MATEMATICA C^3

MATEMATICA DOLCE 5

Testo per il secondo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Matematicamente.it

2016 Edizione - 2016

Matematica C^3– Matematica dolce 5

COORDINATORI DEL PROGETTO Daniele Zambelli.

AUTORI Leonardo Aldegheri, Elisabetta Campana, Luciana Formenti, Michele Perini, Maria Antonietta Pollini, Nicola Sansonetto, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca, Daniele Zambelli .

HANNO COLLABORATO Alberto Bicego, Alessandro Canevaro, Alberto Filippini .

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Daniele Zambelli .

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 0.0.9 del 27 giugno 2016.
Stampa 2016: giugno 2016.
ISBN

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Matematica dolce 5 - 2016.
Codice ISBN:
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2016.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,
lui apprezza molto il progetto Matematica C^3
e penso che la tua versione gli possa far comodo
soprattutto per i primi anni del nostro serale.
Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C^3 *normale,*
ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,
promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane
(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.
In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C^3*,*
"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?
Buon lavoro,
Alice

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

Matematica C^3 Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica* C^3. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica* C^3.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica* C^3 in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica* C^3 ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli

Prefazione alla seconda edizione

Un anno di lavoro ha messo in luce alcuni errori che sono stati corretti, la nuova versione è scaricabile da:

bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce_2ed

e

bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce_2ed.

Ma, soprattutto, in questo anno è sorta una interessante opportunità: è stato finanziato un progetto per tradurre il testo in braille. Il lavoro sta procedendo e alcuni capitoli sono già stati tradotti. Quanto fatto lo si può trovare in:

oer.veia.it

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Prefazione all'edizione 2016

Cambia il modo di indicare le edizioni.

Ma soprattutto è cambiata l'organizzazione del materiale: ora tutto il progetto è contenuto in un unico repository.

Matematica Dolce, oltre ad essere un libro *libero* è anche *polimorfo*: ora è molto semplice creare nuovi libri partendo dal materiale presente nel repository. Già da quest'anno, oltre alla versione orientata ai licei non scientifici, sta prendendo vita una versione per gli istituti professionali. Il tutto è ospitato in:

bitbucket.org/zambu/matematicadolce

Quest'anno altri colleghi si sono uniti al progetto e un alunno ha fornito le immagini per le copertine.

Per quanto riguarda i contenuti, riporto i principali cambiamenti:

- la geometria è stata inserita nel testo di matematica;
- nel terzo volume è stato inserito un capitolo che introduce ai numeri Iperreali;
- è stata riscritta la parte di linguaggio di programmazione per la geometria interattiva;
- è stato aggiunto il quarto volume.

Abbiamo svolto un gran lavoro, ora è il momento di usarlo.

Buon divertimento con la matematica!

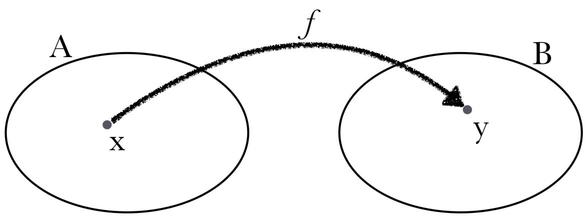
Daniele Zambelli

1 Funzioni

Riprendiamo ora il concetto di funzione, precedentemente studiato nel capitolo 12 del secondo volume, approfondendone alcuni aspetti che ci saranno utili nel proseguo del nostro percorso.

1.1 Definizione di funzione

Definizione 1.1. Dati due insiemi A e B non vuoti definiti in $\mathbb{R}$ è detta f, FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE, una qualsiasi legge, applicazione o corrispondenza che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.



Una funzione viene indicata:

$f : A \to B$ tra insiemi $f : x \mapsto y$ tra elementi con $x \in A$ e $y \in B$

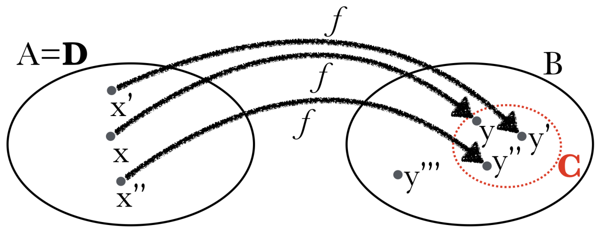
Dobbiamo pensare che x mediante la corrispondenza f diventa y, l'elemento y è dunque l'IMMAGINE di x mediante la trasformazione f; altrettanto e viceversa possiamo chiamare x CONTROIMMAGINE di y.

L'elemento x viene dunque proiettato mediante una sua trasformazione che chiamiamo f nell'elemento y di B, y risulta così dipendente da x perché determinata proprio in funzione di x, variabile indipendente.

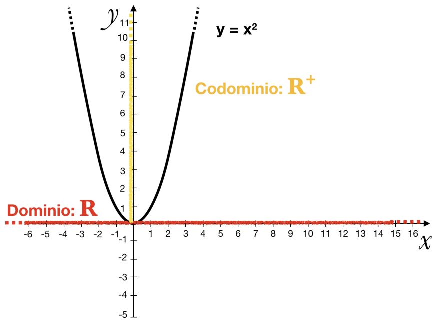
L'immagine y risulta propriamente in funzione di x e possiamo scrivere $f(x) = y$ e la precedente espressione tra elementi diventa $f : x \mapsto f(x) = y$.

Definiamo D DOMINIO l'insieme A delle x e C CODOMINIO il sottoinsieme di B di tutte le immagini di x, cioè di tutte e sole le y generate dalla trasformazione f.

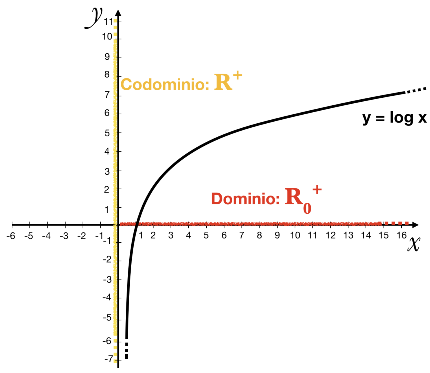
Notiamo, nella figura precedente che mentre il dominio coincide con l'insieme di partenza il codominio è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo.



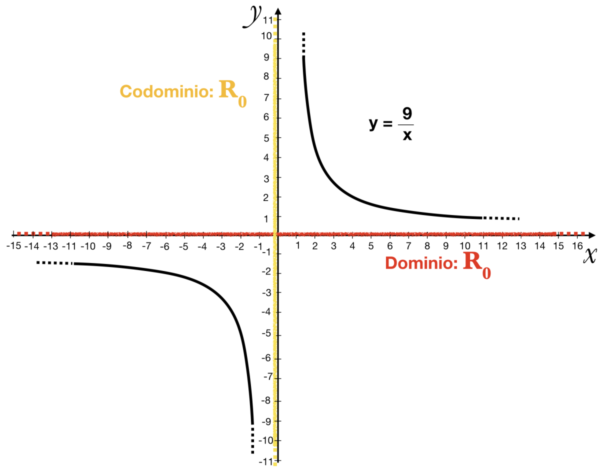
Esempio 1.1. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = x^2$



Esempio 1.2. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = \log x$



Esempio 1.3. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = \frac{9}{x}$



Per calcolare il dominio delle funzioni, vediamo una tabella riassuntiva dei possibili casi.

Funzione	Dominio	Esempio
Funzioni razionali intere $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$	$D = \mathbb{R}$	$y = x^3 - x^2 + 2x + 1$ $D = \mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $B(x)$, cioè $B(x) \neq 0$	$y = \frac{3+x^2}{x-5}$ $D = \mathbb{R} - \{5\}$
Funzioni irrazionali $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	Se n è dispari il D è il D di $f(x)$ Se n è pari, $D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) \geqslant 0\}$	$y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ $D = \mathbb{R}$ $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $D = x^2 \geqslant 1 =$ $= x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1$
Funzioni logaritmiche $y = \log_a f(x)$ con $a > 0$, $a \neq 1$ $y = \log_{g(x)}(f(x))$	$D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) > 0\}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) > 0 \wedge$ $\wedge g(x) > 0 \wedge g(x) \neq 1\}$	$y = \log(x+1)$ $D = x > -1$
Funzioni esponenziali $y = a^{f(x)}$ con $a > 0$, $a \neq 1$ $y = f(x)^{g(x)}$	D di $f(x)$ $D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) > 0\} \wedge$ D di $g(x)$	$y = 3^{2x}$ $D = \mathbb{R}$ $y = e^{\frac{1}{x+1}}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$
Funzioni potenza $y = f(x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$		
a intero positivo	D di $f(x)$	$y = (x-1)^2$ $D = \mathbb{R}$
a intero negativo	D di $f(x)$ con $f(x) \neq 0$	$y = (x-1)^{-2}$ $D = x \neq 1$
a razionale	D di $f(x)$ razionale	$y = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$ $D = x \geqslant 1$
a irrazionale positivo	$D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) \geqslant 0\}$	$y = (x-1)^{\pi}$ $D = x \geqslant 1$
a irrazionale negativo	$D = \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) > 0\}$	$y = (x-1)^{-\pi}$ $D = x > 1$
Funzioni goniometriche $y = \sin x$, $y = \cos x$	$D = \mathbb{R}$	
$y = \tan x$, $y = \sec x$	$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	
$y = \cot x$, $y = \csc x$	$D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$	

Funzioni goniometriche inverse		
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$	$D = [-1, 1]$	
$y = \arctan x$, $y = \text{arccot}\, x$	$D = \mathbb{R}$	
Funzioni goniometriche composte		
$y = \sin[f(x)]$, $y = \cos[f(x)]$	D di $f(x)$	
$y = \tan[f(x)]$	$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq \frac{\pi}{2} + + k\pi\right\}$	$y = \tan[2x - 1]$ $2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $D = x \neq \frac{\pi+1+k\pi}{2}$
$y = \cot[f(x)]$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq k\pi\}$	
$y = \arcsin[f(x)]$, $y = \arccos[f(x)]$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant 1\}$	$y = \arcsin[x - 1]$ $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$ $0 \leqslant x \leqslant 2$
$y = \arctan[f(x)]$	D di $f(x)$	$y = \arctan[\frac{x+2}{x+3}]$ $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

1.2 La rappresentazione di una funzione

Una funzione può essere rappresentata in diversi modi, i principali sono:

- RAPPRESENTAZIONE TABULARE
  Le funzioni empiriche vengono ricostruite con una tabella in cui ad ogni y corrisponde un certo x. Ad esempio pensiamo ad una tabella che dà la temperatura ora per ora in un certo luogo.

- RAPPRESENTAZIONE ANALITICA
  La funzione è espressa mediante un insieme di operazioni matematiche che applicate in un certo ordine ad x restituiscono un corrispondente valore di y. Esempi ne sono $y = \log(x + 2)$, $y = 2x^3 + 3$ o $y = \sin x + 2^x$, cioè le espressioni, scritte in linguaggio matematico, che siamo abituati a trattare.

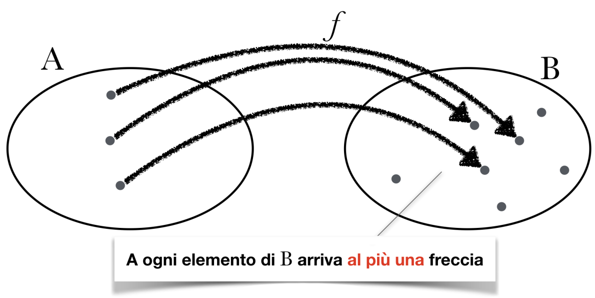
- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
  La funzione è rappresentata come una corrispondenza x–y su un grafico cartesiano; in particolare, ricordiamo che: il grafico di una funzione $f : A \to B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate $(x; y)$ che si ottengono prendendo un valore x in A e trovando il corrispondente valore $y = f(x)$ in B. Ogni coppia ordinata rappresenta un punto nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

1.3 Le proprietà di una funzione

Una funzione, a seconda, del modo in cui gli elementi del dominio corrispondono agli elementi del codominio si può definire INIETTIVA, SURIETTIVA e BIIETTIVA (o BIUNIVOCA).

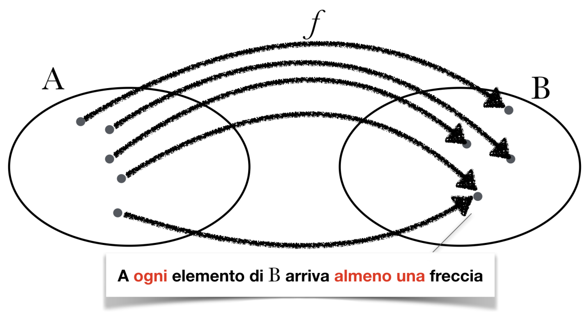
Definizione 1.2. Una funzione da A a B si dice INIETTIVA se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A;

$$f : A \to B \text{ è iniettiva se } \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Definizione 1.3. Una funzione da A a B si dice SURIETTIVA quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A;

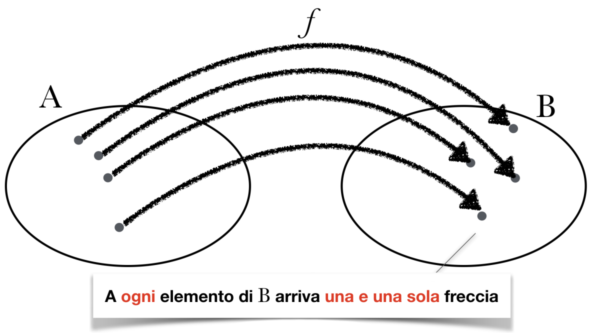
$$f : A \to B \text{ è suriettiva se } \forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$$



Il fatto che una funzione sia o non sia suriettiva dipende da come si sceglie l'insieme di arrivo. Se lo si sceglie coincidente con il codominio la funzione è suriettiva.

Definizione 1.4. Una funzione da A a B è BIIETTIVA (O BIUNIVOCA) quando è sia iniettiva sia suriettiva.

Esempio 1.4. Quando una funzione è biettiva?
Una funzione biiettiva è ad esempio una qualsiasi retta. Una retta è infatti sia iniettiva, che biettiva di dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.



Una funzione biiettiva viene anche detta biiezione o corrispondenza biunivoca fra gli insieme A e B. Tale relazione tra insiemi è molto forte e specifica in quanto ad ogni elemento di A viene associato un solo elemento di B e, reciprocamente, ad ogni elemento di B è associato un solo elemento di A, in una relazione uno a uno. Per tale ragione, la relazione tra i due insiemi viene indicata con una doppia freccia $A \leftrightarrow B$.

1.4 Le caratteristiche di una funzione

Analizziamo ora le caratteristiche che può manifestare una funzione, qualità che può presentare il suo andamento e che possono contraddistinguerne la forma del grafico.

1.4.1 Monotonia

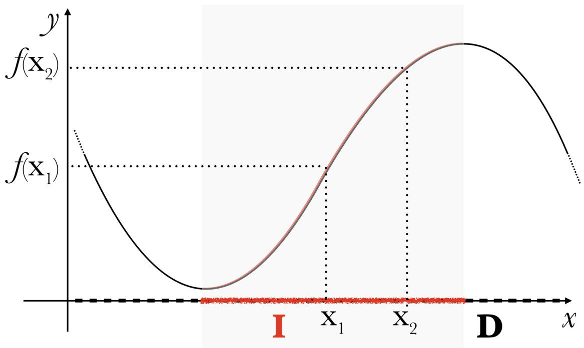
La caratteristica della monotonia vuole evidenziare l'andamento CRESCENTE o DECRESCENTE di una funzione; la monotonia studia il comportamento della variabile dipendente y all'aumentare della variabile indipendente x. All'aumentare dell'ascissa se aumenta anche l'ordinata diremo che la funzione cresce, se l'ordinata diminuisce diremo che la funzione decresce. Vediamo e puntualizziamo meglio.

Definizione 1.5. Una funzione $y = f(x)$ di dominio D, si dice CRESCENTE IN SENSO STRETTO in un intervallo I, sottoinsieme di D, se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) < f(x_2)$$

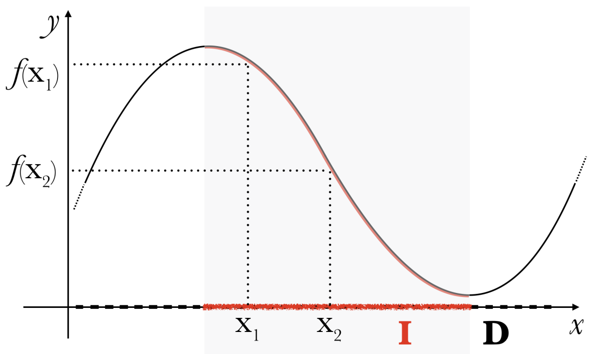
Definizione 1.6. Una funzione è non decrescente o CRESCENTE in senso lato in un intervallo I, sottoinsieme di D, se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$



Definizione 1.7. Una funzione $y = f(x)$ di dominio D, si dice DECRESCENTE IN SENSO STRETTO, in un intervallo I, sottoinsieme di D, se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) > f(x_2)$$

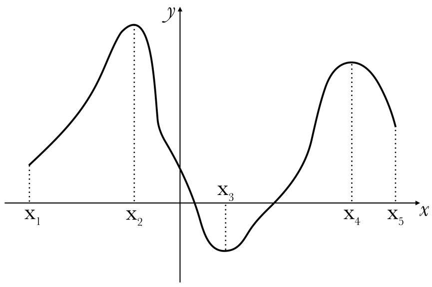


Definizione 1.8. Una funzione è non crescente o DECRESCENTE in senso lato in un intervallo I, sottoinsieme di D, se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Una funzione, quindi, si dice monotòna in un intervallo I del suo dominio se in I è sempre crescente o decrescente.

Esempio 1.5. Individuiamo gli intervalli in cui la funzione rappresentata risulta crescente o decrescente.
Negli intervalli finiti $x_1 < x < x_2$, $x_3 < x < x_4$ la funzione risulta essere crescente; negli intervalli finiti $x_2 < x < x_3$, $x_4 < x < x_5$.



1.4.2 Parità

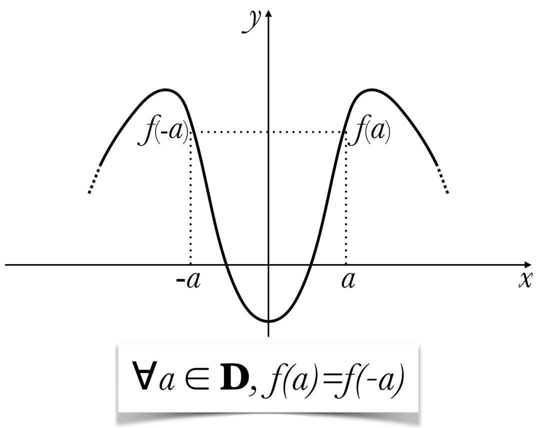
La caratteristica della parità va a verificare se il grafico della funzione che stiamo studiando è simmetrico rispetto all'asse delle Y, cioè il grafico è speculare rispetto all'asse, o se il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine. Nel primo caso parleremo di PARITÀ della funzione, nel secondo caso parleremo di DISPARITÀ della funzione.

Ovviamente non tutte le funzioni presenteranno questa simmetria, possiamo però individuare delle condizioni che, se presenti nella funzione, ci assicurano che questa è pari o dispari.

Definizione 1.9. Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$. Una funzione si dice PARI in D se

$$f(-x) = f(x)$$

per ogni $x \in D$.



Se una funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse Y. Infatti se $P(x; y)$ appartiene al grafico anche $P'(-x; y)$ vi appartiene. Sottolineiamo ancora che la condizione di parità per una funzione è $f(-x) = f(x)$.

