2-5x)-4=-8x(x+4)$;
b) $(x-1)\left(x^2+x+1\right)-3x^2=(x-1)^3+1$;
c) $(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=(2x-1)^3-12x^2$.

13.3 Equazioni a coefficienti frazionari

13.19. Risolvi l'equazione $\dfrac{3\cdot(x-11)}{4}=\dfrac{3\cdot(x+1)}{5}-\dfrac{1}{10}$.

1. calcola $\text{mcm}(4,5,10)=\ldots\ldots$;
2. moltiplica ambo i membri per .... e ottieni: ....;
3. ....

13.20. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $x+7=8$, $\mathbb{N}$;
b) $4+x=2$, $\mathbb{Z}$;
c) $x-3=4$, $\mathbb{N}$;
d) $x=0$, $\mathbb{N}$;
e) $x+1=0$, $\mathbb{Z}$;
f) $5x=0$, $\mathbb{Z}$.

13.21. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{4} = 0$, $\mathbb{Q}$;
b) $-x = 0$, $\mathbb{Z}$;
c) $7 + x = 0$, $\mathbb{Z}$;
d) $-2x = 0$, $\mathbb{Z}$;
e) $-x - 1 = 0$, $\mathbb{Z}$;
f) $\frac{-x}{4} = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.22. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $x - \frac{2}{3} = 0$, $\mathbb{Q}$;
b) $\frac{x}{-3} = 0$, $\mathbb{Z}$;
c) $2(x - 1) = 0$, $\mathbb{Z}$;
d) $-3x = 1$, $\mathbb{Q}$;
e) $3x = -1$, $\mathbb{Q}$;
f) $\frac{x}{3} = 1$, $\mathbb{Q}$.

13.23. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{3} = 2$, $\mathbb{Q}$;
b) $\frac{x}{3} = -2$, $\mathbb{Q}$;
c) $0x = 0$, $\mathbb{Q}$;
d) $0x = 5$, $\mathbb{Q}$;
e) $0x = -5$, $\mathbb{Q}$;
f) $\frac{x}{1} = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.24. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{1} = 1$, $\mathbb{Q}$;
b) $-x = 10$, $\mathbb{Z}$;
c) $\frac{x}{-1} = -1$, $\mathbb{Z}$;
d) $3x = 3$, $\mathbb{N}$;
e) $-5x = 2$, $\mathbb{Z}$;
f) $3x + 2 = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.25. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $3x = \frac{1}{3}$;
b) $-3x = -\frac{1}{3}$;
c) $x + 2 = 0$;
d) $4x - 4 = 0$;
e) $4x - 0 = 1$;
f) $2x + 3 = x + 3$.

13.26. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $4x - 4 = 1$;
b) $4x - 1 = 1$;
c) $4x - 1 = 0$;
d) $3x = 12 - x$;
e) $4x - 8 = 3x$;
f) $-x - 2 = -2x - 3$.

13.27. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $-3(x - 2) = 3$;
b) $x + 2 = 2x + 3$;
c) $-x + 2 = 2x + 3$;
d) $3(x - 2) = 0$;
e) $3(x - 2) = 1$;
f) $3(x - 2) = 3$.

13.28. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $0(x - 2) = 1$;
b) $0(x - 2) = 0$;
c) $12 + x = -9x$;
d) $40x + 3 = 30x - 100$;
e) $4x + 8x = 12x - 8$;
f) $-2 - 3x = -2x - 4$.

13.29. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $2x+2=2x+3$;
b) $\frac{x+2}{2}=\frac{x+1}{2}$;
c) $\frac{2x+1}{2}=x+1$;
d) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3x-\frac{1}{2}$;
e) $\pi x=0$;
f) $2\pi x=\pi$.

13.30. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $0,12x=0,1$;
b) $-\frac{1}{2}x-0,3=-\frac{2}{5}x-0,15$;
c) $892x-892=892x-892$;
d) $892x-892=893x-892$;
e) $348x-347=340x-347$;
f) $340x+740=8942+340x$.

13.31. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $2x+3=2x+4$;
b) $2x+3=2x+3$;
c) $2(x+3)=2x+5$;
d) $2(x+4)=2x+8$;
e) $3x+6=6x+6$;
f) $-2x+3=-2x+4$.

13.32. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$;
b) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;
c) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;
d) $\frac{x}{200}+\frac{1}{100}=\frac{1}{200}$;
e) $1000x-100=2000x-200$;
f) $100x-1000=-1000x+100$.

13.33 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $x-5(1-x)=5+5x$;
b) $2(x-5)-(1-x)=3x$;
c) $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$;
d) $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$;
e) $\frac{x+1000}{3}+\frac{x+1000}{4}=1$;
f) $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}$.

13.34 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{5}=\frac{1}{10}$;
b) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$;
c) $8x-\frac{x}{6}=2x+11$;
d) $3(x-1)-\frac{1}{7}=4(x-2)+1$;
e) $537x+537\frac{x}{4}-\frac{537x}{7}=0$;
f) $\frac{2x+3}{5}=x-1$.

13.35 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6}-1=\dfrac{x}{3}$;

b) $\dfrac{4-x}{5}+\dfrac{3-4x}{2}=3$;

c) $\dfrac{x+3}{2}=3x-2$;

d) $\dfrac{x+0,25}{5}=1,75-0,\bar{3}x$;

e) $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$;

f) $4(2x-1)+5=1-2(-3x-6)$.

13.36 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\dfrac{3}{2}(x+1)-\dfrac{1}{3}(1-x)=x+2$;

b) $\dfrac{1}{2}(x+5)-x=\dfrac{1}{2}(3-x)$;

c) $(x+3)^2 = (x-2)(x+2)+\dfrac{1}{3}x$;

d) $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{2+3x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{4}$;

e) $2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+x = 3x-2$;

f) $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x}{4} = 5\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}\right)-x$.

13.37 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $(2x-3)(5+x)+\dfrac{1}{4}=2(x-1)^2-\dfrac{1}{2}$;

b) $(x-2)(x+5)+\dfrac{1}{4}=x^2-\dfrac{1}{2}$;

c) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=x^2+\dfrac{1}{2}$;

d) $(x+1)^2=(x-1)^2$;

e) $\dfrac{(1-x)^2}{2}-\dfrac{x^2-1}{2}=1$;

f) $\dfrac{(x+1)^2}{3}=\dfrac{1}{3}(x^2-1)$.

13.38 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$;

b) $\dfrac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\dfrac{2}{3}(x^2-1)$;

c) $(x+1)^2=x^2-1$;

d) $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$;

e) $\dfrac{1}{3}x\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)+\dfrac{5}{3}x\left(1+\dfrac{1}{3}x\right)=\dfrac{2}{3}x(x+3)$;

f) $\dfrac{1}{2}\left(3x+\dfrac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)=-\dfrac{3}{2}x+1$.

13.39 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $3+2x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\dfrac{3}{4}x=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{x+3}{2}$;

b) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x+2}{2}-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{x+1}{2}\right]+\dfrac{1}{4}x=\dfrac{x-2}{4}-\left(x+\dfrac{2-x}{3}\right)$;

c) $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{2(x-1)}{3}+\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{7}{15}x;$

e) $\dfrac{1}{2}(x-2)-\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1+x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2-x}{6}+\dfrac{1+x}{3};$

f) $-\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{3}{4}(4x+1)=\dfrac{1}{2}(x-1).$

13.40 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{9}-\dfrac{3x-3}{6}=\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{2-2x}{6};$

b) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\dfrac{-5}{2}x(x+1);$

c) $\dfrac{1}{2}\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(1+x)(-1+x)+3\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)^2=\dfrac{2}{3}x;$

d) $(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5;$

e) $(x-3)(x-4)-\dfrac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\dfrac{1}{3}x-5\left(\dfrac{2x-9}{6}\right);$

f) $\dfrac{2w-1}{3}+\dfrac{w-5}{4}=\dfrac{w+1}{3}-4.$

13.41 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25;$

b) $\dfrac{(x-3)(x+3)+(x-2)(2-x)-3(x-2)}{\frac{1}{3}-3}=\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x}{2};$

c) $2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2-\dfrac{(x+2)(x-2)}{2}+2x=x+\dfrac{1}{2};$

d) $\left(0,\overline{1}x-10\right)^2+0,1(x-0,2)+\left(\dfrac{1}{3}x+0,3\right)^2=\dfrac{10}{81}x^2+0,07;$

e) $5x+\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3x-1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}x+(2x-1)(2x+1)=(2x+1)^2+\dfrac{1}{36};$

f)

$$\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3-2\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2-\left(1-\frac{1}{3}x\right)x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}(2x+1)^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{9}+\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right).$$

13.42 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x=\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^2;$

b) $\frac{3}{20}+\frac{6x+8}{10}-\frac{2x-1}{12}+\frac{2x-3}{6}=\frac{x-2}{4}$;

c) $\frac{x^3-1}{18}+\frac{(x+2)^3}{9}=\frac{(x+1)^3}{4}-\frac{x^3+x^2-4}{12}$;

d) $\frac{2}{3}x+\frac{5x-1}{3}+\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{1}{3}(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}(x-1)^2$;

e) $\frac{5}{12}x-12+\frac{x-6}{2}-\frac{x-24}{3}=\frac{x+4}{4}-\left(\frac{5}{6}x-6\right)$;

f) $\left(1-\frac{x+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}-1}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}+1}-1\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}+x}{\frac{1}{2}-1}-\frac{x\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{\frac{1}{2}+1}=x^2$.

13.43. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{3}-1$;

b) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$;

c) $\frac{3}{2}=2x-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}-5x\right)-\frac{2-x}{3}\right]$;

d) $\frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$;

e) $\frac{1}{5}x-1+\frac{2}{3}x-2=\frac{10}{15}+\frac{3}{5}x$;

f) $\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{8x^2-25x+36}{18}+\frac{1}{9}(x-2)(x+3)=\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$.

13.44. Per una sola delle seguenti equazioni, definite in $\mathbb{Z}$, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

$\boxed{A}$ $x=x+1$ $\boxed{B}$ $x+1=0$ $\boxed{C}$ $x-1=+1$ $\boxed{D}$ $x+1=1$

13.45. Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado nella sola incognita x. Quale?

$\boxed{A}$ $x+y=5$ $\boxed{B}$ $x^2+1=45$ $\boxed{C}$ $x-\frac{7}{89}=+1$ $\boxed{D}$ $x+x^2=1$

13.46. Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

$\boxed{A}$ $\frac{1}{2}x-1=3x$ $\boxed{B}$ $6x=x-2$ $\boxed{C}$ $x-2x=3x$ $\boxed{D}$ $3x=\frac{1}{2}(x-2)$

13.47. Da $8x=2$ si ottiene:

$\boxed{A}$ $x=-6$ $\boxed{B}$ $x=4$ $\boxed{C}$ $x=\frac{1}{4}$ $\boxed{D}$ $x=-\frac{1}{4}$

13.48. Da $-9x=0$ si ottiene:

$\boxed{A}$ $x=9$ $\boxed{B}$ $x=-\frac{1}{9}$ $\boxed{C}$ $x=0$ $\boxed{D}$ $x=\frac{1}{9}$

13.49. L'insieme soluzione dell'equazione $2 \cdot (x+1) = 5 \cdot (x-1) - 11$ è:

$\boxed{A}$ $\text{I.S.} = \{-6\}$ $\boxed{B}$ $\text{I.S.} = \{6\}$ $\boxed{C}$ $\text{I.S.} = \left\{\frac{11}{3}\right\}$ $\boxed{D}$ $\text{I.S.} = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

13.50. Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

a) $\frac{x+5}{2} + \frac{1}{5} = 0, \quad Q = \left\{1, -5, 7, -\frac{27}{5}\right\};$

b) $x - \frac{3}{4}x = 4, \quad Q = \{1, -1, 0, 16\};$

c) $x(x+1) + 4 = 5 - 2x + x^2, \quad Q = \left\{-9, 3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}.$

13.4.2 Risposte

13.14 a) $x = 2$, b) $x = \frac{1}{3}$, c) $x = \frac{2}{11}$, d) $x = -\frac{2}{3}$.

13.15 a) $x = \frac{3}{5}$, b) $x = 0$, c) $x = 5$, d) Impossibile.

13.16 a) Indeterminata, b) $x = -\frac{1}{6}$, c) Impossibile, d) $x = -2$.

13.17 a) Indeterminata, b) $x = \frac{5}{2}$, c) Indeterminata.

13.33 a) $x = 10$, b) Impossibile, c) $x = \frac{7}{5}$, d) $x = -12$, e) $x = -\frac{6988}{7}$, f) $x = -\frac{17}{7}$.

13.34 a) $x = -\frac{2}{7}$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{66}{35}$, d) $x = \frac{27}{7}$, e) $x = 0$, f) $x = \frac{8}{3}$.

13.35 a) Impossibile, b) $x = -\frac{7}{22}$, c) $x = \frac{7}{5}$, d) $x = \frac{51}{16}$, e) $x = \frac{26}{5}$, f) $x = 6$.

13.36 a) $x = 1$, b) Impossibile, c) $x = -\frac{39}{17}$, d) $x = -2$, e) Impossibile, f) $x = \frac{30}{7}$.

13.37 a) $x = \frac{65}{44}$, b) $x = \frac{37}{12}$, c) $x = -\frac{1}{4}$, d) $x = 0$, e) $x = 0$, f) $x = -1$.

13.38 a) $x = -1$, b) Indeterminata, c) $x = -1$, d) Impossibile, e) $x = 0$, f) $x = \frac{23}{28}$.

13.39 a) $x = 4$, b) $x = -\frac{5}{2}$, c) $x = -\frac{9}{8}$, d) $x = \frac{13}{3}$, e) Impossibile, f) $x = 2$.

13.40 a) $x = 1$, b) $x = \frac{3}{26}$, c) $x = \frac{19}{7}$, d) $x = -1$, e) $x = \frac{23}{20}$, f) $x = -\frac{25}{7}$.

13.41 a) Indeterminata, b) $x = \frac{63}{23}$, c) $x = \frac{7}{2}$, d) $x = \frac{9000}{173}$, e) $x = -6$, f) $x = 2$.

13.42 a) $x = -\frac{20}{3}$, b) $x = -2$, c) $x = -\frac{3}{7}$, d) $x = \frac{2}{7}$, e) $x = 12$, f) $x = -\frac{1}{5}$.

Problemi di I grado in un'incognita 14

14.1 Un po' di storia e qualche aneddoto

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.

Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.

Il *papiro di Rhind*[1], testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.

Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19. Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è .

Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di 'filius Bonacci' o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi "algoritmi" presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco. Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:

«Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?».

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota come successione di Fibonacci.

Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5050". Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella

[1] Dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858.

riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100×101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato: Buttner rimase sgomento.

14.1.1 Risoluzione dei problemi

> La risoluzione dei problemi ...serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose.
>
> R. DESCARTES

I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze del problema.

Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

a) una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
b) la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);
c) la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione dell'equazione risolvente;
d) la risoluzione dell'equazione trovata;
e) il confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 14.1. Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Soluzione La situazione può essere materialmente descritta con una figura. Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.

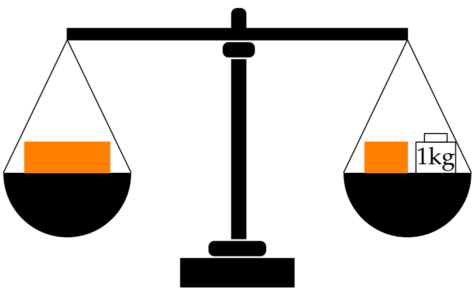


Figura 1

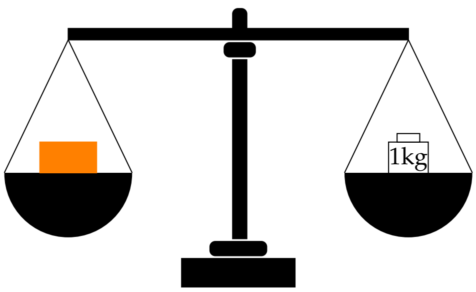


Figura 2

Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:

Dati: peso di un mattone = peso di mezzo mattone +1kg.

Obiettivo: peso del mattone.

Procedura risolutiva:

Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p. Il valore di p dovrà essere un numero positivo. L'equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell'unica relazione contenuta nel testo del problema: $p = \frac{1}{2}p + 1$.

Risolviamo l'equazione: $p - \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow p = 2\text{Kg}$. La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 14.2. Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

Soluzione L'ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con n l'incognita cerchiamo quindi $n \in \mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull'incognita e che traduciamo nei dati:

Dati: $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.

Obiettivo: $n \in \mathbb{N}$.

Procedura risolutiva:

L'equazione risolvente è già indicata nei dati $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.

Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:

$$4n + 3n - 8n = 40 \Rightarrow -n = 40 \Rightarrow n = -40.$$

La soluzione non è accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

♦

Problema 14.3. Il 1° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell'età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent'anni più di Aldo. Quale sarà l'età di Chiara il 1° gennaio 2010?

Soluzione Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l'età di Chiara e l'età di Aldo. Indichiamo perciò con a l'età di Chiara al 1990 e con p quella di Aldo.

Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell'insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:

Dati: nel 1990: $a = 2p$, nel 2000: $a + 10 = (p + 10) + 20$.

Obiettivo: L'età di Chiara nel 2010.

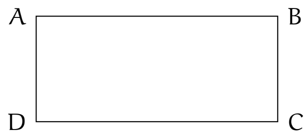
Procedura risolutiva: Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è $a + 20$. Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2p + 10 = p + 10 + 20 \Rightarrow 2p - p = 20 \Rightarrow p = 20$. L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi $a = 40$. Infine, l'età di Chiara nel 2010 è $40 + 20 = 60$. La soluzione è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 14.4. Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera $\frac{1}{3}$ della base di 8m e il perimetro è $\frac{20}{7}$ della base stessa.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:

Dati: $AD = \frac{1}{3}AB + 8$, $2p = \frac{20}{7}AB$.



Obiettivo: L'Area$(ABCD)$.

Procedura risolutiva: Area$(ABCD) =$ misura base $\cdot$ misura altezza $= \overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB} = x$ con x numero reale positivo.

Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati: $\overline{AD} = \frac{1}{3}x + 8$ e $2p = \frac{20}{7}x$.

Sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione: $2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}x + 8\right) = \frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.

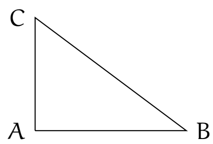
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4x = 21 \cdot 16 \Rightarrow x = 84 \Rightarrow \overline{AB} = 84$ e quindi $\overline{AD} = 36$. Ottenute le misure della base e dell'altezza calcoliamo Area$(ABCD) = 36 \cdot 84 = 3024\text{m}^2$.

♦

Problema 14.5. In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm e un cateto è 3/5 dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:

Dati: $C\hat{A}B =$ angolo retto, $2p = 120$, $AC = \frac{3}{5}CB$.



Obiettivo: L'Area(ABC).

Procedura risolutiva: Area$(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Per calcolare l'area, occorre determinare la misura dei cateti del triangolo rettangolo; i dati del problema ci danno una relazione tra la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa; conosciamo anche il perimetro del triangolo.

Scegliamo come incognita la misura in cm di CB, cioè $\overline{CB} = x$ con $x \in \mathbb{R}^+$.

Formalizziamo i dati:

$$\overline{CB} = x; \quad \overline{AC} = \frac{3}{5}x; \quad \overline{AB} + x + \frac{3}{5}x = 120. \tag{14.1}$$

Per poter scrivere una equazione che ci permetta di determinare il valore dell'incognita ci manca la misura di AB. Sembra che il problema sia privo di una informazione. Tuttavia, il triangolo dato è rettangolo quindi tra i suoi lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora: $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Pertanto possiamo determinare la misura di AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}x^2} = \frac{4}{5}x.$$

Con questo dato riscriviamo la 14.1 che risulta essere l'equazione risolvente del problema

$$\frac{4}{5}x + x + \frac{3}{5}x = 120 \Rightarrow\ 12x = 120 \cdot 5 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow \overline{CB} = 50.$$

Quindi $\overline{AC} = 30\text{cm}$ e $\overline{AB} = 40\text{cm},\ \text{Area}(ABC) = \dfrac{30 \cdot 40}{2} = 600\text{cm}^2.$

♦

Gli esercizi indicati con (†) sono tratti da *Matematica 1*, Dipartimento di Matematica, ITIS V. Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12][S-A11], pg. 90; licenza CC,BY-NC-BD, per gentile concessione dei professori che hanno redatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

14.2 Esercizi

14.2.1 Problemi con i numeri

14.1 (*). Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e il secondo supera di 16 il doppio del primo.

14.2 (*). Determina due numeri, sapendo che il secondo supera di 17 il triplo del primo e che la loro somma è 101.

14.3 (*). Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore supera di 10 i $\frac{3}{7}$ del maggiore.

14.4 (*). Sommando 15 al doppio di un numero si ottengono i $\frac{7}{2}$ del numero stesso. Qual è il numero?

14.5. Determinare due numeri consecutivi sapendo che i $\frac{4}{9}$ del maggiore superano di 8 i $\frac{2}{13}$ del minore.

14.6 (*). Se ad un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21, otteniamo 100. Qual è il numero?

14.7 (*). Trova il prodotto tra due numeri, sapendo che: se al primo numero sottraiamo 50 otteniamo 50 meno il primo numero; se al doppio del secondo aggiungiamo il suo consecutivo, otteniamo 151.

14.8 (*). Se a $\frac{1}{25}$ sottraiamo un numero, otteniamo la quinta parte del numero stesso. Qual è questo numero?

14.9 (*). Carlo ha 152 caramelle e vuole dividerle con le sue due sorelline. Quante caramelle resteranno a Carlo se le ha distribuite in modo che ogni sorellina ne abbia la metà delle sue?

14.10 (*). Se a $\frac{5}{2}$ sottraiamo un numero, otteniamo il numero stesso aumentato di $\frac{2}{3}$. Di quale numero si tratta?

14.11 (*). Se ad un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200. Qual è il numero?

14.12 (*). Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15, otteniamo 45. Qual è il numero?

14.13 (*). Se ad un numero sommiamo il doppio del suo consecutivo otteniamo 77. Qual è il numero?

14.14 (*). Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà, otteniamo il numero aumentato di 2. Qual è il numero?

14.15 (*). Il doppio di un numero equivale alla metà del suo consecutivo più 1. Qual è il numero?

14.16 (*). Un numero è uguale al suo consecutivo meno 1. Trova il numero.

14.17 (*). La somma tra un numero e il suo consecutivo è uguale al numero aumentato di 2. Trova il numero.

14.18 (*). La somma tra un numero ed il suo consecutivo aumentato di 1 è uguale a 18. Qual è il numero?

14.19. La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17. Qual è il numero?

14.20 (*). La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27. Trova il numero.

14.21 (*). La somma tra due numeri x e y vale 80. Del numero x sappiamo che questo stesso numero aumentato della sua metà è uguale a 108.

14.22 (*). Sappiamo che la somma fra tre numeri (x, y, z) è uguale a 180. Il numero x è uguale a se stesso diminuito di 50 e poi moltiplicato per 6. Il numero y aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 40 e poi moltiplicato per 6, trova x, y, z.

14.23 (*). La somma tra la terza parte di un numero e la sua quarta parte è uguale alla metà del numero aumentata di 1. Trova il numero.

14.24. Determina due numeri interi consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 49.

14.25. Trova tre numeri dispari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 87.

14.26. Trova cinque numeri pari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 1000.

14.27 (*). Determinare il numero naturale la cui metà, aumentata di 20, è uguale al triplo del numero stesso diminuito di 95.

14.28 (*). Trova due numeri dispari consecutivi tali che la differenza dei loro cubi sua uguale a 218.

14.29 (*). Trova un numero tale che se calcoliamo la differenza tra il quadrato del numero stesso e il quadrato del precedente otteniamo 111.

14.30. Qual è il numero che sommato alla sua metà è uguale a 27?

14.31 (*). Moltiplicando un numero per 9 e sommando il risultato per la quarta parte del numero si ottiene 74. Qual è il numero?

14.32. La somma di due numeri pari e consecutivi è 46. Trova i due numeri.

14.33 (*). La somma della metà di un numero con la sua quarta parte è uguale al numero stesso diminuito della sua quarta parte. Qual è il numero?

14.34 (*). Di y sappiamo che il suo triplo è uguale al suo quadruplo diminuito di 2; trova y.

14.35. Il numero z aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 30 e moltiplicato per 4.

14.36 (*). Determinare un numero di tre cifre sapendo che la cifra delle centinaia è $\frac{2}{3}$ di quella delle unità, la cifra delle decine è $\frac{1}{3}$ delle unità e la somma delle tre cifre è 12.

14.37 (*). Dividere il numero 576 in due parti tali che $\frac{5}{6}$ della prima parte meno $\frac{3}{4}$ della seconda parte sia uguale a 138.

14.38 (*). Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 49.

14.2.2 Problemi dalla realtà

14.39 (*). Luca e Andrea posseggono rispettivamente € 200 e € 180; Luca spende € 10 al giorno e Andrea € 8 al giorno. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma?

14.40 (*). Ad un certo punto del campionato la Fiorentina ha il doppio dei punti della Juventus e l'Inter ha due terzi dei punti della Fiorentina. Sapendo che in totale i punti delle tre squadre sono 78, determinare i punti delle singole squadre.

14.41 (*). Per organizzare una gita collettiva, vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare € 12. Sui pulmini restano, in tutto, quattro posti liberi. Se fossero stati occupati anche questi posti, ogni partecipante avrebbe risparmiato € $1,50$. Quanti posti vi sono su ogni pulmino? ("La settimana enigmistica")

14.42. Un rubinetto, se aperto, riempie una vasca in 5 ore; un altro rubinetto riempie la stessa vasca in 7 ore. Se vengono aperti contemporaneamente, quanto tempo ci vorrà per riempire $\frac{1}{6}$ della vasca?

14.43 (*). L'età di Antonio è i $\frac{3}{8}$ di quella della sua professoressa. Sapendo che tra 16 anni l'età della professoressa sarà doppia di quella di Antonio, quanti anni ha la professoressa?

14.44 (*). Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: " la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne". Quanti allievi aveva Pitagora? ("Matematica dilettevole e curiosa")

14.45. Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle decine è inferiore di 3 rispetto alla cifra delle unità e sapendo che invertendo l'ordine delle cifre e sottraendo il numero stesso, si ottiene 27. ("Algebra riceativa")

14.46. Al cinema "Matematico" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. È stato un affare?

14.47. A mezzogiorno le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Quando saranno di nuovo sovrapposte?

14.48. Con due qualità di caffè da 3 €/kg e 5 €/kg si vuole ottenere un quintale di miscela da 3, 25 €/kg. Quanti kg della prima e quanti della seconda qualità occorre prendere?

14.49 (*). In un supermercato si vendono le uova in due diverse confezioni, che ne contengono rispettivamente 10 e 12. In un giorno è stato venduto un numero di contenitori da 12 uova doppio di quelli da 10, per un totale di 544 uova. Quanti contenitori da 10 uova sono stati venduti?

14.50 (*). Ubaldo, per recarsi in palestra, passa sui mezzi di trasporto 20 minuti, tuttavia il tempo totale per completare il tragitto è maggiore a causa dei tempi di attesa. Sappiamo che Ubaldo utilizza 3 mezzi, impiega i $\frac{3}{10}$ del tempo totale per l'autobus, i $\frac{3}{5}$ del tempo totale per la metropolitana e 10 minuti per il treno. Quanti minuti è costretto ad aspettare i mezzi di trasporto? (*poni x il tempo di attesa*)

14.51 (*). Anna pesa un terzo di Gina e Gina pesa la metà di Alfredo. Se la somma dei tre pesi è 200kg, quanto pesa Anna?

14.52. In una partita a dama dopo i primi 10 minuti sulla scacchiera restano ancora 18 pedine. Dopo altri 10 minuti un giocatore perde 4 pedine nere e l'altro 6 pedine bianche ed entrambi rimangono con lo stesso numero di pedine. Calcolate quante pedine aveva ogni giocatore dopo i primi 10 minuti di gioco.

14.53 (*). Due numeri naturali sono tali che la loro somma è 16 e il primo, aumentato di 1, è il doppio del secondo diminuito di 3. Trovare i due numeri.

14.54. Un dvd recoder ha due modalità di registrazione: SP e LP. Con la seconda modalità è possibile registrare il doppio rispetto alla modalità SP. Con un dvd dato per 2 ore in SP, come è possibile registrare un film della durata di 3 ore e un quarto? Se voglio registrare il più possibile in SP (di qualità migliore rispetto all'altra) quando devo necessariamente passare all'altra modalità LP?

14.55 (*). Tizio si reca al casinò e gioca tutti i soldi che ha; dopo la prima giocata, perde la metà dei suoi soldi. Gli vengono prestati € 2 e gioca ancora una volta tutti i suoi soldi; questa volta vince e i suoi averi vengono quadruplicati. Torna a casa con € 100. Con quanti soldi era arrivato al casinò?

14.56 (*). I sette nani mangiano in tutto 127 bignè; sapendo che il secondo ne ha mangiati il doppio del primo, il terzo il doppio del secondo e così via, quanti bignè ha mangiato ciascuno di loro?

14.57 (*). Babbo Natale vuole mettere in fila le sue renne in modo tale che ogni fila abbia lo stesso numero di renne. Se le mette in fila per quattro le file sono due di meno rispetto al caso in cui le mette in fila per tre. Quante sono le renne?

14.58 (*). Cinque fratelli si devono spartire un'eredità di €180000 in modo tale che ciascuno ottenga € 8000 in più del fratello immediatamente minore. Quanto otterrà il fratello più piccolo?

14.59 (*). Giovanni ha tre anni in più di Maria. Sette anni fa la somma delle loro età era 19. Quale età hanno attualmente?

14.60 (*). Lucio ha acquistato un paio di jeans e una maglietta spendendo complessivamente € 518. Calcolare il costo dei jeans e quello della maglietta, sapendo che i jeans costano € 88 più della maglietta.

14.61 (*). Francesca ha il triplo dell'età di Anna. Fra sette anni Francesca avrà il doppio dell'età di Anna. Quali sono le loro età attualmente?

14.62 (*). In una fattoria ci sono tra polli e conigli 40 animali con 126 zampe. Quanti sono i conigli?

14.63 (*). Due anni fa ho comprato un appartamento. Ho pagato alla consegna $\frac{1}{3}$ del suo prezzo, dopo un anno $\frac{3}{4}$ della rimanenza; oggi ho saldato il debito sborsando € 40500. Qual è stato il prezzo dell'appartamento?

14.64 (*). Un ciclista pedala in una direzione a 30km/h, un marciatore parte a piedi dallo stesso punto e alla stessa ora e va nella direzione contraria a 6km/h. Dopo quanto tempo saranno lontani 150km?

14.65 (*). Un banca mi offre il 2% di interesse su quanto depositato all'inizio dell'anno. Alla fine dell'anno vado a ritirare i soldi depositati più l'interesse: se ritiro € 20400, quanto avevo depositato all'inizio? Quanto dovrebbe essere la percentuale di interesse per ricevere € 21000 depositando i soldi calcolati al punto precedente?

14.66 (*). Si devono distribuire € 140800 fra 11 persone che hanno vinto un concorso. Alcune di esse rinunciano alla vincita e quindi la somma viene distribuita tra le persone rimanenti. Sapendo che ad ognuna di esse sono stati dati € 4800 euro in più, quante sono le persone che hanno rinunciato al premio?

14.67 (*). Un treno parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120km/h. Dopo 80 minuti parte un secondo treno dalla stessa stazione e nella stessa direzione alla velocità di 150km/h. Dopo quanti km il secondo raggiungerà il primo?

14.68 (*). Un padre ha 32 anni, il figlio 5. Dopo quanti anni l'età del padre sarà 10 volte maggiore di quella del figlio? Si interpreti il risultato ottenuto.

14.69 (*). L'epitaffio di Diofanto. "Viandante! Qui furono sepolti i resti di Diofanto. E i numeri possono mostrare, oh, miracolo! Quanto lunga fu la sua vita, la cui sesta parte costituì la sua felice infanzia. Aveva trascorso ormai la dodicesima parte della sua vita, quando di peli si coprì la guancia. E la settima parte della sua esistenza trascorse in un matrimonio senza figli. Passò ancora un quinquiennio e gli fu fonte di gioia la nascita del suo primogenito, che donò il suo corpo, la sua bella esistenza alla terra, la quale durò solo la metà di quella del padre. Il quale, con profondo dolore discese nella sepoltura, essendo sopravvenuto solo quattro anni al proprio figlio. Dimmi quanti anni visse Diofanto."

14.70 (*, †). Un cane cresce ogni mese di $\frac{1}{3}$ della sua altezza. Se dopo 3 mesi dalla nascita è alto 64cm, quanto era alto appena nato?

14.71 (*, †). La massa di una botte colma di vino è di 192kg mentre se la botte è riempita di vino per un terzo la sua massa è di 74kg. Trovare la massa della botte vuota.

14.72 (*, †). Carlo e Luigi percorrono in auto, a velocità costante, un percorso di 400km, ma in senso opposto. Sapendo che partono alla stessa ora dagli estremi del percorso e che Carlo corre a 120km/h mentre Luigi viaggia a 80km/h, calcolare dopo quanto tempo si incontrano.

14.73 (*, †). Un fiorista ordina dei vasi di stelle di Natale che pensa di rivendere a € 12 al vaso con un guadagno complessivo di € 320. Le piantine però sono più piccole del previsto, per questo è costretto a rivendere ogni vaso a € 7 rimettendoci complessivamente € 80. Quanti sono i vasi comprati dal fiorista?

14.74 (*, †). Un contadino possiede 25 tra galline e conigli; determinare il loro numero sapendo che in tutto hanno 70 zampe.

14.75 (*, †). Un commerciante di mele e pere carica nel suo autocarro 139 casse di frutta per un peso totale di $23,5$ quintali. Sapendo che ogni cassa di pere e mele pesa rispettivamente 20kg e 15kg, determinare il numero di casse per ogni tipo caricate.

14.76 (*, †). Determina due numeri uno triplo dell'altro sapendo che dividendo il maggiore aumentato di 60 per l'altro diminuito di 20 si ottiene 5.

14.77 (*, †). Un quinto di uno sciame di api si posa su una rosa, un terzo su una margherita. Tre volte la differenza dei due numeri vola sui fiori di pesco, e rimane una sola ape che si libra qua e là nell'aria. Quante sono le api dello sciame?

14.78 (*, †). Per organizzare un viaggio di 540 persone un'agenzia si serve di 12 autobus, alcuni con 40 posti a sedere e altri con 52; quanti sono gli autobus di ciascun tipo?

14.79 (†). Il papà di Paola ha venti volte l'età che lei avrà tra due anni e la mamma, cinque anni più giovane del marito, ha la metà dell'età che avrà quest'ultimo fra venticinque anni; dove si trova Paola oggi?

14.2.3 Problemi di geometria

14.80 (*). In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è $\frac{3}{7}$ dell'altro angolo acuto. Quanto misurano gli angoli del triangolo?

14.81 (*). In un triangolo un angolo è il $\frac{3}{4}$ del secondo angolo, il terzo angolo supera di $10°$ la somma degli altri due. Quanto misurano gli angoli?

14.82. In un triangolo ABC, l'angolo in A è doppio dell'angolo in B e l'angolo in C è doppio dell'angolo in B. Determina i tre angoli.

14.83. Un triangolo isoscele ha il perimetro di 39. Determina le lunghezze dei lati del triangolo sapendo che la base è $\frac{3}{5}$ del lato.

14.84 (*). Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122m, la base di 24m. Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti?

14.85 (*). Un trapezio rettangolo ha la base minore che è $\frac{2}{5}$ della base minore e l'altezza è $\frac{5}{4}$ della base minore. Sapendo che il perimetro è $294,91$m, calcola l'area del trapezio.

14.86 (*). Determina l'area di un rettangolo che ha la base che è $\frac{2}{3}$ dell'altezza, mentre il perimetro è 144cm.

14.87 (*). Un trapezio isoscele ha la base minore pari a $\frac{7}{13}$ della base maggiore, il lato obliquo è pari ai $\frac{5}{6}$ della differenza tra le due basi. Sapendo che il perimetro misura 124cm, calcola l'area del trapezio.

14.88 (*). Il rettangolo $ABCD$ ha il perimetro di 78cm, inoltre sussiste la seguente relazione tra i lati: $\overline{AD} = \frac{8}{5}\overline{AB} + 12\text{cm}$. Calcola l'area del rettangolo.

14.89 (*). Un rettangolo ha il perimetro che misura 240cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettagolo.

14.90 (*). In un rettangolo l'altezza supera di 3cm i $\frac{3}{4}$ della base, inoltre i $\frac{3}{2}$ della base hanno la stessa misura dei $\frac{2}{3}$ dell'altezza. Calcola le misure della base e dell'altezza.

14.91 (*). In un triangolo isoscele la base è gli $\frac{8}{5}$ del lato ed il perimetro misura 108cm. Trovare l'area del triangolo e la misura dell'altezza relativa ad uno dei due lati obliqui.

14.92 (*). In un rombo la differenza tra le due diagonali è di 3cm. Sapendo che la diagonale maggiore è $\frac{4}{3}$ della minore, calcolare il perimetro del rombo.

14.93 (*). Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che la minore è uguale a $\frac{1}{3}$ della maggiore e che la differenza tra il doppio della minore e la metà della maggiore è di 10cm. Calcolare inoltre il lato del quadrato avente la stessa area del rettangolo dato.

14.94 (*). Antonello e Gianluigi hanno avuto dal padre l'incarico di arare due campi, l'uno di forma quadrata e l'altro rettangolare. "Io scelgo il campo quadrato - dice Antonello, - dato che il suo perimetro è di 4 metri inferiore a quello dell'altro". "Come vuoi! - commenta il fratello - Tanto, la superficie è la stessa, dato che la lunghezza di quello rettangolare è di 18 metri superiore alla larghezza". Qual è l'estensione di ciascun campo?

14.95 (*). In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la base minore hanno la stessa lunghezza. La base maggiore supera di 7cm i $\frac{4}{3}$ della base minore. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la somma delle basi è 42cm.

14.96 (*). L'area di un trapezio isoscele è 168cm^2, l'altezza è 8cm, la base minore è $\frac{5}{9}$ della maggiore. Calcolare le misure delle basi, del perimetro del trapezio e delle sue diagonali.

14.97 (*). Le due dimensioni di un rettangolo differiscono di 4cm. Trovare la loro misura sapendo che aumentandole entrambe di 3cm l'area del rettangolo aumenta di 69cm^2.

14.98 (*). In un quadrato $ABCD$ il lato misura 12cm. Detto M il punto medio del lato AB, determinare sul lato opposto CD un punto N tale che l'area del trapezio $AMND$ sia metà di quella del trapezio $MBCN$.

14.99 (*). Nel rombo $ABCD$ la somma delle diagonali è 20cm ed il loro rapporto è $\frac{2}{3}$. Determinare sulla diagonale maggiore AC un punto P tale che l'area del triangolo APD sia metà di quella del triangolo ABD.

14.100. In un rettangolo $ABCD$ si sa che $\overline{AB} = 91\text{m}$ e $\overline{BC} = 27\text{m}$; dal punto E del lato AB, traccia la perpendicolare a DC e indica con F il punto d'intersezione con lo stesso lato. Determina la misura di AE, sapendo che $\text{Area}(AEFD) = \frac{3}{4}\,\text{Area}(EFCB)$.

14.2.4 Risposte

14.1 18; 52.

14.2 21; 80.

14.3 19; 21.

14.4 10.

14.6 11.

14.7 2500.

14.8 $\frac{1}{30}$.

14.9 76.

14.10 $\frac{11}{12}$.

14.11 159.

14.12 45.

14.13 25.

14.14 -12.

14.15 1.

14.16 Indeterminato.

14.17 1.

14.18 8.

14.20 72.

14.21 $72; 8$.

14.22 $60; 60; 60$.

14.23 12.

14.27 46.

14.28 $5; 7$.

14.29 56.

14.31 8.

14.33 Indeterminato.

14.34 2.

14.36 426.

14.37 $216; 360$.

14.38 $24; 25$.

14.39 10.

14.40 $36; 24; 18$.

14.41 16.

14.43 64.

14.44 28.

14.49 16.

14.50 $80'$.

14.51 20kg.

14.53 Impossibile.

14.55 € 46.

14.56 $1, 2, 4, 6, 16, \dots$

14.57 24.

14.58 € 20000.

14.59 $15; 18$.

14.60 € 303; € 215.

14.61 $7; 21$.

14.62 23.

14.63 € 243000.

14.64 $250'$.

14.65 € 20000; 5%.

14.66 € 3.

14.67 800km.

14.68 2 anni fa.

14.69 84.

14.70 27cm.

14.71 15kg.

14.72 2 ore.

14.73 80.

14.74 15 galline e 10 conigli.

14.75 $80; 50$.

14.76 $240; 80$.

14.77 15.

14.78 7 da 40 posti e 5 da 52.

14.80 $63°; 27°; 90°$.

14.81 $36°, 43; 48°, 57; 95°$.

14.84 49m.

14.85 4235cm^2.

14.87 $683,38\text{cm}^2$.

14.88 $297,16\text{cm}^2$.

14.89 2700cm^2.

14.90 $2; \frac{9}{2}$.

14.91 $432\text{cm}^2; 28,8\text{cm}$.

14.92 30cm.

14.93 $60\text{cm}; 20\text{cm}; 20\sqrt{3}\text{cm}$.

14.94 1600m^2.

14.95 189cm^2.

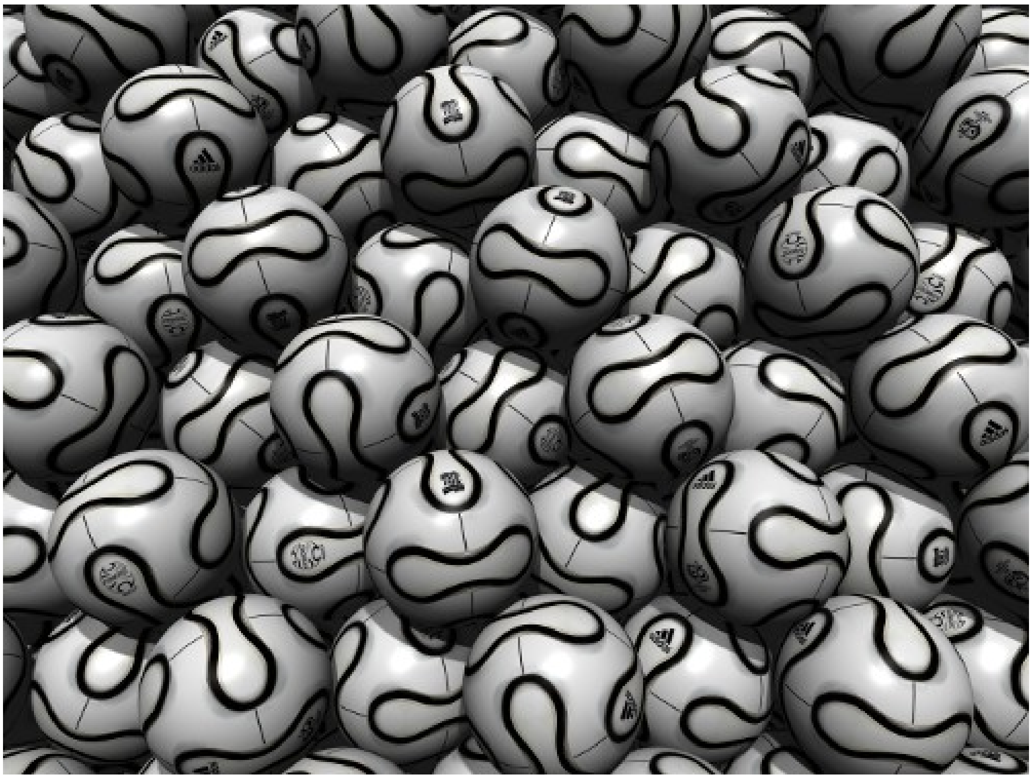
14.96 $27\text{cm}; 15\text{cm}; 62\text{cm}; 22,47\text{cm}$.

14.97 $12\text{cm}; 8\text{cm}$.

14.98 $DN = 2\text{cm}$.

14.99 $AP = 6\text{cm}$.

Dati e previsioni IV



"FIFA FCC Packing"
Foto di fdecomite
http://www.flickr.com/photos/fdecomite/2624192405/

Statistica descrittiva 15

15.1 Indagine statistica

Il termine statistica significa *scienza dello stato*. Questo termine venne usato per la prima volta nel XVI secolo per indicare lo studio dei dati utili al governo degli stati prevalentemente relativi a fenomeni di carattere demografico (nascite, morti, etc). Negli anni, la statistica si è estesa ai campi più disparati: fisica, psicologia, ricerca di mercato, indici di gradimento, sondaggi, meteorologia. . . È nata essenzialmente con lo scopo di descrivere i fenomeni (statistica descrittiva), successivamente è divenuta uno strumento utile anche per fare previsioni (statistica inferenziale). In grandi linee si può definire come la scienza che si occupa della raccolta e dell'analisi dei dati relativi ad un certo gruppo di persone, animali o oggetti al fine di descrivere in maniera sintetica un fenomeno che li riguarda e fare eventualmente previsioni sul suo andamento futuro.

Ad esempio la statistica cerca di fare previsioni su domande del tipo:

- quanta acqua sarà necessaria in Italia fra 3 anni?
- quanta corrente elettrica sarà necessaria per il fabbisogno nazionale fra 5 anni?
- quale sarà il tasso di disoccupazione nazionale fra 1 anno?

Definizione 15.1. L'insieme di elementi oggetto dell'indagine statistica è detta *popolazione* o universo, mentre ciascun elemento della popolazione è detto *unità statistica*.

Sono esempi di *popolazione statistica* gli abitanti di una città in un certo anno, i prezzi di un determinato bene, le temperature massime registrate in una giornata in un particolare luogo, i ciclomotori circolanti in Italia, gli alunni di una scuola.

Definizione 15.2. Per ogni unità statistica si possono studiare una o più caratteristiche ed ognuna di tali caratteristiche costituisce un *carattere* della popolazione oggetto di indagine. I caratteri possono essere di tipo qualitativo o quantitativo. Si definisce *modalità* del carattere indagato ciascuno dei diversi modi in cui esso può presentarsi.

Sono esempi di *carattere qualitativo* il colore degli occhi, il colore dei capelli, il tipo di scuola frequentato, il gradimento di un certo programma televisivo. Le modalità di un carattere qualitativo sono espresse mediante nomi o aggettivi. I caratteri qualitativi sono a loro volta suddivisi in *ordinabili* (il tipo di scuola frequentato è ordinabile a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla laurea, il gradimento di un programma televisivo è ordinabile a partire dalla completa mancanza di gradimento fino al gradimento massimo) e *non ordinabili* o sconnessi (colore degli occhi, colore dei capelli).

Sono invece *caratteri quantitativi* l'età, l'altezza, il numero di auto prodotte da una fabbrica. Le modalità di un carattere quantitativo sono espresse mediante numeri. I caratteri quantitativi possono invece essere di tipo *discreto*, quando assumono solo valori puntuali, oppure di tipo *continuo*, quando possono assumere tutti gli infiniti valori compresi in un determinato intervallo. Sono esempi di caratteri quantitativi discreti il numero di figli in una famiglia, i pezzi prodotti in una catena di montaggio; sono esempi di caratteri continui l'altezza di una persona, il peso di una persona, la lunghezza di un fiume.

L'indagine statistica può riguardare l'intera popolazione (in tal caso si parla di *censimento*) oppure solo una sua parte (in tal caso si parla di indagine a campione). Supponiamo di voler effettuare un'indagine sulle persone che fumano in Italia. Il fenomeno collettivo in esame è il fumo, la popolazione di riferimento è costituita dalla popolazione italiana in età adulta, l'unità statistica è rappresentata da ogni cittadino oggetto dell'indagine, i caratteri oggetto dell'indagine possono essere "fumatore / non fumatore", "numero di sigarette fumate", che cosa si fuma: pipa, sigaro, sigaretta. Data l'elevata numerosità della popolazione di riferimento la tipologia di indagine preferibile è quella a campione.

A sua volta, l'indagine a campione può essere effettuata su un *campione casuale*, quando si scelgono a caso i campioni all'interno della popolazione o su un *campione stratificato*, quando si suddivide la popolazione in classi o strati senza specifici criteri e per ogni strato si prende a caso un campione.

15.2 Fasi di un'indagine statistica

Definizione 15.3. Dato un carattere oggetto di rilevazione, si definisce *frequenza* il numero delle unità statistiche su cui una sua modalità si presenta.

Affinché un'indagine statistica sia rigorosa è necessario che sia strutturata secondo le seguenti fasi:

a) Studio del problema e impostazione dell'indagine statistica. Si individua in maniera precisa lo scopo della ricerca, il fenomeno sul quale indagare, la popolazione statistica di riferimento, le singole unità statistiche ed il carattere, o caratteri, oggetto di indagine.
b) Rilevazione dei dati statistici. La rilevazione non è altro che la raccolta dei dati statistici riguardanti ogni elemento della popolazione e relativi al fenomeno che si vuole analizzare. La rilevazione può avvenire secondo diverse modalità:

   rilevazione diretta o globale: viene eseguita direttamente su tutte le unità statistiche che formano la popolazione;

   rilevazione indiretta o parziale: eseguita solo su una parte della popolazione. Si deve scegliere in tal caso un sottoinsieme della popolazione, detto campione che deve essere rappresentativo della popolazione di riferimento.

c) Spoglio delle schede e tabulazione. Contemporaneamente o successivamente al rilevamento, i dati raccolti vengono ordinati, suddivisi in classi omogenee e riassunti tramite tabelle dette *tabelle statistiche*.
d) Rappresentazione dei dati statistici. La rappresentazione può avvenire attraverso diversi tipi di grafico:

   diagramma cartesiano: rappresentazione nel piano cartesiano dei valori della variabile sull'asse orizzontale e delle relative frequenze sull'asse verticale;

   ideogramma: si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo;

diagramma a nastri o a bastoni: grafico composto da segmenti o barre (orizzontali o verticali) proporzionali alle frequenze;

areogramma: grafico a forma di cerchio composto da settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze;

istogramma: grafico composto da rettangoli aventi area proporzionale alla frequenza.

e) Elaborazione dei dati. Vengono elaborati i dati tabulati al fine di costruire opportuni indici di sintesi.
f) Interpretazione dei risultati. Attraverso i grafici e gli indici è possibile descrivere le caratteristiche peculiari del fenomeno analizzato.

Analizziamo in dettaglio le singole fasi.

15.2.1 Spoglio delle schede e tabulazione

Dopo aver raccolto i dati per ciascuna modalità del carattere o per ciascuna classe individuata si deve determinare:

- la *frequenza assoluta*, cioè il numero di volte con cui si presenta una modalità del carattere indagato;
- la *frequenza relativa*, cioè il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale dei casi presi in esame;
- la *frequenza percentuale*, cioè la frequenza relativa moltiplicata per 100.

Si compila poi una tabella di frequenza che sintetizza la raccolta dei dati, come nell'esempio seguente.

Esempio 15.1. La tabella seguente fornisce la distribuzione di frequenze assolute degli alunni di una classe rispetto al carattere sesso.

Sesso	Femmine	Maschi	Totale
Numero di alunni	15	12	27

Per costruirla, si è operata la classificazione della popolazione degli alunni della classe rispetto ad un determinato carattere (il sesso), sono state individuate le modalità con cui questo si è manifestato (femmina, maschio) ed è stato effettuato il conteggio delle unità in corrispondenza di ciascuna modalità (frequenza assoluta). Dalle frequenze assolute si ricavano le frequenze relative: 15 alunni su 27 sono femmine: la frazione è di $15/27$ femmine sul totale degli alunni. Dall'operazione 15 diviso 27 otteniamo 0,56 (approssimando a due cifre decimali) che è la frequenza relativa. La frazione può essere espressa in forma percentuale: 0,56 equivale a dire 56 su 100 ed è consuetudine scriverlo in forma percentuale 56%, esso indica la frequenza percentuale.