Esempio 1.6. Verificare se una funzione è o non è pari.
Per verificare se una funzione è pari basta sostituire nella funzione $-x$ al posto di x e verificare se la nuova $f(-x)$ è uguale alla funzione di partenza, cioè se $f(-x) = f(x)$. Se prendiamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+2}$$

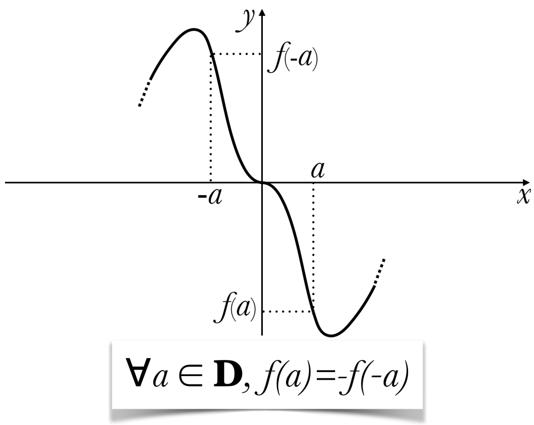
non è pari, infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)+2} = \frac{x^2+3}{-x+2} \neq f(x).$$

Definizione 1.10. Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$. Una funzione si dice DISPARI in D se

$$f(-x) = -f(x)$$

per ogni $x \in D$.



Se una funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Infatti se $P(x; y)$ appartiene al grafico anche $P'(-x; -y)$ vi appartiene. Sottolineiamo ancora che la condizione di disparità per una funzione è $f(-x) = -f(x)$.

Esempio 1.7. Verificare se una funzione è o non è dispari.
Per verificare se una funzione è dispari basta sostituire nella funzione $-x$ al posto di x e verificare se la nuova $f(-x)$ è uguale alla funzione di partenza cambiata di segno, cioè se $f(-x) = -f(x)$. Se prendiamo la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

è dispari, infatti

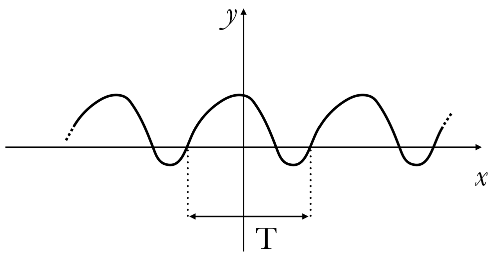
$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+2} = \frac{-x}{x^2+2} = -\frac{x}{x^2+2} = -f(x).$$

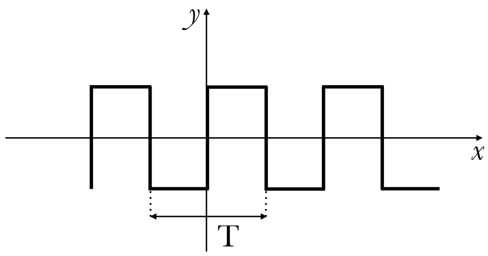
1.4.3 Periodicità

La periodicità di una funzione specifica se questa si ripete uguale a sé stessa ad intervalli regolari.

Definizione 1.11. Una funzione $y = f(x)$, $f(x) : A \to \mathbb{R}$ si dice PERIODICA di periodo $T > 0$ di periodo $T > 0$ se$\forall x \in A \to (x + T) \in A$e possiamo scrivere

$$f(x + T) = f(x)$$





Esempio 1.8. Calcolare il periodo di una funzione.
Calcoliamo il periodo della funzione goniometrica

$$y = \sin 7x$$

con due possibili procedure:

Procedura a) La funzione ha per definizione periodo T se, con k intero,

$$\sin[(7(x + kT)] = \sin 4x$$

cioè,

$$\sin[(7x + 7kT)] = \sin 4x$$

poichè la funzione seno ha periodo 2π, allora

$$\sin[7x + 7kT] = \sin[7x + 2k\pi]$$

e l'uguaglianza è quindi valida se $7T = 2\pi$ da cui

$$T = \frac{2\pi}{7}.$$

Procedura b) La funzione $y' = \sin 7x'$ viene dalla trasformazione della funzione $y = \sin x$, che ha periodo $T = 2\pi$, mediante una sostituzione $7x' = x$, ovvero $x' = \frac{x}{7}$. Se l'asse delle ascisse viene così contratto di un fattore $\frac{x}{7}$, il periodo T' subirà la stessa contrazione e pertanto è pari a

$$T' = \frac{x}{7}(2\pi) = \frac{2\pi}{7}$$

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno periodi diversi T_f e T_g, rispettivamente, le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ hanno un periodo pari al m.c.m. tra T_f e T_g nell'ipotesi che $\frac{T_f}{T_g}$ sia un numero razionale e diverso da 1. Se il rapporto è irrazionale le precedenti combinazioni di funzioni non sono periodiche. Se $T_f = T_g$ il periodo globale è minore o uguale del periodo comune.

Esempio 1.9. Calcolare il periodo di combinazioni di funzioni periodiche e non periodiche.

a) $f(x) = \sin x + \cos 3x$ è periodica di 2π che è il m.c.m. tra $T_f = 2\pi$ e $T_g = \frac{2}{3}\pi$.

b) $f(x) = \sin x + \cos \pi x$ non è periodica perché il rapporto $\frac{T_f}{T_g} \notin \mathbb{Q}$, infatti $T_f = 2\pi$ e $T_g = 2$, per cui $\frac{2\pi}{2} = \pi \notin \mathbb{Q}$

c) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \cos 3x + \tan x$ dove $T_{\sin \frac{x}{2}} = 4\pi$, $T_{\cos 3x} = \frac{2}{3}\pi$, $T_{\tan} = \pi$

d) Se consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log[\sin x]}$$

il periodo è 2π

Se una funzione è periodica i valori delle sue ordinate si ripetono con regolarità, quindi per studiarne l'andamento su tutto l'asse reale, basterà studiarne l'andamento in un singolo periodo. Ripetiamo ancora che la condizione di parità per una funzione è $f(x + T) = f(x)$ con T periodo.

1.4.4 Limitatezza

La limitatezza di una funzione valuta se le ordinate di una funzione raggiungono un valore massimo e un valore minimo, oppure non hanno un limite.

Definizione 1.12. Consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, la funzione si dice:

- ▷ LIMITATA SUPERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ ha un limite superiore k:

$$\exists k \in \mathbb{R} | \forall x \in A,\ k \geqslant f(x)$$

- ▷ LIMITATA INFERIORMENTE se il suo codominio f(A) ha un limite inferiore k:

$$\exists k \in \mathbb{R} | \forall x \in A,\ k \leqslant f(x)$$

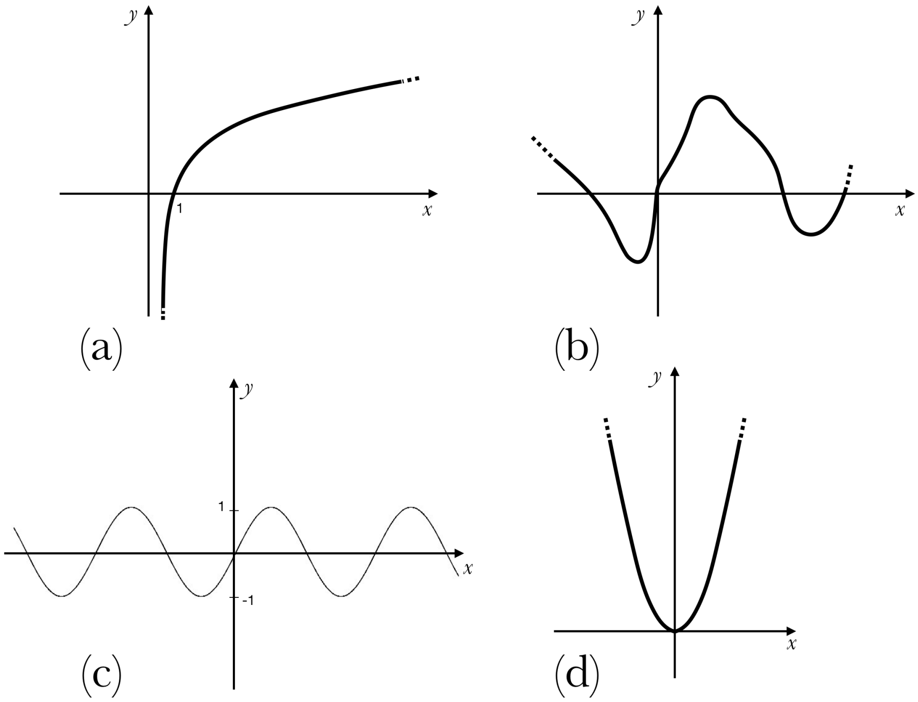
- ▷ LIMITATA se il suo codominio $f(A)$ è limitato sia superiormente che inferiormente:

$$\exists k \in \mathbb{R}, k > 0 | \forall x \in A, |f(x)| \leqslant k$$

Se una funzione non è limitata da un valore del codominio k si dirà illimitata, in particolare:

- ▷ ILLIMITATA SUPERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ non è limitato superiormente;
- ▷ ILLIMITATA INFERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ non è limitato inferiormente;
- ▷ ILLIMITATA se il suo codominio $f(A)$ non è limitato superiormente né inferiormente.

Esempio 1.10. Determinare la limitatezza o illimitatezza di funzioni.
In (a) La funzione $f(x) = \log(x)$ è illimitata: né superiorementе né inferiormente limitata; in (b) La funzione è limitata inferiormente e illimitata superiormente; in (c) La funzione $f(x) = \sin x$ è limitata sia superiormente che inferiormente; in (d) La funzione $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente.



1.5 La classificazione delle funzioni

Classifichiamo le possibili funzioni che incontreremo o abbiamo incontrato in base alle operazioni che compaiono nella loro espressione analitica. Se nell'espressione analitica di una funzione compaiono le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza con esponente razionale o estrazione di radice siamo di fronte ad una FUNZIONE ALGEBRICA.

Le funzioni che non possono essere rappresentate usando solamente le operazioni precedentemente ricordate si dicono TRASCENDENTI. Tra le più note funzioni trascendenti ricordiamo le funzioni goniometriche, quelle esponenziali e quelle logaritmiche.

A seconda che le funzioni algebriche contengano o meno l'operazione di radice e l'operazione di divisione suddividiamo le funzioni algebriche in RAZIONALI FRATTE, RAZIONALI INTERE o polinomiali, IRRAZIONALI FRATTE e IRRAZIONALI INTERE.

MEMO!! Per non creare equivoci ricordiamo che una funzione è definita fratta quando il denominatore contiene la variabile indipendente x, è invece definita irrazionale quando tale variabile appare sotto il segno di radice.

Esempio 1.11. Classificazione di funzioni.
Classifichiamo le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{(x+5)}}{3}$ è una funzione irrazionale intera, infatti pur avendo un denominatore, questo non contiene la variabile indipendente x;

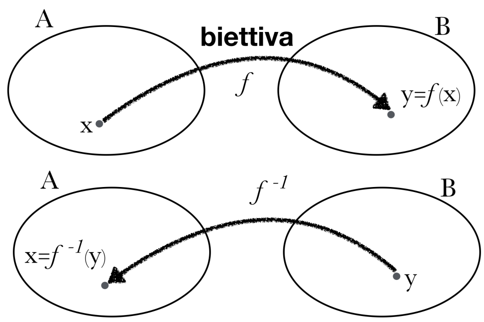
b) $g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ è una funzione trascendente di tipo esponenziale;

c) $h(x) = \sqrt{2}x + 4x$ è una funzione razionale intera, in quanto la radice compare solo nel numero irrazionale a coefficiente della $\sqrt{2}\,x$.

1.6 Funzioni inverse, composte e uguali

Nella rappresentazione insiemistica studiata finora abbiamo sempre visto le frecce partire dall'insieme A per arrivare nell'insieme B. Esiste una possibile lettura al contrario? Se le frecce partissero da B, dalle y per arrivare alle x, ci troveremmo ancora in presenza di una funzione?

Definizione 1.13. Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva. Si dice funzione inversa di f la funzione $f^{-1} : B \to A$ che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



Notiamo che se una funzione ammette inversa si dice INVERTIBILE. Significativa è, poi, la relazione tra i codomini e i domini delle due funzioni, f e la sua inversa: il dominio di f^{-1} è l'immagine di f e l'immagine di f^{-1} è il dominio di f.

Esempio 1.12. Calcolare e graficare l'inversa di una funzione, verificando che sia invertibile. Consideriamo la funzione biiettiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

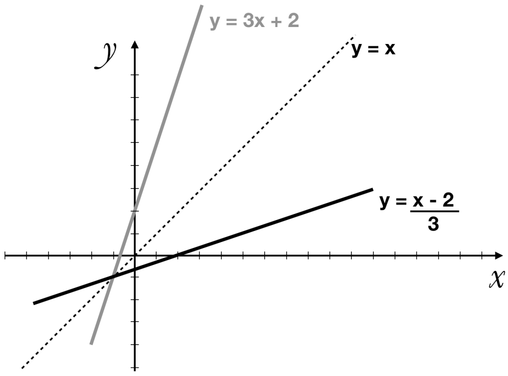
$$f(x) = y = 3x + 2$$

Possiamo ottenere la sua inversa f^{-1} nel seguente modo:

- ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente

$$x = \frac{y-2}{3}$$

- sostituiamo la x con y e viceversa.



- notiamo che il grafico della funzione inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

è simmetrico a quello di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta di equazione $y = x$

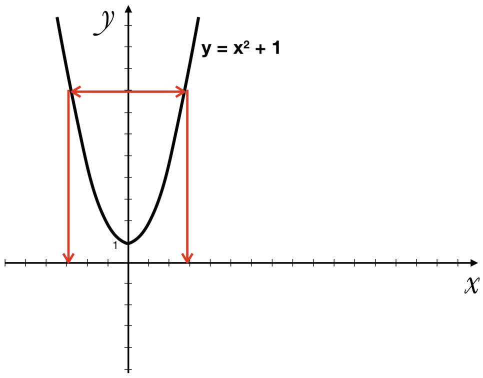
Esempio 1.13. Disegnare l'inversa di una funzione che originariamente non sia invertibile nel suo dominio.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

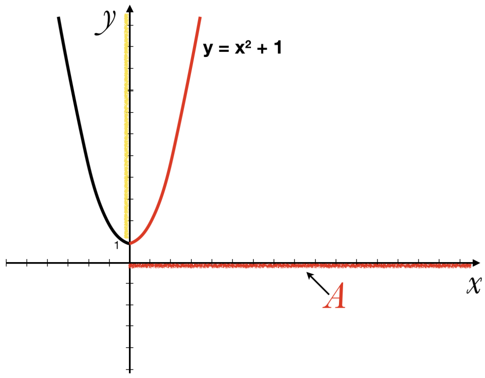
$$f(x) = x^2 + 1$$

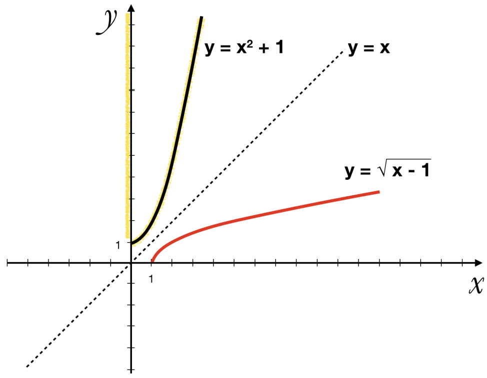
.

- f non ammette funzione inversa perché non è biiettiva, in quanto non è iniettiva.



- Se f non è biiettiva e quindi non è invertibile, possiamo operare una RESTRIZIONE DEL DOMINIO a un sottoinsieme in cui f risulti biiettiva.
- Scelgo solo una parte del dominio che chiamo A e disegno l'inversa riflettendo la porzione di funzione biiettiva rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta di equazione $y = x$.





Come visto negli esempi precedenti, il grafico della funzione f^{-1}, inversa della funzione f, è il simmetrico di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Anche se sappiamo che l'inversa di una certa funzione deve essere simmetrica rispetto ad essa, trovare l'inversa di una determinata funzione e in particolar modo la sua forma analitica può non essere immediato. Forniamo quindi una procedura.

Procedura 1.1 Determinare l'inversa di una funzione data:[vedi la procedura a pag 100 vol3]

1. Si verifica che $f(x)$ è invertibile;
2. Si esplicita la f rispetto a x;
3. Nella forma appena trovata si sostituisce x con y e y con x.

Esempio 1.14. Invertiamo la funzione: $f(x) = y = \sqrt[3]{x} - 1$

1. La funzione è invertibile perché è strettamente crescente in tutto il dominio $\mathbb{R}$.
2. Esplicitiamo la funzione rispetto a x:
   $y = \sqrt[3]{x} - 1 \rightarrow y + 1 = \sqrt[3]{x} \rightarrow (y+1)^3 = x$
3. Infine otteniamo: $f^{-1}(x) = y = (x+1)^3$

Esempio 1.15. Invertiamo la funzione: $f(x) = y = e^{x+1} - 1$

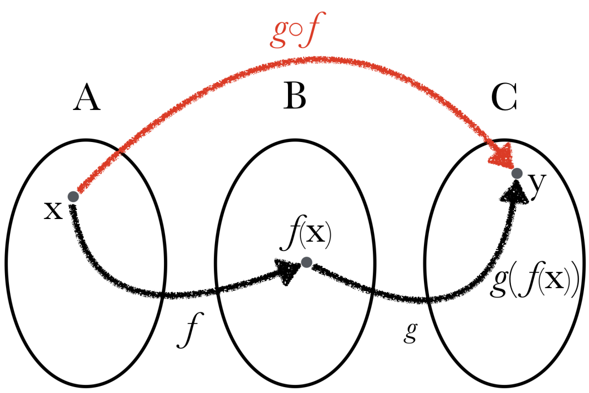
1. La funzione è invertibile perché è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
2. Esplicitiamo la funzione rispetto a x:
   $y = e^{x+1} - 1 \to y + 1 = e^{x+1} \to \ln(x+1) = \ln(e^{x+1}) \to \ln(y+1) - 1 = x$.
3. Infine otteniamo: $f^{-1}(x) = y = \ln(x+1) - 1$.

Studiate le funzioni inverse discutiamo ora un'operazione tra funzioni che ci consentirà di creare funzioni complesse a partire da funzioni semplici: questa operazione si chiama COMPOSIZIONE DI FUNZIONI e il suo risultato sarà una nuova funzione detta composta.

Definizione 1.14. Date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ si dice funzione composta $f \circ g$ la funzione: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ che associa ad ogni elemento di A un elemento di C in modo che

- all'elemento $x \in A$ corrisponde mediante f, l'elemento $f(x) \in B$
- all'elemento $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g, l'elemento $g(f(x)) \in C$

affinché sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g. Il dominio di $g \circ f$ è costituito da tutti gli elementi del dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g.



La simbologia $g \circ f$ si legge «g composto f» o «g dopo f»; $g(f(x))$ si legge «g di f di x».

Per quanto riguarda le proprietà di questa operazione tra funzioni notiamo che la composizione è associativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, ma in generale non commutativa $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio 1.16. Date le due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 5$, determiniamo le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Abbiamo $g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$ e il dominio della funzione ottenuta è $x \geqslant 0$. Otteniamo l'altra composta con un procedimento analogo $f \circ g = f(g(x)) = f(x+5) = \sqrt{x+5}$ e il suo dominio è $x \geqslant 5$. La diversità delle due funzioni ottenute ci conferma la non commutatività dell'operazione di composizione.