Ripetendo lo stesso procedimento per i maschi si ottiene la seguente tabella delle frequenze:

Sesso	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
Femmine	15	0,56	56%
Maschi	12	0,44	44%

Si può concludere che la classe è formata per il 56% da femmine e per il restante 44% da maschi.

Esempio 15.2. Supponiamo che i voti elencati di seguito siano quelli riportati in matematica a fine trimestre nella tua classe: 5, 4, 6, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 5, 6, 7.

Per poter effettuare una lettura più agevole si costruisce una tabella in cui vengono riportati sulla prima colonna i singoli valori rilevati in ordine crescente (modalità del carattere), nella seconda la frequenza assoluta, cioè quante volte compare quel determinato voto e nella terza la frequenza relativa:

Voto riportato	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
4	1	$1/12 = 0,083$	$8,30\%$
5	3	$3/12 = 0,25$	$25,00\%$
6	3	$3/12 = 0,25$	$25,00\%$
7	3	$3/12 = 0,25$	$25,00\%$
8	2	$2/12 = 0,167$	$16,70\%$
Totale	12	$12/12 = 1$	100%

Per determinare la frequenza percentuale è sufficiente moltiplicare per 100 la frequenza relativa.

Esempio 15.3. Misurando l'altezza di un gruppo di cani di razza pastore italiano si sono ottenute le seguenti misure in cm:

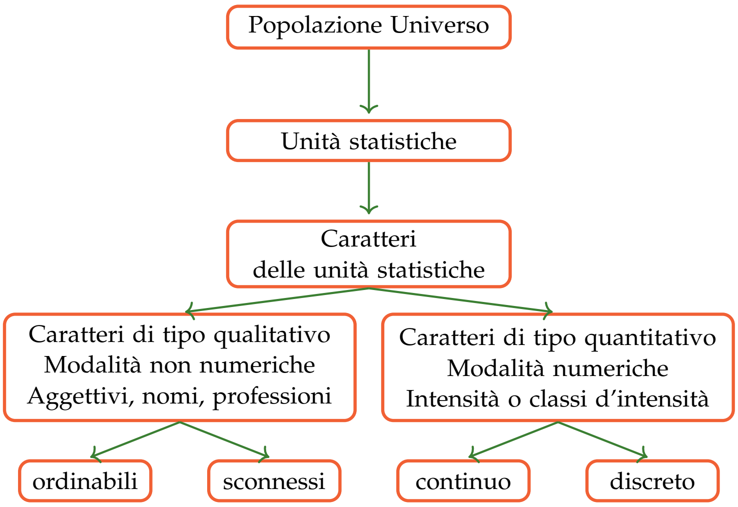
57,1	60,8	60,7	56,2	59,5	62,4	56,1	61,2	54,5	64,5	57,5	58,3	55,2
58,7	57,2	56,1	58,9	57,7	53,2	59,2	58,9	54,5	55,3	62,1	59,0	58,3
61,3	60,1	56,4	60,2	61,7	57,3	58,3	59,5	62,6	59,4	58,3	59,4	59,4
59,3	57,6	60,0	60,7	56,7	61,1	59,8	55,3	63,9	58,0	55,2	54,9	53,8

Il carattere indagato nella popolazione cani pastore italiano è di tipo quantitativo continuo; con questo tipo di dati è praticamente impossibile calcolare le frequenze se le altezze non si raggruppano in classi.

Vediamo come procedere: osservando i dati ottenuti si nota che il valore minore è $53,8$ mentre il valore maggiore è $64,7$. Possiamo allora suddividere i dati in gruppi partendo da $53,0$cm fino a $65,0$cm. Si potrebbero allora formare classi di ampiezza 1cm. Si ottiene la seguente tabella:

Classe (cm)	Frequenza assoluta	Frequenza percent.	Classe (cm)	Frequenza assoluta	Frequenza percent.
53,0-53,9	2	$3,85\%$	59,0-59,9	9	$17,31\%$
54,0-54,9	3	$5,77\%$	60,0-60,9	6	$11,54\%$
55,0-55,9	4	$7,69\%$	61,0-61,9	4	$7,69\%$
56,0-56,9	5	$9,61\%$	62,0-62,9	3	$5,77\%$
57,0-57,9	6	$11,54\%$	63,0-63,9	1	$1,92\%$
58,0-58,9	8	$15,38\%$	64,0-64,9	1	$1,92\%$
Totale	52				

Riassumendo



15.2.2 Rappresentazione grafica

La rappresentazione grafica dei dati statistici facilita notevolmente lo studio delle caratteristiche del fenomeno statistico che si sta esaminando; infatti dopo aver impostato l'indagine, raccolto, classificato ed elaborato i dati nelle tabelle, i dati non sempre si presentano in una forma di facile lettura ed il loro significato e la loro interpretazione rimane poco chiara. Attraverso la rappresentazione grafica, i risultati dell'indagine emergono immediatamente, in maniera diretta e sintetica.

La rappresentazione grafica può avvenire utilizzando diversi tipi di grafico a seconda delle caratteristiche da analizzare.

Diagramma cartesiano

La rappresentazione grafica attraverso un diagramma cartesiano dà, in modo immediato, informazioni sull'andamento globale del fenomeno e viene utilizzato prevalentemente per la rappresentazione di serie storiche (per esempio, per rappresentare il numero di auto prodotte per anno da una fabbrica) oppure quando si hanno due caratteri quantitativi e si vuol analizzare il tipo di legame esistente fra di essi.

Esempio 15.4. Consideriamo la tabella statistica relativa alla domanda "quante ore al giorno passi al computer?", posta ad un campione di 50 ragazzi dai 16 ai 24 anni.

Rappresentiamo la tabella attraverso un diagramma cartesiano costruito tracciando due rette perpendicolari, gli assi, quello verticale orientato verso l'alto e quello orizzontale orientato verso destra. Riportiamo sull'asse orizzontale il numero di ore e sull'asse verticale il numero di ragazzi e determiniamo i punti aventi come coordinate (numero ore; numero ragazzi).

Il punto A avrà come coordinate 0 e 4, il punto B avrà come coordinate 1 e 6 e così via. Uniamo poi i punti con segmenti e otteniamo il diagramma cartesiano (grafico 15.1). Precisamente $A(0;4)$, $B(1;6)$, $C(2;12)$, $D(3;16)$, $E(4;8)$, $F(5;4)$, $G(6;2)$.

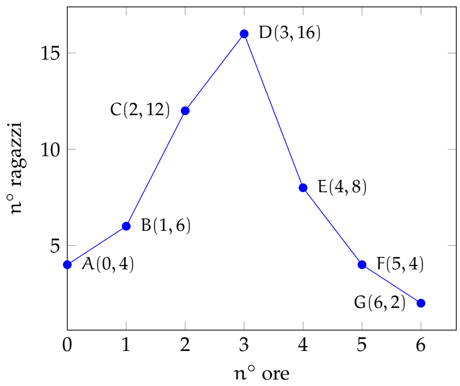


GRAFICO 15.1: Esempio 24.4

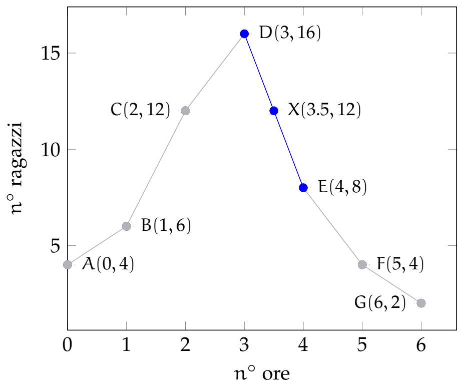


GRAFICO 15.2: Esempio 24.4

Numero di ore	0	1	2	3	4	5	6
Numero di ragazzi	4	6	12	16	8	4	2

Dal grafico 15.2 si può notare immediatamente che la maggior parte dei ragazzi trascorre dalle 2 alle 3 ore al computer dato che il picco più alto si ha proprio nei punti C e D. Si può notare che, ad esempio, il punto X di coordinate (3.5; 12), appartenente al segmento di congiunzione tra i punti D ed E, non ha significato reale, dato che le sue coordinate non sono riportate nella tabella statistica del fenomeno da studiare.

Ideogramma

Nella rappresentazione grafica attraverso *ideogramma* si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo che si assume come *unità grafica*; il simbolo richiama l'oggetto dell'indagine e dà quindi una visione immediata del fenomeno. Ad esempio si può utizzare un uomo stilizzato per rappresentare un dato riguardante il numero di persone che vivono in un determinato territorio, una macchina per la produzione annua di automobili in una fabbrica, e così via. Tale tipo di rappresentazione è spesso usata in campo pubblicitario perché di largo impatto visivo.

Esempio 15.5. Un istituto scolastico ha visto aumentare i suoi iscritti, dall'anno scolastico 2003-2004 all'anno 2008-2009 secondo questa tabella:

Anno scolastico	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07	2007-08	2008-09
Iscritti	150	200	200	325	375	450

Possiamo rappresentare mediante ideogramma i dati contenuti nella tabella statistica. Consideriamo una faccina stilizzata come unità grafica assegnandole il valore di 50 ragazzi iscritti.

 = 50 iscritti

Il numero degli iscritti di ogni anno scolastico sarà rappresentato da tante unità grafiche quanti sono i gruppi di 50 iscritti. Per avere il grafico relativo all'anno 2003-2004 si devono usare tre faccine, in quanto $150 : 50 = 3$.

a.s. 2003-2004 = 

Se la divisione del numero degli iscritti per 50 dà resto, esso si dovrà rappresentare disegnando solo una parte dell'unità grafica, corrispondente alla frazione tra resto e 50. Ad esempio nell' a.s. 2006-2007 ci sono stati 325 iscritti; $325 : 50 = 6$ col resto di 25, quindi 325 sarà uguale a 6 unità grafiche e $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ unità grafica, cioè mezza faccina.

a.s. 2006-2007 = 

Il grafico completo sarà:

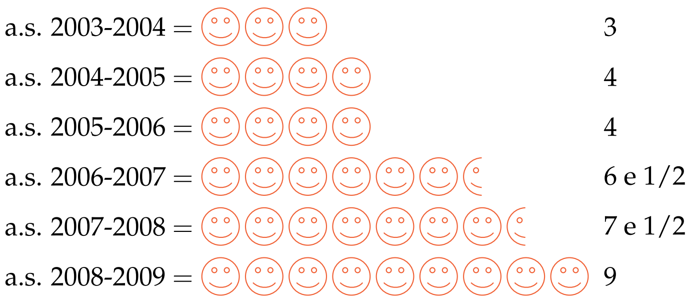


Diagramma a barre o a colonne

Questo tipo di rappresentazione, detta anche diagramma a nastri o a bastoni, viene usata quando si vuole fornire un'idea delle frequenze delle diverse modalità di un fenomeno, in genere si usa per caratteri qualitativi o quantitativi discreti. Per poter valutare il significato statistico della lunghezza dei nastri o delle colonne è necessario scegliere opportunamente una scala di riferimento: la larghezza del nastro è arbitraria ma uguale per tutti i nastri, la lunghezza è proporzionale alla caratteristica che si deve rappresentare. I nastri e le colonne possono inoltre essere suddivisi in parti di colori diversi per indicare le singole componenti o i singoli fenomeni che si vogliono analizzare.

La differenza fra la rappresentazione a barre e quella a colonne, detta anche istogramma, consiste soltanto nell'orientamento del grafico: nel diagramma a nastri si indicano le modalità del carattere sull'asse verticale e le frequenze sull'asse orizzontale, mentre in quello a colonne le modalità del carattere sono riportate sull'asse orizzontale e le frequenze su quello verticale.

Di seguito vengono riportate le due tipologie di grafico accompagnate dalla tabella di riferimento:

Materia	Italiano	Storia	Geografia	Matem.	Scienze	Ed. Fisica	Totale
Maschi	5	4	4	2	6	5	26
Femmine	3	7	2	3	4	5	24

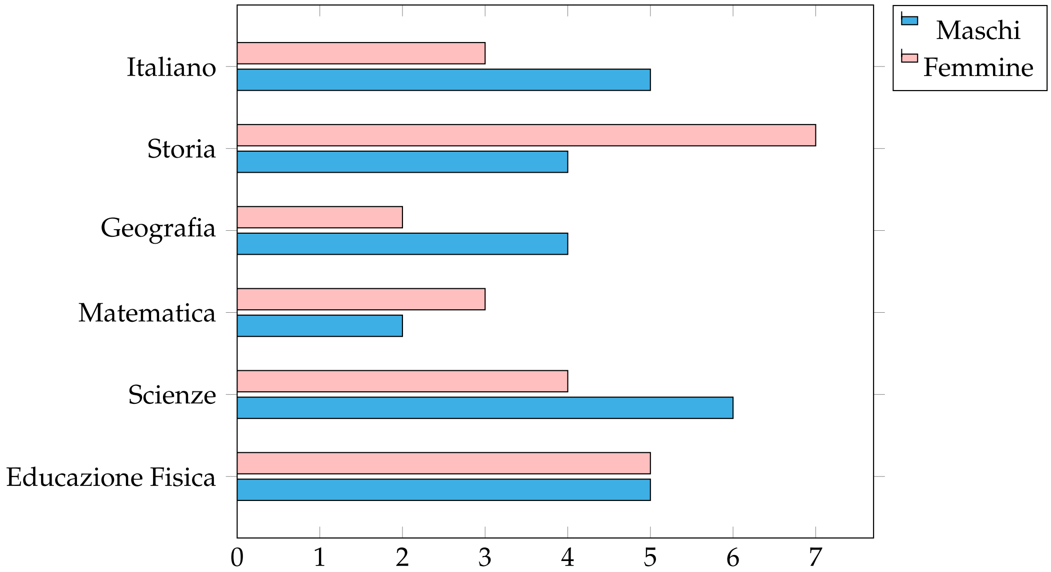


FIGURA 15.1: Diagramma a barre

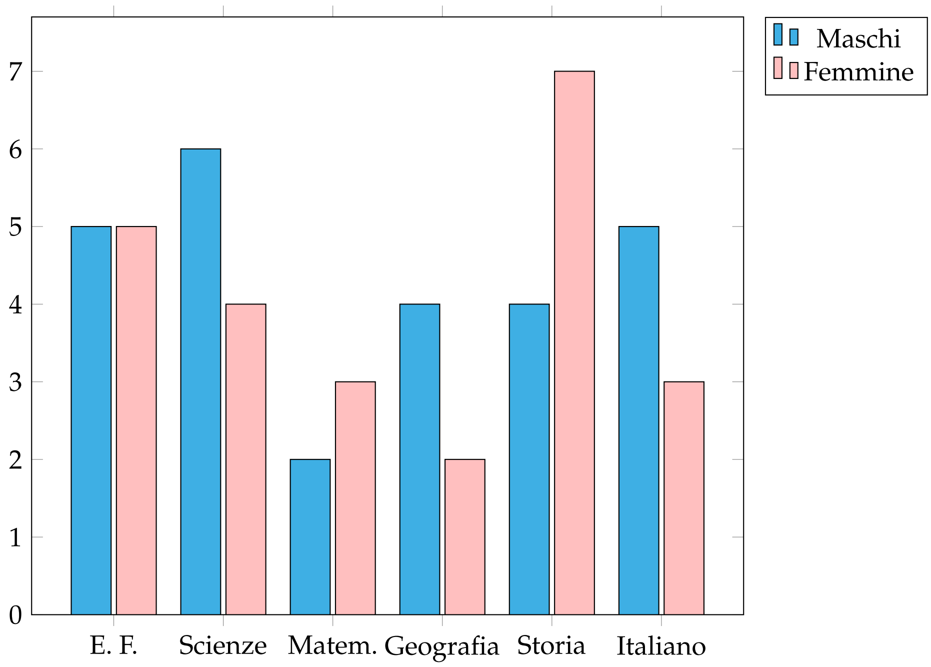


FIGURA 15.2: Diagramma a colonne

Areogramma

Questo tipo di rappresentazione viene utilizzato quando si vogliono evidenziare le parti che compongono un fenomeno, per esempio per indicare come si dividono gli alunni di una classe in maschi e femmine, o per rappresentare in che modo le varie voci di spesa incidono sul bilancio familiare. Il grafico si ottiene dividendo un cerchio in settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze che rappresentano. Per disegnare l'areogramma, si disegna una circonferenza di diametro arbitrario e si fa corrispondere l'angolo al centro di 360°, con il 100% di frequenza percentuale; per ottenere gli angoli corrispondenti a frequenze percentuali minori, si risolve la proporzione $360° : X° = 100 : X$. Si suddivide così la circonferenza negli angoli ottenuti e si colorano o retinano diversamente i settori circolari ottenuti.

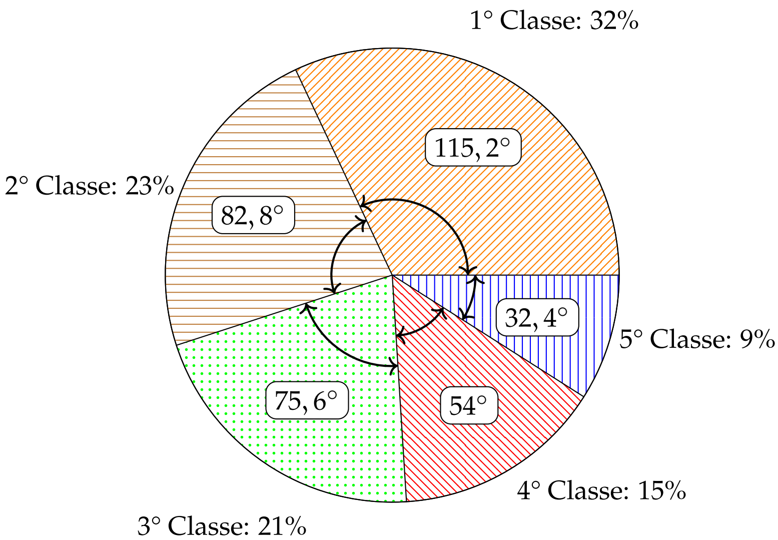
Esempio 15.6. Consideriamo la seguente tabella statistica che indica gli studenti, divisi per classe, frequentata di un dato istituto scolastico, in un dato anno.

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Studenti	320	230	212	152	96	1010

Nella tabella sono indicate le frequenze assolute; calcoliamo ora le frequenze percentuali degli studenti. Per la 1° classe si ha: $\frac{320}{1010} = 0,32$ arrotondato alla seconda cifra decimale, che equivale al 32% e così via per le classi successive.

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Frequenze percentuali	32,00%	23,00%	21,00%	15,00%	9,00%	100%

Rappresentiamo graficamente mediante areogramma i dati contenuti nella tabella precedente.



Per ottenere l'angolo relativo alla frequenza percentuale della 1° classe si fa: $360° \cdot \frac{32}{100} = 115,2°$ e per la 2° classe: $360° \cdot \frac{23}{100} = 82,2°$ e cosi via per le altre classi.

Dal grafico si può notare immediatamente che la classe frequentata di più è la prima.

Istogramma

Si utilizza la rappresentazione grafica attraverso istogramma quando il carattere analizzato è di tipo quantitativo ed i dati sono raggruppati in classi.

Prima di tutto si distribuiscono i dati in classi o gruppi e si determina il numero di individui appartenenti a ciascuna classe, questo numero è detto *frequenza della classe*. Riportando tali dati in una tabella si ottiene la distribuzione delle frequenze. Poiché le classi potrebbero avere ampiezze diverse si calcola la *densità di frequenza*, definita come rapporto fra la frequenza della classe e la relativa ampiezza.

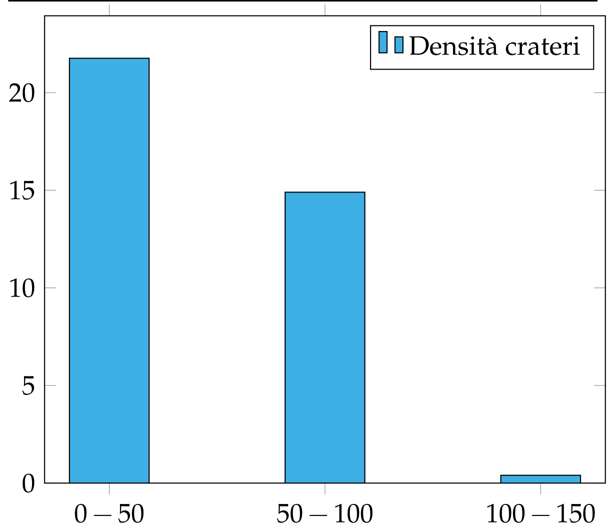
Per disegnare un istogramma si tracciano due assi; sull'asse verticale, orientato verso l'alto, si fissa un segmento unitario e si riportano le frequenze. L'asse orizzontale, orientato verso destra, è invece suddiviso in tanti segmenti la cui ampiezza è pari a quella delle singole classi. Il grafico consiste in un insieme di rettangoli aventi per base ogni classe e altezza la densità di frequenza corrispondente. In tal modo l'area di ogni rettangolo rappresenta la frequenza corrispondente a ciascuna classe.

Esempio 15.7. Costruiamo un istogramma a partire dalla distribuzione di frequenza riportata nella seguente tabella:

Diametro crateri lunari (km)	Numero di crateri
$0-50$	1088
$50-100$	745
$100-150$	20

Innanzitutto dobbiamo determinare per ogni classe la densità di frequenza che si ottiene dividendo la frequenza assoluta per l'ampiezza della classe:

Diametro crateri lunari (km)	Densità
$0-50$	$1088/50 = 21,76$
$50-100$	$745/50 = 14,9$
$100-150$	$20/50 = 0,4$



Esempio 15.8. Consideriamo la seguente tabella statistica che riporta i giorni di pioggia di ogni mese, in un dato anno e in una data città.

Mesi	Giorni di pioggia	Mesi	Giorni di pioggia
Gennaio	15	Luglio	1
Febbraio	10	Agosto	3
Marzo	14	Settembre	3
Aprile	8	Ottobre	5
Maggio	5	Novembre	9
Giugno	2	Dicembre	11

Dividiamo i mesi dell'anno in classi, raggruppandoli in stagioni. Luglio, Agosto e Settembre appartengono alla classe dell'Estate e la frequenza di questa classe è data dalla somma delle frequenze di ogni mese. Cioè $1+3+3=7$.

Stagioni	Estate	Autunno	Inverno	Primavera
Giorni di pioggia	7	25	39	15

Si prosegue in questo modo per ogni classe ottenendo cosi la distribuzione delle frequenze che riportiamo nella tabella. Costruire ora l'istogramma corrispondente alla tabella precedente riportando sull'asse orizzontale le classi (stagioni) e su quello verticale le frequenze.

15.3 Indici di posizione

Gli indici di posizione vengono utilizzati per sintetizzare i dati di una distribuzione di frequenza per mezzo di un solo numero. A seconda del tipo di carattere oggetto dell'indagine statistica possono essere utilizzati valori medi diversi.

15.3.1 Moda

Definizione 15.4. La *moda* è la modalità del carattere indagato che si presenta più frequentemente.

In una successione di n modalità $x_1, x_2, \dots, x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, \dots, f_n$, la moda è la modalità che ha la frequenza maggiore. Questo valore può essere calcolato per qualunque tipo di carattere, sia qualitativo che quantitativo. Se il carattere è quantitativo continuo con dati raggruppati in classi non è possibile determinare con esattezza la moda, ci si limita ad individuare la classe modale definita come la classe cui è associata la massima densità di frequenza.

Esempio 15.9. Nella tabella seguente sono riportati i numeri degli studenti, divisi per classe, della sezione A di un dato istituto, in un dato anno. Si può osservare che la 1° classe presenta la frequenza massima di 320 studenti, quindi la moda è la classe prima.

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Studenti	320	230	212	152	96	1010

Esempio 15.10. La tabella raccoglie i dati relativi alla domanda "quante ore la settimana pratichi sport?", posta ad un campione di 50 ragazzi dai 18 ai 25 anni. Si può osservare che 12 e 18 ore presentano la frequenza massima 14, quindi si hanno due mode 12 ore e 18 ore. La distribuzione è bimodale.

Numero di ore	0	4	8	12	16	18	22	Totale
Numero di ragazzi	4	1	3	14	8	14	6	50

Esempio 15.11. La tabella seguente è relativa alla distribuzione delle altezze di un gruppo di studenti.

Altezza	160-165	165-170	170-175	175-185	185-200	Totale
Numero di studenti	5	8	15	10	2	40

Poiché le classi hanno ampiezza diversa è necessario calcolare la densità di frequenza.

Altezza	160-165	165-170	170-175	175-185	185-200
Densità di frequenza	1	1,6	3	1	0,13

La massima densità di frequenza si ha in corrispondenza della classe 170-175, essa rappresenta quindi la classe modale.

15.3.2 Media aritmetica

Definizione 15.5. La *media aritmetica* semplice o media aritmetica è il valore ottenuto sommando tutti i dati e dividendo tale somma per il numero dei dati.

Se abbiamo n dati $x_1, x_2, \dots, x_n$ la media aritmetica semplice M è:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esempio 15.12. Riprendiamo in esame la tabella relativa agli studenti, divisi per classe frequentata di un dato istituto scolastico, in un dato anno. Calcoliamo la media aritmetica semplice.

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Studenti	320	230	212	152	96	1010

Per calcolare la media aritmetica semplice degli studenti, sommiamo tutti gli studenti delle cinque classi e dividiamo tale somma per il numero delle classi:

$$M = \frac{320 + 230 + 212 + 152 + 96}{5} = \frac{1010}{5} = 202.$$

Possiamo dire che *in media* si hanno 202 studenti per ogni classe.

Definizione 15.6. Si definisce *scarto dalla media* (aritmetica) la differenza tra i valori osservati e la media.

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono i valori osservati, M la media aritmetica, gli scarti sono $s_1 = x_1 - M$, $s_2 = x_2 - M$, ..., $s_n = x_n - M$.

Esempio 15.13. Calcoliamo gli scarti dalla media per la distribuzione "studenti per tipologia di classe frequentata", la cui media è $1010/5 = 202$.