Posso comporre una funzione con la sua inversa?
Sia f una funzione invertibile di dominio D e immagine I, con f^{-1} la sua inversa. Consideriamo la composta $f^{-1} \circ f$, cioè f^{-1} dopo f: x va in $f(x)$ che a sua volta va in x, $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in D$ $f^{-1} \circ f$ è la funzione identità in D, analogamente anche $f(f^{-1}(x)) = x$, $f \circ f^{-1}$ è l'identità in I. Ricordiamo che la funzione identità è una particolare funzione che associa ad ogni x la x stessa, cioè associa ad ogni elemento del dominio, lo stesso elemento nel codominio.

Definizione 1.15. Due funzioni f e g si dicono uguali se hanno lo stesso dominio D e risulta

$$f(x) = g(x)$$

$\forall x \in D$.

Esempio 1.17. Vediamo un esempio di funzioni uguali e non uguali. Le due funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}}$$

e

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$$

sono uguali perchè hanno lo stesso dominio ($x \geqslant 0$) e risulta:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$$

per ogni $x \geqslant 0$. Vediamo un contoesempio di funzioni uguali. Le due funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

e

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x+4}}$$

non sono uguali perché hanno dominio diverso: la funzione f è definita per $x \geqslant 0$, mentre la funzione g è definita per $x < -4 \vee x \geqslant 0$.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$$

per ogni $x \geqslant 0$.

1.7 Esercizi

1.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 Definizione di funzione

1.1) Riflettendo sulla definizione di funzione rispondi argomentando alle seguenti domande:

a) Quali tra i seguenti oggetti, che puoi rappresentare sul piano cartesiano, è una funzione: circonferenza, ellisse, parabola con asse verticale?

b) Quali tra i seguenti oggetti, che puoi rappresentare sul piano cartesiano, sono funzioni: retta verticale, retta orizzontale, retta obliqua?

c) Considera una parabola con asse verticale e una con asse orizzontale, quale delle due è una funzione?

1.2) Determina il dominio delle seguenti funzioni

a) $y = 4x^2 + x + 2$ $[\ D = \mathbb{R}\ ]$

b) $y = \frac{3x+2}{x-5}$ $[\ D = \mathbb{R} - \{5\}\ ]$

c) $y = \sqrt{9 - x^2}$ $[\ D = [-3, 3]\ ]$

d) $y = \frac{4x}{\sqrt{x+2}}$ $[\ D =]-2, +\infty[\ ]$

e) $y = \frac{2+3x}{x^2+7x+12}$ $[D = \mathbb{R} - \{-3, -4\}]$

f) $y = e^{x+3}$ $[D = \mathbb{R}]$

g) $y = \log_2(x+3)$ $[D =]-3, +\infty[\ ]$

h) $y = \ln(x^2 + 6x + 8)$ $[D =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[]$

i) $y = \frac{x^3+3x}{e^x+5}$ $[D = \mathbb{R}]$

l) $y = \frac{3x^2+4}{e^x-2}$ $[D = \mathbb{R} - \{\ln 2\}]$

m) $y = \frac{4x-5}{2x-8} - \sqrt{x+3}$ $[D = [-3, 4[\cup]4, +\infty[]$

n) $y = \sqrt{\log(x+4)}$ $[D = [-3, +\infty[]$

o) $y = (x+5)^{x+3}$ $[D =]-5, +\infty[]$

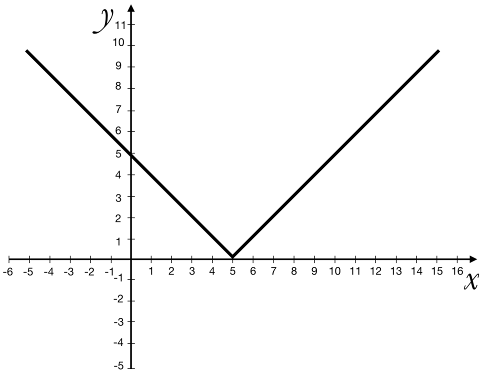
p) $y = 2\sin x + \cos 2x$ $[D = \mathbb{R}]$

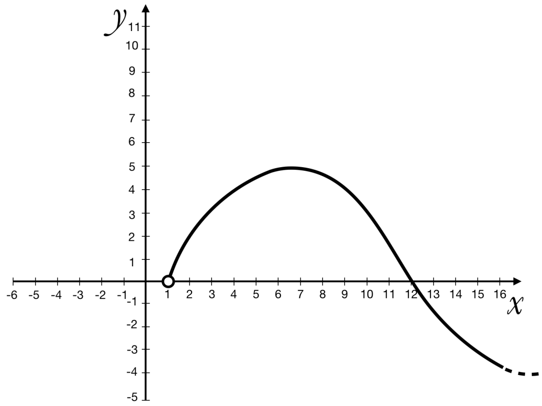
q) $y = 2 + \cos 3x 2 \sin x$ $[D = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}]$

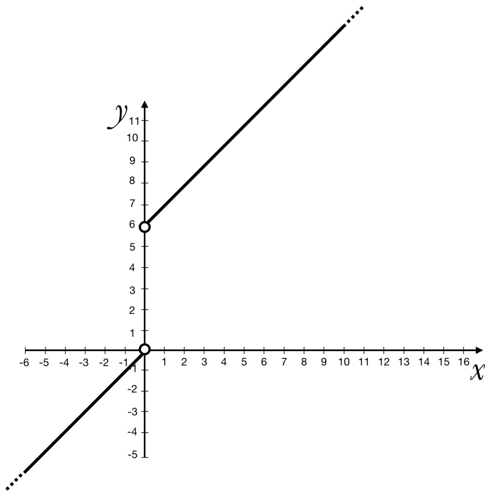
r) $y = \arcsin(x+2)$ $[D = [-3, -1]]$

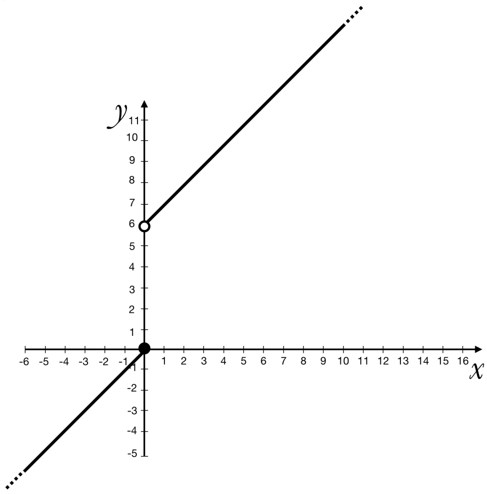
s) $y = \arctan(\frac{3}{x+2})$ $[D = \mathbb{R} - \{-2\}\ ]$

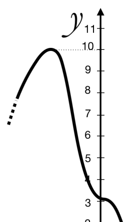
1.3) Dall'analisi visiva del grafico deduci il dominio e codominio della funzione.











1.2 La rappresentazione di una funzione

1.4) Immagina l'evoluzione della temperatura ora per ora nella città di Firenze, in una giornata di agosto, costruiscine la rappresentazione tabulare e quella grafica.

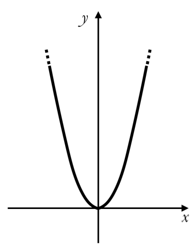
1.5) Rappresenta graficamente le seguenti funzioni:

a) $y = \sin 2x$
b) $y = 3x + 2$
c) $y = x^2 + 2$
d) $y = x^2 + 2x + 3$
e) $y = \log(x + 1)$
f) $y = e^x + 2$
g) $y = \frac{x+2}{2x-4}$
h) $y = \sqrt{9 - x}$
i) $y = \sqrt{9 - 4x^2}$
l) $y = \sqrt[3]{x}$
m) $y = |x^2 + 4x + 3|$

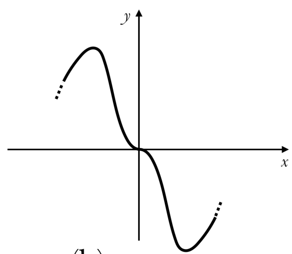
1.3 Le proprietà di una funzione

1.6) Stabilisci se le seguenti funzioni, rappresentate graficamente, sono iniettive, suriettive o biunivoce, motivando la risposta.

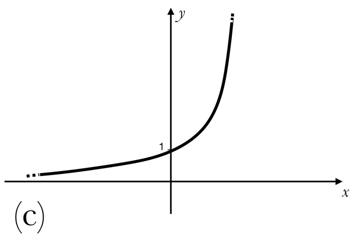
(a) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(c) $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



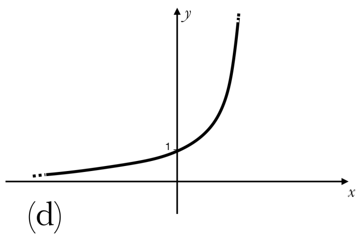
(a)



(b)



(c)



(d)

1.4 Le caratteristiche di una funzione

1.7) Verifica se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

a) $y = 2x + 3$ [né pari né dispari]

b) $y = x^3 + x$ [dispari]

c) $y = \frac{x^2+3}{x}$ [dispari]

d) $y = \frac{3x^4}{2+x^2}$ [pari]

e) $y = \tan x + \sin x$ [dispari]

f) $y = \log(x - 1)$ [né pari né dispari]

1.8) Stabilisci se le seguenti funzioni sono periodiche, individuandone l'eventuale periodo.

a) $y = \sin 4x$ [periodica $T = \frac{\pi}{2}$]

b) $y = \tan 2x$ [periodica $T = \frac{\pi}{2}$]

c) $y = \cos 3x + 1$ [periodica $T = \frac{2\pi}{3}$]

d) $y = \cos x + x$ [non periodica]

e) $y = \tan \frac{x}{5}$ [periodica $T = 5\pi$]

f) $y = \sin(x + 1)$ [periodica $T = 2\pi$]

g) $y = \sin x + 1$ [periodica $T = 2\pi$]

h) $y = \sin x + x$ [non periodica]

i) $y = \sin \frac{x}{4}$ [periodica $T = 8\pi$]

l) $y = 2^{\sin x}$ [periodica $T = 2\pi$]

m) $y = x \cos x$ [non periodica]

1.5 La classificazione delle funzioni

1.9) Classifica prima riguardo alle categorie algebrico o trascendente e poi rispetto alle categorie fratta o intera e razionale o irrazionale le seguenti funzioni.

a) $y = \frac{x^2+x+2}{3x}$

b) $y = \frac{4}{\sqrt{x-6}}$

c) $y = e^x + x$; $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$

d) $y = \frac{1}{3}\sqrt{3 - x}$

e) $y = \frac{\sin x}{4}$

f) $y = \frac{x^2-4x}{3+\sqrt{2}}$

1.6 Funzioni inverse, composte e uguali

1.10) Stabilisci se le seguenti funzioni sono invertibili senza restrizioni, giustificando la risposta.

a) $y = 2x + 3$ [invertibile]

b) $y = x^2 + 9x + 18$ [non invertibile]

c) $y = e^x$ [invertibile]

d) $y = \ln x$ [invertibile]

e) $y = x^3 + 3x^2 + x$ [non invertibile]

f) $y = \sin x$ [non invertibile]

1.11) Determina l'inversa della funzione data, specificando il suo dominio.

a) $y = 4x + 3$ $[y = \frac{x-3}{4},\ D = \mathbb{R}]$

b) $y = e^{2x}$ $[y = \frac{\ln x}{2},\ D =]0, +\infty[]$

c) $y = x + 1$ $[y = x - 1,\ D = \mathbb{R}]$

d) $y = \ln(x + 1)$ $[y = e^x - 1,\ D = \mathbb{R}]$

1.12) Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ determina le espressioni analitiche di $f \circ g$ e di $g \circ f$.ben leggibile questo esercizio

a) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$
$g(x) = \log_4 x$
$[(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\log_4 x + 3}; (g \circ f)(x) = \log_4 (\sqrt[3]{x+3})]$

b) $f(x) = 3^x$
$g(x) = x - 5$
$[(f \circ g)(x) = 3^{x-5}; (g \circ f)(x) = 3^x - 5]$

c) $f(x) = \cos 3x$
$g(x) = \sqrt{x^2+3}$
$[(f \circ g)(x) = \cos 3\sqrt{x^2+3}; (g \circ f)(x) = \sqrt{(\cos 3x)^2 + 3}]$

d) $f(x) = x^2 + 3$
$g(x) = 2x + 1$
$[(f \circ g)(x) = (2x+1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4; (g \circ f)(x) = 2(x^2+3) + 1 = 2x^2 + 7]$

semmai si aggiungono nei prossimi giorni...

2 Topologia della retta

2.1 La topologia della retta

Già dall'etimologia del termine, dal greco "*topos*" che significa "luogo", apprendiamo che il termine topologia indica lo studio ragionato dei luoghi. Nell'ambito dei nostri studi la topologia, o scienza dei luoghi, è quella branca della matematica che studia le proprietà geometriche delle figure piane e spaziali che restano inalterate eseguendo trasformazioni biunivoche. In particolare, con l'espressione topologia della retta si indica lo studio della retta come insieme di punti, approfondendo i concetti di vicinanza, lontananza e distanza tra di essi.

Il primo passo che facciamo è quello di identificare i numeri reali con i punti della retta: ad ognuno degli infiniti punti della retta facciamo corrispondere uno degli infiniti numeri dell'insieme $\mathbb{R}$. Ricordiamo infatti che entrambi sono insiemi ordinati e completi e possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi, fissando sulla retta un'origine e un verso di percorrenza, come ci consente di fare il postulato di ordinamento sulla retta.

Identificando i numeri reali con i punti della retta, possiamo definire la distanza tra due numeri x e y reali come la distanza $d(x,y)$ tra i punti che li rappresentano. Con $x, y \in \mathbb{R}$ la distanza è data da:

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| \tag{2.1}$$

ed ha le seguenti proprietà:

1. $\forall x,\ y \in A,\ d(x,y) = d(y,x)$ cioè la distanza è simmetrica,
2. $\forall x,\ y \in A,\ d(x,y) \geqslant 0$,
3. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
4. $\forall x,\ y,\ z \in A,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ detta disuguaglianza triangolare.

2.2 Gli intervalli

Definizione 2.1. Un INTERVALLO è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, formato da tutti i reali compresi tra due estremi, finiti o infiniti.

Gli intervalli possono essere chiusi o aperti a seconda che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.
Gli intervalli possono essere limitati se entrambi i loro estremi sono finiti: segmenti o illimitati se un estremo non è finito: semirette.

TABELLA INTERVALLI da rifare o vedi quella a vol.2 pag....

	Tipo di intervallo	Rappresentazione con le parentesi	Rappresentazione algebrica	Grafica
intervalli limitati	Intervallo **chiuso**	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	a b
	Intervallo **aperto**	(a, b) o $]a, b[$	$a < x < b$	a b
	Intervallo **chiuso a sinistra e aperto a destra**	$[a, b)$ o $[a, b[$	$a \leq x < b$	a b
	Intervallo **chiuso a destra e aperto a sinistra**	$(a, b]$ o $]a, b]$	$a < x \leq b$	a b
intervalli illimitati	**Chiuso**, illimitato a destra	$[a, +\infty)$ o $[a, +\infty[$	$x \geq a$	a
	Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$ o $]a, +\infty[$	$x > a$	a
	Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$ o $]-\infty, a[$	$x < a$	a
	Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$ o $]-\infty, a]$	$x \leq a$	a

Esempio 2.1. Intervalli finiti e infiniti: metodi di scrittura.

a) L'insieme $\mathbb{R}$ si può scrivere come l'intervallo $]-\infty, +\infty[$

b) L'insieme $\mathbb{R} - \{3\}$ si può indicare con l'intervallo $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

c) L'insieme $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ si può indicare con $]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\cup]3, +\infty[$

d) L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + 3x > 0$ si può scrivere come $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

Per quanto riguarda le operazioni tra intervalli evidenziamo che l'unione di intervalli aperti è un insieme aperto; l'intersezione di due intervalli aperti è un aperto. L'intersezione di intervalli chiusi è un intervallo chiuso; l'unione di un numero finito di intervalli chiusi è chiuso. Un intervallo B è chiuso se il suo complementare è aperto.

Grazie alla corrispondenza tra numeri reali e punti di una retta, per indicare un elemento di un intervallo possiamo riferirci indifferentemente a un numero o un punto.

2.3 Gli intorni

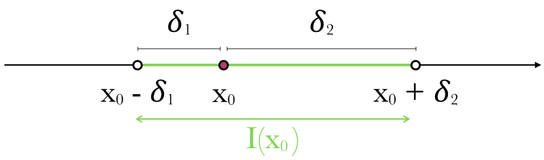
Definizione 2.2. Si definisce intorno o intorno completo di un numero reale x_0, o punto x_0, un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0.

Rappresentiamo in simboli e graficamente un intorno

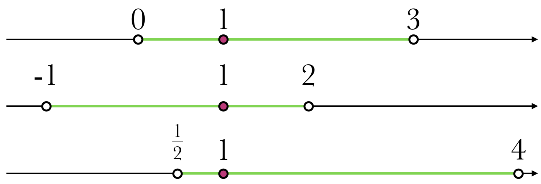
$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\tag{2.2}$$

con δ_1 e δ_2 reali positivi, cioè $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$, o equivalentemente

$$I(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\} \tag{2.3}$$



Da quanto visto risulta chiaro che per ogni numero reale, esistono infiniti intorni. Per quanto riguarda le operazioni associabili agli intorni è da sottolineare che l'intersezione e l'unione di due o più intorni di x_0 sono ancora intorni di x_0.



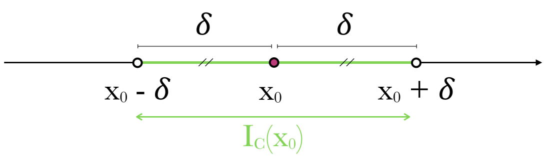
Chiarito il concetto di intorno, introduciamo alcune particolari tipologie di intorno che renderanno più funzionale l'uso di questo concetto. Vedremo l'intorno circolare, l'intorno destro e l'intorno sinistro.

Definizione 2.3. Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, si definisce INTORNO CIRCOLARE di x_0, di raggio δ, l'intervallo aperto $I_C(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ.

$$I_C(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{2.4}$$

o equivalentemente

$$I_C(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \delta\} \tag{2.5}$$

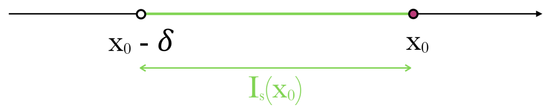


Definizione 2.4. Si dice intorno sinistro del numero reale x_0, $I_s(x_0)$ o $I^-(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo destro. $\delta \in \mathbb{R}$ è detta ampiezza.

$$I_s(x_0) =]x_0 - \delta, x_0[\tag{2.6}$$

o equivalentemente

$$I_s(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 - \delta < x < x_0\} \tag{2.7}$$

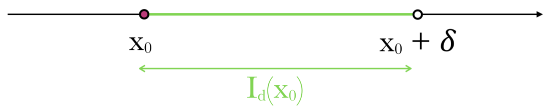


Definizione 2.5. Si dice intorno destro del numero reale x_0, $I_d(x_0)$ o $I^+(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo sinistro. $\delta \in \mathbb{R}$ è detta ampiezza.

$$I_d(x_0) =]x_0, x_0 + \delta[\tag{2.8}$$

o equivalentemente

$$I_d(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 < x < x_0 + \delta\} \tag{2.9}$$



Esempio 2.2. Intorni e intervalli.

a) L'intervallo $]-2, 9[$ è un intorno di $x_0 = 4$; rispetto a $x_0 = 4$ non sono intorni né $]5, 9[$ né $[3, 5]$.

b) L'intervallo $]0, 6[$ è un intervallo circolare di $x_0 = 3$ di raggio $\delta = 3$.

c) L'intervallo $]\frac{4}{5}, 1[$ è un intorno sinistro di 1 di ampiezza $\frac{1}{5}$.