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Studenti	320	230	212	152	96	1010
Scarto	118	28	10	−50	106	0

Si può osservare che vi solo valori superiori alla media e altri inferiori, tanto che lo scarto è rappresentato in alcuni casi da un numero positivo, in altri da un numero negativo. Si può verificare che la somma degli scarti è nulla, cioè gli scarti positivi compensano sempre quelli negativi.

Definizione 15.7. La *media aritmetica ponderata* è il valore ottenuto moltiplicando ciascun dato con la propria frequenza, sommando tutti i prodotti fra loro e dividendo tale somma per il numero totale dei dati.

Essa si usa nel caso in cui i dati sono molti ed è già stata fatta la tabella delle frequenze. In questo caso, avendo n dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la media aritmetica ponderata M è:

$$M = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i.$$

Esempio 15.14. Riprendiamo la tabella dell'esempio precedente relativa alla domanda "quante ore al giorno passi al computer?", posta ad un campione di 52 ragazzi dai 16 ai 24 anni. Calcoliamo la media aritmetica ponderata.

Numero di ore	0	1	2	3	4	5	6	Totale
Numero di ragazzi	4	6	12	16	8	4	2	52

Calcoliamo la media aritmetica ponderata:

$$M = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{4 + 6 + 12 + 16 + 8 + 4 + 2} = \frac{142}{52} = 2,73.$$

Possiamo dire che "in media" ciascun ragazzo passa circa 3 ore al giorno al computer.

15.3.3 Mediana

Definizione 15.8. La *mediana* di una successione di dati disposti in ordine crescente è il dato che occupa la posizione centrale se il numero dei dati è dispari; se il numero dei dati è pari è la media aritmetica dei dati della coppia centrale.

Poiché per calcolare la mediana i dati devono essere ordinati, è bene sottolineare che tale valore medio non può essere calcolato se il carattere in esame è di tipo qualitativo non ordinabile.

Esempio 15.15. Supponiamo di avere 7 dati disposti in ordine crescente: 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25. Allora la mediana è il valore centrale, quello che occupa la quarta posizione, il 14.

Esempio 15.16. Supponiamo di avere 8 dati disposti in ordine crescente: 1, 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25. La mediana è la media aritmetica dei dati che occupano la 4° e la 5° posizione, cioè $\frac{10+14}{2} = 12$.

Esempio 15.17. Supponiamo di avere la distribuzione di frequenza riportata nella tabella. Il numero di osservazioni è pari, quindi la mediana è il valore della variabile che corrisponde alla media dei due valori centrali, rispettivamente quelli che nella serie ordinata occupano il 13° e il 14° posto.

È necessario in questo caso determinare le *frequenze cumulate*, esse si ottengono sommando le frequenze che hanno un valore della variabile minore o uguale alla modalità corrispondente. La frequenza cumulata relativa al voto 3 rimane 2, quella relativa al voto 4 si ottiene sommando la frequenza del 3 e la frequenza del 4, cioè $2+2=4$, la frequenza cumulata relativa al voto 5 si ottiene dalla somma della frequenza del 3, del 4 e del 5 e così via. Il 14° posto corrisponde al voto 6, mentre il 15° posto è il voto 7. La mediana è 6,5.

Voto	Frequenza	Frequenza cumulata
3	2	2
4	4	4+2=6
5	3	3+4+2=9
6	5	5+3+4+2=14
7	7	7+5+3+4+2=21
8	2	2+7+5+3+4+2=23
9	2	2+2+7+5+3+4+2=25
10	1	1+2+2+7+5+3+4+2=26
Totale	26	

15.4 Indici di variabilità

Gli *indici di variabilità* vengono calcolati per analizzare in che modo i termini di una distribuzione si concentrano intorno ad un valore medio.

Definizione 15.9. Il *campo di variazione* è la differenza fra il valore massimo ed il valore minimo assunti dalla variabile: CVar=$x_{max} - x_{min}$.

Tale indice dà un'informazione molto grossolana perché tiene conto solo del primo e dell'ultimo termine della distribuzione e non tiene conto di tutti i valori intermedi. Si considerino, ad esempio, le seguenti distribuzioni di stature:

Gruppo A (statura in cm)	150	155	155	160	165	180	175
Gruppo B (statura in cm)	150	160	175	170	170	170	180

Entrambe le distribuzioni hanno lo stesso valore massimo e lo stesso valore minimo e quindi lo stesso campo di variazione, ma mentre nella prima i valori sono concentrati verso il valore minimo nella seconda si concentrano intorno al valore massimo.

L'indice non dà quindi alcuna indicazione su quest'ultima informazione. Né può essere utilizzato come indice di variabilità la media degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica perché tale valore è sempre uguale a zero.

15.4.1 Scarto medio assoluto

Definizione 15.10. Si definisce *scarto medio assoluto* la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti; esso indica quanto i valori rilevati si disperdono intorno al valore medio della distribuzione:

$$s = \frac{|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|.$$

Facendo riferimento alla distribuzione

Classe	1°	2°	3°	4°	5°	Totale
Studenti	320	230	212	152	96	1010

si ha che lo scarto medio assoluto è 62,4. Si può allora affermare che in ogni tipologia di classe si hanno in media $202 \pm\ 62,4$ iscritti.

15.4.2 Varianza e scarto quadratico medio

L'indice più utilizzato è la varianza.

Definizione 15.11. La *varianza* è la media dei quadrati degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica:

$$\text{Var}=\frac{\left[(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \cdots + (x_n - M)^2\right]}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2.$$

Lo *scarto quadratico medio* è la radice quadrata della varianza: $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$.

Se i dati si presentano sotto forma di distribuzione di frequenza la media deve essere ponderata con le singole frequenze, cioè:

$$\text{Var} = \frac{\left[(x_1 - M)^2 \cdot f_1 + (x_2 - M)^2 \cdot f_2 + \cdots + (x_n - M)^2 \cdot f_n\right]}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2 \cdot f_i.$$

La varianza assume valore zero quando tutti i valori coincidono con la media ed è tanto più grande quanto più i singoli valori si discostano dalla media. Poiché tale indice è influenzato sia dal valore della media che dall'unità di misura utilizzato spesso si utilizza un indice detto *coefficiente di variazione*.

15.4.3 Coefficiente di variazione

Definizione 15.12. Il *coefficiente di variazione* è uguale al rapporto fra scarto quadratico medio (radice quadrata della varianza) e media aritmetica:

$$\mathrm{CV} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}}}{\mathrm{Media}}$$

.

Tale indice risulta di particolare utilità per confrontare distribuzioni diverse.

Esempio 15.18. È dato l'elenco delle stature, in cm, dei ragazzi di una classe: 165, 182, 159, 173, 160, 175, 185, 190, 175, 180, 159, 185, 176, 170, 175, 160, 175, 182, 159, 185.

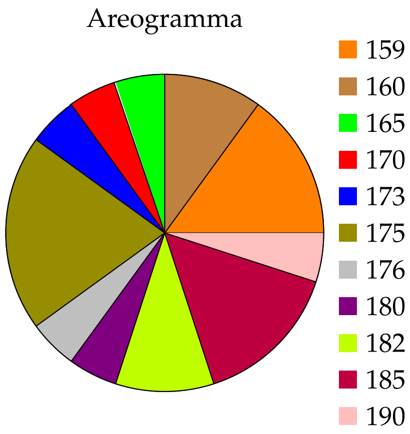
a) Ordina i dati in una tabella delle frequenze;
b) rappresenta i dati graficamente;
c) calcola la media, la mediana e la moda;
d) calcola la varianza e il coefficiente di variazione.

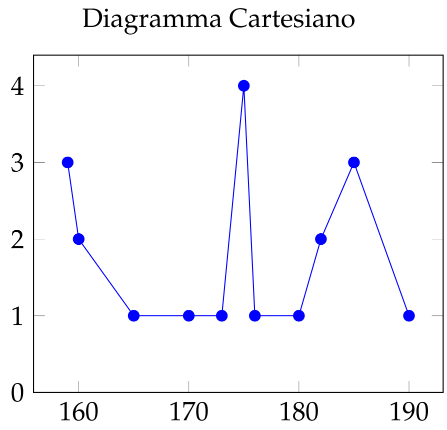
Tabella delle frequenze

Dati	Frequenze assolute	Frequenze relative	Frequenze percentuali
159	3	0,15	15%
160	2	0,1	10%
165	1	0,05	5%
170	1	0,05	5%
173	1	0,05	5%
175	4	0,2	20%
176	1	0,05	5%
180	1	0,05	5%
182	2	0,1	10%
185	3	0,15	15%
190	1	0,05	5%
Totale	20	1	100%

- ➡ La somma delle frequenze assolute indica il numero totale degli studenti;
- ➡ la somma delle frequenze relative deve avvicinarsi il più possibile a 1;
- ➡ la somma delle frequenze percentuali deve avvicinarsi il più possibile a 100.

Grafici





Calcolo della media, mediana e moda

Calcoliamo la media aritmetica:

$$\text{Media} = \frac{1}{20} \cdot (165 + 182 + 159 + 173 + 160 + 175 + 185 + 190 + 175 + 180 + 159 + 185 + 176 + 170 + 175 + 160 + 175 + 182 + 159 + 185) = 173,5.$$

Per determinare la mediana si devono ordinare in modo crescente i dati: 159, 159, 159, 160, 160, 165, 170, 173, 175, 175, 175, 175, 176, 180, 182, 182, 185, 185, 185, 190. Essendo i dati in numero pari si calcola la media dei due dati centrali: Mediana $= 175 + 175/2 = 175$. Se i dati sono molti è possibile individuare qual è o quali sono i dati centrali utilizzando la tabella delle frequenze opportunamente costruita, cioè con i dati scritti in ordine crescente.

La moda è la modalità del carattere altezza che è più ricorrente, cioè quello con la frequenza più alta: Moda $= 175$.

15.5 Esercizi

15.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

15.1 Indagine statistica

15.1. In una indagine su alcune famiglie si sono rilevati i seguenti caratteri; indicane il tipo ponendo una crocetta nella casella opportuna; per i caratteri quantitativi indica se sono discreti o continui, per i caratteri qualitativi indica se sono ordinabili o sconnessi:

Carattere	quantitativo		qualitativo	
	discreto	continuo	ordinabile	sconnesso
Reddito mensile del capofamiglia				
Titolo di studio del capofamiglia				
Familiari a carico				
Settore lavorativo				
Luogo di nascita del capofamiglia				
Tempo impiegato per raggiungere il luogo di lavoro				

15.2 Fasi di un'indagine statistica

15.2. Compila una tabella relativa alla distribuzione degli studenti della tua classe in relazione a:

- colore dei capelli (nero, castano, biondi, rosso);
- anno di nascita;
- città di residenza.

15.3. In una certa nazione in un dato anno si sono vendute 10540 biciclette, 7560 scooter, 2300 moto e 6532 automobili. Completa la tabella:

Mezzi di trasporto venduti	Freq. assoluta	Freq. relativa	Freq. percentuale
Biciclette			
Scooter			
Moto			
Automobili			
Totale			

15.4. Da un'indagine sulla distribuzione delle altezze in un gruppo di studenti sono stati rilevati i seguenti dati grezzi (espressi in cm):

175	168	169	173	160	165	170	172	177	172	170	173	182
164	174	185	188	164	175	160	177	176	184	180	176	168
174	175	177	183	174	166	181	173	166	172	174	165	180
190	175	176	188	171	172	181	185	184	183	175	173	181

Raggruppa i dati in classi di ampiezza 5cm e costruisci la distribuzione di frequenza. Calcola poi frequenza relativa e percentuale.

15.5. Dall'analisi delle paghe settimanali dei dipendenti di un'industria automobilistica si è ottenuta la seguente distribuzione di frequenza, suddivisa in classi (la parentesi quadra indica che l'estremo della classe considerato è incluso nella classe stessa, la parentesi tonda indica che l'estremo della classe considerato è escluso dalla classe). Determina per ogni classe di reddito frequenza relativa e percentuale.

Classi di reddito (€)	Freq. assoluta	Freq. relativa	Freq. percentuale
50-100	50		
100-200	70		
200-300	30		
$\geqslant$ 300	50		

15.6. Data la seguente distribuzione dei risultati dei test d'ingresso di matematica in una scuola media, sapendo che l'indagine è stata svolta su 200 alunni, determina frequenze assolute e relative.

Voto	3	4	5	6	7	8	9
Frequenza percentuale	5%	10%	25%	40%	15%	3%	2%
Frequenza assoluta							
Frequenza relativa							

15.7. Osserva la seguente tabella:

	Freq. assoluta	Freq. relativa	Freq. percentuale
Infanzia	950.000		
Primaria	2.538.000		
Secondaria di 1° grado	1.700.000		
Secondaria di 2° grado	2.425.000		
Totale			

- Quale fenomeno descrive la tabella?
- qual è la popolazione statistica oggetto dell'indagine?
- quante sono le unità statistiche?
- qual è stato il carattere indagato?
- completa la tabella calcolando frequenza relativa e frequenza percentuale.

15.8. In un campione di ginnaste di livello agonistico si è rilevata l'altezza in metri. Basta questa frase per indicare la popolazione oggetto di indagine e il carattere rilevato? Il carattere analizzato è di tipo qualitativo o quantitativo?

L'indagine ha dato i seguenti risultati:

Altezza	1,49	1,50	1,55	1,58	1,61	1,64	1,67	1,70	1,71
Numero ginnaste	1	6	11	4	6	4	2	2	3

Quante sono le unità statistiche? Determina in percentuale il numero delle ginnaste la cui altezza è non inferiore a $1,60$m.

15.9. La tabella mostra dati relativi ad una popolazione di 20 famiglie italiane; le informazioni in essa contenute stabiliscono alcuni aspetti o caratteri dei membri della popolazione: numero di componenti, reddito annuo (in migliaia di euro), titolo di studio del capofamiglia, residenza per area geografica. Osserva la tabella e rispondi alle domande che seguono.

Famiglia	Numero componenti	Reddito annuo	Titolo di studio	Residenza
1	2	28	Elementare	Nord
2	1	35	Media inferiore	Centro
3	3	50	Media inferiore	Nord
4	1	45	Media superiore	Nord
5	1	40	Laurea	Sud
6	2	30	Media inferiore	Sud
7	3	55	Media inferiore	Centro
8	4	80	Media superiore	Centro
9	5	60	Laurea	Sud
10	6	85	Laurea	Nord
11	7	90	Laurea	Nord
12	1	52	Media superiore	Centro
13	2	62	Media superiore	Sud
14	3	75	Media superiore	Sud
15	5	60	Elementare	Nord
16	4	45	Media inferiore	Nord
17	3	42	Media inferiore	Centro
18	2	28	Elementare	Nord
19	8	70	Media superiore	Sud
20	2	38	Laurea	Sud

- Cosa si intende, in statistica, per popolazione?
- quali sono le unità statistiche di cui sono trascritti i dati nella tabella precedente?
- quali caratteri riportati nella tabella sono qualitativi e quali quantitativi?
- quali sono le modalità dei caratteri qualitativi indagati?
- bastano le informazioni della precedente tabella per stabilire:
  - dove risiede la maggior parte delle famiglie oggetto di questa indagine? Se sì, come lo stabilite?
  - il numero di famiglie il cui capo-famiglia ha come titolo di studio quello di Scuola Media Superiore? Se sì, come lo stabilite?
- costruire la tabella:

Titolo di studio	Elementare	Media inferiore	Media superiore	Laurea
Numero di famiglie				

- è vero che $1/4$ dei capifamiglia, cioè il 25%, è laureato?
- costruire un'altra tabella, sul modello della precedente, in cui è riportato il numero di famiglie aventi 1, 2, 3 ecc. componenti. È vero che $1/3$ delle famiglie è costituito da più di 5 persone?

- individua il reddito minimo e quello massimo, completa la tabella delle frequenze in modo che il carattere reddito sia suddiviso in classi di ampiezza 5, come indicato in tabella.

Classi di reddito	Frequenza assoluta
26-30	
31-35	
...	

- quante famiglie hanno un reddito compreso tra 46 e 90 mila euro? Indica la risposta anche in percentuale.

15.10 (Fonte Wikipedia). Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica relativa alla produzione di olio di oliva in Puglia, scegliendo una opportuna unità di misura:

Anno	2006	2005	2004	2003
Produzione olio (in quintali)	1.914.535	2.458.396	2.678.201	2.508.084

15.11 (Fonte ISTAT). Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica, relativa al numero di società quotate in borsa, dal 1975 al 1984:

Anno	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Società	154	156	156	148	145	141	141	148	150	155

15.12. Rappresenta graficamente mediante diagramma cartesiano la seguente tabella che riporta le temperature misurate a Lecce durante una giornata invernale.

Ore	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura in °C	5	5,5	5,5	6	7,5	10	16	18	16,5	12	8	6,5

15.13. Rappresenta attraverso un ideogramma la seguente tabella statistica, che indica le ore di studio giornaliere di uno studente, usando 2 ore come unità di misura, scegli un simbolo opportuno.

Giorno	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Ore studio	2	6	5	2	3	4	0

15.14. Costruisci un ideogramma a partire dai dati della seguente tabella:

Regione	Produzione vino (in quintali)
Toscana	20500
Veneto	18000
Campania	14500
Puglia	15500
Molise	8000

15.15. La seguente tabella rappresenta i risultati di un'indagine sulla capitale europea preferita da un gruppo di studenti universitari. Rappresenta i dati utilizzando un diagramma a nastro.

Capitale preferita	Frequenza
Parigi	25
Roma	42
Londra	30
Vienna	10
Amsterdam	28

15.16. Rappresenta con un diagramma a colonne i dati riportati nella seguente tabella relativi alla vendita di automobili da un concessionario nell'anno 2009.

Marca automobile	Auto vendute
Renault	50
Fiat	270
Ford	120
Toyota	40
Alfa Romeo	30

15.17. Consideriamo la seguente tabella statistica che indica le frequenze percentuali di forza lavoro per settore economico rilevata nel 2006 in Italia:

Forza lavoro per settore economico	Frequenza percentuale
Forza lavoro occupata nell'agricoltura	4,20%
Forza lavoro occupata nell'industria	30,70%
Forza lavoro occupata nei servizi	65,10%
Tasso di disoccupazione	8,00%

Rappresentare graficamente mediante areogramma i dati contenuti nella tabella.

15.18. Rappresentare attraverso un areogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola dopo aver calcolato le frequenze percentuali:

Altezze (in m)	Numero di studenti	Frequenze percentuali
1,50-1,55	11	
1,60-1,65	18	
1,70-1,75	42	
1,80-1,85	22	
1,90-1,95	6	
Totale	100	

15.19. Rappresentare attraverso un istogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola:

Altezze (in m)	1,50-1,55	1,60-1,65	1,70-1,75	1,80-1,85	1,90-1,95
Numero di studenti	11	18	42	22	6

15.20. Uno studente universitario di Matematica ha superato 28 esami con queste valutazioni:

18	25	26	23	30	21	24	20	29	28	24	21	23	28
28	24	22	25	24	27	24	21	23	28	18	25	26	23

Organizza i dati in una tabella suddividendoli in classi e rappresentali tramite un istogramma.

15.3 Indici di posizione

15.21. Un concessionario di moto vende delle moto di diversa cilindrata come descritto nella tabella. Determinare la moda.

Modello moto	250	350	500	750	1000
Numero moto vendute	34	30	45	100	42

15.22. Calcolare la moda della distribuzione rappresentata attraverso la seguente tabella statistica:

Dati	3	6	8	9	12	24
Frequenze	23	78	67	78	89	100

15.23. Calcolare la classe modale della seguente distribuzione:

Abitanti	0-1000	1000-2000	2000-5000	5000-10000	10000-20000
Numero comuni	750	1100	950	2500	3000

15.24 (*). Trovare la media aritmetica semplice delle seguenti serie di osservazioni:

a) 3, 4, 6, 7, 10;
b) 6, 7, 8, 12, 15, 22;
c) 34, 53, 45, 67, 87, 90, 100, 123.

[a) 6; b) 11,7; c) 75.

15.25. In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg: 50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48. Calcola la media aritmetica semplice del peso dei ragazzi. Costruisci la tabella delle frequenze. Calcola la media aritmetica ponderata del peso dei ragazzi. Che cosa osservi?

15.26 (*). In un insieme di numeri compaiono quattro volte il 3, cinque volte il 5, tre volte il 6, due volte il 10, due volte il 15. Calcolare la media aritmetica. [21]

15.27 (*). Calcola la media della seguente distribuzione di frequenza.

Punteggio	2	4	6	7	12	14
Frequenza assoluta	2	4	5	4	3	2

[7,1]

15.28. Una rivista di auto fornisce i seguenti punteggi per tre diversi modelli di automobili.

	Funzionalità	Volumetria	Prestazioni	Sicurezza	Economia
Modello 1	2,5	4	3,2	3,5	2,5
Modello 2	2,5	3	4	3,5	2
Modello 3	2,7	3	3,5	3,8	2,5

Quale tipo di auto viene considerato mediamente migliore se si dà lo stesso peso alle singole caratteristiche?

15.29. Un insegnante di fisica, per mostrare che le misure di uno stesso oggetto sono soggette ad errori che dipendono dall'osservatore, ha fatto misurare la lunghezza di una cattedra con un metro a ciascun alunno della propria classe. I risultati sono stati i seguenti:

Lunghezza	100,8	100,9	101,2	101,5	102
Frequenza	2	8	5	4	1

Qual è la lunghezza media della cattedra?

15.30 (*). Trovare la mediana delle seguenti serie di osservazioni:

a) 3, 4, 6, 7, 10;
b) 6, 7, 8, 12, 15, 22;
c) 34, 53, 45, 67, 87, 91, 100, 123, 129, 135.

[a) 6; b) 10; c) 89.

15.31 (*). In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg: 50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48. Calcola la mediana del peso dei ragazzi. [43]

15.32 (*). Dati i seguenti tempi di risposta ad un test sostenuto da un gruppo di 8 studenti ad un concorso in un ente pubblico 19, 25, 20, 15, 8, 5, 12, 15. Calcola la mediana. [15]

15.33. Calcola la classe mediana sulla base dei dati riportati nella tabella seguente relativa agli occupati nel settore agricolo suddivisi per età:

Età	20-25	25-30	30-35	35-40	Oltre 40
Frequenza	500	750	230	400	350

15.4 Indici di variabilità

15.34. Calcola campo di variazione e varianza della seguente distribuzione: 6, 8, 10, 12, 14.

15.35. Nella seguente tabella sono indicati i consumi bimestrali d'acqua, espressi in metri cubi, di una certa famiglia in due anni consecutivi:

Bimestre	1	2	3	4	5	6
Anno 1	70	80	110	120	140	90
Anno 2	80	75	100	130	120	85

Calcola per ciascun anno media, campo di variazione e varianza. Stabilisci infine, giustificando la risposta, in quale anno c'è stata una variabilità maggiore.

15.36. In un gruppo di studenti la valutazione dell'esame di biologia risulta così distribuita: 27, 25, 26, 24, 24, 21, 24, 20, 29, 28, 28, 24, 22, 25, 24, 22, 24, 21, 23, 28.

a) Organizza i dati in una tabella, indicando anche la frequenza assoluta, quella relativa in frazione e quella percentuale;
b) rappresenta i dati in un grafico a piacere;

c) calcola moda, media e mediana dandone una breve interpretazione;
d) calcola la varianza.

15.37. Una ditta paga 5 persone 165€ alla settimana, 4 persone 199€ a settimana e 2 persone a 218€ a settimana. Trova media aritmetica, moda e mediana. Che percentuale di persone ha la retribuzione che si discosta, sia in positivo che in negativo, di 20€ dalla media?

15.38. È stata effettuata un'indagine statistica fra le persone presenti in una libreria riguardo al numero di libri letti nella scorsa estate. I dati sono raccolti nella seguente tabella:

N° libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7
N° persone	20	35	9	6	3	0	1	1

a) Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, quella relativa e quella percentuale;
b) rappresenta i dati in un grafico scelto a piacere;
c) calcola moda, media e mediana dandone una semplice interpretazione;
d) calcola varianza e coefficiente di variazione.

15.5.2 Esercizi riepilogativi

15.39. Scegli la risposta corretta:

1. se compi un'indagine sul peso degli allievi della tua scuola, la popolazione è costituita?
   a) dagli allievi della scuola;
   b) dai pesi degli allievi della tua scuola;
   c) da ciascun allievo della scuola;
   d) dal peso di ciascun allievo della scuola.
2. nella stessa indagine, da cosa sarà costituita un'unità statistica?
   a) dagli allievi della scuola;
   b) dai pesi degli allievi della tua scuola;
   c) da ciascun allievo della scuola;
   d) dal peso di ciascun allievo della scuola.
3. un'indagine statistica realizzata intervistando solo una parte della popolazione statistica è definita
   a) incompleta;
   b) universo;
   c) censimento;
   d) per campione;
4. la frequenza percentuale si ottiene
   a) dividendo la frequenza per il totale delle frequenze e moltiplicando il risultato per 100;
   b) moltiplicando la frequenza per 100;
   c) moltiplicando la frequenza per il totale delle frequenze e dividendo il risultato per 100;
   d) dividendo la frequenza per 100.

5. la mediana:
   a) è il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero;
   b) è il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati;
   c) è il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati;
   d) è il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media.
6. la media aritmetica:
   a) è il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero;
   b) è il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati;
   c) è il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati;
   d) è il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media.
7. la moda:
   a) è il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero;
   b) è il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati;
   c) è il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati;
   d) è il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media.
8. nella seguente distribuzione di dati 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7:
   a) la media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 6;
   b) la media aritmetica è 4, la moda è 6, la mediana è 5;
   c) la media aritmetica è 5, la moda è 6, la mediana è 4;
   d) la media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 5.
9. nella tua classe la mediana dell'altezza è 152cm. Questo significa che:
   a) non ci sono studenti più bassi di 152cm;
   b) 152cm è l'altezza più comune;
   c) la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152cm, mentre l'altra metà ha un'altezza superiore;
   d) in media gli studenti sono alti 152cm.
10. nella tua classe la moda dell'altezza è 152cm. Questo significa che:
   a) non ci sono studenti più bassi di 152cm;
   b) 152cm è l'altezza più comune;
   c) la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152cm, mentre l'altra metà l'ha superiore;
   d) in media gli studenti sono alti 152cm.
11. nella tua classe la media aritmetica dell'altezza è 152cm. Questo significa che:
   a) non ci sono studenti più bassi di 152cm;
   b) 152cm è l'altezza più comune;
   c) la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152cm, mentre l'altra metà l'ha superiore;
   d) se tutti gli alunni avessero la stessa altezza questa sarebbe di 152cm.