2.4 Insiemi limitati e illimitati

Consideriamo un insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$. L'insieme A si dice superiormente limitato se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ maggiore o uguale a tutti gli elementi di A, cioè $x \leqslant \alpha$, $\forall x \in A$. Tale numero prende il nome di maggiorante, un insieme superiormente limitato ammette infiniti maggioranti. Se un insieme A non è superiormente limitato si dice superiormente illimitato. In simboli:

A è SUPERIORMENTE LIMITATO se

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in A,\ \alpha \geqslant x \tag{2.10}$$

A è SUPERIORMENTE ILLIMITATO se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \,|\, x > M \tag{2.11}$$

Specularmente l'insieme A si dice inferiormente limitato se esiste un numero $\beta \in \mathbb{R}$ minore o uguale a tutti gli elementi di A, cioè $x \geqslant \beta$, $\forall x \in A$. Tale numero prende il nome di minorante, un insieme inferiormente limitato ammette infiniti minoranti. Se un insieme A non è inferiormente limitato si dice inferiormente illimitato. In simboli:

A è INFERIORMENTE LIMITATO se

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in A,\ \beta \leqslant x \tag{2.12}$$

A è INFERIORMENTE ILLIMITATO se

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \,|\, x < m \tag{2.13}$$

Infine, completiamo la trattazione appena fatta notando che l'insieme A si dice limitato se è sia inferiormente limitato che superiormente limitato, esiste cioè un intervallo limitato che lo contiene. Un insieme illimitato superiormente e inferiormente si dice illimitato.

Esempio 2.3. Limitatezza/illimitatezza di insiemi, maggioranti e minoranti.

a) L'insieme $A =]-\infty, 4[\cup [8, 15]$ è superiormente limitato, perché tutti i suoi elementi sono minori o uguali a 15. 15 è un maggiorante, ma anche 16, 20 e 204 lo sono. A è, poi, inferiormente illimitato.

b) L'insieme $B = \{5\} \cup]9, +\infty[$ è inferiormente limitato e tutti i numeri minori o uguali a 5 sono minoranti; l'insieme è superiormente illimitato.

c) L'insieme $C = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ è limitato, ha 1 come maggiorante e 0 come minorante. Altri minoranti ad esempio sono -3, -5 ecc, altri maggioranti 5, 8 ecc.

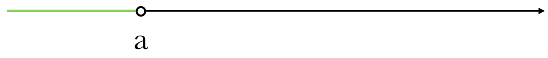
d) L'insieme $D =]3, 5] \cup [7, 9[$ ammette 2 come minorante e 10 come maggiorante, quindi è sia inferiormente che superiormente limitato: D è limitato.

e) L'insieme $\mathbb{Q}$ non ammette né minoranti né maggioranti, quindi non è non è limitato né inferiormente né superiormente.

Avendo introdotto gli insiemi illimitati possiamo ora parlare degli intorni di infinito. Anche se $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali è utile introdurne gli intorni.

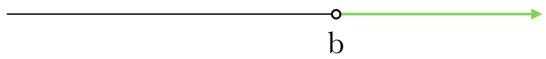
Definizione 2.6. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI MENO INFINITO un qualsiasi intervallo illimitato a sinistra e aperto a destra

$$I(-\infty) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\} \tag{2.14}$$



Definizione 2.7. Dati a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI PIÙ INFINITO un qualsiasi intervallo illimitato a destra e aperto a sinistra

$$I(+\infty) =]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > b\} \tag{2.15}$$

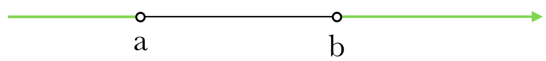


Definizione 2.8. Dati a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI INFINITO l'unione tra un intorno di $-\infty$ e un intorno di $+\infty$

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x < a \vee x > b\} \tag{2.16}$$

e L'INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO, dove $c \in \mathbb{R}^+$ come

$$I_c(\infty) =]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[\tag{2.17}$$



Esempio 2.4. Scrivere gli intervalli risultato di una disequazione come intorni di infiniti.

a) Le soluzioni della disequazione $x + 4 > 0$ formano un intorno di $+\infty$. Soluzioni: $x > -4$, $I(+\infty) =]-4, +\infty[$.

b) Le soluzioni della disequazione $x^2 + 5x + 6 > 0$ formano un intorno di infinito. Soluzioni: $-3 < x \vee x > -2$, $I(\infty) =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$.

c) Consideriamo la disequazione $|x| > 3$, le soluzioni forniscono un esempio di intorno circolare di ∞ che è $I_c(\infty) =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

2.5 Massimi, minimi ed estremi

Ragioniamo ora su quanto appena visto, nel precedente paragrafo. Se un insieme A è superiormente limitato ha infiniti maggioranti; si può allora individuare un insieme di maggioranti, tra i quali non è identificabile un maggiorante più grande di tutti, mentre possiamo pensare a un maggiorante più piccolo di tutti.

Questo maggiorante viene chiamato estremo superiore di A, se tale punto è anche compreso in A prende il nome di massimo. Chiaramente potremmo fare un discorso analogo per i minoranti, individuando il maggiore tra di essi, detto estremo inferiore. Se l'estremo inferiore appartiene all'insieme che si sta studiando, prende il nome di minimo. Entriamo nel merito delle definizioni.

Definizione 2.9. Un numero reale M si dice massimo di A, $\max A$, se appartiene ad A ed è un maggiorante di A.

Definizione 2.10. Un numero reale m si dice minimo di A, $\min A$, se appartiene ad A ed è un minorante di A.

Definizione 2.11. Si definisce S estremo superiore di A, $\sup A$, se esiste, il minimo dell'insieme dei maggioranti.

Definizione 2.12. Si definisce s estremo inferiore di A, $\inf A$, se esiste, il massimo dell'insieme dei minoranti.

Esempio 2.5. Studiamo i massimi e i minimi dei seguenti intervalli.
Consideriamo l'intervallo chiuso $[0, 2]$, esso presenta un minimo in 0 e un massimo in 2, se prendiamo invece l'intervallo aperto $]0, 2[$ esso non avrà né massimo né minimo, perché né 0 né 1 appartengono all'insieme. Risulta chiaro quindi che nell'intervallo aperto solo a destra $[0, 2[$ sarà presente un minimo, cioè 0, ma non un massimo.

Esempio 2.6. Studiamo gli estremi superiore ed inferiore dei seguenti intervalli.
Consideriamo l'intervallo $A =]1, 5]$, aperto a sinistra e chiuso a destra. L'intervallo ha un estremo inferiore in 1, infatti questo valore è il massimo dei minoranti, 1 però non è minimo in quanto non compreso in A. Lo stesso intervallo ha estremo superiore in 5, che, essendo compreso, è anche massimo. Notiamo che l'insieme dei maggioranti di A è infatti l'insieme $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 5\}$, l'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 1\}$.
Consideriamo ora l'intervallo $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, non essendo inferiormente limitato B non presenta né estremo inferiore né minimo. L'estremo superiore di B è 3, che non essendo compreso non è massimo.

Soffermiamoci ancora sui concetti di sup, estremo superiore, e di inf, estremo inferiore, enunciando la seguente proprietà che precisa l'esistenza e l'unicità di sup e inf negli insiemi limitati:

Sia $A \subset \mathbb{R}$, non vuoto:

- se A è superiormente limitato allora esiste in $\mathbb{R}$ l'estremo superiore di A $\sup A$ ed è unico.
- se A è inferiormente limitato allora esiste in $\mathbb{R}$ l'estremo inferiore di A $\inf A$ ed è unico.

2.6 I punti di accumulazione

Pensiamo ad un intervallo dato dall'insieme $A =]3,5[$ e ad un insieme fatto invece di singoli punti $B = \{2,3,4,5,6\}$ e ragioniamo sul fatto che nel primo insieme preso un qualsiasi punto ad esempio 4, ci sarà sempre un intorno di 4 che contiene altri punti di A; anche se prendiamo in considerazione 3, che a dire la verità, non fa parte di A, potrei prendere un intorno qualsiasi di 3 e verificare che vi è almeno un punto di A. Questa riflessione non si può applicare invece all'insieme B, perché se prendo un intorno di 3, nella fattispecie un intorno circolare di raggio $\frac{1}{2}$, in quell'intorno non sono compresi altri punti di B perché gli elementi di B più vicini a 3 sono 2 e 4.

Stiamo provando ad illustrare il concetto di contiguità che gli elementi di un insieme mostrano, mentre gli elementi di altri insiemi non mostrano. Siamo pronti per la definizione di punto di accumulazione.

Definizione 2.13. Dato A sottoinsieme di $\mathbb{R}$, definiamo x_0 punto di accumulazione di A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0.

- ▷ Un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.
- ▷ Si può dimostrare che se x_0 è punto di accumulazione di A, in ogni intorno di x_0 devono cadere infiniti elementi di A. Consegue da questo che un insieme finito è privo di punti di accumulazione.
- ▷ L'insieme costituito dai punti di accumulazione di A si chiama insieme derivato: $DerA$.

Come abbiamo visto nell'introduzione a questo paragrafo non tutti i punti si comportano come 4 per l'insieme A, cioè sono di accumulazione; possono esserci anche punti che si comportano come 3, per l'insieme B, cioè sono isolati.

Definizione 2.14. Un punto x_0 che appartiene ad A ma non è di accumulazione per A si dice isolato. $x_0 \in A$ è un punto isolato di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0.

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice DISCRETO se non contiene nessuno dei suoi punti di accumulazione. A è discreto se e solo se è formato da punti isolati.
Un insieme B si dice DENSO in sé se ogni suo punto è di accumulazione per esso, cioè se $B \subseteq DerB$.

Dato $X \subset \mathbb{R}$ classifichiamo i punti di $\mathbb{R}$ relativamente ad X:

- ➡ I punti interni di X sono quelli che appartengono a X e possiedono un intorno interamente contenuto in X.

- I punti esterni ad X sono quelli che non appartengono a X e possiedono un intorno completamente disgiunto da X.
- I punti di frontiera di X hanno la proprietà che ogni loro intorno contiene sia punti di X che punti che non appartengono a X.

Esempio 2.7. Relazione fra l'appartenenza di un punto all'insieme e l'essere di accumulazione per quell'insieme.

a) x_0 appartiene ad A, x_0 è di accumulazione per A
$\longrightarrow A =]4, 8[, x_0 = 5 \rightarrow x_0 \in A$ ed è di accumulazione.

b) x_0 non appartiene ad A, x_0 è di accumulazione per A
$\longrightarrow A =]4, 8[, x_0 = 4 \rightarrow x_0 \notin A$ ed è di accumulazione.

c) x_0 non appartiene ad A, x_0 non è di accumulazione per A
$\longrightarrow A =]4, 8[, x_0 = 2 \rightarrow x_0 \notin A$ e non è di accumulazione.

d) x_0 appartiene ad A, x_0 non è di accumulazione per A
$\longrightarrow A =]4, 8[, x_0 = 9 \rightarrow x_0 \in A$ e non è di accumulazione.

Esempio 2.8. Studio dei punti di accumulazione.

a) L'insieme $A = \{5, 6, 7, 8\}$ essendo finito non ha punti di accumulazione.

b) Consideriamo l'insieme $C =]1, 6[\cup]6, 8]$

- C non ha minimo, il massimo è 8;
- L'estermo inferiore è 1, l'estremo superiore 8;
- L'insieme dei minoranti è $]-\infty, 1]$;
- L'insieme dei maggioranti è $[8, +\infty[$;
- 1 e 6 sono di accumulazione per C ma non appartengono a C;
- 8 è di accumulazione per C e appartiene a C;
- Tutti i numeri compresi tra 1 e 8 sono di accumulazione per C;

c) Analizziamo l'insieme $\mathbb{Q}$ che sappiamo essere denso. Ogni numero irrazionale è di accumulazione per $\mathbb{Q}$, ma anche ogni numero razionale è di accumulazione per $\mathbb{Q}$. Tutti i numeri reali sono di accumulazione per $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ è l'insieme derivato di $\mathbb{Q}$.

d)
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 1\right\}$$

Al crescere di n, gli elementi tendono a 0, che è punto di accumulazione: in ogni intorno di 0 c'è almeno un punto di A. Ci sono tra gli elementi di A o tra i numeri reali altri punti di accumulazione per A, oltre a 0? No, non ci sono.

2.7 Esercizi

2.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

2.1 La topologia della retta

2.1) Rispondi alle seguenti domande, nella maniera più dettagliata e precisa possibile.

a) Cosa si intende per topologia della retta?

b) Qual è la principale identificazione che si fa nello studio della topologia della retta?

c) Descrivi cosa si intende per distanza tra punti.

d) Enuncia almeno tre proprietà della distanza, spiegandone il significato.

2.2 Gli intervalli

2.2) Data la rappresentazione algebrica dei seguenti intervalli esprimili sia graficamente che mediante le parentesi:

$$a)\, x \geqslant 2 \qquad b)\, 3 < x < 5 \qquad c)\, 4 < x < 7,\, x \neq 5 \qquad d)\, x < -3$$

$$e)\, \frac{1}{2} < x \leqslant 2 \qquad f)\, \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3 \qquad g)\, x \leqslant 2 \wedge x \geqslant 4$$

2.3) Risolvi le seguenti disequazioni, trovandone l'intervallo di soluzione

a) $x^2 + 2 > 0$ $[\,]-\infty, +\infty[\,]$

b) $3x^2 - 8x \geqslant 0$ $[\,]-\infty, 0] \cup [\frac{8}{3}, +\infty[\,]$

c) $6x^2 - 5x + 1 > 0$ $[\,]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\,]$

d) $-3x^2 - 2 > 0$ $[\emptyset]$

e) $x(x-2)(2x+3) < 0$ $[\,]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]0, 2[\,]$

f) $\frac{2x+5}{x-3} \geqslant 0$ $[\,]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup]3, +\infty[\,]$

g) $\frac{(x+2)^2}{3-x} > 0$ $[\,]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\,]$

2.3 Gli intorni

2.4) Ricordando le diverse tipologie di intorno classifica gli intorni seguenti rispetto al punto indicato, determinando ampiezze e raggi.

a) $]3, 7[$ rispetto a $x_0 = 5$ [circolare di raggio 2]

b) $]2, 5[$ rispetto a $x_0 = 2$ [destro di ampiezza 3]

c) $]3, 4[$ rispetto a $x_0 = 4$ [sinistro di ampiezza 1]

d) $]1/4, 3/4[$ rispetto a $x_0 = \frac{1}{2}$ [circolare di ampiezza $\frac{1}{4}$]

e) $]3, 7/2[$ rispetto a $x_0 = 3$ [destro di ampiezza $\frac{1}{2}$]

f) $]\frac{2}{5}, 2[$ rispetto a $x_0 = 2$ [sinistro di ampiezza $\frac{8}{5}$]

g) $]-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}[$ rispetto a $x_0 = -\frac{6}{5}$ [circolare di ampiezza $\frac{2}{5}$]

2.4 Insiemi limitati e illimitati

2.5) Stabilisci se i seguenti insiemi sono superiormente/inferiormente limitati/illimitati

$$a)\ [3,5] \quad b)\ ]3,5[\quad c)\ ]-\infty,\frac{1}{2}[$$

$$d)\ ]-\infty,3[\cup\{6\} \quad e)\ ]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[\quad f)\ [\sqrt{2},+\infty[$$

2.5 Massimi minimi ed estremi

2.6) Individua, se esistono, massimi, minimi, estremi superiori ed inferiori dei seguenti intervalli

a) $A = [1.5]$ [$\min A = 1$, $\inf A = 1$, $\max A = 5$, $\sup A = 5$]

b) $A =]3,6]$ [$\min A$ non esiste, $\inf A = 3$, $\max A = 6$, $\sup A = 6$]

c) $A =]-2,+\infty[$ [$\min A$ non esiste, $\inf A = -2$, max e sup non esistono]

d) $A = [2,5[\cup]6,8[$ [$\min A = 2$, $\inf A = 2$, $\max A$ non esiste, $\sup A = 8$]

e) $A =]-\infty,4]$ [min e inf non esistono, $\max A = 4$, $\sup A = 4$]

2.6 I punti di accumulazione

2.7) Stabilisci se i punti indicati sono di accumulazione per gli insiemi assegnati

a) $A = [3,7]$ $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$

b) $A =]4,9[$ $x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 11$

c) $A = \{2,3,4,5\}$ $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$

d) $\mathbb{R}$ $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

e) $\mathbb{N}$ $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 15$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ $x_0 = 3, x_1 = 4$

2.8 TODO

2.9 Esercizi

2.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

?? ??

2.1. testo esercizio

2.2. Consegna:

a)

2.9.2 Esercizi riepilogativi

2.3. testo esercizio

2.4. Consegna:

a)

Iperreali 3

Lo scopo di questo capitolo è riprendere familiarità con l'uso dei numeri iperreali, già descritti verso la fine del terzo anno. Le parti principali utili ai fini della nostra trattazione sono direttamente riportate dal terzo volume.
Il motivo di questi richiami è che in analisi matematica è normale avere a che fare con quantità infinitesime e quantità infinite e valutare il comportamento delle funzioni applicate a tali quantità. Quindi l'uso dei numeri iperreali diviene vantaggioso.
La conoscenza degli iperreali non è molto diffusa neanche fra i matematici, abituati da un secolo e mezzo a procedimenti più impegnativi e sofisticati. La ragione per la quale noi invece ne facciamo uso è che ci rendono il calcolo più semplice e immediato, senza per questo nuocere al rigore e alla precisione dei ragionamenti.

3.1 Alcune questioni importanti sui numeri in $\mathbb{R}$

I numeri reali formano un insieme *ordinato*, *denso* e *completo*: $\mathbb{R}$. È un insieme ordinato perché fra due numeri reali diversi sappiamo sempre indicare il maggiore e il minore. È denso perché fra due numeri reali diversi, per quanto vicini, se ne può sempre trovare almeno un altro. E infine $\mathbb{R}$ è un insieme completo perché il numero che troveremo fra i due vicini è ancora un numero reale.
Possiamo quindi far corrispondere ad ogni punto della *retta reale* un numero *reale* e, viceversa, ad ogni numero *reale* un punto della *retta reale*. In poche parole, siamo autorizzati a pensare la retta reale come una retta "priva di buchi": c'è almeno un punto in ogni posizione, anche osservando la retta al microscopio, con qualsiasi ingrandimento (ingrandimento reale, come vedremo).
Se usiamo la retta reale come immagine dell'insieme $\mathbb{R}$ è perché si tratta di una rappresentazione efficace. Ma ricordiamoci sempre che un insieme in matematica è un oggetto astratto, quindi la retta reale è solo un modello che ci aiuta a capire le proprietà dell'insieme $\mathbb{R}$.
Per esempio, a proposito dell'ordinamento in $\mathbb{R}$, ci riesce facile posizionare i numeri sulla retta, in corripondenza di punti più vicini o più lontani dall'origine. Così possiamo verificare anche un'ulteriore proprietà, la *proprietà archimedea*: per quanto piccolo sia un numero, si può sempre trovare una moltiplicazione tale che il prodotto superi altro numero prefissato. Sulla retta: dati due segmenti con un estremo nell'origine, potrai sempre moltiplicare la lunghezza del più breve, in modo che diventi maggiore dell'altro.
A causa della completezza di $\mathbb{R}$, non è possibile inserire nella retta reale dei punti che non corrispondano a numeri reali. Se inseriamo numeri di nuovo tipo, il modello cambia. Il nuovo insieme e la nuova retta sono diversi dall'insieme dei reali e dalla retta reale: si perde qualche proprietà e se ne acquisiscono di nuove. Infatti...