15.40. In un test sulla prova di velocità di lettura i candidati hanno ottenuto i seguenti risultati:

N° pagine lette in 15 minuti	10	12	11	9	14	13	7
N° candidati	2	5	2	1	1	3	4

a) Organizza i dati in una tabella indicando frequenza assoluta, frequenza relativa e percentuale;
b) rappresenta i dati in un diagramma a bastoni;
c) calcola moda, media e mediana;
d) quanti candidati in percentuale hanno letto un numero di pagine sopra la media?

15.41. In un gruppo di ragazzi le stature (espresse in centimetri) risultano distribuite nel seguente modo: 163, 169, 171, 165, 173, 165, 163, 168, 168, 169, 171, 169, 181, 165, 168, 169, 169, 163, 169, 168, 150, 168, 172, 181, 165, 169, 172, 169, 192, 173, 163, 168.

a) Costruisci una tabella indicando i dati, la loro frequenza, la frequenza relativa e la percentuale;
b) suddividi i dati in 4 classi, costruisci la distribuzione di frequenza e rappresentali graficamente con un istogramma;
c) calcola la moda, la media e la mediana.

15.42. Sono state misurate le pulsazioni al minuto di 20 persone ottenendo i seguenti dati: 79, 72, 69, 69, 72, 80, 73, 73, 70, 66, 80, 68, 70, 72, 82, 75, 72, 71, 74, 64.

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze;
b) rappresenta graficamente i dati;
c) calcola moda, media e mediana.

15.43. Ventuno ragazzi sono stati sottoposti a una verifica; i dati seguenti esprimono il numero di errori commessi da ciascuno di loro: 3, 4, 1, 3, 6, 6, 3, 1, 4, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 7, 1, 3, 7, 3, 3.

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze;
b) rappresenta graficamente i dati;
c) calcola moda, media e mediana;
d) quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno di 5 errori?

15.44. I dati riportati in tabella si riferiscono ai giorni di assenza degli alunni di una classe.

Alunno	n° giorni	Alunno	n° giorni	Alunno	n° giorni	Alunno	n° giorni
Mauro	5	Romeo	2	Bruna	7	Silvia	2
Antonio	7	Anna	4	Pietro	2	Alessio	2
Paola	5	Luca	4	Nicola	7	Patrizia	9
Luisa	5	Amedeo	5	Aldo	2	Franca	1
Carla	1	Marco	7	Luigi	2	Chiara	7

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze;
b) rappresenta i dati con un istogramma;
c) calcola moda, media e mediana;
d) quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno assenze rispetto alla media?

15.45. Nella tabella sono riportati i punteggi ottenuti da 22 alunni in un test formato da 20 quesiti a scelta multipla e il numero di risposte esatte.

N° ordine	Punteggi	Risposte esatte	N° ordine	Punteggi	Risposte esatte
1	80	26	12	55	11
2	62	12	13	58	11
3	48	9	14	80	16
4	71	14	15	75	14
5	80	16	16	65	12
6	90	18	17	58	11
7	75	15	18	58	10
8	67	13	19	62	12
9	79	15	20	57	11
10	62	12	21	60	12
11	95	19	22	48	8

a) Il punteggio medio è stato . . . con uno scarto quadratico medio di . . . ;
b) la mediana della distribuzione è il punteggio . . . ;
c) le risposte esatte sono state in media . . . con uno scarto quadratico di . . . ;
d) rappresenta ciascuna distribuzione con un istogramma, dopo aver aggregato i dati in classi come indicato nelle tabelle sottostanti.

Carattere . . .		Carattere . . .	
Punteggio	Frequenza assoluta	Risposte esatte	Frequenza assoluta
$48 \leqslant p < 58$		$7 \leqslant$ r.e. < 9	
$58 \leqslant p < 68$		$9 \leqslant$ r.e. < 11	
$68 \leqslant p < 78$		$11 \leqslant$ r.e. < 13	
$78 \leqslant p < 88$		$13 \leqslant$ r.e. < 15	
$88 \leqslant p < 98$		$15 \leqslant$ r.e. < 17	
		$17 \leqslant$ r.e. < 19	
		$19 \leqslant$ r.e. < 21	
Totale		Totale	

15.46. Una scatola contiene 20 sacchetti di biscotti confezionati da una industria. I pesi rilevati in grammi sono: 380, 365, 371, 375, 376, 369, 376, 377, 381, 383, 384, 377, 370, 375, 374, 376, 373, 378, 383, 378.

a) Il carattere rilevato è . . ., esso è di tipo . . . e si presenta secondo modalità . . .. Inserisci nella tabella sottostante nella colonna C1 il carattere rilevato e le sue modalità;
b) quanto è il peso totale della scatola? Come lo hai calcolato?
c) il peso medio dei sacchetti di biscotti è Media = . . .;
d) qual è il campo di variazione del peso dei sacchetti? CVar= . . .;
e) la mediana della distribuzione è . . .;
f) nella colonna "scarto" riporta, per ciascun valore del carattere indagato, lo scarto dalla media. Verifica la proprietà degli scarti rispetto rispetto alla media: la loro somma è . . .;
g) completa la colonna |scarto| con il valore assoluto degli scarti e determina lo scarto medio assoluto s = . . . ;

h) completa la colonna scarto^2 con il quadrato degli scarti e calcola la varianza Var$= \dots$ e il coefficiente di variazione CV$= \dots$;
i) raggruppa i valori del carattere in classi di ampiezza 5gr e completa la tabella;
j) metti in evidenza la classe modale e spiega il significato di moda;
k) costruisci l'istogramma della distribuzione;

	C1	scarto	|scarto|	scarto^2		C1	scarto	|scarto|	scarto^2
1					11				
2					12				
3					13				
4					14				
5					15				
6					16				
7					17				
8					18				
9					19				
10					20				
Totale									

l) organizza i dati in classi:

Classi di peso	Frequenza assoluta
$[365;370)$	
...	

15.47. Dai dati di scrutinio del primo quadrimestre in una scuola secondaria di 2° grado, è stata elaborata la seguente tabella in cui compaiono i voti in matematica degli alunni delle classi prime:

Voto	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
Frequenza	1	3	5	7	2	3	1	1	
Frequenza relativa									
Frequenza percentuale									

a) Indica il numero di unità statistiche oggetto dell'indagine e spiega come lo puoi ottenere;
b) il carattere rilevato è ...; esso è di tipo ... e si presenta secondo modalità ...;
c) la tabella assegnata è di dati aggregati o disaggregati?
d) rappresenta la distribuzione attraverso un grafico a barre (o a nastro);
e) cosa si intende per frequenza assoluta?
f) completa la colonna della frequenza relativa;
g) completa la colonna frequenza percentuale;
h) determina la moda della distribuzione: Moda $= \dots$;
i) il voto medio in matematica alla fine del primo quadrimestre è stato ...;
j) determina la mediana della distribuzione: Mediana $= \dots$;
k) amplia la tabella indicando gli scarti dalla media;
l) calcola lo scarto medio assoluto e lo scarto quadratico medio;

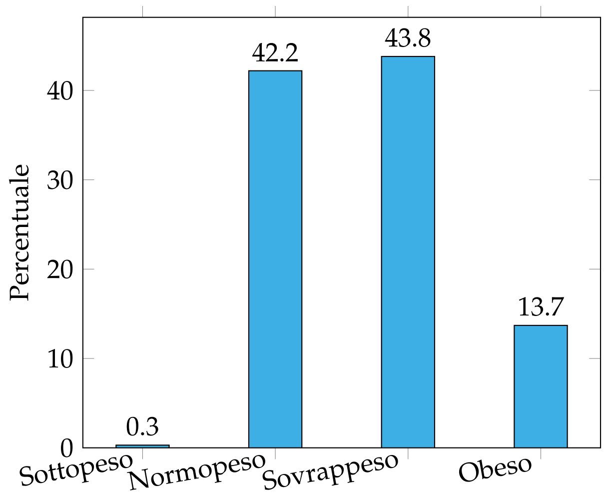
m) il voto medio dei ragazzi sufficienti è stato . . . , quello dei ragazzi insufficienti è stato . . . ;
n) rappresenta la situazione con un areogramma distinguendo tra ragazzi sufficienti e ragazzi insufficienti.

15.48 (Prove Invalsi 2011)**.** Il reddito medio annuo dei lavoratori agricoli di un certo paese ammonta a 3500 scudi e quello dei lavoratori dell'industria a 4500 scudi. È corretto affermare che il reddito medio complessivo ammonta a 4000 scudi?

15.49 (*Prove Invalsi 2011)**.** La settimana scorsa la mamma chiese ad Aurelia di trascrivere al computer un manoscritto e Aurelia le assicurò che avrebbe battuto 20 pagine al giorno. Per la prima metà del manoscritto andò piuttosto lentamente battendo 10 pagine al giorno e poi, per recuperare il tempo perduto, trascrisse la seconda metà a 30 pagine al giorno. Quando ebbe finito portò a sua madre la trascrizione dicendole: Vedi, ho fatto una media di 20 pagine al giorno, come ti avevo promesso. Infatti $(10 + 30)/2 = 20$. Non è vero, replicò sua madre. [15]

15.50 (*Prove Invalsi 2011)**.** In una indagine sullo stato di salute della popolazione sono state raccolte informazioni relative al peso e alla statura di 1000 intervistati. Gli intervistati sono stati poi suddivisi in quattro gruppi, come riportato nel grafico seguente. Quante sono le persone in sovrappeso?

a) Più di 500, ma meno di 600;
b) più di 600;
c) meno della somma delle persone sottopeso e obese;
d) all'incirca tante quante sono le persone normopeso.



[d]

15.51. Quattro amici sostengono l'Esame di Stato conseguendo punteggi la cui media aritmetica è $77,5/100$. Se tre di essi hanno conseguito un punteggio, in centesimi, rispettivamente di 70, 76, 80, quale punteggio ha conseguito il quarto studente?

15.52 (Prove Invalsi 2004-2005)**.** La seguente tabella si riferisce alla rilevazione effettuata in una classe prima di un Istituto Tecnico.

	Scuola media di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
Maschi	5	3	4	2
Femmine	6	3	4	3

Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola B?

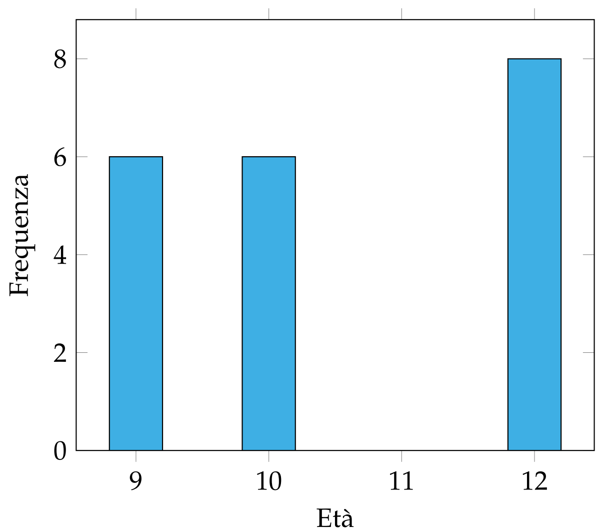
15.53 (Prove Invalsi 2005-2006). In una classe di 25 alunni, i punteggi (abbreviati in tabella con p) ottenuti in un test di matematica risultano distribuiti come indicato nella seguente tabella.

Punteggio	$0 \leqslant p < 20$	$20 \leqslant p < 40$	$40 \leqslant p < 60$	$60 \leqslant p < 80$	$80 \leqslant p \leqslant 100$
Numero alunni					

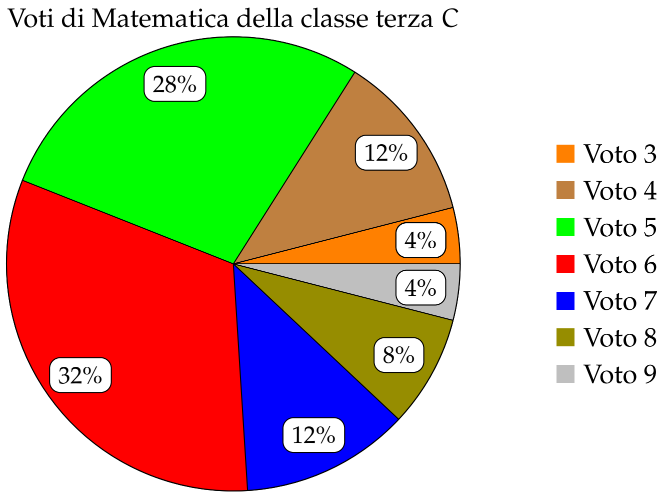
Qual è la percentuale di alunni che ha ottenuto un punteggio inferiore a 60?

15.54 (Prove Invalsi 2005-2006). Un impiegato ha percepito per i primi 3 mesi dell'anno uno stipendio mensile di 850€. Nei 9 mesi successivi ha percepito lo stipendio mensile precedente aumentato di 200€. Quant'è lo stipendio medio nell'anno di quell'impiegato?

15.55 (Prove Invalsi 2005-2006). Nel grafico seguente si riporta l'età dei ragazzi che frequentano una palestra. Qual è la media aritmetica dell'età dei ragazzi se la distribuzione di frequenza è quella indicata nel grafico?



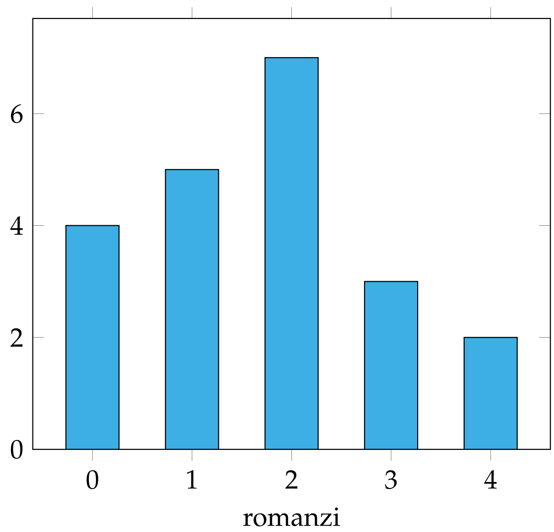
15.56 (Prove Invalsi 2006-2007). I 25 alunni della terza C, dopo aver raccolto i voti conseguiti nella verifica scritta di matematica, hanno costruito il seguente grafico:



Quanti ragazzi hanno conseguito come voto 7?

a) 12; b) 7; c) 5; d) 3.

15.57. La figura indica quanti romanzi leggono gli alunni di una classe in un mese. Quanti sono gli alunni che leggono almeno 2 romanzi?



15.58 (Prove Invalsi 2004-2005). Il Ministero dell'Istruzione ha diffuso le seguenti informazioni sul numero di alunni stranieri della scuola italiana nell'anno scolastico 2003-2004. La tabella riporta solo le 5 nazionalità più numerose.

Nazionalità più numerose	Numero di alunni	Percentuale di alunni sul totale degli stranieri
Albania	50.000	18,00%
Marocco	42.000	15,00%
Romania	28.000	10,00%
Cina	16.000	6,00%
Ecuador	11.000	4,00%

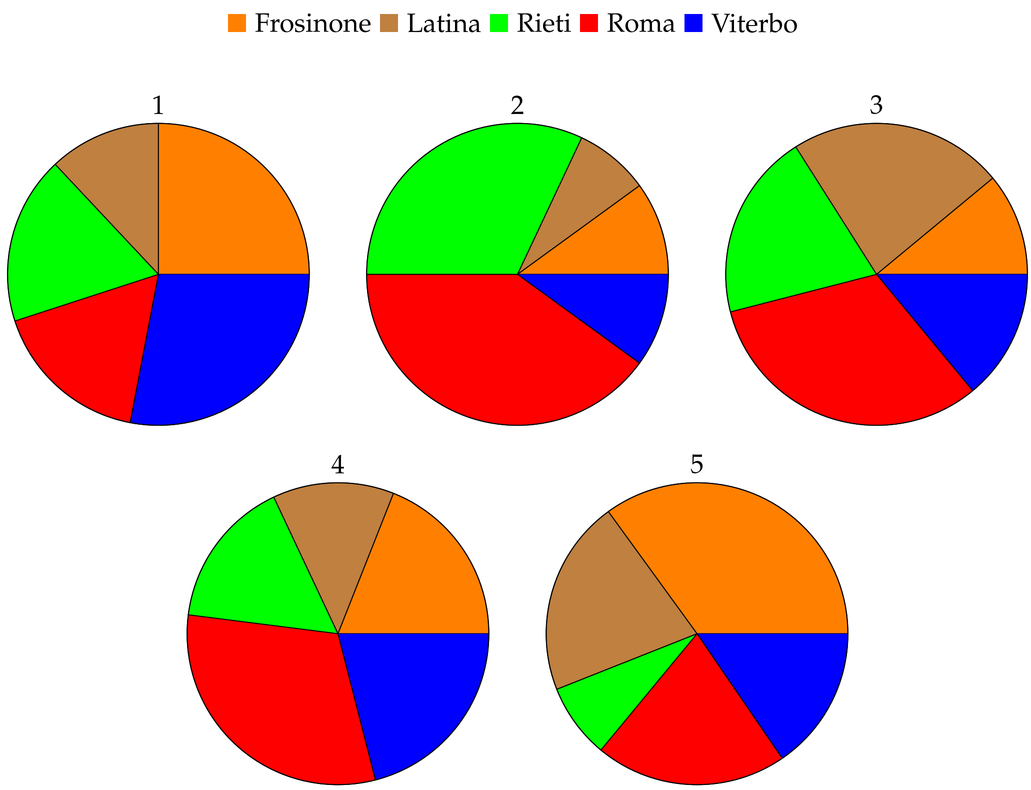
Cosa si può dedurre da tali dati sugli alunni stranieri di nazionalità russa? Sono …

a) meno di 11 000;
b) sicuramente meno di 400;
c) una percentuale compresa fra il 4% e il 18%;
d) assenti dalle scuole italiane.

15.59. La tabella mostra la superficie delle varie province del Lazio.

Provincia	Frosinone	Latina	Rieti	Roma	Viterbo
Superficie (km^2)	3240	2251	2749	5352	3612

Quale dei diagrammi riportati sotto descrive graficamente i dati della tabella?



Elementi di informatica V

"WIcker Composition"
Foto di cobalt123
http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

16 Foglio di calcolo

16.1 Avviamo “Calc”

Perché un foglio di calcolo

In molti ambiti gli umani sono costretti ad effettuare molti calcoli, pensiamo solo all’economia, alla ricerca scientifica o statistica, alla progettazione, ... I matematici spesso hanno realizzato strumenti per semplificare i calcoli, inventando i computer hanno trovato il modo di far fare *completamente* i calcoli a qualcun altro: al computer.

Se dobbiamo eseguire molte operazioni è più sicuro (e meno noioso), farle fare ad un elaboratore elettronico. Ma come convincere un calcolatore a fare i calcoli per noi? Il modo più semplice è quello di avviare un apposito programma che si chiama genericamente “foglio di calcolo”.

Ne esistono molti in commercio, noi ci riferiremo a “Calc” che è il foglio di calcolo del programma di ufficio: “Libre Office” (o “Open Office”). Se non avete “Libre Office” nel vostro computer, fatevi aiutare da qualcuno esperto e installatelo, è facile. Il programma si scarica gratuitamente da Internet ed è un *software libero*.

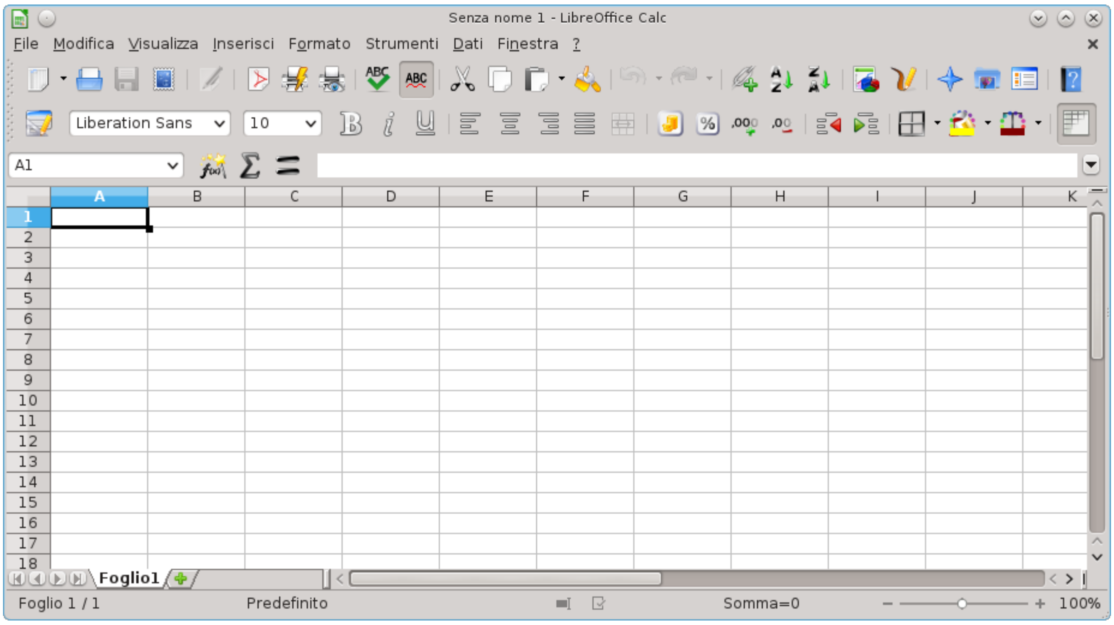


FIGURA 16.1: Come si presenta una finestra di Calc.

Una volta trovato (o installato) *Libre Office* avviate il programma “Calc”. Vi troverete davanti un foglio di calcolo e tutta una cornice che contiene gli strumenti per gestirlo, dall’alto in basso possiamo riconoscere:

- il menu;
- la barra delle icone (individuate l'icona per salvare il lavoro, per stampare il foglio, per le operazioni di taglia-copia-incolla, ...);
- la barra di formattazione;
- la barra di immissione;
- i bordi del foglio;
- il foglio vero e proprio;
- la barra di stato.

Nei seguenti paragrafi vedremo cosa è e come si usa un *foglio di calcolo*.

16.2 Celle, colonne, righe... il foglio di calcolo

Cos'è, e come usare le funzioni di base di un foglio di calcolo.

Un Foglio di Calcolo è un'immensa tabella composta da alcune migliaia di righe e alcune centinaia di colonne che generano una grande quantità di celle nei loro incroci. L'elemento base di un Foglio di Calcolo, è dunque la cella. Ogni cella ha: un indirizzo, un contenuto e un formato:

16.2.1 Indirizzo

Come nella battaglia navale l'indirizzo di ogni cella è composto da una lettera seguita da un numero, ad es. B3 è la cella che si trova all'incrocio della seconda colonna con la terza riga. Poiché le lettere sono solo 26 e noi, a volte, abbiamo bisogno di più colonne, arrivati alla lettera "Z" proseguiamo con "AA", "AB"... e così via. Nella *barra di immissione*, in alto a sinistra viene visualizzato l'indirizzo della cella in cui ci troviamo. Cliccando in diverse celle si può osservare l'indirizzo che cambia.

16.2.2 Contenuto

Ogni cella può avere un contenuto che è uno di questi 3 oggetti:

- Parole, una stringa qualunque.
- Numeri che possono rappresentare anche percentuali, ore o date.
- Formule, espressioni che iniziano con un uguale. Quando si termina di inserire una formula, nella cella viene mostrato il risultato del calcolo, mentre il testo della formula appare nella parte alta dello schermo nella barra di immissione.

Gli operandi delle formule, possono essere numeri o indirizzi di celle. Quando viene modificato il contenuto di una cella, tutte le formule che contengono il suo indirizzo vengono ricalcolate.

16.2.3 Formato

Ogni cella ha diversi attributi che riguardano il suo formato o quello del suo contenuto. Ci sono decine di aspetti che possono essere modificati con il formato della cella:

- colore di sfondo;
- bordo;
- dimensioni;
- font, colore, dimensione dei caratteri;
- formato dei numeri;
- allineamento del contenuto;
- ...

Possiamo applicare queste prime informazioni per realizzare un formulario di geometria che calcoli perimetri e aree di vari poligoni. Apriamo un nuovo foglio di calcolo. Prima ancora di incominciare a riempirlo lo salviamo con nome:

Menu-File-Salva Come.

Conviene salvarle il documento in una nostra cartella e darle per nome "quadrilateri". Per salvare un file basta anche cliccare sull'icona con un dischetto, di solito terza da sinistra o più rapidamente ancora premere il tasto:

<Ctrl-s>.

L'obiettivo è avere un foglio nel quale inserire alcuni dati relativi ai quadrilateri notevoli e calcolare altre informazioni relative alla figura. Possiamo distinguere con un colore di sfondo le celle nelle quali inserire dati e con un altro colore quelle che conterranno i risultati. Dovremo adattare la larghezza delle colonne a seconda dello spazio occupato dal contenuto. Potrebbe anche essere utile graficamente separare i vari problemi riquadrando con un bordo le relative celle. Di seguito riporto dei suggerimenti per l'inizio del lavoro:

- `A1: Formulario di geometria: i quadrilateri` (dimensione e colore a fantasia)
- `A3: Problemi sul Quadrato` (grassetto, colorato)
- `A5: Dato il lato, trovo: perimetro, area e diagonale` (grassetto, corsivo)
- `A6: Lato:` (allineamento a destra)
- `B6:` (colore di sfondo: verde)
- `A7: Perimetro` (allineamento a destra)
- `B7: =B6 * 4` (colore di sfondo: azzurro)
- `A8: Area`
- `B8: =B6^2` (colore di sfondo: azzurro)
- `A9: Diagonale`

- `B9:  =B6*sqrt(2)` (colore di sfondo: azzurro)
- `A1:B9` (Menu-Formato-Cella-Bordo: contorno)

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Prima di procedere con il formulario conviene provare inserendo nella cella `B6` diversi valori numerici prima semplici per controllare che il foglio esegua calcoli corretti, poi più strani, con la virgola, molto grandi o molto piccoli e osservare i corrispondenti risultati. Una volta risolti eventuali problemi riscontrati, possiamo salvare il lavoro fatto e passare ai problemi inversi del quadrato oppure affrontare i problemi relativi ad altre figure geometriche.