3.2 I numeri Iperreali e l'insieme $^*\mathbb{R}$

In questa sezione vedremo un nuovo insieme di numeri, utile a modellizzare e risolvere nuove classi di problemi. Rispetto a quanto già sappiamo dell'insieme $\mathbb{R}$, dovremo adattare alcune regole di calcolo e riscontreremo proprietà nuove, mentre dovremo abbandonarne una delle più note e utili.

3.2.1 Il problema della velocità

Alla fine del 1600 Newton e Leibniz studiavano problemi legati alla meccanica. Una delle grandezze alla base della meccanica è la *velocità*. Ma cosa è la velocità? Se l'oggetto A percorre più strada dell'oggetto B possiamo dire che A è più veloce di B? No, non basta misurare lo spazio percorso da un oggetto per calcolare la sua velocità, bisogna anche misurare il tempo impiegato a percorrere quello spazio. Infatti sappiamo che dire che:

$$velocità = \frac{spaziopercorso}{tempoimpiegato}$$

La grandezza calcolata in questo modo è *la velocità media* dell'oggetto, ma in ogni istante del percorso l'oggetto ha una propria velocità. Un modo molto pratico di ottenere la velocità media è di tenere conto del percorso totale e dividerlo per il tempo complessivo impiegato a percorrerlo. Insomma, se ho percorso in bicicletta 8 chilometri in mezz'ora, la mia media è di $16km/h$. Nel percorso avrò rallentato in salita, accelerato in discesa, mi sarò fermato agli stop e ai semafori, ecc., e la mia velocità media si ottiene dalla media delle velocità che ho realizzato istante per istante.
Posso sapere la velocità di ogni istante? Potrei misurare gli spazi percorsi in intervalli di tempo molto piccoli, così calcolerei le velocità relative a tratti molto brevi. Ma sarebbero sempre velocità medie. Più restringo l'intervallo di tempo, più la velocità media si avvicina alla velocità istantanea ... ma resta sempre una velocità media.

Per trovare la velocità istantanea dovrei riuscire a isolare l'istante di tempo: un numero (positivo) che rappresenta il tempo, più piccolo di qualunque altro numero. L'unico numero reale positivo, più piccolo di qualunque numero, è lo zero, ma non posso usarlo per il calcolo della velocità, perché la divisione per zero non è definita: i numeri reali non ci permettono di calcolare una grandezza così semplice e evidente come la velocità di un oggetto in un dato istante.

Servirebbe un insieme numerico con numeri positivi più piccoli di un qualsiasi altro numero positivo, ma diversi da zero! Ma è possibile trovare tali numeri nell'insieme dei reali che, come abbiamo visto, è un insieme (già) completo?

3.2.2 Un nuovo insieme: gli Iperreali

All'insieme dei numeri reali aggiungiamo un nuovo numero (non reale):

$$\varepsilon > 0 \text{ tale che } \varepsilon < \frac{1}{n} \text{ per qualunque } n \in \mathbb{N}$$

tradotto in simboli:

$$\varepsilon > 0 \quad | \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un numero siffatto lo chiameremo un *infinitesimo* e lo indicheremo con una lettera minuscola dell'alfabeto greco, per esempio ε. Per quanto è già stato detto, un tale numero non può essere un numero reale.

La prima conseguenza all'introduzione di un infinitesimo è che allora ce ne sono infiniti! Infatti anche la metà di un infinitesimo è un infinitesimo e anche il suo doppio o un suo sottomultiplo o un suo multiplo. (Per verificarlo, vedi le tabelle successive; per le conseguenze, vedi il paragrafo 10.)

Altra conseguenza dell'aggiunta di un elemento infinitesimo all'insieme dei reali è che se esiste un numero maggiore di zero più piccolo di tutti gli altri numeri allora esiste anche un numero maggiore di qualunque altro numero:

$$\text{se} \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{allora} \quad \frac{1}{\varepsilon} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi se aggiungiamo all'insieme dei reali un numero infinitesimo e possiamo usarlo nelle usuali 4 operazioni, allora in quell'insieme avremo un numero infinito di infinitesimi e un numero infinito di infiniti.

Chiamiamo *iperreali* l'insieme numerico così ottenuto e lo indichiamo con il simbolo: $^*\mathbb{R}$.

3.2.3 Tipi di Iperreali

Abbiamo visto che l'introduzione di un elemento nuovo, così piccolo da poterlo pensare trascurabile, ha reso piuttosto affollato il nuovo insieme numerico. Cerchiamo di fare un po' di ordine. L'insieme degli Iperreali contiene:

- i numeri reali che d'ora in poi verranno chiamati anche numeri *standard*, tra questi c'è anche lo zero;
- gli infinitesimi, lo zero è l'unico infinitesimo che è anche un numero reale;
- i numeri non reali che non sono né infinitesimi né infiniti;
- gli infiniti, nessun infinito ha una corrispondenza con i numeri reali.

Possiamo vedere questo insieme anche come formato dai seguenti elementi:

zero è un infinitesimo ed è un numero standard;
infinitesimi non nulli tutti gli infinitesimi diversi da zero;
finiti tutti quei numeri che sono, in valore assoluto, minori di un numero reale;
finiti non infinitesimi tutti quei numeri che sono in valore assoluto compresi tra due numeri reali diversi da zero;
infiniti tutti quei numeri che sono maggiori di qualsiasi numero reale

Per semplificare la scrittura (e complicare la lettura) adotteremo delle sigle e delle convenzioni per indicare questi diversi tipi di numeri:

tipo	sigla	simboli
zero		0
infinitesimo	*i*	
infinitesimo non nullo	*inn*	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$
finito non infinitesimo	*fni*	a, b, c, d, ...
finito	*f*	a, b, c, d, ...
infinito	*I*	A, B, C
qualsiasi		$x, y, z, \dots$

3.2.4 Iperreali finiti e parte standard

Gli Iperreali finiti sono quei numeri che sono compresi tra due numeri Reali:

Definizione 3.1. Il numero Iperreale x è compreso tra due numeri Reali allora x è un Iperreale finito:

$$\text{Se } x \in {}^*\mathbb{R} \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge a < x < b \text{ allora } x \text{ è un Iperreale finito.}$$

Ogni numero finito può essere visto come la somma di un numero reale più un Infinitesimo: se x è finito allora $x = a + \varepsilon$, quindi $x = a + \varepsilon \approx a$. Si può immaginare ogni Iperreale finito come una nuvola contenente un numero standard a e tutti gli infinitesimi che lo circondano, così vicini ad a da non potersi confondere con altri infiniti infinitesimi di una nuvola vicina, appartenenti per esempio al numero Iperreale $y = b + \varepsilon$. Un numero Iperreale finito non può essere infinitamente vicino a due numeri reali diversi quindi esiste un solo numero Reale infinitamente vicino ad un numero Iperreale. Questo numero reale si chiama *parte standard* del numeri Iperreale.

Definizione 3.2. La parte standard di un numero Iperreale finito è il l'unico numero Reale infinitamente vicino:

$$\text{Se } x \in {}^*\mathbb{R} \wedge x = a + \varepsilon \text{ allora } a = \mathrm{st}(x) \text{ (st = parte standard).}$$

3.2.5 Retta Iperreale e strumenti ottici

In un paragrafo precedente abbiamo visto che si può accettare il postulato che dice che ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale. Questa affermazione non è un teorema dimostrato, è un postulato. Fa parte del modello di numeri usato, cioè è caratteristico dei numeri reali. Giacché ora stiamo cambiando modello, cambiamo anche questo postulato. Lo riformuliamo così:

Postulato 3.1. *Ad ogni numero Iperreale corrisponde un punto della retta (iperreale) e ad ogni punto della retta (iperreale) corrisponde un numero Iperreale.*

Oppure:

Postulato 3.2. *C'è una corrispondenza biunivoca tra i numeri Iperreali e i punti della retta (iperreale).*

Con i numeri reali abbiamo una certa abitudine a rappresentare numeri. Per rappresentare i numeri Iperreali dobbiamo procurarci degli strumenti particolari: *microscopi*, *telescopi*, *grandangoli*.

Diamo una sbirciata al loro manuale di istruzioni.

Microscopi

Il microscopio permette di ingrandire una porzione di retta. Un microscopio permette di visualizzare i seguenti numeri:

- $+4,998$
- $-3,000002$
- $2-3\varepsilon$
- $-4+2\delta$

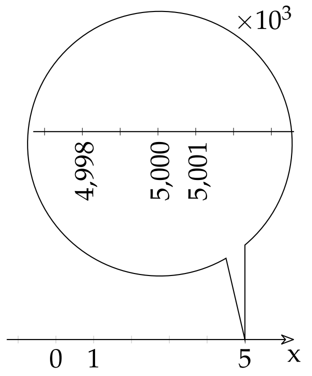


FIGURA 3.1: Microscopio per vedere $5,004$.

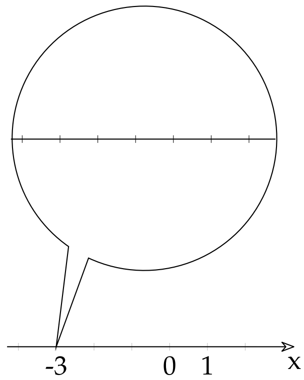


FIGURA 3.2: Microscopio per vedere $-3,000002$.

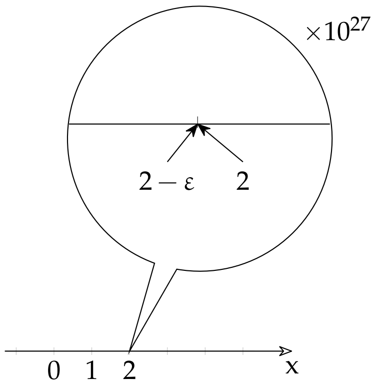


FIGURA 3.3: Microscopio per NON vedere $2-3\varepsilon$.

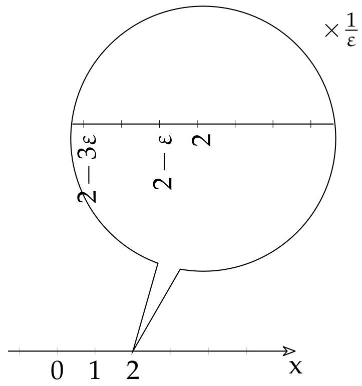


FIGURA 3.4: Microscopio per vedere $2-3\varepsilon$.

Si può osservare come ci siano microscopi "standard" che ingrandiscono un numero *naturale* di volte e microscopi "non standard" che ingrandiscono infinite volte.

Telescopi

Il telescopio permette di avvicinare una porzione di retta senza cambiare la sua scala. Con un telescopio possiamo visualizzare i seguenti numeri:

- $+127034$
- -3600
- $A+3$
- $-B+2$

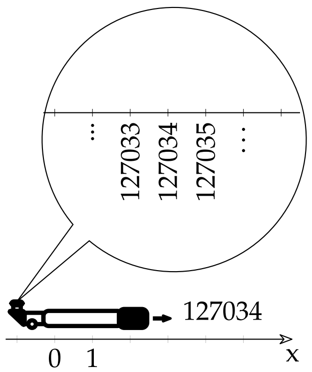


FIGURA 3.5: Telescopio per vedere 127034.

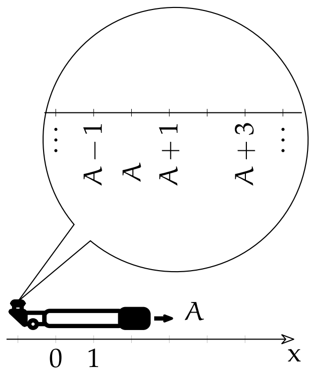


FIGURA 3.6: Telescopio per vedere $A+3$.

Anche per i telescopi, i modelli più moderni offrono la possibilità di operare ingrandimenti "standard" o "non standard" a piacere.

Grandangoli (Zoom)

Il Grandangolo permette di cambiare la scala della visualizzazione della retta, in questo modo possiamo far rientrare nel campo visivo anche numeri molto lontani. Possiamo usare uno zoom per visualizzare i seguenti numeri:

- 300
- -5000
- $-2A$
- $3B$

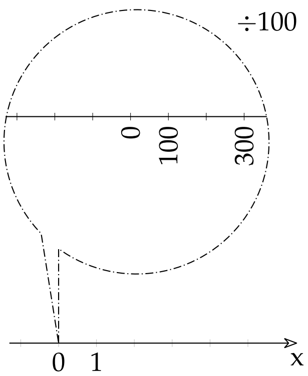


FIGURA 3.7: Grandangolo per vedere 300.

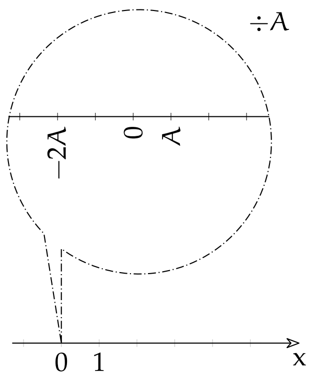


FIGURA 3.8: Grandangolo per vedere $-2A$.

Anche per questi strumenti utilizzeremo versioni che permettono zoomate "standard" e "non standard".

3.2.6 Operazioni

Vediamo di seguito alcune regole relative alle operazioni che valgono nei numeri Iperreali.

Addizione

Alcune osservazioni:

1. Le regole relative all'addizione valgono anche per la sottrazione, se uno degli addendi è negativo.
2. Zero è l'elemento neutro dell'addizione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x + 0 = 0 + x = x$.
3. Un infinitesimo più un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha + \beta = \gamma$.
4. Un infinitesimo non nullo più un altro infinitesimo non nullo può dare per risultato anche zero: ...
5. Un finito più un infinitesimo dà come risultato un finito.
6. Un finito più un finito dà come risultato un finito.
7. Un finito più un finito può dare come risultato un infinitesimo.
8. Un infinito più un finito dà come risultato un infinito.
9. Un infinito più un infinito può dare come risultato zero, un infinitesimo, un finito non infinitesimo, un finito, un infinito.

Nel precedente elenco abbiamo visto che alcune addizioni danno un risultato che dipende solo dai tipi degli operandi, altre operazioni danno dei risultati che dipendono dal valore degli operandi. Possiamo costruire una tabella che organizza le precedenti osservazioni.

$+$	0	inn	fni	I
0	0	inn	fni	I
inn	inn	i	fni	I
fni	fni	fni	f	I
I	I	I	I	?

Moltiplicazione

Alcune osservazioni:

1. Zero è l'elemento assorbente: il prodotto di un iperreale per zero dà come risultato zero: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. Uno è l'elemento neutro della moltiplicazione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3. Un infinitesimo per un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha \cdot \beta = \gamma$.
4. Un infinitesimo non nullo per un altro infinitesimo non nullo dà per risultato un infinitesimo non nullo.
5. ...
6. ...
7. Il prodotto fra un finito e un infinitesimo apre a importanti riflessioni sulla proprietà archimedea. Ne parliamo più avanti, in un paragrafo dedicato.

E la tabella corrispondente:

$\times$	0	1	inn	fni	I
0	0	0	0	0	0
1	0	1	inn	fni	I
inn	0	inn	inn	inn	?
fni	0	fni	inn	fni	I
I	0	I	?	I	I

Divisione

Alcune osservazioni:

1. Anche negli Iperreali la divisione per zero non è definita.
2. Uno può essere visto come un elemento neutro solo destro: $x \div 1 = x$.
3. Per cercare i risultati possiamo rifarci alla definizione di quoziente.
4. ...

E la tabella corrispondente:

$\div$	0	1	inn	fni	I
0		0	0	0	0
1		1	I	fni	inn
inn		inn	?	inn	inn
fni		fni	I	fni	inn
I		I	I	I	?

Reciproco

Alcune osservazioni:

1. Dalla tabella precedente si può estrarre la riga corrispondente a 1 e si ottiene la tabella del reciproco.
2. Una volta convinti della regola del reciproco, si può ricavare la tabella della divisione attraverso la regola: $x \div y = x \times \left(\frac{1}{y}\right)$.

E la tabella corrispondente:

numero	0	1	inn	fni	I
reciproco		1	I	fni	inn

❑ **Osservazione** Non ci sono regole immediate per le seguenti operazioni:

➡ $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$ ➡ $\dfrac{A}{B}$ ➡ $A \cdot \varepsilon$ ➡ $A + B$

In questi casi il tipo di risultato dipende dall'effettivo valore degli operandi. Ad esempio, nel caso del quoziente tra due infinitesimi possiamo trovarci nelle seguenti situazioni:

➡ $\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$ (i) ➡ $\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2$ (fni) ➡ $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}$ (I)

Possiamo ora esercitarci nel calcolo con questi nuovi numeri. Continuiamo ad utilizzare la convenzione di indicare gli infinitesimi con lettere greche minuscole ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$), i finiti non infinitesimi con lettere latine minuscole ($a, b, c, \dots, m, n, \dots$) e gli infiniti con lettere latine maiuscole ($A, B, C, \dots, M, N, \dots$).

Semplifichiamo le seguenti espressioni scrivendo il tipo di risultato ottenuto.

Esempio 3.1. $3\varepsilon + 5 + 6M - 2\varepsilon + 7 - 2M = 4M + 12 + \varepsilon \quad (\text{tipo} = I)$

❑ **Osservazione** Quando il risultato è la somma di più elementi, li scriviamo, ordinandoli dal più grande, in valore assoluto, al più piccolo.

Esempio 3.2. $7 + 8M - 5\varepsilon - 4 + 3\varepsilon - 2N = 8M - 2N + 3 - 2\varepsilon$ (tipo non definito)

Esempio 3.3. $(3M + 2\varepsilon)(3M - 2\varepsilon) = 9M - 4\varepsilon$ (tipo=I)

Esempio 3.4. $(M+3)(M-3) - (M+2)^2 + 4(M+3) =$
$= M^2 - 9 - M^2 - 4M - 4 + 4M + 12 = -1$ (tipo=fni)

Esempio 3.5. $10a - (A+1)^2 - 3a + 2(a + 2\alpha) + A^2 + 6(b - 3\alpha) + 2A =$
$= 10a - A^2 - 2A - 1 - 3a + 2a + 4\alpha + A^2 + 6b - 18\alpha + 2A = 9a + 6b - 14\alpha$ (tipo=fni)

3.2.7 Confronto

L'insieme dei numeri Reali ha un ordinamento completo, se a e b sono due numeri reali qualunque è sempre valida una e una sola delle seguenti affermazioni:

$$a < b \quad a = b \quad b < a$$

Per confrontare due numeri Reali possiamo utilizzare le seguenti regole:

- qualunque numero negativo è minore di qualunque numero positivo;
- se due numeri sono negativi, è minore quello che ha il modulo maggiore;
- se a e b sono due numeri positivi, $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$ (o $a - b < 0$).

Anche negli Iperreali valgono le proprietà dei Reali richiamate sopra. Ma l'insieme degli Iperreali non ha un ordinamento completo: se di ε e δ sappiamo solo che sono due infinitesimi, non è possibile dire se $\varepsilon < \delta$ o $\varepsilon > \delta$. E questo si ripercuote anche su tutti gli altri numeri: senza ulteriori informazioni non possiamo dire se $a + \varepsilon$ è maggiore minore o uguale a $a + \delta$. Problemi analoghi si incontrano nel confronto degli infiniti. Vediamo allora come è possibile affrontare il problema del confronto tra Iperreali.

❑ **Osservazione** Manteniamo valide le regole per il confronto di numeri con segno diverso o numeri negativi. Possiamo quindi concentrare l'attenzione sul confronto dei soli numeri positivi. Nei prossimi paragrafi assumeremo che le variabili si riferiscano solo a numeri positivi.