Riassumendo

- Un foglio di calcolo è composto da un gran numero di "celle" organizzate in "righe" e "colonne"
- Ogni cella è caratterizzata da:
  - un indirizzo, composto da una lettera o gruppo di lettere e un numero;
  - un contenuto, che può essere:
    - un testo,
    - un numero,
    - una formula;
  - un formato.

16.3 Formati e ordinamenti

Come selezionare un blocco di celle, sommare i dati di un intero blocco, modificare la larghezza di una colonna, disegnare griglie, ordinare i dati.

Spesso nei fogli di calcolo si devono inserire formule con molti operandi o molte formule che si assomigliano, i fogli di calcolo forniscono degli strumenti per realizzare ciò in modo efficiente e veloce. Come primo esempio partiamo dai dati relativi alla superficie dei continenti e alla loro popolazione. Per ora lavoreremo su pochi dati, ma cerchiamo di ragionare pensando di avere a che fare con centinaia di righe di dati invece che con solo queste sei.

	A	B	C	D
1	Dati relativi alla popolazione e alla superficie dei continenti			
2				
3	continente	superficie (km^2)	popolazione (migliaia)	
4	Europa	10832312	805974	
5	Africa	30221000	1020201	
6	America	42549000	914463	
7	Asia	44579000	4140336	
8	Oceania	7687000	36102	
9	Antartide	14000000	4	
10				

FIGURA 16.2: Dati relativi alla superficie e alla popolazione dei 6 continenti.

Avviamo un nuovo foglio e salviamolo con il nome "continenti". Poi eseguiamo le seguenti istruzioni:

- `A1: Dati relativi alla popolazione e alla superficie dei continenti` (dimensione e colore a fantasia)
- `A3:C10`: Ricopiamo i dati della tabella riportata sopra.

Non è difficile ricopiare la tabella, si incontra qualche difficoltà solo nelle celle `B3` e `C3`.

- La cella `B3` contiene un carattere posto a indice, come ottenerlo? Innanzitutto si scrivono tutti i caratteri che vogliamo appaiano: "Area (km2)", poi con il mouse selezioniamo nella riga di immissione il solo carattere "2" e da `Menu-Formato-Carattere-Posizione` scegliamo "apice". Confermando con invio otteniamo il risultato desiderato.
- La cella `C3` contiene una scritta troppo lunga che esce dai bordi della cella stessa, vorremmo che fosse spezzata su due righe. Poniamoci in `C3` e modifichiamo il formato della cella: `Menu-Formato-Celle-Allineamento-Scorrimento testo automatico`.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora vogliamo che il contenuto di queste celle sia visualizzato in grassetto e sia centrato: dopo aver selezionato le celle, tra le icone che si trovano nella *barra di formattazione* troviamo i pulsanti giusti da cliccare per ottenere questi effetti. Possiamo ripetere queste operazioni per ognuna delle celle oppure... [Gli informatici sono estremamente pigri (addirittura più dei matematici), poiché odiano ripetere le stesse operazioni e gli stessi gesti hanno inventato delle macchine bravissime a ripetere stupide operazioni.] Invece che modificare per tre volte il formato di una cella è possibile selezionare le tre celle e aggiustarne il formato assieme.

Per selezionare un gruppo di celle contiguo e rettangolare basta cliccare sulla cella in alto a sinistra e, tenendo premuto il tasto sinistro del mouse, trascinare il cursore fino alla cella in basso a destra. Quando si rilascia il tasto del mouse il colore delle celle selezionate apparirà invertito.

Ora vogliamo aggiungere una riga che contenga i totali della superficie e della popolazione:

- `B11: =somma(B4:B9)` (grassetto)
- `C11: =somma(C4:C9)` (grassetto)

Se ora effettuiamo un doppio clic nella cella `B10` ci viene evidenziata la formula e la zona di celle su cui lavora.

Dato che la somma di un gruppo contiguo di celle è molto frequente, ci sono molti modi per immettere queste formule. Proviamo a vederli, poi, a seconda dei casi useremo quello più comodo. Per prima cosa cancelliamo il contenuto delle celle `B10:C10`. Ci riportiamo nella cella `B10` e: iniziamo a scrivere la formula:

`=somma(`

selezioniamo con il mouse le celle `B4:B10`, chiudiamo la parentesi tonda e confermiamo con il tasto `<Invio>`

Per la cella `C11` proviamo ad usare un altro metodo. Una volta portati nella cella `C11`, clicchiamo l'icona della *sommatoria* che si trova in alto a sinistra della casella di inserimento se le scelte di Calc ci vanno bene, confermiamo la formula con il tasto `<Invio>`.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

I numeri con troppe cifre sono difficili da leggere e valutare, per facilitare questo compito, di solito, si separano le cifre a gruppi di 3 con dei puntini, i separatori delle migliaia (delle virgole per gli anglosassoni che usano invece il punto per separare la parte intera da quella decimale). Selezioniamo le celle da `B4` a `C10` e da `Menu-Formato-Celle-Numeri` scegliamo il numero con il separatore delle migliaia e senza cifre decimali.

I caratteri con cui stiamo lavorando sono piuttosto piccoli, vogliamo aumentare la dimensione della font dei caratteri per tutte le celle del foglio. Per selezionarle tutte in un solo colpo possiamo cliccare nell'angolo della cornice con le intestazioni delle righe e delle colonne, il rettangolino che si trova sopra a "1" e a sinistra di "A". Una volta selezionato tutto il foglio di lavoro, nella barra di formattazione cambiamo la dimensione del font da 10 a 12.

A questo punto può succedere un effetto spiacevole: alcune celle dove prima c'era un numerone ora appaiono tre *cancelletti*: "###". Cosa è successo? Se una cella non è abbastanza grande per contenere un numero questo non viene tagliato. Poiché non è accettabile che un numero venga visualizzato solo in parte, quando non può essere contenuto in una cella, viene sostituito da un simbolo convenzionale: "###". Per vedere di nuovo il nostro numero possiamo seguire una delle seguenti strade:

1. togliere i puntini delle migliaia;
2. diminuire le dimensioni del carattere;
3. allargare la cella.

La soluzione più adatta nel nostro caso è la terza. Clicchiamo con il tasto destro del mouse sull'intestazione della colonna da allargare e dal menu a tendina che appare scegliamo la voce: "Larghezza colonna". Nel campo di inserimento al posto di 2,62 scriviamo 3 e confermiamo. La colonna si sarà allargata un pochino e i numeri verranno di nuovo visualizzati.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

A volte può essere utile avere i dati ordinati rispetto ad un certo criterio. Se i continenti fossero decine o centinaia, per trovare i dati relativi ad uno di questi sarebbe comodo averli scritti in ordine alfabetico. Possiamo dire *Calc* di ordinare le righe in base al contenuto di una colonna. Se vogliamo ottenere i continenti in ordine alfabetico selezioniamo il blocco di celle da `A4:C9` e attraverso il `Menu-Dati-Ordina` scegliamo come primo criterio la colonna "A". Confermando, otteniamo le righe ordinate in ordine alfabetico dall'Africa all'Oceania.

Se vogliamo i continenti ordinati dal più popolato al meno popolato, sempre dopo aver selezionato tutte le celle che contengono i dati da ordinare, scegliamo dal `Menu-Dati-Ordina` come primo criterio la colonna `C` e come ordine quello discendente. In un batter d'occhio ritroveremo i nostri dati ordinati per popolazione.

Riassumendo

- ➡ È possibile selezionare un blocco di celle con il mouse o con la tastiera.
- ➡ È possibile assegnare un formato a tutte le celle di un blocco.
- ➡ È possibile calcolare la soma dei numeri contenuti in blocchi di celle.
- ➡ È possibile disegnare i contorni delle celle.
- ➡ Si può ordinare un blocco di celle in base a diversi criteri.
- ➡ Spesso ci sono molti modi diversi per eseguire la stessa operazione. È importante saper usarne uno, poi gli altri si imparano con il tempo e con l'uso.

16.4 Copiare in modo intelligente

Come ricopiare formule usando indirizzi relativi e assoluti.

Riprendiamo i dati già usati nel capitolo precedente, con delle semplici formule possiamo ottenere delle informazioni nuove. Possiamo, ad esempio, far calcolare la densità di popolazione per mezzo della formula popolazione/superficie.

- ➡ `D3:  Densità ab/km2` (centrato, grassetto)
- ➡ `D3:` Selezionare nella riga di input il solo 2 (formato-carattere-posizione-apice)
- ➡ `D3:` (formato cella-allineamento-acapo automatico)
- ➡ `D4:  =C4*1000000/B4` (formato-celle-numeri- zero decimali)
- ➡ `D5:  =C5*1000000/B5` (formato-celle-numeri-zero decimali)
- ➡ `D6:` ... (...)

Dato che i continenti sono solo 6 non è un grande problema scrivere le 6 formule diverse una sotto l'altra, ma in un foglio di calcolo spesso si devono scrivere centinaia o migliaia di formule simili a queste! Chi ha progettato il foglio di calcolo ha previsto degli strumenti che permettono di ricopiare velocemente le formule. Ponendoci nella cella `D4`, appare nell'angolo in basso a destra, della cella stessa, un quadratino nero; con il mouse trasciniamo questo quadratino verso il basso fino a coprire tutte le celle in cui vogliamo ricopiare la formula.

Non solo il programma ha ricopiato la formula ma ha anche aggiustato gli indici, proprio come ci serviva. Da notare che quando viene ricopiata una formula vengono anche ricopiati i formati della celle in cui la formula è stata scritta.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Un'altra informazione interessante che possiamo ricavare dai pochi dati in nostro possesso è la percentuale rappresentata dalla superficie di un continente rispetto alla superficie totale delle terre emerse. La percentuale non è altro che un rapporto, il quoziente tra la superficie di un continente e il totale. Procediamo con il lavoro:

- ➡ `E3:  Perc.  Sup.` (centrato, grassetto)
- ➡ `E4:  =B4/B10`

Il risultato di questo calcolo è un numero compreso tra zero e uno, non è certo la percentuale cercata, se lavoriamo sulla carta, per trasformare questo numero nella percentuale basta moltiplicarlo per `100`. Nei fogli di calcolo basta indicare nel formato della cella che quel numero deve essere inteso come una percentuale:

- ➡ `E4:  =B4/B10` (formato-celle-numeri-percentuale)
- ➡ `E5:  =B5/B10` (formato-celle-numeri-percentuale)
- ➡ ...

Anche qui, invece di riscrivere tutte le formule possiamo sfruttare le capacità del foglio di calcolo e farle ricopiare verso il basso. Dopo esserci posizionati nella cella `E4`, prendiamo il quadratino che appare in basso a destra e trasciniamolo verso il basso in modo da coprire le celle di tutti i continenti. Questa volta l'effetto non è quello desiderato: otteniamo una serie di errori! Come mai?

Osserviamo una delle celle in cui è comparso l'errore, la cella `E5` contiene la formula `=B5/B12`. Per capire meglio la formula selezioniamo la cella con un doppio clic. Vengono evidenziate in rosso e blu le celle che sono utilizzate nella formula stessa. Appare evidente che `B5` va bene, ma `B11` doveva essere `B10`! Nella cella `B12` non c'è niente e il foglio di calcolo la interpreta come se contenesse il valore `0`. Giustamente produce un errore di divisione per `0`.

Noi vogliamo che, nel ricopiare le formule, l'indice numerico di `B4` venga modificato ma quello di `B10` rimanga costante. Nei termini dei fogli di calcolo si dice che `B4` deve essere un **indirizzo relativo**, `B10` un **indirizzo assoluto**. Per essere pignoli a noi non occorre che tutto `B10` sia assoluto, siccome vogliamo ricopiare la formula verso il basso ci basta che sia assoluta la parte numerica dell'indirizzo: l'`10`.

Per comunicare questi desideri al foglio di calcolo si mette davanti al riferimento che vogliamo sia assoluto il carattere dollaro: "$". Questo fa si che il programma quando ricopia le formule non ne modifichi il riferimento. Aggiustiamo le nostre formule:

➡ `E4:` `=B4/B$11` (formato-celle-numeri-percentuale)

Ora ricopiare la cella verso il basso produce l'effetto desiderato! Nella cella `E5` ci sarà la formula `=B5/B$10`, nella cella `E6` la formula `=B6/B$10`, e così via.

L'elaborazione numerica dei nostri dati è completa, disegniamo un bordo anche attorno alle nuove celle che abbiamo riempito ottenendo così un foglio presentabile.

E salviamo il lavoro fatto.

Riassumendo

➡ Si possono "ricopiare" formule trascinando il quadratino che appare in basso a destra di una cella selezionata.

➡ Quando ricopiamo una formula verticalmente gli indici relativi alla riga, i numeri, vengono modificati.

➡ Quando ricopiamo una formula orizzontalmente gli indici relativi alla colonna, le lettere, vengono modificati.

➡ Se vogliamo che, nel ricopiare una formula, un indice non venga modificato, basta che lo facciamo precedere dal carattere: "$".

16.5 Diagrammi

Come rappresentare graficamente i dati.

Spesso un grafico dà una più immediata comprensione di un fenomeno rispetto ad una lista di numeri. I fogli di calcolo permettono di disegnare grafici di diversa forma.

Riprendendo il foglio dei continenti vogliamo aggiungere due grafici per rappresentare la superficie e la popolazione.

Apriamo il foglio su cui abbiamo lavorato finora selezioniamo le celle che contengono i dati che vogliamo rappresentare. Iniziamo costruendo un grafico a torta che riporti la superficie dei diversi continenti.

1. Selezioniamo le celle `A4:B9`.
2. Da menu scegliamo Inserisci-Diagramma, viene così aperta una finestra di dialogo che ci guida nella definizione del diagramma.
3. Controlliamo che sia selezionata la casella "Prima colonna come didascalia" e premiamo "Avanti".
4. Nella seconda pagina di questo dialogo selezioniamo: "Rappresenta oggetti nell'anteprima", e scegliamo il grafico a torta e "Serie di dati in Colonne".
5. Nella terza pagina, scegliamo "normale".
6. Nell'ultima pagina scriviamo il titolo (ad es. "Superficie") e confermiamo cliccando sul bottone "Crea".

A questo punto viene creato un diagramma. Un clic sul diagramma lo seleziona e fa apparire le maniglie di dimensionamento che permettono di modificarne le dimensioni. Quando è selezionato possiamo anche spostarlo dove vogliamo che appaia nella nostra pagina. Posizioniamolo subito sotto ai dati.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

È possibile modificare i dati rappresentati nel diagramma cliccando con il tasto sinistro sul diagramma stesso e scegliendo, dal menu contestuale, la voce "Modifica area dati".

Se vogliamo che il diagramma sia riquadrato da un bordo, dopo aver dato un doppio clic sul diagramma, scegliamo dal menu contestuale la voce "Area del diagramma".

Se vogliamo modificare più profondamente il diagramma appena creato possiamo effettuare un doppio clic sul diagramma stesso. Il menu principale del foglio di calcolo cambia e cambiano anche i menu contestuali (quelli legati al tasto destro) a seconda di cosa viene puntato dal mouse. Dal menu "Inserisci" scegliamo "Legenda" e togliamo il segno di spunta su "Visualizza".

La Legenda scompare, ma adesso il diagramma è di difficile interpretazione, operiamo dunque un'altra modifica: sempre dal menu Inserisci scegliamo "Etichette" e chiediamo che ci vengano mostrati i valori come percentuale e anche le etichette di testo. Se le etichette sono troppo lunghe e sbilanciano la rappresentazione conviene abbreviarle. Ora se il diagramma risulta troppo piccolo e non riempie bene lo spazio a sua disposizione possiamo cliccare vicino alla *torta* e allargarlo agendo sulle maniglie verdi che appaiono.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora se vogliamo un diagramma che contenga i dati relativi al numero di abitanti dobbiamo selezionare i nomi dei continenti e i valori della popolazione. Purtroppo questi valori non sono contigui, per selezionarli dobbiamo usare un trucco:

1. selezioniamo con il mouse le celle `A4:A9` e
2. selezioniamo le celle `C4:C9` tenendo premuto contemporaneamente il tasto `<Ctrl>`.

Il tasto <Ctrl> permette di effettuare selezioni multiple su blocchi rettangolari non contigui. Dopo aver selezionato le aree contenenti i dati, dal `menu-Inserisci` scegliamo la voce "Diagramma". Questa volta invece che un diagramma a torta vogliamo un istogramma. Come prima assicuriamoci che sia selezionata la voce "Prima colonna come didascalia", nella pagina seguente selezioniamo "Rappresenta oggetti nell'anteprima". Possiamo così accorgerci che la legenda, in questo caso non ha senso. Nell'ultima pagina scriviamo il titolo del diagramma: "Popolazione" e deselezioniamo la voce "Legenda".

A questo punto creiamo il diagramma e lo posizioniamo in fianco al precedente.

Vogliamo ora disegnargli un riquadro attorno: doppio clic nel diagramma, poi: `menu-Formato-Area del Diagramma`, ...

Vogliamo anche che le etichette dell'asse `x` vengano scritte in verticale in modo da non essere spezzate: `menu-Formato-Assi-AsseX` e lì modifichiamo le etichette mettendo la rotazione a 90^{O} selezionando "Sovrapponi" e deselezionando "A capo".

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora i diagrammi sono come li volevamo. Prima di considerare finito il lavoro dobbiamo però controllare di poterlo stampare in un'unica pagina. Clicchiamo fuori dai diagrammi, in una cella qualunque, poi da `Menu-Visualizza` scegliamo "Interruzioni di pagina". Una linea blu delimiterà i contorni delle varie pagine, modifichiamo le dimensioni dei diagrammi o spostiamoli in modo da farli rientrare tutti in un'unica pagina, assieme ai dati.

Se la scala della visualizzazione si è troppo ridotta possiamo cliccare con il destro sulla percentuale presente nella barra di stato (in basso) e scegliere il valore "100%". Possiamo anche agire sul formato della pagina: `Menu-Formato-Pagina` dove possiamo agire sull'orientamento della pagina (verticale o orizzontale), sui margini (possiamo ridurli per lasciare più posto ai contenuti) sull'intestazione o sul piè di pagina: togliamo l'intestazione e modifichiamo il piè di pagina scrivendo a sinistra la data e a destra il nostro nome.

Un'occhiata al lavoro svolto con l'anteprima di stampa può rassicurarci che è tutto disposto per bene nella pagina. Se siamo soddisfatti possiamo considerare finito il lavoro, altrimenti chiudiamo l'anteprima e modifichiamo gli aspetti che non ci piacciono.

Salviamo ancora una volta il lavoro ed eventualmente stampiamolo.

Riassumendo

- Il modo più semplice per realizzare un diagramma è quello di selezionare i dati che vogliamo rappresentare e poi scegliere Menu-Inserisci-Diagramma.
- Nel dialogo di costruzione di un diagramma possiamo scegliere diverse caratteristiche: etichette, tipo e sottotipo, assi, legenda, titoli, ...
- Una volta costruito un diagramma è possibile modificarlo usando il menu che appare dopo aver effettuato un doppio clic sul diagramma stesso.
- È Importante salvare spesso il proprio lavoro.
- La vista con interruzioni di pagina permette di impaginare in modo efficace il nostro lavoro.
- Il menu-Formato-Pagina permette di intervenire sull'orientamento, le dimensioni, i margini, le intestazioni, i piè di pagina, ...

16.6 Esercizi

16.1. Riporta in un foglio di calcolo il numero di pagine dei diversi testi scolastici. Calcola la media di pagine per libro e la somma delle pagine. Trova quante pagine devi leggere ogni giorno di scuola per "consumare" tutti i libri.

16.2. Realizza un formulario dinamico che permetta di calcolare volume, superficie, diagonale di un parallelepipedo rettangolo dati i suoi tre spigoli.

16.3. Realizza un formulario dinamico che permetta di calcolare volume, superficie laterale, superficie totale di un prisma retto a base triangolare dati lo spigolo di base e l'altezza.

16.4. Ricerca la superficie e le popolazione delle regioni italiane e realizza un foglio di calcolo simile a quello relativo ai continenti.

16.5. Procurati l'altezza dei i tuoi compagni di classe. Realizza un foglio di calcolo in cui venga calcolata la media la moda e la mediana dei valori.

16.6. Annota tutto quello che mangi in una giornata segnando anche le quantità approssimative. Cerca il valore energetico dei diversi cibi da te consumati. Costruisci una tabella che calcoli l'energia introdotta duante la giornata.

16.7. Annota l'ora di inizio e di fine di ogni volta che ti metti davanti ad uno schermo: (cellulare, televisione, computer). Crea un foglio di calcolo che calcoli il tempo dedicato agli schermi in ogni singolo intervallo, li sommi, trovi la percentuale della giornata relativa ad ogni singolo schermo e a tutti assieme.

16.8. Ricerca i dati relativi al consumo di carburante in Italia negli ultimi anni. Rappresenta questi dati con un grafico.

16.9. Annota i mezzi di trasporto utilizzati dalla vostra classe per venire a scuola. Organizza questi dati in un foglio di calcolo, ricavane la distribuzione percentuale e rappresentali con un grafico.

16.10. In classe scegliete un testo di almeno una pagina. Distribuendovi una lettera dell'alfabeto a testa, ognuno conti le occorrenze della sua lettera nel testo scelto. Riportate tutti i numeri in un foglio di calcolo calcolate la percentuale di occorrenze di ogni singola lettera. Ordinate le righe dalla lettera più frequente a quella meno frequente.

16.11. Ripetete l'esercizio precedente con un altro testo di italiano e con un testo scritto in un'altra lingua. Scrivi una congettura che puoi fare già con questi pochi esperimenti.

17 Geometria della tartaruga

17.1 Nascita della tartaruga

Perché la geometria della tartaruga

Negli anni 80 del secolo scorso, al MIT Seymour Papert ha modificato un linguaggio dedicato alla soluzione di problemi di intelligenza artificiale per comandare un robottino che aveva una penna e permettere ai bambini di dare le istruzioni per realizzare dei disegni. Ha realizzato così il linguaggio Logo.

La tartaruga è un cursore grafico che può lasciare un segno quando si muove. La geometria della tartaruga è caratterizzata da avere un riferimento intrinseco cioè la geometria è riferita alla posizione e alla direzione del cursore stesso e non ad un riferimento esterno.

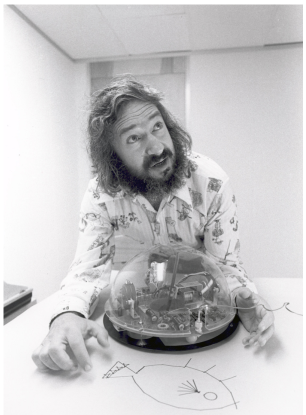


FIGURA 17.1: Seymour Papert il creatore di Logo.

I comandi base della geometria della tartaruga sono semplici:

- forward (avanti);
- back (indietro);
- right (destra);
- left (sinistra);
- penup (penna su);
- pendown (penna giù);

A partire da questi comandi si possono affrontare problemi con un ampio ventaglio di difficoltà, da quelli elementari a problemi che richiedono conoscenze matematiche molto elevate. Nei seguenti paragrafi vedremo una introduzione alla *geometria della tartaruga*.

17.2 Installiamo un interprete

Cosa installare per lavorare con la grafica della tartaruga.

Come visto sopra per comandare la tartaruga dobbiamo scrivere delle istruzioni e dobbiamo farlo utilizzando un linguaggio. Nel seguito useremo **Python + pygraph**.

17.2.1 Python

Il linguaggio che utilizzeremo all'interno di questo corso sarà `Python`. La normale installazione di `Python` ci mette a disposizione la libreria `turtle` che permette di realizzare la grafica della tartaruga. Chi usa come sistema operativo Windows può installare `Python` a partire dal sito:

`www.python.org/downloads`

E installare la versione più recente della serie 3.x.x.

Chi utilizza altri sistemi operativi può installarlo partendo dal proprio gestore di pacchetti installando `Python3` e anche `IDLE`.

17.2.2 Python + pygraph

`Python` rende facile scrivere delle librerie che permettono di estendere le funzionalità del linguaggio. La libreria che utilizzeremo nel resto di questo manuale permette di utilizzare la tartaruga, ma fornisce anche alcuni altri comodi strumenti che useremo più avanti. Si può scaricare l'intero pacchetto da:

`bitbucket.org/zambu/pygraph/downloads`

A questo punto bisogna fare a mano alcune operazioni che dipendono dal proprio sistema operativo:

Windows

➡ Scompattare il file scaricato.

➡ Entrare nella cartella `pygraph`.

➡ Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.

➡ Copiarli nella cartella
`C:`
`Python3x`
`Lib`
`site-package`

A seconda della versione installata "Python3x" potrebbe essere: "Python34", "Python35", ...

MacOSX

➡ Scompattare il file scaricato.

➡ Entrare nella cartella `pygraph`.

➡ Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.

➡ Copiarli nella cartella `HD/libreria/python/3.x/site-package`

Se in "HD/libreria/python/" non è presente la cartella "3.4/site-packages", bisogna crearla.

GNU/Linux

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella directory `pygraph`.
- Aprire un terminale in questa directory.
- Copiare la cartella `pygraph` e il file `pygraph.pth` nella cartella
  `/usr/lib/python3/dist-packages/`
  Dato che in Linux, per modificare le directory di sistema bisogna essere amministratori, il comando da dare assomiglierà a questo:
  ```
  sudo cp -R python* /usr/lib/python3/dist-packages/
  ```

A questo punto se tutto è andato bene dovremmo essere in grado di avviare Python-IDLE e dare il comando:

```
import pyturtle as pt
```

Se non succede nulla vuol dire che tutto è andato a buon fine, se invece appare una scritta rossa, bisogna leggere almeno l'ultima riga e cercare di capire cosa non è andato bene. Magari ci si può far aiutare da qualcuno esperto nell'installazione di programmi.

Se tutto è andato per il verso giusto possiamo procedere.

17.3 Altri interpreti

Ci sono moltissime implementazioni della geometria della tartaruga in molti linguaggi diversi. Di seguito riporto alcune delle più interessanti.

17.3.1 LibreLogo

LibreOffice permette anche di produrre disegni con lo strumento Draw. Basta aggiungere a Libreoffice l'estensione LibreLogo per realizzare, all'interno di una pagina di testo, disegni realizzati dalla tartaruga. Una volta installata l'estensione LibreLogo, bisogna andare su menu-visualizza-barre degli strumenti e aggiungere Logo. A questo punto, seguendo l'help (<F1>) si può imparare come dare i comandi alla tartaruga per produrre i disegni che abbiamo in mente.

17.3.2 Snap

Snap è un linguaggio a blocchi derivato dal linguaggio Squeak e è molto interessante per un uso nella didattica. Permette di realizzare funzioni con parametri e è in grado di interfacciarsi con vari dispositivi esterni come:

- Lego NXT package by Connor Hudson
- Nintendo Wiimote package by Connor Hudson
- Finch and Hummingbird robots package by Tom Lauwers
- Parallax S2 robot package by Connor Hudson

- LEAP Motion by Connor Hudson
- speech synthesis by Connor Hudson
- Arduino package by Alan Yorinks

Siti di riferimento per Snap:
snap.berkeley.edu/snapsource/snap.html

17.4 Primi comandi

Facciamo lavorare un po' Python
Il modo più semplice per scrivere un programma in Python è quello di usare l'interfaccia `Idle`.
Per cui dal menu-programmi-Python, si avvii `Idle`.
`Idle` ci permette di dare dei comandi e di vederne il risultato alla pressione del tasto <Invio>.
Ad esempio possiamo dare il comando:

```
>>> fa qualcosa!
```

```
>>> fa qualcosa!
```

ma questo produce solo una scritta rossa la cui ultima riga dice:

```
SyntaxError: invalid syntax
```

È chiaro che Python non sa eseguire qualunque comando. Una istruzione che dovrebbe capire è:

```
>>> print(5)
5
```

questa volta è andato...
Al posto di 5 possiamo scrivere un'espressione complessa quanto vogliamo. Se è corretta verrà eseguita e verrà stampato il risultato. Dobbiamo tenere presente che nei linguaggi di programmazione le parentesi delle espressioni sono solo tonde. Quindi dovremo tradurre eventuali parentesi quadre e graffe in parentesi tonde.
Provate...
Il simbolo per l'elevamento a potenza è una coppia di asterischi: "**", proviamo:

```
>>> print(2**100)
1267650600228229401496703205376
```

L'aritmetica dei numeri interi di Python prevede numeri limitati solo dalle capacità del computer. Pyton è in grado di calcolare anche 2^{1000}.

```
>>> print(2**1000)
107150860718626732094842504906000181056140481170553360744375038837
035105112493612249319837881569585812759467291755314682518714528569
231404359845775746985748039345677748242309854210746050623711418779
541821530464749835819412673987675591655439460770629145711964776865
42167660429831652624386837205668069376
```

Python è in grado di fare i calcoli interi con una precisione illimitata, ma il tempo impiegato è dato dalla velocità della macchina su cui gira. Se chiediamo un calcolo molto lungo, potrebbe impiegare minuti, giorni o anni per realizzarlo. Sulla mia macchina (un po' vecchiotta) $2^{1000000}$ impiega una decina di secondi per essere eseguito. Se abbiamo chiesto a Python un calcolo troppo complesso l'unico modo per uscirne è chiudere la finestra di IDLE e ripartire da capo.

Oltre ai numeri interi Python opera anche con altri oggetti primitivi:

- interi;
- numeri con la virgola (il separatore dei decimali è il punto);
- stringhe (sequenze di caratteri delimitati da virgolette doppie o semplici);
- insiemi ;
- tuple;
- liste;
- ...

Giusto per curiosità possiamo anche vedere che Python è in grado di fare operazioni piuttosto strane:

```
>>> print('casa' + 'matta')
casamatta
>>> print('ciao' * 3)
ciaociaociao
>>> print('ciao ' * 3)
ciao ciao ciao
```

17.5 Avanti, indietro, destra, sinistra

Come convincere un triangolino detto Tartaruga a disegnare linee sullo schermo.

La geometria della tartaruga è caratterizzata dall'avere un riferimento intrinseco invece che estrinseco: descrive le figure dal punto di vista di chi le sta disegnando muovendosi su una superficie piuttosto che dal punto di vista di chi le guarda dall'alto.

Per questioni storiche il cursore grafico è detto tartaruga dato che le prime realizzazioni di questa geometria utilizzavano un piccolo robot a forma di semisfera che muovendosi su un grande foglio lasciava una traccia con una penna.

I principali comandi della geometria della tartaruga sono le istruzioni per farla muovere o ruotare. La sintassi di questi comandi è:

```
<tartaruga>.forward(<passi>)
<tartaruga>.back(<passi>)
<tartaruga>.left(<gradi>)
<tartaruga>.right(<gradi>)
```

Ma come fare per creare una tartaruga al nostro servizio? Prima di tutto dobbiamo caricare dalla libreria `pyturtle.py` gli oggetti che ci servono per il disegno:

- un foglio su cui possono disegnare
- le tartarughe e le tartarughe stesse:

```
>>> from pyturtle import TurtlePlane, Turtle
```

Da osservare che Python distingue tra maiuscole e minuscole, per cui è diverso scrivere "TurtlePlane" o Turtleplane".

A questo punto, caricati gli oggetti di cui abbiamo bisogno, dobbiamo istanziarli (crearli):

```
>>> foglio = TurtlePlane()
>>> tina = Turtle()
```

Altra osservazione: la coppia di parentesi che segue gli identificatori `TurtlePlane` e `Turtle` indicano a Python che deve creare un oggetto di questa classe e collegarlo all'identificatore che precede l'uguale. Le due istruzioni significano:

```
Crea un oggetto 'TurtlePlane' e associalo al nome 'foglio'.
Crea un oggetto 'Turtle' e associalo al nome 'tina'.
```

D'ora in poi l'identificatore `tina` è associato ad un particolare oggetto della classe `Turtle`.

Ora non ci resta che sperimentare il funzionamento dei metodi della classe `Turtle`, magari risolvendo il famoso problemino della teoria dei grafi: disegna una casetta con una croce dentro senza sollevare la penna:

```
>>> tina.forward(100)
16
>>> tina.left(90)
>>> tina.forward(100)
17
>>> tina.left(90)
>>> tina.forward(100)
18
>>> tina.right(135)
>>> tina.forward(50 * 1.4142)
19
>>> ...
```

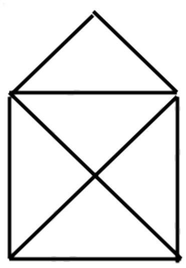


FIGURA 17.2: Casetta da tracciare senza alzare la penna.

Osservazione (assolutamente insignificante): Ogni volta che viene eseguito un comando che traccia una linea sullo schermo, nella shell appare un numero progressivo, non preoccupiamoci di questo, magari ci potrà servire più avanti. (Chi fosse proprio curioso può studiarsi l'esempio `orologio.py`).

Cercando di risolvere questo problema, le persone normali fanno diversi errori. Questa libreria non permette di cancellare l'effetto dell'ultimo comando, quando si commette un errore conviene usare il comando `<tartaruga>.reset()`, cancellare tutto e ridisegnare tutto daccapo. Per non perdere un mucchio di tempo in scrittura, è possibile sfruttare una caratteristica di IDLE:

per riscrivere un comando basta posizionare il cursore sulla riga da ripetere e premere <Invio>, la riga verrà riscritta. Ora la si può modificare o mantenere invariata, premendo di nuovo <Invio> viene eseguita.

Altri due metodi importanti della classe Turtle sono:

```
<tartaruga >.up()
<tartaruga >.down()
```

L'effetto di questi due comandi è, rispettivamente, quello di sollevare la penna e riabbassare la penna. Dopo il comando up() la tartaruga si muove senza lasciare traccia, dopo il comando down() riprende a disegnare.

Ad esempio per disegnare un quadrato centrato nell'attuale posizione di tina posso dare i seguenti comandi:

```
>>> tina.reset()
>>> tina.up()
>>> tina.back(100)
>>> tina.right(90)
>>> tina.down()
>>> tina.forward(100)
43
>>> tina.left(90)
...
```

Se non vi riesce al primo colpo, non preoccupatevi, io ho fatto 5 tentativi prima di ottenere esattamente il disegno che avevo progettato.

Riassumendo

Il modulo pyturtle mette a disposizione le classi TurtlePlane e Turtle. Per caricare queste classi si deve dare il comando:

```
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle
```

Per creare un piano e una tartaruga si deve dare il comando:

```
piano = TurtlePlane()
tina = Turtle()
```

dove dobbiamo stare attenti alla maiuscola e alla coppia di parentesi. Al posto di tina e di piano possiamo usare un qualunque altro nome.

I principali comandi della geometria della tartaruga sono:

```
<tartaruga >.forward(<passi >), <tartaruga >.back(<passi >),
<tartaruga >.left(<gradi >), <tartaruga >.right(<gradi >),
<tartaruga >.reset(), <tartaruga >.up(), <tartaruga >.down().
```

17.6 Iterazione: ciclo for

Come ripetere istruzioni e modificare dimensione e colore del tratto.

17.6.1 Cammino dell'ubriaco

Se vogliamo mandare a spasso `tina` lungo un percorso casuale, invece che farle realizzare un disegno ben preciso, possiamo caricare la funzione `randrange` dal modulo `random` e dare una serie di comandi:

```
>>> from pyturtle import TurtlePlane, Turtle
>>> from random import randrange
>>> foglio = TurtlePlane()
>>> tina = Turtle()
>>> tina.forward(randrange(50)); tina.left(120)
25
>>> tina.forward(randrange(50)); tina.left(120)
26
...
```

randrange(<numero>) restituisce un numero intero "casuale" compreso tra `0` e `<numero>`. In questo modo *tina* avanzerà di un numero di passi diverso ogni volta che viene dato questo comando.

È possibile scrivere più istruzioni Python sulla stessa riga, basta separarle con un punto e virgola ";". In generale non è una buona cosa scrivere più istruzioni sulla stessa riga, di regola non va fatto, ma come ogni regola, anche questa ha delle eccezioni. In questo caso invece di riscrivere tutta la riga ogni volta che vogliamo rieseguirla, basta che con la freccia della tastiera o con il mouse riportiamo il cursore su quella riga e premiamo il tasto `<Invio>`. In questo modo la riga di istruzioni verrà riscritta su una linea vuota, potremo modificarla, se vogliamo, ed eseguirla premendo ancora il tasto `<Invio>`. Quattro tasti invece di quaranta!

Anche se il meccanismo di IDLE che ci permette di ricopiare una riga è comodo, se volessi eseguire quelle due istruzioni per 500 volte o 1000 volte, il lavoro e il consumo della tastiera diventerebbero inaccettabili. Gli informatici, che sono tra gli esseri umani (?) più pigri che esistano, hanno inventato un meccanismo che permette di ripetere un blocco di istruzioni quante volte vogliamo specificando semplicemente il numero. Questo meccanismo, in informatica, prende il nome di "ciclo". Esistono diversi tipi di ciclo, in questo capitolo utilizzeremo il ciclo `for`.

Se vogliamo che il nostro ubriaco esegua 300 tratti del suo cammino strampalato, possiamo scrivere:

```
>>> tina.reset()}
>>> for contatore in range(300):
        tina.forward(random.randrange(50));
        tina.left(120)
```

La sintassi del comando `for` è:

```
for <variabile> in <sequenza>:
    <istruzioni>
```

Nel caso precedente la sequenza è generata dalla funzione `range(<numero>)`, ma si possono creare sequenze del tutto fantasiose come nell'esempio seguente:

```
>>> for elemento in ['Et', telefono',␣'casa',␣123]:
␣␣␣␣␣␣␣␣print(elemento)
```

```
Et
telefono
casa
123
```

Anche in questo caso la variabile assume ad ogni ciclo un differente valore della sequenza.

I primi tempi è facile dimenticarsi i due punti ":" che segnano l'inizio del blocco di istruzioni da ripetere, ma un po' alla volta si impara ad essere precisi. Provate a ricopiare uno dei due cicli e a cancellare i ":" per vedere cosa accade. Le istruzioni che si vuole siano ripetute devono essere indentate cioè devono essere scritte rientrando di 4 caratteri rispetto all'istruzione `for`.

17.6.2 Caratteristiche della tartaruga

Può darsi che il colore nero della penna della tartaruga ci sembri piuttosto noioso, possiamo modificarlo usando l'attributo della tartaruga `color`:

```
<tartaruga>.color = <colore>
```

Ad esempio se vogliamo che venga disegnata una raggiera di linee rosse:

```
>>> foglio.reset()
>>> tina.color = 'red'
>>> for cont in range (72):
        tina.forward(100)
        tina.back(100)
        tina.left(5)
```

Le istruzioni da ripetere devono costituire un blocco cioè essere tutte rientrate rispetto all'istruzione `for`. Questo rientro si chiama indentazione. In Python un blocco di istruzioni è definito dall'avere tutte la stessa indentazione. Quindi il comando precedente dice a Python di eseguire per 72 volte le istruzioni seguenti che si trovano indentate.

Il colore è una stringa che può contenere il nome (in inglese) di un colore oppure una stringa nel formato: "`#rrggbb`" dove rr, gg, bb sono 3 numeri in esadecimale (numeri compresi tra 00 e ff) che indicano le componenti dei 3 colori primari in emissione, cioè: rosso, verde e blu. Combinando questi 3 numeri possiamo ottenere un colore tra 256*256*256 possibili colori (16.777.216 possibili colori). Ad esempio per ottenere il giallo dobbiamo mescolare il rosso al verde: "`#ffff00`" per ottenere il magenta si mescola il rosso al blu: "`#ff00ff`" per ottenere il ciano si mescola il verde al blu: "`#ff00ff`".

Anche le dimensioni del tratto della penna e della tartaruga stessa possono essere cambiate modificando l'attributo 'width' della tartaruga:

```
<tartaruga>.width = <numero>
```

Ad esempio se voglio ottenere dei raggi più grossi:

```
>>> foglio.reset()
>>> tina.width = 5
>>> tina.color = 'pink'
>>> for cont in range(72):
        tina.forward(100)
```

```
    tina.back(100)
    tina.left(5)
```

Riassumendo

- In IDLE possiamo richiamare una istruzione scritta precedentemente portando il cursore su quella riga e premendo `<Invio>`.
- Il ciclo *for* permette di ripetere quante volte vogliamo un blocco di istruzioni.
- La libreria random ci permette di utilizzare numeri pseudo-casuali.
- Possiamo modificare il colore e lo spessore della tartaruga e della sua penna.

17.7 Programmi e funzioni

Come insegnare a Python a eseguire comandi nuovi.

Finora abbiamo usato comandi definiti all'interno di Python o di una sua libreria. Ad esempio per disegnare un quadrato, dopo aver caricato la libreria `pyturtle` e creato una tartaruga di nome `tina` dovevamo scrivere:

```
tina.forward(50)
tina.left(90)
tina.forward(50)
tina.left(90)
tina.forward(50)
tina.left(90)
tina.forward(50)
tina.left(90)
```

oppure:

```
for cont in range(4):
    tina.forward(50)
    tina.left(90)
```

Questo modo di lavorare va bene finché i progetti sono piccoli, ma se dovessi scrivere un programma in cui i quadrati sono tanti, si rivelerebbe piuttosto scomodo. Non solo. I comandi dati nella shell vanno persi quando esco da IDLE, se devo abbandonare a metà un lavoro e spegnere il computer, la volta seguente dovrò ripartire da capo. Ciò non va affatto bene! I programmatori hanno inventato dei modi:

- per salvare i propri programmi sia finiti sia in fase di costruzione,
- per dare un nome a un blocco di codice in modo da poterlo eseguire scrivendo una parola invece che 3, 8, o 800 linee di codice.

17.7.1 Il primo programma

Innanzitutto, una volta avviato IDLE, diamo il comando: *menu-File-NewWindow*. Si aprirà una nuova finestra di editor vuota. Prima ancora di incominciare a riempirla, la salviamo, nella nostra cartella di lavoro con il nome:

```
01quadrato.py
```

O un altro nome che sia sensato per noi.
Qualche osservazione

- Per salvare un documento con un altro nome: *menu-File-SaveAs...*.
- Il file va salvato nella nostra cartella di lavoro, magari in una sotto-cartella dove teniamo i lavori di informatica.
- Perché un nome così strano:
  - "01" perché questo aiuterà il sistema operativo a tenere in ordine i nostri programmi,
  - "quadrato" perché in questo primo programma insegneremo a tartaruga a disegnare un quadrato,
  - ".py" per segnalare al sistema operativo che questo file contiene un programma scritto nel linguaggio Python.

Controlliamo che nella barra del titolo della finestra di editor appaia il nome del file associato. Possiamo iniziare a scrivere il nostro programma. Per prima cosa scriviamo qualcosa che Python non considererà affatto: dei commenti. Ogni programma deve iniziare con dei commenti che devono contenere almeno le seguenti informazioni: titolo, autore, data.

Python considera un commento tutto ciò che segue il carattere cancelletto "#". Il nostro programma quindi inizierà con alcune righe che assomiglieranno a queste:

```
# <data>
# <nome>
# Poligoni regolari con la grafica della tartaruga: Quadrato
```

L'editor di IDLE si accorge che sono commenti e colora queste righe di rosso. Se ciò non avviene controllate che il nome del file abbia esattamente l'estensione ".py". A questo punto possiamo finalmente possiamo incominciare a scrivere dei comandi da far eseguire a Python. Incominciamo con i due comandi per caricare la libreria e per creare una tartaruga:

```
from pyturtle import Turtleplane, Turtle
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
```

Quando premiamo il tasto `<Invio>` non viene eseguito niente, viene solo inserito un carattere di fine linea e il cursore di inserimento va a capo. Per eseguire il programma si deve premere il tasto `<F5>` oppure dare il comando *menu-Run-Run Module*. IDLE prima di eseguire qualunque cosa vorrà salvare il contenuto dell'editor. Poi, se non abbiamo introdotto errori, verrà caricata la libreria e creata una tartaruga. Provandolo mi sono accorto di un errore... lo avete individuato? Dalla shell di IDLE possiamo dare i comandi che vogliamo alla nuova tartaruga. Ma non lo faremo, perché noi vogliamo mettere tutte le istruzioni in un programma.

Aggiungiamo le istruzioni per disegnare un quadrato:

```
tina.forward(50)
tina.left(90)
tina.forward(50)
tina.left(90)
...
```

No, c'era una altro metodo, usando l'iterazione:

```
for cont in range(4):
    tina.forward(50)
    tina.left(90)
```

Eseguiamo il programma... bene, funziona, appare il nostro quadrato.

17.7.2 Funzioni

Ora vogliamo dare un nome ad un blocco di codice. Vogliamo scrivere le istruzioni per disegnare un quadrato e farle eseguire scrivendo la parola `quadrato()`. Notate anche qui la coppia di parentesi tonde che indicano a Python che deve eseguire qualcosa. Il blocco di istruzioni preceduto dal nome si chiama "funzione". La funzione quadrato si può scrivere così:

```
def quadrato():
    for cont in range(4):
        tina.forward(50)
        tina.left(90)
```

la sintassi è:

```
def <nome della funzione>():
    <istruzioni>
```

Notate anche qui:

- le parentesi tonde;
- il carattere due punti ":" che separa la dichiarazione della funzione dalla sua definizione;
- la definizione della funzione è costituita da un blocco di istruzioni che è indentato rispetto alla dichiarazione.

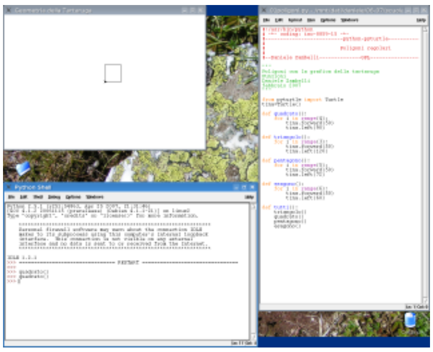


FIGURA 17.3: Disposizione delle finestre sul desktop.

Per eseguire il programma basta premere il tasto `<F5>` o eseguire il comando *menu-Run-Run Module*. Viene caricata la libreria, creata la tartaruga e dis... NO, non viene disegnato un quadrato.

Con i comandi precedenti abbiamo *solo* insegnato a Python a disegnare un quadrato, ma non gli abbiamo detto di disegnarlo. Spostiamoci nella Shell di IDLE e diamo il comando: *quadrato()*. Ora il quadrato appare nella finestra grafica.

Per fare in modo che il nostro programma disegni il quadrato, aggiungiamo questo comando come ultima istruzione e rieseguiamo il tutto (`<F5>`).

Funziona! Il nostro primo programma è terminato.

17.7.3 Struttura di un programma

Non basta che il programma funzioni, deve anche essere scritto bene. Il nostro può essere migliorato. In generale i programmi sono strutturati in questo modo:

```
<intestazione>
<lettura delle librerie>
<definizioni>
<programma principale>
```

Altra cosa importante: ogni funzione *deve* avere una stringa di documentazione, detta "docstring". È una stringa, solitamente delimitata da tre doppi apici che dà una descrizione di cosa fa la funzione.

Operiamo quindi il nostro primo *refactoring* cioè modifichiamo il programma, che già funziona, per adeguarlo ad uno stile di programmazione più produttivo:

```
# <data>
# <nome>
# Poligoni regolari con la grafica della tartaruga: Quadrato

# lettura delle librerie
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle

# Definizioni di funzioni
def quadrato():
    """Disegna un quadrato di lato 50."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(50)
        tina.left(90)

# Programma principale
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
quadrato()
```

Controlliamo che funzioni, correggiamo eventuali errori, ... Bene, è il nostro primo programma e possiamo esserne soddisfatti. Questo programma ci fornirà la base per scrivere tutti gli altri.

Osservazione

Possiamo richiamare una funzione anche dall'interno di un'altra funzione. Per esempio potremmo definire `bandierina` come un'asta seguita da un quadrato:

```
def bandierina():
    """Disegna una bandierina quadrata."""
    tina.forward(40)
    quadrato()
    tina.back(40)
```

Aggiungi questa funzione al programma (dove?) e fa disegnare una bandierina.

Poi usando l'iterazione (dove?) fa disegnare una rosa di bandierine.

È cosa molto buona avere tutti gli elementi in vista quando si programma: quindi disponi le finestre in modo da avere uno spazio per la finestra grafica in alto a sinistra. Abbassa la Shell di IDLE in modo da farla stare sotto alla finestra grafica e restringi l'editor di `01quadrato.py` in modo da farlo stare a destra. In questo modo hai sempre in vista tutto quello che serve per capire la situazione.

Riassumendo

- Un programma è un documento di testo dove sono scritte le istruzioni che l'interprete Python deve eseguire.
- Una funzione associa ad un nome il blocco di istruzioni da eseguire. La sintassi per definire una funzione è:

```
def <nome>():
    <istruzioni>
```

- Ogni funzione è bene che abbia una propria stringa di documentazione, "docstring".
- Per eseguire una funzione basta scrivere il nome della funzione seguito da una coppia di parentesi tonde.
- Una volta definita una funzione, può essere eseguita dalla shell o dall'interno di un'altra funzione.
- Un programma ben strutturato è composto dai seguenti elementi:

```
<intestazione>
<lettura delle librerie>
<definizioni>
<programma principale>
```

17.8 Parametri

Come disegnare mille quadrati diversi con un'unica funzione.

Abbiamo visto che se devo disegnare tanti quadrati, invece che ripetere tante volte i ciclo `for` è molto più sensato definire una funzione da richiamare tutte le volte ce mi serve usando semplicemente il suo nome.

Ora se ho definito la funzione `quadrato`, posso disegnare quanti quadrati voglio, in tutte le posizioni e in tutte le direzioni, ma saranno tutti quadrati congruenti. E se mi servissero quadrati grandi e quadrati piccoli? Vediamo come gli informatici hanno risolto questo problema.

17.8.1 Quadratini, quadratoni... quadrati!

Creiamo una nuova finestra di editor e salviamola con il nome `xxquadrati.py` (dove con xx intendo il numero di programmi a cui siete arrivati). Poi, nella sezione delle funzioni definiamo la funzione quadrato come abbiamo già fatto nel primo programma. Poi scriviamo il programma principale, quello che crea un foglio, crea una tartaruga e disegna un quadrato. Ricordiamoci anche di scrivere i commenti. Dovrebbe essere qualcosa di simile a questo:

```
# <data>
# <nome>
# Quadrati con la grafica della tartaruga: parametri

# lettura delle librerie
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle

# Definizioni di funzioni
def quadrato():
    """Disegna un quadrato di lato 50."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(50)
        tina.left(90)

# Programma principale
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
quadrato()
```

Eseguiamo il programma (tasto `<F5>`) e correggiamo tutti gli errori finché non otteniamo il nostro quadrato. Ricordiamoci di disporre le finestre in modo da poter vedere contemporaneamente il codice che abbiamo scritto, il foglio su cui disegna la tartaruga e la finestra della shell su cui appaiono eventuali messaggi.

Nei prossimi programmi avremo bisogno di quadrati grandi e di quadrati piccoli. Non è un problema scrivere una funzione quadratino e una funzione quadratone, ad esempio:

```
def quadratino():
    """Disegna un quadrato di lato 10."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(10)
        tina.left(90)

def quadratone():
    """Disegna un quadrato di lato 100."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(100)
        tina.left(90)
```

Osservazione: tra due funzioni lasciate sempre una linea vuota, migliora la leggibilità del codice.