Restringendo l'osservazione ai numeri positivi, possiamo affermare che:

Gli infinitesimi sono più piccoli dei non infinitesimi e i finiti sono più piccoli degli infiniti:

$$i \quad < \quad fni \quad < \quad I$$

Passiamo ora al confronto all'interno dei diversi tipi di numeri Iperreali.

Confronto tra finiti non infinitesimi

Se due numeri Iperreali hanno parte standard diversa allora è maggiore quello che ha la parte standard maggiore:

$$x < y \Leftrightarrow \mathrm{st}(x) < \mathrm{st}(y)$$

Nel caso i due numeri abbiano la stessa parte standard si deve studiare l'ordinamento degli infinitesimi, cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

Confronto tra infinitesimi

1. Zero è minore di qualunque infinitesimo.
   Se sappiamo soltanto che ε e δ sono due infinitesimi non possiamo stabilire quale dei due sia il maggiore e quale il minore. Servono più informazioni. Vediamo alcuni esempi.

   Esempio 3.6. Nel caso $\delta = \varepsilon + \gamma$ con γ infinitesimo positivo, dato che $\delta - \varepsilon = \varepsilon + \gamma - \varepsilon = \gamma > 0$, δ sarà maggiore di ε.

   Esempio 3.7. Nel caso $\delta = 2\varepsilon$, dato che $\delta - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$, δ sarà maggiore di ε.

Esempio 3.8. Vediamo un altro modo per trattare il caso $\delta = 2\varepsilon$, dato che $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2 > 1$, δ sarà maggiore di ε.

Questo secondo metodo permette di ricavare delle informazioni interessanti. Vediamo alcuni esempi:

2. Una parte infinitesima di un infinitesimo è più piccola di quell'infinitesimo.

   Esempio 3.9. Se $\delta = \varepsilon \cdot \gamma$, dato che $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{\varepsilon} = \gamma < 1$, δ sarà minore di ε.

   ❑ **Osservazione** In questo caso il rapporto non solo è più piccolo di 1 ma è addirittura un *infinitesimo*. Quando il rapporto tra due infinitesimi è un infinitesimo possiamo dire che il primo è un infinitesimo di *ordine superiore* e si scrive: $\delta = o(\varepsilon)$.

3. Un infinitesimo è maggiore di una sua parte infinitesima.

   Esempio 3.10. Se $\varepsilon = \delta \cdot \gamma$, dato che $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\delta \cdot \gamma}$, si ha: $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\delta}{\delta \cdot \gamma} = \frac{1}{\gamma} = M > 1$. Quindi δ sarà maggiore di ε.

   ❑ **Osservazione** In questo caso il rapporto non solo è più grande di 1 ma è addirittura un *infinito*. Quando il rapporto tra due infinitesimi è un infinito possiamo dire che il primo infinitesimo è di *ordine inferiore*.

Confronto tra infiniti

Anche tra gli infiniti possiamo effettuare il confronto calcolando la differenza tra due numeri o il quoziente e anche tra gli infiniti l'uso del quoziente ci dà delle informazioni interessanti.

Esempio 3.11. Confrontare $M + \varepsilon$ con M.

- ➡ Usando la differenza: $M + \varepsilon - M = \varepsilon$ quindi $M + \varepsilon > M$;
- ➡ Usando il quoziente: $\frac{M+\varepsilon}{M} = \frac{M}{M} + \frac{\varepsilon}{M} = 1 + \frac{\varepsilon}{M} > 1$ quindi $M + \varepsilon > M$;

Anche con gli infiniti il metodo del quoziente ci dà delle informazioni particolari:

1. Due infiniti sono dello *stesso ordine* se il loro rapporto è un finito non infinitesimo.

   Esempio 3.12. Il confronto tra $2M$ e M dà: $\frac{2M}{M} = 2$. Quindi sono due infiniti dello stesso ordine.

2. Un infinito è di ordine maggiore di un altro se il rapporto tra i due è un numero infinito.

   Esempio 3.13. Il confronto tra M^2 e M dà: $\frac{M^2}{M} = M$. Quindi il primo infinito è di ordine maggiore del secondo.

3. Un infinito è di ordine minore di un altro se il rapporto tra i due è un numero infinitesimo.

   Esempio 3.14. Confrontare M e 2^M. Dobbiamo calcolare: $\frac{M}{2^M}$. Studiando le due successioni $y_1 = \langle 2^x \rangle$ e $y_2 = \langle x^2 \rangle$:

2^x	1	2	4	8	16	32	64
x^2	0	1	4	9	16	25	36

Possiamo vedere che dal quinto elemento in poi la prima successione è maggiore della seconda quindi, essendo l'infinito più grande di cinque, possiamo scrivere:
$\frac{M}{2^M} < \frac{M}{M^2} = \frac{1}{M} < 1$
Quindi $M^2 < 2^M$.
Ma $\frac{1}{M}$ è un infinitesimo quindi possiamo affermare che M è un infinito di ordine inferiore di 2^M.

In conclusione, possiamo confrontare fra di loro i numeri Iperreali utilizzando la differenza o il quoziente tra i numeri. L'uso del quoziente ci permette di ricavare un'informazione interessante l'ordine di infinitesimo o di infinito.

- un infinitesimo di ordine maggiore è un infinitesimo infinitamente più piccolo;
- un infinito di ordine maggiore è un infinito infinitamente più grande.

3.2.8 Infinitamente vicini, indistinguibili

Il confronto tra due numeri Iperreali ci permette costruire altri due concetti interessanti, vediamoli.

Infinitamente vicini

Definizione 3.3. Due numeri si dicono *infinitamente vicini* (simbolo: $\approx$) se la loro differenza è un infinitesimo:

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y = \varepsilon$$

- Tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro e sono infinitamente vicini allo zero.
- Se due numeri finiti, a e b, sono infinitamente vicini si possono scrivere nella forma: $a = c + \varepsilon$ e $b = c + \delta$ dove c è un numero reale. Il numero reale infinitamente vicino ad un numero iperreale finito si chiama *parte standard* del numero iperreale.
- Due numeri infiniti sono infinitamente vicini se uno è uguale all'altro più un infinitesimo.

Il fatto che due numeri siano infinitamente vicini non ci dà molte informazioni, più interessante è il concetto presentato nel prossimo paragrafo.

Indistinguibili

Definizione 3.4. Due numeri si dicono *indistinguibili* (simbolo: $\sim$) se il rapporto tra la loro differenza e ciascuno di essi è un infinitesimo:

$$x \sim y \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{x} = \varepsilon \quad \wedge \quad \frac{x-y}{y} = \delta \right)$$

❑ **Osservazione** È importante osservare che per poter applicare la definizione entrambi i numeri che vogliamo confrontare devono essere diversi da *zero*.

Teorema 3.3. *Due numeri x e y, finiti non infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se sono infinitamente vicini*

$$\text{Ipotesi: } (x \sim y \wedge x, y : \text{ fni}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } x \approx y.$$

Dimostrazione.

$$x \approx y \quad \text{infatti} \quad \frac{x-y}{x} = \varepsilon \quad \wedge \quad \frac{x-y}{y} = \delta \Rightarrow x = y + \varepsilon x = y + \beta \quad \wedge \quad y = x - \delta y = x + \alpha$$

$$x \sim x + \varepsilon \quad \text{infatti} \quad \frac{x-y}{x} = \frac{x-(x+\alpha)}{x} = \frac{\alpha}{x} = \xi \quad \wedge \quad \frac{x-y}{x} = \frac{x-(x+\alpha)}{y} = \frac{\alpha}{y} = \gamma$$

□

Per quanto riguarda gli infinitesimi, non basta che siano infinitamente vicini per essere indistinguibili (d'altra parte tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini).

Teorema 3.4. *Due numeri infinitesimi sono indistinguibili se differiscono di un infinitesimo di ordine superiore.*

Due numeri infiniti possono essere indistinguibili anche se differiscono di un valore finito o addirittura infinito.

Teorema 3.5. *Due infiniti sono indistinguibili se differiscono di un finito o di un infinito di ordine inferiore.*

3.2.9 Postulato di Eudosso-Archimede

Proviamo a fare un *semplice* esperimento mentale. Prendo un foglio di carta e lo piego su se stesso un po' di volte. Che spessore raggiungo? Per semplificarci i calcoli, supponiamo che il foglio abbia lo spessore di $0,1mm = 0,0001m = 10^{-4}m$. Che spessore otterrò piegando il foglio su se stesso 64 volte?

Il calcolo è abbastanza semplice:

Numero piegature	spessore ottenuto	in metri
0	1	10^{-4}
1	2	10^{-4}
2	4	10^{-4}
3	8	10^{-4}
4	16	10^{-3}
5	32	10^{-3}
6	64	10^{-3}
7	128	10^{-2}
...	...	
n	2^n	...

Quindi piegando il foglio 64 volte ottengo uno spessore che è 2^{64} volte lo spessore di partenza quindi basta calcolare:

$$2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

che, convertito in metri, dà: 1.844.674.407.370.955m circa; è uno spessore considerevole, quasi duemila volte la distanza Terra-Sole: 149.600.000.000m.

Si fa risalire ai matematici Eudosso e Archimede l'osservazione che per quanto piccolo si prenda un numero (lo spessore di un foglio di carta), basta moltiplicarlo per un numero sufficientemente grande (2^{64}) per farlo diventare maggiore di un qualsiasi altro numero, per quanto sia grande (come la distanza Terra-Sole).

Vale anche il contrario: per quanto grande sia un numero posso dividerlo per un numero abbastanza grande da farlo diventare più piccolo di un qualunque numero.

Ma questa osservazione di Eudosso-Archimede non è un teorema, non è un'osservazione dimostrata, è un postulato, un accordo fatto tra matematici che può essere utile in moltissimi casi e che vale per tutti gli insiemi numerici visti finora.

Abbiamo visto, nella tabella della moltiplicazione e in tanti esempi successivi, che moltiplicando fra loro due iperreali non si è minimamente sicuri di ottenere un valore maggiore di una quantità iperreale prefissata. Infatti potrebbe essere vero che:

$$\text{se } \varepsilon \ < \ \delta \ \text{ allora } \ 2^{64}\varepsilon \ < \ \delta,$$

mentre è sicuramente vero che:

$$\text{poiché } \varepsilon \ < \ 1 \text{ allora } 2^{64}\varepsilon \ < \ 1;$$

anzi, dati $a > 1$ e n naturale qualsiasi, allora $a^n\varepsilon \ < \ 1$.

Abbiamo quindi perduto la proprietà archimedea. Questo ci obbliga a

- diffidare dei segni $>, =, <$ nel confronto fra due iperreali (non standard, ovviamente);
- utilizzare il rapporto come strumento per il confronto fra iperreali infiniti o fra iperreali infinitesimi, o fra espressioni con iperreali di tipo diverso, come è illustrato nelle pagine precedenti.

3.2.10 Principio di transfer

Abbiamo applicato agli Iperreali le operazioni aritmetiche con grande naturalezza estendendo i metodi e i risultati che già conosciamo nei Reali. Ma è possibile fare ciò per qualunque funzione? Sì, è possibile assumere che per ogni funzione definita nei Reali esista una corrispondente funzione con dominio e codominio negli Iperreali che, ristretta ai Reali coincida con la funzione reale. In questo modo tutto quello che è possibile fare con i numeri Reali lo si può fare anche con gli Iperreali.

❑ **Osservazione** Non vale il viceversa. Dato che gli Iperreali estendono i Reali, ci sono delle funzioni che, definite negli Iperreali non hanno un valore corrispondente nei Reali.

Esempio 3.15. Consideriamo ad esempio la funzione: $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$

È facile costruire la funzione $^*f$ (*effe star*) con dominio e codominio negli Iperreali:

$^*f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$.

Ogni volta che $^*f$ è applicata a numeri standard (fni), si comporta come la funzione f, applicata a $x \in \mathbb{R}$; ma, in più, la funzione $^*f$:

- è definita anche per valori infinitamente vicini a zero e in questo caso dà come risultato un valore infinito che non è un numero reale;
- è definita anche per valori infiniti e in questo caso dà come risultato un valore infinitesimo che non è un numero reale.

3.2.11 Tranfer e funzioni trascendenti

Se fossimo obbligati alla pignoleria, dovremmo scrivere d'ora in poi $^*f$, al posto di f, per indicare che usiamo l'estensione iperreale della funzione f. Così $\log(x)$ dovrebbe essere scritta $^*\log(x)$, $^*\mathrm{sen}(x)$ sostituirebbe $\mathrm{sen}(x)$ e avremmo a che fare con $^*x^3$ al posto di x^3, e simili.

Per fortuna questi dettagli non ci servono: le funzioni che abbiamo già imparato ad usare si comportano con i numeri standard esattamente come si comportano con i reali, cioè conservano tutte le loro proprietà. C'è semmai da approfondire cosa succede quando le funzioni trascendenti vengono applicate a infiniti, infinitesimi non nulli e finiti non infinitesimi.
Per facilitare la comprensione, è di grande utilità avere presente i grafici base di queste funzioni.

Funzione esponenziale

La funzione $f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}$, con $f(x) = a^x$, è definita $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$. Come nel caso reale, consideriamo solo i casi in cui $a > 0$. Ricordando quanto già appreso, il grafico della funzione esponenziale generica ha due forme (speculari).

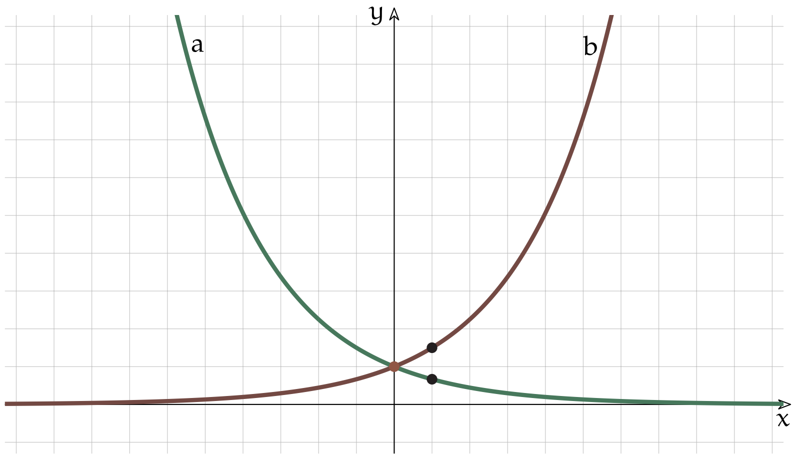


FIGURA 3.9: Esponenziali con diverse basi.

Se $a > 1$:

- il grafico è crescente e sale rapidamente all'infinito, verso destra: con $X > 0$ (infinito positivo) $a^X = Y$ (infinito positivo);

- come si dimostra più avanti, la rapidità di questa salita è maggiore rispetto a qualsiasi altra funzione crescente di altro tipo (per esempio le funzioni potenza x^n);
- a sinistra, cioè per $x < 0$, il grafico tende ad adagiarsi sull'asse orizzontale ($y = 0$, cioè tende ad annullarsi), toccandolo all'infinito. Si dice che l'asse x è asintoto sinistro per il grafico: con $X > 0$ (infinito positivo) $a^{-X} = 0$;
- quindi il grafico non ha punti nel semipiano negativo ($y < 0$). La funzione ha valori positivi $y \geqslant 0, \forall x \in {}^*\mathbb{R}$;
- il grafico interseca l'asse y nel punto $(0;1)$, dato che qualsiasi numero elevato alla 0 ...

Quindi, applicando la funzione esponenziale a valori non standard, avremo:

$$a^{\pm\varepsilon} = 1 \pm \delta, \quad a^X = Y, \quad a^{-X} = 0 \text{ (sempre nel caso di X positivo)}$$

Se $0 < a < 1$, il grafico è speculare e lascio a te la sua descrizione.
Se $a = 1$, il grafico non dovrebbe essere troppo difficile da immaginare ...

❑ **Osservazione** Analogamente al caso reale, vi sono situazioni speciali in cui non si capisce il comportamento della funzione, come ci è già capitato per alcune operazioni elementari dal risultato incerto. Si tratta dei seguenti casi:

$$0^0, \quad \varepsilon^\varepsilon, \quad M^0, \quad M^\varepsilon, \quad 1^M,$$

sono detti forme di indecisione esponenziale e più avanti vedremo di risolvere alcuni casi. Nota l'ultima delle forme di indecisione precedentii e confrontalo con quanto scritto poche righe sopra.

Numero di Nepero e

La forma di indecisione 1^M ha una soluzione particolare in un caso importantissimo. Si tratta della funzione

$$f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

definita per $x \neq 0$. È una particolare funzione esponenziale che, se x assume valori infiniti, dà luogo a risultati del tipo 1^M.
Cerchiamo di capire cosa succede facendo alcuni tentativi con numeri standard:

Esempio 3.16. Calcolare $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, nei casi: $x = 10$, $x = 100$, $x = 1000$, $x = 10000$...
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937424...$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048138...$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692393...$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,71814592...$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2,71826824...$
$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,71828047...$
...

Al di là di ogni tentativo, è possibile dimostrare, ma noi lo evitiamo, che per $x = M$ il calcolo ha un risultato esatto, il numero standard

$$\mathrm{st}\left(1+\frac{1}{M}\right)^M = e.$$

$e = 2,7182818284...$ è un irrazionale, quindi la quantità di decimali è infinita e non c'è periodo. Si tratta del cosiddetto Numero di Nepero (anche se il suo nome viene dall'iniziale del matematico Euler). Poiché, come si vede dalla formula, risolve un'equazione non algebrica, e viene classificato come numero irrazionale trascendente.

Funzione logaritmica

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Il logaritmo è l'esponente da usare per calcolare una potenza. La funzione log permette di sapere quale esponente è stato applicato ad una certa base in modo da ottenere come risultato una potenza data.
Estendendo la funzione agli iperreali standard, non ci sono cambiamenti rispetto ai reali. Perciò verifichiamo cosa succede nel calcolo di espressioni come $\log_a \varepsilon, \log_a X$ e simili. Anche in questo caso esaminiamo il grafico base.

La funzione $f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}$, con $f(x) = \log_a x$ è definita per $x > 0$. Come per le funzioni esponenziali, la base a è positiva e distinguiamo due casi.

Quindi, applicando la funzione $\log_a$ a valori non standard, nel caso di $a > 1$, avremo:

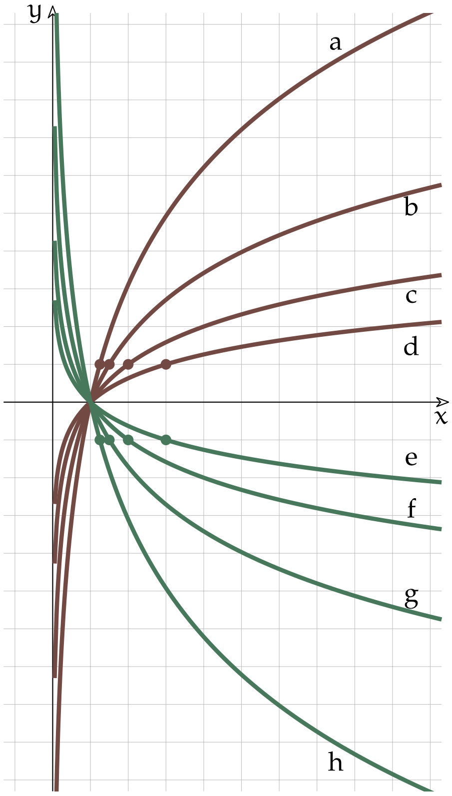
$$\log_a \delta = -M, \quad \log_a(1+\varepsilon) = +\delta, \quad \log_a X = Y \text{ (sempre nel caso di } X \text{ positivo)}$$

Se $0 < a < 1$, il grafico è simmetrico rispetto all'asse x e lascio a te la sua descrizione.
Se $a = 1$, il grafico è un problema serio ...