Modifichiamo anche il programma principale in modo che disegni tutti tre i quadrati. Proviamolo e correggiamo tutti gli errori.

Le due funzioni fanno il loro dovere, ma non siamo soddisfatti, ci resta un dubbio. Se avessi bisogno anche di un quadratino di lato 7 o di lato 9.2 o di lato ... dovrei riempire il mio programma di funzioni quasi del tutto uguali.

Mettiamo in evidenza in che cosa sono diverse le funzioni precedenti. L'unica cosa che cambia da una all'altra è un numero. Possiamo sostituire quel numero con un parametro, cioè una variabile che una volta valga 10 una volta 100 e quando mi serve un quadrato di lato 25.6 valga esattamente 25.6! Il parametro deve essere dichiarato all'interno delle parentesi che seguono il nome della funzione e deve avere un nome che sia significativo per noi, nel nostro caso un buon nome per il parametro può essere "lato". Modifichiamo la funzione `quadrato` in questo modo:

```
def quadrato(lato):
    """Disegna un quadrato dato il lato."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(lato)
        tina.left(90)
```

La sintassi completa di una funzione è dunque:

```
def <nome>([<parametri>]):
    <istruzioni>
```

Ora se tentiamo di eseguire la funzione quadrato con il comando:

```
>>> quadrato()}

Traceback (most recent call last):
  File <pyshell>, line 1, in <module>
    quadrato()
TypeError: quadrato() takes exactly 1 argument (0 given)
```

... invece della figura otteniamo un messaggio di errore. L'ultima riga ci dice quale difficoltà ha incontrato Python nel tentare di eseguire il nostro comando: la funzione `quadrato()` richiede esattamente un argomento, noi gliene abbiamo dati zero. Dobbiamo dire a quadrato quanto grande lo vogliamo:

```
>>> quadrato(25.6)
```

Questa volta appare il quadrato e con questa unica funzione possiamo disegnare quadrati di tutte le dimensioni. Il numero posto tra parentesi, che si chiama "argomento", viene associato alla parola "lato", che si chiama "parametro" e quando viene dato alla tartaruga il comando di andare avanti le viene detto di andare avanti esattamente di quella quantità associata al parametro.

Modifichiamo il programma principale in modo che disegni i tre quadrati chiamando solo la funzione `quadrato` con diversi argomenti.

Riassumendo

- È possibile definire delle funzioni con alcuni valori variabili, il nome delle variabili vanno inseriti tra la coppia di parentesi che segue il nome della funzione. La sintassi per definire una funzione è:

  ```
  def <nome>([<parametri>]):
      <istruzioni>
  ```

- I parametri sono zero o più nomi eventualmente separati da virgole.
- Al momento dell'esecuzione si deve mettere tra le parentesi che seguono il nome della funzione tanti argomenti quanti sono i parametri:

  ```
  <nome>([<argomenti>])
  ```

- Gli argomenti sono zero o più oggetti eventualmente separati da virgole.

17.9 Altri parametri

Come costruire funzioni sempre più flessibili

Perché fermarsi alla dimensione dei poligoni? Una volta usati i parametri per disegnare quadrati grandi e piccoli, possiamo generalizzare il meccanismo. In un nuovo file di nome `poli.py`, scriviamo le due procedure per disegnare quadrati e triangoli di lato variabile...:

```
# <data>
# <nome>
# Poligoni regolari con la grafica della tartaruga: parametri

# lettura delle librerie
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle

# Definizioni di funzioni
def triangolo(lato):
    """Disegna un triangolo dato il lato."""
    for cont in range(3):
        tina.forward(lato)
        tina.left(120)

def quadrato(lato):
    """Disegna un quadrato dato il lato."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(lato)
        tina.left(90)

# Programma principale
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
triangolo(20)
quadrato(20)
```

Evidenziamo le differenze tra una funzione e l'altra ce ne sono due: il numero di lati, il quadrato ne ha 4 e il triangolo 3, e l'ampiezza dell'angolo esterno, 90 per il quadrato, 120 per il triangolo. Proviamo a cercare una relazione che leghi il numero di lati all'ampiezza dell'angolo esterno.

Aggiungiamo, nel programma precedente le funzioni che disegnino altri poligoni e completiamo la tabella relativa a numero di lati e angolo esterno.

Quando i lati aumentano gli angoli diminuiscono... il prodotto tra numero di lati e angolo è sempre lo stesso... L'ultima riga della tabella avrà il prodotto uguale a 360 e l'angolo esterno uguale a 360 / n.

Nelle funzioni precedenti al posto di 90, possiamo scrivere 360/4 e al posto di 120, 360/3:

```
# Definizioni di funzioni
def triangolo(lato):
    """Disegna un triangolo dato il lato."""
    for cont in range(3):
        tina.forward(lato)
```

TABELLA 17.1: Relazione lati - angolo

numerolati	angoloesterno	prodotto
2	?	
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
n		

```
        tina.left(360 / 3)

def quadrato(lato):
    """Disegna␣un␣quadrato␣dato␣il␣lato."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(lato)
        tina.left(360 / 4)
```

Osservazione la divisione in Python 2.x se opera su due numeri interi dà come risultato un numero intero:

```
>>> print 10 / 3
3}
```

Se almeno uno dei due operandi è un numero in virgola mobile, il risultato sarà in virgola mobile:

```
>>> print(10. / 3)
3.33333333333
```

In Python 3.x la divisione tra due numeri interi dà sempre come risultato un numero in virgola mobile:

```
>>> print(10 / 3)
3.33333333333
```

Per fare in maniera che il programma si comporti allo stesso modo in Python 2.x e in Python 3.x modifichiamo il programma aggiungendo, all'inizio, la seguente istruzione:

```
from future import division
```

Riprendiamo ora le due funzioni `triangolo(lato)` e `quadrato(lato)`, confrontandole possiamo osservare che l'unica differenza è un "3" in triangolo che diventa "4" in quadrato, è facile generalizzare la funzione, possiamo scrivere la funzione `poligono` con due parametri: "numlati" e "lunglato" e far disegnare a questa funzione poligoni regolari qualunque.

Ora il programma sarà:

```
# <data>
```

```
# <nome>
# Poligoni regolari con la grafica della tartaruga: parametri

# lettura delle librerie
from future import division
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle

# Definizioni di funzioni
def triangolo(lato):
    """Disegna␣un␣triangolo␣dato␣il␣lato."""
    for cont in range(3):
        tina.forward(lato)
        tina.left(120)

def quadrato(lato):
    """Disegna␣un␣quadrato␣dato␣il␣lato."""
    for cont in range(4):
        tina.forward(lato)
        tina.left(90)

def poligono(numlati, lunglato):
    """Disegna␣un␣poligono␣regolare␣dati:
␣␣␣␣␣␣␣il␣numero␣di␣lati:␣numlati,
␣␣␣␣␣␣␣la␣loro␣lunghezza:␣lunglato."""
    for cont in range(numlati):
        tina.forward(lunglato)
        tina.left(360 / numlati)

# Programma principale
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
poligono(3, 20)
poligono(4, 20)
```

Osservate che è stata aggiunta la lettura di una libreria, è stato cambiato anche il programma principale e ora le due funzioni `quadrato(lato)` e `triangolo(lato)` non sono più utilizzate.

Definendo la funzione `poligono(numlati, lunglato)` abbiamo insegnato a Python a riconoscere ed eseguire un nuovo comando che permette di disegnare qualunque poligono regolare.

Riassumendo

- È possibile definire delle funzioni con più parametri. Aumentare il numero di parametri permette di rendere la funzione più flessibile, ma, in compenso, può rendere più difficile capire il suo comportamento. È importante scegliere, per i parametri, dei nomi significativi.

- Quando si vuole eseguire una funzione, si deve porre all'interno delle parentesi che seguono il nome della funzione stessa, tanti argomenti quanti sono i parametri presenti nella definizione della funzione. Ad esempio, se la funzione ha 2 parametri avrà bisogno di 2 argomenti.

17.10 Problemi

Come affrontare e risolvere un problema complesso.

Abbiamo visto come scrivere funzioni sempre più flessibili, ma in genere chi programma si trova a dover risolvere problemi più complessi, cioè costituiti da più parti messe in relazione tra di loro.

La prima attività da compiere quando si affronta un problema complesso è quella di analizzare il problema. Analizzare un problema significa:

- scomporlo in problemi più semplici,
- studiare le relazioni tra le parti,
- analizzare ogni singola parte fino a ottenere parti *semplici*.

Applichiamo questo metodo a un problema abbastanza semplice: disegnare una casa stereotipata.

Lo strumento che usiamo per l'analisi è il "grafo ad albero". Il grafo richiama un po' la struttura di un albero rovesciato: la radice in alto e le foglie in basso. Nella radice viene messo il risultato finale, quello che vogliamo ottenere. Da questa partono alcuni rami che conducono a nodi che contengono le parti in cui il disegno può essere scomposto. A loro volta, queste parti vengono scomposte in altre parti fino ad arrivare a elementi abbastanza semplici da essere disegnati da una sola funzione. In ognuno di questi elementi deve essere indicata la posizione di partenza e di arrivo della tartaruga e un nome.

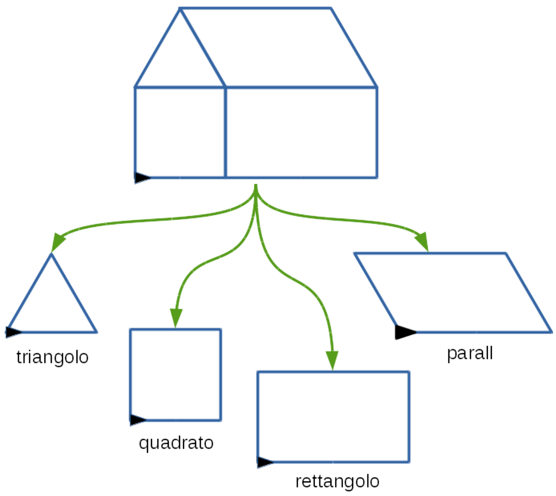


FIGURA 17.4: Analisi del disegno di una casa.

In questo **grafo ad albero**:

- Le varie parti della casetta costituiscono i *nodi*.
- Le frecce costituiscono i *rami*.
- Il nodo da cui parte tutto l'albero è la *radice*.
- I nodi da cui non parte alcun ramo sono le *foglie*.

La sua analisi è abbastanza semplice, si riduce ad un cespuglio formato da una radice, quattro rami e quattro foglie.

17.10.1 Metodo bottom-up

Per disegnare la casa bisogna riuscire a disegnare un triangolo, un quadrato, un rettangolo e un parall(elogramma).

Scritta l'intestazione e le due righe che importano le librerie necessarie, passiamo scrivere le quattro funzioni necessarie. Perché tutto si incastri correttamente bisogna anche stabilire le dimensioni delle varie parti in modo coerente. Se costruiamo un triangolo e un quadrato di lato 50 allora il rettangolo dovrà avere una dimensione di 50 e l'altra potrebbe essere di 80. Il parallelogramma dovrà avere i lati di ... e il primo angolo esterno di ... gradi.

Per quanto riguarda la quinta funzione, `casa()`, si potrebbe pensare di spostare la tartaruga nel punto comune a tutti quattro i moduli che compongono la casa, disegnarli e poi riportare la tartaruga dove era stata presa. La funzione potrebbe somigliare a:

```
def casa():
    """Disegna una casa."""
    tina.forward(50)
    tina.left(90)
    tina.forward(50)
    tina.left(30)
    triangolo()
    tina.left(60)
    quadrato()
    tina.left(90)
    rettangolo()
    tina.left(90)
    parall()
    tina.left(90)
    tina.back(50)
    tina.right(90)
    tina.back(50)
```

Eseguendo questa funzione possiamo vedere che l'analisi presentava un errore. Nella realtà i processi non sono lineari spesso una fase di lavoro comporta una revisione delle fasi precedenti.

17.10.2 Metodo top down

Ora ci poniamo il problema di scrivere le funzioni che disegnano un orribile ragnetto.

Per prima cosa analizziamo il problema che è più complesso del precedente. Possiamo suddividere il problema nei due sotto problemi: disegnare il corpo e la testa. Possiamo considerare come primitivi i disegni della circonferenza e dell'arco che disegna la testa quindi restano da disegnare le zampe e le antenne. Da notare però che le zampe destre

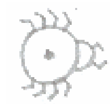


FIGURA 17.5: Un orribile ragnetto.

sono diverse da quelle sinistre. Per complicarci un po' la vita possiamo realizzare un ragno con una dimensione variabile.

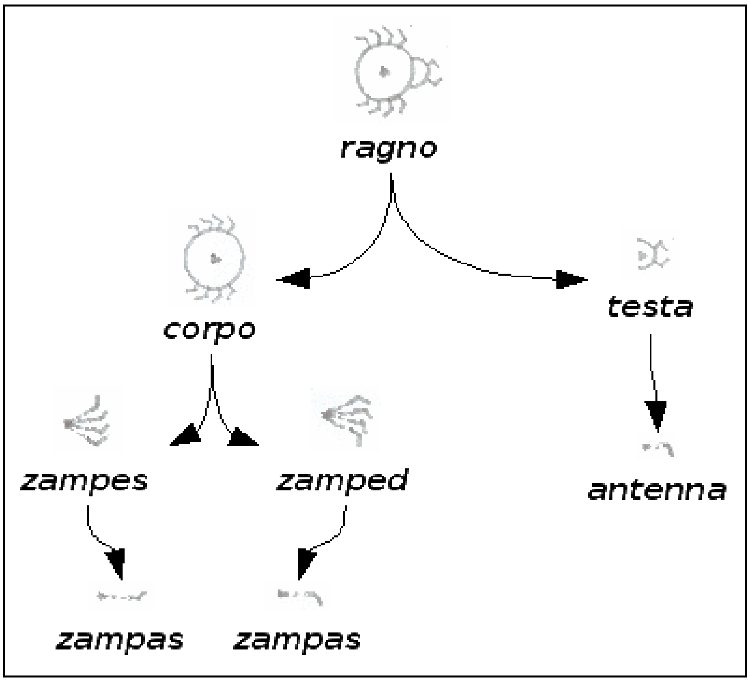


FIGURA 17.6: Analisi dell'orribile ragnetto.

A questo punto possiamo passare a scrivere il codice: un nuovo file, salvarlo con un nome adatto, poi:

- la solita intestazione che dà le informazioni di base,
- la lettura delle librerie,
- lo spazio per le funzioni,
- il programma principale,

Dovremmo aver scritto qualcosa che assomiglia a questo:

```
# <data>
# <nome>
# Un orribile ragnetto

# lettura delle librerie
from future import division
from pyturtle import TurtlePlane, Turtle

# Definizioni di funzioni
```

```
# Programma principale
foglio = TurtlePlane()
tina = Turtle()
ragno(50)
```

Abbiamo scritto il programma principale che produce il nostro disegno, ora lo proviamo: <F5>.

Effettivamente non è molto credibile che un programma siffatto possa disegnare il ragnetto che abbiamo in mente noi. Analizziamo il messaggio di errore ottenuto:

```
Traceback (most recent call last):
  File .../06ragno.py, line 15, in <module>
    ragno()
NameError: name 'ragno' is not defined
```

- la prima riga ci dice che c'è un errore;
- la seconda ci dice *dove* si trova l'errore;
- la terza riporta la riga di programma incriminata;
- la quarta ci dice perché Python non è in grado di eseguire il programma.

L'ultima riga del messaggio ci dice che Python non sa eseguire `ragno()`, bene partiamo da qui e diciamoglielo noi definendo la funzione che disegna tutto il ragno.

Il ragno è costituito dal corpo, da uno spostamento senza lasciare segno, dalla testa e da un altro spostamento, per rimettere la tartaruga al suo posto:

```
def ragno(dim):
    """Disegna un orribile ragnetto."""
    corpo(dim)
    tina.up()
    tina.forward(dim)
    tina.down()
    testa(dim/2)
    tina.up()
    tina.back(dim)
    tina.down()
```

<F5> per eseguire il programma, ma non otteniamo ancora nulla se non un altro messaggio che termina con la seguente riga:

```
NameError: global name 'corpo' is not defined
```

Python giustamente protesta che non gli abbiamo ancora detto come è fatto il corpo del ragno, non c'è problema, ci mettiamo subito al lavoro. L'addome del ragno può essere disegnato utilizzando il metodo `ccircle(raggio, estensione)` che permette di disegnare una circonferenza di raggio dato o un arco di circonferenza dati raggio e ampiezza dell'arco:

```
def corpo(dim):
    """Disegna il corpo del ragno."""
    tina.ccircle(dim)  # addome del ragno
```

```
    tina.left(90)
    zampes(dim)
    tina.left(180)
    zamped(dim)
    tina.left(90)
```

<*F5*> per eseguire il programma... Questa volta qualcosa viene disegnato: il pancione del ragno, ma Python si interrompe ancora con un errore:

```
NameError: global name 'zampes' is not defined
```

Bene, questo messaggio ci dice che che è ora di scrivere la funzione *zampes(dim)*. Questa funzione dovrà disegnare le quattro zampe sinistre che sono uguali tra di loro, solo ruotate di qualche grado:

```
def zampes(dim):
    """Le quattro zampe sinistre del ragno."""
    tina.right(30)
    for cont in range(4):
        zampas(dim)
        tina.left(20)
    tina.right(20*4)
    tina.left(30)
```

Facendoci guidare dagli errori che man mano Python rileva, procediamo a scrivere il resto del codice. In particolare la testa usa il metodo *ccircle(raggio, estensione)* per tracciare un arco di 210 gradi:

```
def testa(dim):
    """Disegna la testa del ragno."""
    tina.right(105)
    tina.ccircle(dim, 210)
    tina.right(105)
    tina.right(30)
    antenna(dim, +60)
    tina.left(60)
    antenna(dim, -60)}
    tina.right(30)}
```

17.10.3 Top down e problemi di matematica

Normalmente per risolvere problemi di matematica, nella scuola, si propone il metodo bottom up: si parte dai dati, si trova qualcosa di utile e via via ci si avvicina all'incognita. Questo metodo risulta di poco aiuto nella *ricerca* della soluzione.

Il metodo top down può fornire una guida preziosa nella soluzione dei problemi.

Prendiamo come esempio un problema di geometria solida:

Il volume di una piramide è $1000cm^3$ e la base è un rombo il cui perimetro è $52cm$ e una diagonale è di $24cm$. Calcola la misura dell'altezza.

Soluzione

$altezza = \frac{3*volume}{sup.base}$

$\mathrm{sup.base} = \frac{\mathrm{diag.1} * \mathrm{diag.2}}{2}$

$\mathrm{diag.1} = 2 * \mathrm{semid.1}$

$\mathrm{semid.1} = \sqrt{\mathrm{lato}^2 + \mathrm{semid.2}^2}$

$\mathrm{semid.2} = \frac{\mathrm{diag.2}}{2} = \frac{24cm}{2} = 12cm$

$\mathrm{lato} = \frac{\mathrm{perimetro}}{4} = \frac{52}{4} = 13cm$

$\mathrm{semid.1} = \sqrt{\mathrm{lato}^2 + \mathrm{semid.2}^2} = \sqrt{13^2 + 12^2} = 5cm$

$\mathrm{diag.1} = 2 * \mathrm{semid.1} = 2 * 5cm = 10cm$

$\mathrm{sup.base} = \frac{\mathrm{diag.1} * \mathrm{diag.2}}{2} = \frac{10cm * 24cm}{2} = 120cm^2$

$\mathrm{altezza} = \frac{3 * \mathrm{volume}}{\mathrm{sup.base}} = \frac{3 * 1000cm^3}{120cm^2} = 25cm$

Riassumendo

- Prima di affrontare un problema complesso, bisogna suddividerlo in parti

  facendone un'accurata analisi.

- Possiamo risolvere un problema con il metodo "top-down" cioè partire dalla funzione più generale e realizzare man man mano le funzioni che sono richieste dal programma, controllando ogni volta che il programma, fino a quel punto funzioni correttamente.

- Possiamo risolvere un problema con il metodo "bottom-up" cioè realizzare prima gli elementi più semplici, controllando che funzionino correttamente e metterli poi assieme per realizzare porzioni via via più complesse del problema

17.11 Esercizi

17.11.1 Esercizi dei singoli paragrafi

17.4 Primi comandi

17.1. Calcola il prodotto dei naturali dall'uno al venti.

17.2. Calcola l'area di un trapezio che ha: B = 15.3, b = 11.4, e h = 21.3

17.3. Fa calcolare a Python la soluzione di un problema di geometria.

17.4. Fa calcolare a Python la somma dei numeri quadrati dall'uno al cinque.

17.5. Fa calcolare a Python la sguente espressione: $5(5+1)(5*2+1)$. Cosa puoi osservare?

17.6. Prova a eseguire con altri numeri i precedenti due esercizi.

17.5 Avanti, indietro, destra, sinistra

17.7. Disegna una bandierina con il drappo rettangolare.

17.8. Disegna una bandierina con il drappo triangolare, quadrato, a pentagono concavo, ...

17.9. Disegna due bandierine con le aste disposte a V.

17.10. Disegna una freccia.

17.11. Disegna un alberello stilizzato.

17.12. Disegna una casetta stilizzata.

17.13. Disegna la lettera A.

17.6 Iterazione: ciclo `for`

17.14. Disegna diversi cammini dell'ubriaco cambiando l'angolo di rotazione.

17.15. Disegna diversi cammini dell'ubriaco cambiando lo spostamento massimo.

17.16. Disegna cammini in cui resta costante la lunghezza ma cambia in modo casuale la rotazione.

17.17. Disegna percorsi in cui cambia anche il colore o lo spessore della penna.

17.7 Programmi e funzioni

17.18. Salva il programma *01quadrato.py* con il nome *02poligoni.py*. Aggiungi al programma *01poligoni.py* le funzioni per disegnare altri poligoni regolari. Dove aggiungerai le funzioni? Dove scriverai le istruzioni che eseguono le funzioni aggiunte?

17.19. Aggiungi la funzione *tutti()* che disegni tutti i poligoni creati.

17.20. Scrivi un altro programma *stelle.py* che disegni delle raggiere con diverso numero di raggi.

17.21. Modifica il programma stelle in modo che le diverse stelle abbiano anche colore diverso.

17.22. Aggiungi al programma *stelle.py* una funzione che disegni le diverse stelle in posizioni casuali del foglio.

17.8 Parametri

17.23. Aggiungi al programma *xxquadrati.py* una funzione *quadrati()* che disegni una sequenza di quadrati di diversa dimensione.

17.24. Aggiungi una funzione *griglia()* che disegni quattro di queste sequenze ruotate di un angolo retto.

17.25. Scrivi un altro programma (*xxfila.py*) che disegni una fila di quadrati di diverse dimensioni decrescenti. Deve avere una funzione *fila()* e il programma principale deve chiamare questa funzione. Ricordati che la funzione *fila()* deve rimettere tartaruga dove l'ha trovata.

17.26. Modifica il programma precedente aggiungendo una funzione *quadrifila()* che disegni quattro file ruotate di un angolo retto.

17.27. Scrivi un altro programma (*xxcoda.py*) che disegni una fila di quadrati di diverse dimensioni, decrescenti, leggermente ruotati tra di loro. Deve avere una funzione *coda()* e il programma principale deve chiamare questa funzione. Ricordati che la funzione *coda()* deve rimettere tartaruga dove l'ha trovata.

17.28. Modifica il programma precedente aggiungendo una funzione *tricoda()* che disegni tre code ruotate tra di loro.

17.29. Scrivi un programma *xxtriangoli.py* che disegni triangoli di diverse dimensioni.

17.9 Altri parametri

17.30. Usa la funzione *poligono(...)* per disegnare poligoni simili uno dentro l'altro.

17.31. Disegna una fila di poligoni simili. Ricorda di riportare la tartaruga al punto di partenza.

17.32. Disegna una "coda" di poligoni in cui cambia invece che la dimensione dei lati, il numero di lati.

17.33. Scrivi un programma che disegni 50 poligoni sparpagliati a caso nel foglio con dimensioni, numero di lati, colori e spessori della penna diversi.

17.34. Scrivi un programma che disegni 100 stelle sparpagliate a caso nel foglio con dimensioni, numero di raggi, colori e spessori della penna diversi.

17.35. Realizza una pavimentazione del foglio con moduli quadrati.

17.36. Realizza una pavimentazione del foglio con moduli triangolari.

17.37. Realizza una pavimentazione del foglio con moduli esagonali.

17.10 Problemi

17.38. Termina il disegno della casa.

17.39. Termina il disegno del ragnetto.

17.40. Analizza e disegna una casetta con porta, finestre e camino.

17.41. Analizza e disegna una maschera.

17.42. Analizza e disegna un robot umanoide.

17.43. Disegna le seguenti figure: una bandierina; una casetta; una barchetta.

17.44. Disegna le seguenti figure: una bandierina; una casetta; una barchetta.

17.45. Realizza alcuni semplici disegni nello stesso foglio.

17.46. Disegna una sequenza di poligoni regolari con lo stesso lato e con numero di lati crescente usando l'iterazione.

17.47. Disegna il simbolo di pericolo radiazioni.

17.48. Disegna una fila di bandierine.

17.49. Definisci una funzione che disegni un percorso a casaccio, poi richiamala all'interno di un ciclo.

17.50. Scrivi un programma che chiede un numero compreso tra 2 e 5 e

17.51. Disegna una spirale di poligoni.

17.52. Scrivi delle funzioni che disegnino degli alberi.

17.53. Disegna un paesaggio con alberi e case.

17.54. Disegna un palazzo con un numero variabile di piani.

17.55. Disegna una città costituita da palazzi con numero di piani casuale.

17.56. Disegna un prato con fili d'erba e fiori.

17.57. Disegna una scala con enne gradini.

17.58. Disegna un poligono di lato variabile con lati tratteggiati.

17.59. Disegna poligoni concavi, poligoni stellati.

17.60. Recupera da un libro di terza media qualche problema di geometria solida e risolvilo con il metodo proposto sopra.