❑ **Osservazione** Fra tutte le possibili basi dei logaritmi, due hanno una posizione privilegiata. Per questo i logaritmi che usano queste basi hanno un tasto dedicato nelle calcolatrici scientifiche:

- base 10 : $\mathrm{Log}(x)$.
  La funzione $\log_{10} x$ si scrive usualmente $\mathrm{Log}(x)$ e si legge "logaritmo decimale di x". È importante perché le potenze di 10 costituiscono l'ossatura del nostro sistema di numerazione;
- base e : $\ln(x)$.
  La funzione $\log_e(x)$ si scrive usualmente $\ln(x)$ ("logaritmo naturale di x") e il suo legame con gli esponenziali dipende dalla particolare definizione del numero e, riportata in precedenza. Le proprietà del logaritmo naturale sono tali che vale la traformazione:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln[f(x)]}.$$



Se $a > 1$:

- il grafico occupa soltanto il semipiano corrispondente a $x > 0$, perché, essendo la base a positiva, non è possibile avere per argomento potenze negative;
- il grafico è crescente: sale rapidamente da $-\infty$ verso $y = 0$, ma, oltrepassato l'asse orizzontale, la sua salita si attenua progressivamente, senza mai appiattirsi del tutto quando x diventa un numero infinito;
- come si dimostra più avanti, il rallentamento di questa tendenza a crescere è più forte del rallentamento che ha il grafico di qualsiasi altra funzione di altro tipo (per esempio le funzioni potenza $x^{\frac{1}{n}}, \forall n$);
- a sinistra, cioè per $x = \varepsilon 0$ $f(x) \approx -M, (M > 0)$ il grafico tende ad adagiarsi sull'asse verticale, toccandolo all'infinito. Si dice che l'asse y negativo è asintoto sinistro per il grafico;
- il grafico interseca l'asse x nel punto tipico $(1; 0)$, dato che qualsiasi numero elevato alla 0 ...
- c'è un altro punto tipico: se la base e la potenza sono uguali, allora l'esponente vale 1, quindi il grafico passa per il punto ... $\forall a$.

FIGURA 3.10: Logaritmi con diverse basi.

Osservazione Le forme di indecisione che coinvolgono la funzione logaritmo sono connesse strettamente a quelle della funzione esponenziale. Nella formula precedente, infatti, vediamo che un'eventuale indecisione sul risultato di un'esponenziale diventa un'indecisione nel prodotto fra due esponenti. Questo tornerà utile negli esempi e nelle applicazioni che seguono.

Forme di indecisione risolte grazie al numero e

Il risultato di uno dei calcoli precedenti, cioè $\log_a(1+\varepsilon) = +\delta$ diventa particolarmente semplice con l'uso dei logaritmi naturali. Infatti si dimostra che $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ e che quindi:

$$\operatorname{st}\left(\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 1.$$

Come si vede, si tratta del rapporto fra due infinitesimi, un calcolo aperto a qualsiasi tipo di risultato.
Con alcuni passaggi algebrici e sfruttando le proprietà dei logaritmi, da $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ si ottiene anche: $1+\varepsilon \approx e^{\varepsilon} \;\rightarrow\; \varepsilon \approx e^{\varepsilon} - 1$ e quindi

$$\operatorname{st}\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) = 1.$$

La semplicità di queste espressioni ci fa intuire la comodità dell'uso di e.

Funzioni periodiche

Facciamo riferimento al primo capitolo, per la parte generale sulle funzioni periodiche. L'estensione iperreale di queste funzioni non cambia il loro comportamento quando le applichiamo a iperreali standard. Il nostro interesse, in questo momento, è capire come si comportano le principali funzioni periodiche ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$) quando vengono applicate a infinitesimi e a infiniti. In particolare, nel caso di x infinitesimo, occore riflettere sul significato del numero π.

Numero π

Il numero π ha una lunga storia. Identifica il rapporto fra una qualsiasi circonferenza e il suo diametro: $\pi = \frac{C}{2r}$. Anche se risulta da un rapporto, il suo valore ($\pi = 3,14159265...$) ha la parte decimale infinita e priva di periodo, quindi non è un numero razionale: come il numero e, è un irrazionale trascendente.
Si è giunti a definire il valore di π per approssimazioni successive, già dai tempi di Archimede. Il suo metodo era di calcolare i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza, ipotizzando che la circonferenza assumesse valori intermedi. Archimede giunse a calcolare i perimetri di poligoni con 96 lati, ma noi possiamo pensare di portare la sua idea all'infinito. Vedremmo così che la circonferenza e i perimetri dei poligoni di infiniti lati si fondono insieme in un'unica linea: nel linguaggio degli iperreali diciamo che le loro lunghezze hanno valori infinitamente vicini.
Se i lati dei poligoni inscritti e circoscritti sono in numero infinito, allora uno dei lati interni (la corda), l'arco corrispondente e il segmento tangente sono infinitesimi. Quindi la conseguenza della definizione di π è: più piccolo è l'arco di circonferenza, più le tre lunghezze (della corda, dell'arco e del segmento tangente) si avvicinano.
Dimezzando l'arco si dimezza anche la corda e questa metà corrisponde al seno, mentre la metà del segmento tangente corrisponde alla funzione tangente: il seno dell'arco, l'arco e la sua tangente tendono ad essere infinitesimi contemporaneamente.
Nella parte che segue, il numero iperreale x è l'arco e il raggio è l'unità di misura. In questo modo, la circonferenza misura 2π e l'arco viene misurato in radianti.
Infine, il fatto che si tratti di funzioni periodiche impedisce di calcolare il loro comportamento all'infinito. Di conseguenza non cercheremo di calcolare espressioni del tipo $\sin M$, $\tan M$ o simili.

Funzione seno

Quando x è infinitesimo, anche $\sin x$ lo è. Di conseguenza il rapporto $\frac{sin \varepsilon}{\varepsilon}$ dovrebbe essere una forma di indecisione. Invece i discorsi precedenti giustificano il risultato seguente:

$$\mathrm{st}\left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right) = 1.$$

L'uguaglianza può essere dimostrata anche per via geometrica.

Funzione coseno

Analogamente al seno, anche il rapporto $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}$ sembra una forma di indecisione. Ma non è così. Si può dimostrare con considerazioni geometriche che la quantità $(1-\cos x)$ si annulla più rapidamente di quanto non succeda ad x e quindi

$$\mathrm{st}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\right)=0.$$

$1-\cos\varepsilon$ è quindi un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ε: infatti vale

$$\mathrm{st}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Entrambi i risultati possono essere dimostrati banalmente moltiplicando i numeratori e i denominatori per $(1+\cos\varepsilon)$, oppure attraverso metodi analitici che vedremo in seguito.

❑ **Osservazione** Se dovessimo stilare una graduatoria di infinitesimi, si dovrebbe dire che che il seno è un infinitesimo di ordine corrispondente al suo arco e che il coseno (nell'espressione $1-\cos x$) è infinitesimo di un grado superiore rispetto al seno. Quindi se l'arco è infinitesimo di primo grado, anche il seno lo è, mentre il coseno lo è di secondo grado.
Invece, dato il rapporto fra circonferenza e diametro, in caso (per fortuna raro) di circonferenza di raggio infinitesimo, l'arco e il seno diventano infinitesimi di secondo grado e $1-\cos x$ diventa infinitesimo di terzo.

3.3 Applicazioni

Dopo aver dato un'occhiata a cosa sono e come funzionano i numeri iperreali vediamo qualche problema che si può convenientemente risolvere con gli Iperreali.

3.3.1 Problemi con gli Iperreali

Esempio 3.17. Calcola l'area iperreale di una cornice quadrata, di lato interno pari a l e spessore infinitesimo ε. Calcola infine l'area reale.
Chiamiamo dS l'area iperreale della cornice: $dS=\left(l+\varepsilon^2\right)-l^2=l^2+2l\varepsilon+\varepsilon^2-l^2=2l\varepsilon+\varepsilon^2$.
Chiamiamo ΔS la corrispondente area reale: $\Delta S=\mathrm{st}\,(dS)=\mathrm{st}\left(2l\varepsilon+\varepsilon^2\right)=\mathrm{st}(2l\varepsilon)+\mathrm{st}(\varepsilon^2)=0+0=0$.
Poichè la differenza di area dS è la somma di due infinitesimi, uno del primo e l'altro del secondo ordine, la parte standard di entrambi è nulla e la somma risulta nulla. In conclusione, se l'incremento del lato è infinitesimo, cioè infinitamente vicino a zero, a maggior ragione sarà infinitamente vicino a zero l'incremento dell'area.

Esempio 3.18. Calcola di quanto diminuisce rispetto al raggio una circonferenza di raggio r, quando il raggio subisce una contrazione infinitesima $dr=-\varepsilon$.
Chiamiamo dC (differenza di C) la contrazione della circonferenza: $dC=2\pi r-2\pi(r-\varepsilon)=2\pi r-2\pi r+2\pi\varepsilon=2\pi\varepsilon$. Dunque la circonferenza si riduce di un infinitesimo, cioè 0 in numeri standard. Ma se misuriamo la riduzione della circonferenza in termini di riduzione del raggio, si ha: $\frac{dC}{dr}=\frac{2\pi\varepsilon}{-\varepsilon}=-2\pi$: ogni unità di variazione del raggio, comporta una variazione della circonferenza pari a 2π.

Esempio 3.19. Quanto volume acquisisce un guscio sferico di raggio r nel gonfiarsi progressivamente?
Volume iniziale: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se il raggio aumenta e diventa $r + \varepsilon$, la variazione di volume sarà:
$V(r+\varepsilon) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$.
Per sapere quanto varia il volume per ogni variazione infinitesima di raggio, si calcola:
$\frac{dV}{dr} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon+3r\varepsilon^2+\varepsilon^3)}{\varepsilon} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2)$, che è un numero di tipo inn. La sua parte standard è $\text{st}\left(\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi r^2$. Nota che questa è l'espressione dell'area della superficie sferica. Come era prevedibile, infatti, un guscio sferico di spessore infinitesimo approssima la superficie sferica.

3.3.2 Espressioni con gli Iperreali

I numeri iperreali semplificano la ricerca della soluzione di molti problemi. Il calcolo delle soluzioni ci porta a risultati espressi quasi sempre da numeri standard, che corrispondono ai reali. Infatti quasi sempre,il calcolo termina ricorrendo alla funzione st().
Questo metodo, cioè ricorrere ad un insieme più astratto di $\mathbb{R}$, svolgervi i calcoli secondo le nuove regole e alla fine esprimere i risultati in $\mathbb{R}$, invece di fare tutto il procedimento solo con numeri reali, sembra inutilmente complicato, soprattutto se si parte dall'illusione che i numeri reali siano "i numeri della realtà". Ma anche se lo fossero (e non può essere vero), i critici probabilmente dimenticano che i numeri reali non vengono quasi mai usati per davvero, perché di solito ci si accontenta delle loro approssimazioni razionali. Eppure nessuno dei critici lamenta l'eccessiva ricchezza di numeri, regole, proprietà dell'insieme l'insieme $\mathbb{R}$.

Vediamo, con alcuni esempi, come si possono applicare al calcolo di espressioni contenenti numeri Iperreali (dove usiamo le solite convenzioni) le regole presentate in precedenza :

- con le lettere greche minuscole indichiamo gli infinitesimi non nulli;
- con x, y, z indichiamo un numero iperreale qualsiasi;
- con le altre lettere latine minuscole indichiamo i numeri finiti non infinitesimi;
- con le lettere latine maiuscole indichiamo gli infiniti.;
- con $\text{st}(x)$ indichiamo la parte standard di x.

Esempio 3.20. $\text{st}\left(\frac{7-3\varepsilon}{9+2\delta}\right) \overset{1}{=} \frac{\text{st}(7-3\varepsilon)}{\text{st}(9+2\delta)} \overset{2}{=} \frac{\text{st}(7-\alpha)}{\text{st}(9+\beta)} \overset{3}{=} \frac{7}{9}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la parte standard di un quoziente, con il divisore finito non infinitesimo, è uguale al quoziente delle parti standard;
2. se ε e δ sono infinitesimi, anche 3ε e 2δ sono infinitesimi;
3. la parte standard di un numero reale più (o meno) un infinitesimo è quel numero reale.

Esempio 3.21. $\text{st}\left(\frac{4\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3 + \varepsilon^2}{5\varepsilon}\right) \overset{1}{=} \text{st}\left(\frac{\left(4\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2 + \varepsilon\right)\varepsilon}{5\varepsilon}\right) \overset{2}{=}$

$\overset{2}{=} \text{st}\left(\frac{4\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2 + \varepsilon}{5}\right) \overset{3}{=} \text{st}\left(\frac{\alpha}{5}\right) \overset{4}{=} \text{st}(\beta) \overset{5}{=} 0$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. si può raccogliere ε al numeratore;

2. dato che ε è diverso da zero, si può semplificare la frazione;
3. i prodotti tra un finito e un infinitesimo sono infinitesimi e la somma di infinitesimi è un infinitesimo;
4. il quoziente tra un infinitesimo e un non infinitesimo è un infinitesimo;
5. la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 3.22. $\operatorname{st}\left(\dfrac{5\varepsilon-3\varepsilon^2+6\varepsilon^3}{2\varepsilon+4\varepsilon^2}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\dfrac{5-3\varepsilon+6\varepsilon^2}{2+4\varepsilon}\right) \overset{2}{=} \dfrac{\operatorname{st}\left(5-3\varepsilon+6\varepsilon^2\right)}{\operatorname{st}\left(2+4\varepsilon\right)} \overset{3}{=} \dfrac{5}{2}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. si può raccogliere ε al numeratore;
2. dato che ε è diverso da zero, si può semplificare la frazione;
3. i prodotti tra un finito e un infinitesimo sono infinitesimi, la somma di infinitesimi è un infinitesimo e la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 3.23. $\operatorname{st}\left(\dfrac{-6\varepsilon^2+4\varepsilon^3-8\varepsilon^5}{7\varepsilon^3+2\varepsilon^4}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\dfrac{-6+4\varepsilon-8\varepsilon^3}{7\varepsilon+2\varepsilon^2}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}(A) \overset{3}{=} \infty$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. si può raccogliere e semplificare ε^2 dato che ε è *inn*;
2. il numeratore è *fni* mentre il denominatore è *inn* e quoziente tra un finito e e un infinitesimo non nulli è un infinito;
3. la parte standard di un infinito non esiste, per convenzione viene indicata con ∞ (che non è un numero reale).

❑ **Osservazione** In questo caso, se ε è positivo, l'infinito sarà un infinito negativo, se ε è negativo, l'infinito sarà un infinito positivo.

Esempio 3.24. $\operatorname{st}\left(\dfrac{-3H^2-4H}{2H^2+4H-3}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\dfrac{\left(-3-\frac{4}{H}\right)\cdot \cancel{H^2}}{\left(2+4\frac{4}{H}-\frac{3}{H^2}\right)\cdot \cancel{H^2}}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\dfrac{-3-4\varepsilon}{2+16\varepsilon-3\varepsilon}\right) \overset{3}{=} -\dfrac{3}{2}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. qui è stato inventato uno sporco trucco: si raccoglie a fattore comune H^2 anche se non è presente in tutti gli addendi e poi lo si semplifica;
2. altro trucco: $\frac{1}{H}$ è un infinitesimo, riscriviamo l'espressione sostituendo al posto di $\frac{1}{H}$ con ε;
3. tenendo conto che il numeratore è indistinguibile da -3 e il denominatore da 2 si ottiene il risultato.

❑ **Osservazione** Se due numeri iperreali sono indistinguibili avranno anche la stessa parte standard.

Esempio 3.25. $\sqrt{H-1}-\sqrt{H+1}$

❑ **Osservazione** Si potrebbe pensare che essendo $H-1$ indistinguibile da H e anche $H-1$ indistinguibile da H la precedente espressione sia equivalente a $\sqrt{H}-\sqrt{H}=0$. Ma il concetto di indistinguibile, per come è definito, non si può mai applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che $\sqrt{H-1}-\sqrt{H+1}\approx 0$ e tanto meno: $\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}=0$

Anche in questo caso usiamo un trucco una specie di inverso della razionalizzazione:

$$\sqrt{H-1}-\sqrt{H+1} \overset{1}{=} \left(\sqrt{H-1}-\sqrt{H+1}\right)\cdot 1 \overset{2}{=} \left(\sqrt{H-1}-\sqrt{H+1}\right)\cdot \frac{\sqrt{H-1}+\sqrt{H+1}}{\sqrt{H-1}+\sqrt{H+1}} \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} \frac{\cancel{H}-1-\cancel{H}-1}{\sqrt{H-1}+\sqrt{H+1}} \overset{4}{=} \frac{-2}{\sqrt{H-1}+\sqrt{H+1}} \overset{5}{=} \varepsilon$$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la prima uguaglianza è banale essendo 1 l'elemento neutro della moltiplicazione;
2. al posto del numero 1 sostituiamo una frazione con il numeratore e il denominatore uguali;
3. eseguendo il prodotto magari tenendo conto di uno dei prodotti notevoli imparati in prima otteniamo questa frazione;
4. tenendo conto che $+H$ e $-H$ si annullano otteniamo una nuova frazione che, a prima vista non sembra aver semplificato il problema iniziale, ma a ben guardare la differenza tra le due radici si è trasformata in una somma e quindi il denominatore, somma di due infiniti positivi è un infinito positivo;
5. da cui si ottiene il risultato. Positivo o negativo?

Esempio 3.26. $\mathrm{st}\left(\left(1+\frac{k}{N}\right)^N\right) \overset{1}{=} \mathrm{st}\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^{kM}\right) \overset{2}{=} \mathrm{st}\left(\left[\left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right]\right)^k \overset{3}{=} e^k.$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. un altro sporco trucco: la sostituzione. Supponiamo $\frac{k}{N}=\frac{1}{M}$. Allora $N = kM$;
2. una potenza di potenza è una potenza che ha...
3. per la definizione del numero e e per le proprietà della funzione $\mathrm{st}()$.

Esempio 3.27. $\mathrm{st}\left(\frac{a^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right) \overset{1}{=} \mathrm{st}\left(\frac{\delta}{\log_a(\delta+1)}\right) \overset{2}{=} \mathrm{st}\left(\frac{1}{\frac{\log_a(\delta+1)}{\delta}}\right) \overset{3}{=} \mathrm{st}\left(\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}\right) = \ln a.$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. ancora una sostituzione: poniamo $a^\varepsilon - 1 = \delta$. Allora $\varepsilon = \log_a(\delta+1)$;
2. una capriola algebrica: oplà!
3. per le forme di indecisione discusse a proposito del numero di Nepero e per il cambiamento di base;

Esempio 3.28. $\mathrm{st}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$=0.

Dove l'uguaglianza si giustifica per quanto detto a proposito dell'ordine degli infinitesimi, ma gli appassionati del calcolo possono provare a moltiplicare il numeratore e il denominatore per ...

3.4 TODO

3.5 Esercizi

3.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

?? ??

3.1. testo esercizio

3.2. Consegna:

a)

3.5.2 Esercizi riepilogativi

3.3. testo esercizio

3.4. Consegna:

a)

Derivate 4

4.1 Introduzione

Il problema di determinare la velocità istantanea ci ha portati a conoscere i numeri infinitesimi e, attraverso questi, l'insieme dei numeri iperreali. Ora siamo in grado di cercare la risposta alla domanda rimasta in sospeso: come si determina la velocità istantanea?
La risposta, che conosciamo nelle forme moderne, da più di 400 anni, propone al nostro studio un nuovo potentissimo strumento di calcolo, adatto a risolvere problemi in ogni ambito scientifico: la derivata.

4.2 Velocità di caduta

Nel Settecento fiorirono alcune leggende su Galileo Galilei. Una di queste racconta che per dimostrare che i gravi cadono con la stessa velocità, gettò dalla Torre di Pisa due sfere di peso diverso, ma di uguali dimensioni. I due oggetti, come oggi possiamo immaginare, raggiunsero il suolo contemporaneamente.
La Torre di Pisa è alta circa $56\mathrm{m}$ e immaginiamo, per semplificare, che la distanza percorsa dai due oggetti sia di $56\mathrm{m}$ (ti lascio calcolare il percorso effettivo: tieni presente che al giorno d'oggi l'inclinazione della Torre è di $4,8°$).
Oggi sappiamo che un oggetto in caduta libera ha la seguente legge del moto: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Come al solito, s è lo spazio in metri, t è il tempo in secondi, $g = 9,81\mathrm{m}/s^2$ è l'accelerazione di gravità, costante nei pressi della superficie terrestre.
Se cerchiamo la velocità media, basta dividere lo spazio percorso per il tempo impiegato:

$$
\begin{aligned}
&s_{tot} = 56\mathrm{m}\\
&s = \frac{1}{2}gt^2 \to t_{tot} = \sqrt{\frac{2s_{tot}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 56}{9,81}} = 3,36s.\\
&v_m = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{56\mathrm{m}}{3,36s} = 16,67\mathrm{m}/s,
\end{aligned}
$$

che corrispondono a circa $60\mathrm{km}/h$ di media.
Ma gli oggetti partono fermi e arrivano velocissimi: è possibile sapere quale è loro velocità in ogni istante? È il momento di usare le quantità infinitesime.
Chiamiamo dt un intervallo di tempo infinitesimo, fra due istanti successivi t e $t + dt$. Lo spazio percorso nella caduta, in quell'intervallo di tempo, applicando la legge del moto, sarà:

$$ds = \frac{1}{2}g\,(t + dt)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(t^2 + 2tdt + (dt)^2\right) - \frac{1}{2}gt^2 = gtdt + \frac{1}{2}(dt)^2.$$

Dividendo il tutto per dt si ottiene la velocità istantanea, quella che cambia in ogni istante t:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{gt\,dt + \frac{1}{2}dt^2}{dt} = gt + \frac{1}{2}dt.$$

L'espressione $gt + \frac{1}{2}dt = 9{,}81t + \frac{1}{2}dt$ diventa un numero ben preciso per ogni valore di t, un iperreale finito che è la somma di un numero standard e di un numero infinitesimo. Per averne il valore reale, applichiamo la parte standard:

$$\mathrm{st}\left(9{,}81t + \frac{1}{2}dt\right) = 9{,}81t$$

Questa è la velocità istantanea che cerchiamo: dipende dal tempo t, cioè cresce con il passare dei secondi.

t (in s)	$v = 9{,}81 \times t$ (in m/s)
0	0
1	$9{,}81 \times 1 = 9{,}81$
2	$9{,}81 \times 2 = 19{,}62$
...	...
$3{,}6$	$9{,}81 \times 3{,}36 = \ldots$

La formula $v = 9{,}81 \times t$ ci permette il calcolo della velocità per ogni valore di t. Per quale valore di t la velocità sarà uguale a quella media?

4.3 Continuità

La semplicità dei calcoli precedenti lascia intuire la ragione del successo del calcolo con gli infinitesimi. Questo tipo di calcolo fiorì per 150 anni a partire dall'epoca di Newton e Leibniz. Ma suscitava vivaci polemiche fra gli specialisti, perché non si era in grado di spiegare come mai i risultati, espressi attraverso numeri infinitesimi, alla fine diventano numeri "di uso comune". Oggi i matematici conoscono meglio la materia e queste difficoltà sono superate. Siamo quindi in grado di procedere nello studio dei questa nuova branca della matematica, che si chiama *Analisi infinitesimale*.

Continuità, intervalli, differenze

C'è un punto critico nei ragionamenti svolti a proposito della caduta dei gravi, un punto che si dà sempre per scontato in fisica, ma non lo è per i matematici e per i logici.
Tutto il ragionamento vale perché si presuppone che il tempo scorra in modo uniforme. Se il tempo scorresse a scatti, anche minuscoli, quei calcoli non sarebbero possibili. Si dice infatti che il tempo t è una variabile continua, cioè assume tutti i valori, dal minimo al massimo, con regolarità, senza salti.

Definizione 4.1. Una variabile è una grandezza che può assumere valori diversi. L'insieme dei valori possibili costituisce il suo insieme di definizione.

Definizione 4.2. Una variabile continua è definita in un intervallo di valori continuo. Le variazioni dei suoi valori possono essere arbitrariamente piccole.

Il più semplice esempio di una variabile continua in matematica è la posizione x sull'asse reale dei numeri. Infatti sappiamo che la retta reale non ha buchi. A maggior ragione, è una variabile continua anche la posizione sull'asse degli Iperreali: x, con $x \in {}^*\mathbb{R}$.
Viceversa una variabile che pesca i suoi valori in un insieme formato da numeri isolati, cioè con differenze finite fra l'uno e l'altro, si dice *variabile discreta*.

Definizione 4.3. Una variabile discreta assume valori che variano per quantità finite.

Un semplice esempio di variabile discreta è $n, n \in \mathbb{N}$.
Nel calcolo precedente, t varia con continuità da 0 a $3,6$, assumendone tutti i valori, dal minimo al massimo. In matematica si scrive così: $t \in [0;\ 3,6]$. Le parentesi quadre sono importanti, indicano che gli estremi dell'intervallo sono valori possibili, sono inclusi.
I tipi possibili di intervallo sono:

intervallo	sigla	significato
chiuso	$[a;\ b]$	estremi compresi
aperto/chiuso	$]a;\ b]$	a escluso, b compreso
chiuso/aperto	$[a;\ b[$	a compreso, b escluso
aperto	$]a;\ b[$	estremi esclusi

Tutti i tipi di intervallo precedenti, nella retta reale o iperreale, sono continui, a meno di indicazioni diverse. Se un intervallo $[a;\ b]$ contiene un punto (o più punti) di discontinuità, per esempio d, allora occorre usare indicazioni diverse: $[a;\ d[\cup]d;\ b]$
La differenza $a - b$ fra due numeri della retta iperreale $a, b \in {}^*\mathbb{R}$, può essere positiva, negativa o nulla. Indicheremo con Δ la differenza fra due numeri standard, cioè una differenza finita, mentre, se la differenza è infinitesima, sarà indicata con δ oppure ε o altra lettera minuscola dell'alfabeto greco.
In analisi infinitesimale, le differenze infinitesime sono protagoniste.

4.4 Differenziale

Parte principale

I risultati dei calcoli che seguono in molti casi hanno la forma di una somma fra infinitesimi di ordine diverso, come avviene nel prossimo esempio sul differenziale della funzione quadratica e più avanti con le funzioni potenza.
In una somma di infinitesimi, gli infinitesimi di grado superiore (che sono quelli più vicini allo zero) pesano sul risultato infinitamente meno degli altri: sono più trascurabili. Quando in una somma di infinitesimi si trascurano quelli di minor peso, si dice che si prende la *parte principale della somma*. Lo si può fare perché la somma esatta e quella approssimata sono numeri indistinguibili.

Definizione 4.4. Il differenziale è la differenza infinitesimale.

Dato un numero iperreale $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$, finito oppure infinitesimo, si può scrivere il valore del numero a lui infinitamente vicino: si tratta di $x_0 + \varepsilon$. La differenza fra i due valori infinitamente vicini è $dx|_{x=x_0} = (x_0 + \varepsilon) - x_0 = \varepsilon$. È calcolata a partire dal punto x_0 e si chiama *differenziale di* x *nel punto* x_0.
La sigla dx (che si legge *de x*) indica la differenza infinitesimale. La sigla $dx|_{x=x_0}$ si legge: *de x, per x uguale a x zero*.

Esempio 4.1. Calcola il differenziale della variabile x nel punto $x = -7$. Ripeti poi il calcolo in altri punti.
$dx|_{x=-7} = (-7 + \varepsilon) - (-7) = \varepsilon$
$dx|_{x=7} = (7 + \varepsilon) - 7) = \varepsilon$
$dx|_{x=3} = (3 + \varepsilon) - 3 = \varepsilon$
$dx|_{x=\frac{1}{4}} = (\frac{1}{4} + \varepsilon) - \frac{1}{4} = \varepsilon$
$\ldots \quad = \quad \ldots$
$dx|_{x=a} = (a + \varepsilon) - a = \varepsilon$
$dx|_{x=x_0} = \ldots = \varepsilon$
Se il risultato del differenziale è indifferente da x_0, allora si evita di indicare $|_{x=x_0}$: $dx = \varepsilon$, $\forall x$.

Esempio 4.2. Calcola il differenziale della variabile $\frac{10}{13}x$ nei punti $x = 9$ e $x = -\dfrac{1}{5}$.

$$d\left(\frac{10}{13}x\right)\bigg|_{x=9} = \left[\frac{10}{13}\cdot(9+\varepsilon)\right] - \frac{10}{13}\cdot 9 = \frac{10}{13}\varepsilon.$$
$$d\left(\frac{10}{13}x\right)\bigg|_{x=-\frac{1}{5}} = \left[\frac{10}{13}\cdot\left(-\frac{1}{5}+\varepsilon\right)\right] - \frac{10}{13}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{13}\varepsilon.$$
$$d\left(\frac{10}{13}x\right) = \frac{10}{13}\varepsilon, \forall x.$$

Anche se due risultati uguali non bastano per fare una prova, e nemmeno i sei del primo esempio, si può essere sicuri che mille altri tentativi non sortirebbero un esito diverso. La prova si ottiene utilizzando x_0 (oppure una costante analoga) al posto di un valore numerico.

❑ **Osservazione** L'infinitesimo ε potrebbe anche essere negativo. Questo non cambierebbe il calcolo.

L'uso di un valore numerico al posto di x_0 è essenziale per precisare il punto a partire dal quale si vuole svolgere il calcolo. Negli esempi precedenti tale indicazione è risultata indifferente, ma nella maggior parte dei casi, invece, ha un diretto influsso sul risultato.

Esempio 4.3. Calcola $df(x)|_{x=5}$, con $f(x) = x^2$. Calcola poi $df(x)|_{x=-5}$ e infine $df(x)|_{x=2}$.

$$d(x^2)|_{x=5} = (5+\varepsilon)^2 - 5^2 = 25 + 10\varepsilon + \varepsilon^2 - 25 = 10\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$d(x^2)|_{x=-5} = (-5+\varepsilon)^2 - (-5)^2 = 25 - 10\varepsilon + \varepsilon^2 - 25 = -10\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$d(x^2)|_{x=2} = (2+\varepsilon)^2 - 2^2 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4 = 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

❑ **Osservazione** Non abbiamo fatto alcuna ipotesi su ε. Potrebbe essere un infinitesimo positivo o negativo, potrebbe essere il triplo o il quadrato di un altro infinitesimo. Il risultato non cambia e ha valore per qualsiasi ε.

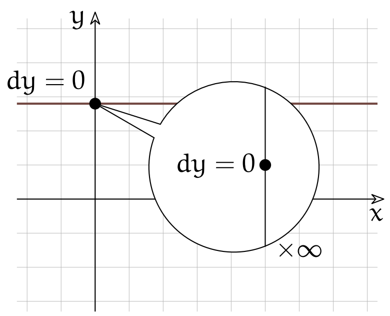
4.4.1 Differenziale e funzioni

Iniziamo a differenziare le funzioni più semplici, in un generico punto x_0. Se ci accorgeremo che il risultato non dipende da x_0, ne trarremo regole di carattere generale.
Ma prima di tutto, una precisazione essenziale:

❑ **Osservazione** Il differenziale di una funzione è calcolabile solo negli intervalli in cui la funzione è continua.

Funzione costante

Se $f(x) = k$, si ha:
$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+\varepsilon) - f(x_0) = k - k = 0$
Se la funzione è costante il suo differenziale è nullo, perché, essendo una funzione costante, i suoi valori non possono cambiare.



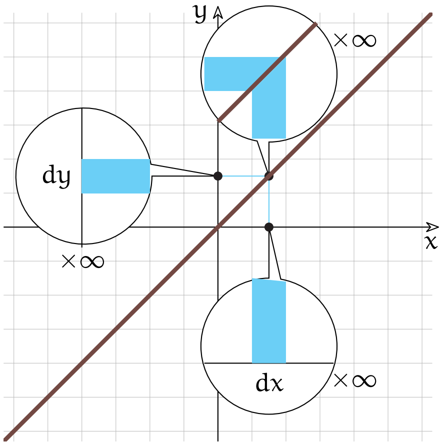
Resta così dimostrato il seguente

Teorema 4.1. *Il differenziale di una costante è nullo.*

Nel piano cartesiano, la funzione $y = k$ è una retta orizzontale e, come tutte le rette, è una funzione continua. Quindi il risultato non dipende da x_0 e vale su tutto l'asse iperreale.

Funzione identica

Se $f(x) = x$, allora, banalmente: $df(x) = dx = \varepsilon$. Il risultato è generale, cioè non dipende da x_0. Infatti:
$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+\varepsilon) - f(x_0) = (x_0+\varepsilon) - x_o = \varepsilon.$



È dimostrato così il seguente

Teorema 4.2. *Il differenziale della funzione identica è* $dx = \varepsilon$.

D'ora in poi useremo indifferentemente dx oppure ε, dato che sono equivalenti.
Il grafico di $f(x) = x$ nel piano cartesiano è dato dalla retta $y = x$. Che significato dobbiamo attribuire a $dy = dx$? L'uguaglianza dei due differenziali indica che due punti infinitamente vicini sulla retta individuano sugli assi due differenze infinitesime uguali.

Succederebbe la stessa cosa con altre rette, più o meno inclinate passanti o non passanti dall'origine?

Funzione lineare

Esempio 4.4. Proviamo a differenziare in x_0 la funzione $f(x) = \frac{2}{3}x$.
$df(x)|_{x=x_0} = \frac{2}{3}(x_0 + dx) - \frac{2}{3}x_0 = \frac{2}{3}dx$.
Questa volta il grafico della funzione $y = \frac{2}{3}x$ mostra che l'incremento infinitesimo dei valori x provoca un incremento corrispondente a $\frac{2}{3}$ sui valori y. Il risultato è generale, cioè vale $\forall x_0$.

Esempio 4.5. Proviamo con un'altra funzione che ha per grafico la retta: $f(x) = -5x + 2$:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+dx) - f(x_0) = [-5(x_0+dx)+2] - (-5x_0+2) = -5x_0 - 5dx + 2 + 5x_0 - 2 = -5dx$$

Quindi $dy = -5dx, \forall x_0 \in {}^*\mathbb{R}$.

Teorema 4.3. *Il differenziale di una funzione lineare* $f(x) = mx + q$ *è* mdx, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$.

Ipotesi: $f(x) = mx + q$. Tesi: $df(x) = mdx$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+dx) - f(x_0) = [(mx_0+dx)+q] - (mx_0+q) = mx_0 + mdx + q - mx_0 - q = mdx$$

Poiché nel risultato non compare x_0, $df(x)$ non dipende dal punto x_0. □

Funzione quadratica

Teorema 4.4. *Il differenziale della funzione quadratica* $f(x) = x^2$ *è* $2xdx + (dx)^2$, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$.

Ipotesi: $f(x) = x^2$. Tesi: $df(x) = 2xdx + (dx)^2$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 = x_0^2 + x_0dx + (dx)^2 - x_0^2 = 2x_0dx + (dx)^2$$

Questa volta nel risultato compare x_0. Quindi il valore del differenziale della funzione cambia al cambiare del punto x_0 che viene incrementato. □

Funzioni potenza

Ricaviamo per gradi il differenziale della funzione potenza è $f(x) = x^n$, con un procedimento per induzione.
Iniziamo dai casi già noti $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ e esaminiamo i successivi aumentando progressivamente l'esponente.

$$
\begin{aligned}
d(x) &= x + dx - x = dx \\
d(x^2) &= (x + dx)^2 - x^2 \sim 2xdx \\
d(x^3) &= (x + dx)^3 - x^3 = [x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3] - x^3 = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 = \\
&= 3x^2dx + \delta(x) \sim 3x^2dx \\
d(x^4) &= (x + dx)^4 - x^4 = [x^4 + 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4] - x^4 = \\
&= 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 = 4x^3dx + \delta(x) \sim 4x^3dx \\
&\ldots\ldots \\
d(x^7) &= (x + dx)^7 - x^7 = x^7 + 7x^6(dx) + 21x^5(dx)^2 \ldots + 21x^2(dx)^5 + 7x(dx)^6 + (dx)^7 - x^6 = \\
&= x^7 + \delta(x) \sim 7x^6dx \\
&\ldots\ldots \\
d(x^{10}) &= (x + dx)^{10} - x^{10} = x^{10} + 10x^9dx + \ \ldots\ - x^{10} = \ \ldots\ = x^{10} + \delta(x) \sim 10x^9dx
\end{aligned}
$$

L'unico risultato esatto è il primo; gli altri si sintetizzano scrivendo $\delta(x)$ che rappresenta gli infinitesimi di ordine superiore. $\delta(x)$ aggiunge delle quantità infinitamente meno importanti del primo addendo. A sinistra e a destra dell'ultimo segno di uguale si trovano quindi numeri indistinguibili, cioè le loro differenze non si possono cogliere perché sono "più infinitesime" di quanto lo sono questi numeri.

Ora che il meccanismo è chiaro e possiamo ritenere sufficientemente dimostrato il teorema seguente.

Teorema 4.5. *Il differenziale della funzione potenza* $f(x) = x^n$ *è* $df(x) \sim nx^{n-1}dx$

❑ **Osservazione** Anche se abbiamo usato solo esponenti interi, si dimostra che la regola vale per qualsiasi esponente reale. Lo puoi verificare nei due casi che seguono, riscrivendo le funzioni come potenze.

Funzione radice quadrata

Teorema 4.6. *Il differenziale della funzione radice quadrata* $f(x) = \sqrt{x}$ *è* $\sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}}$, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$. Tesi: $df(x) \sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}}$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0+dx)-f(x_0) = \sqrt{x_0+dx}-\sqrt{x_0} = \\ &= \left(\sqrt{x_0+dx}-\sqrt{x_0}\right) \times \frac{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}} = \\ &= \frac{x_0+dx-x_0}{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}} \sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Anche questa volta il risultato dipende da x_0. Si tratta di un risultato indistinguibile dal risultato esatto. L'approssimazione si ottiene con le tecniche del capitolo 3. □

Funzione reciproca

Teorema 4.7. *Il differenziale della funzione reciproca* $f(x) = \frac{1}{x}$ *è* $-\frac{dx}{x^2}$, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$, *con* $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \frac{1}{x}$. Tesi: $df(x) \sim -\frac{dx}{x^2}$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+dx)-f(x_0) = \frac{1}{(x_0+dx)} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0-x_0-dx}{x_0(x_0+dx)} = \frac{-dx}{x_0^2+x_0 dx} \sim -\frac{dx}{x_0^2}$$

Anche questa volta il valore del differenziale dipende da x_0. Per semplicità, teniamo il risultato indistinguibile. □

Differenziali problematici

Quest'ultimo calcolo ci porta un punto importante: dato che nel risultato x_0 si trova al denominatore, abbiamo un problema. Che succede se $x_0 = 0$?

Esempio 4.6. Calcola $df(x)|_{x=0}$, con $f(x) = \frac{1}{x}$.
$d\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=0} = \frac{1}{0+dx} - \frac{1}{0} = ?$
La funzione è differenziabile $\forall x$, ma non per $x = 0$. Se $x \approx 0$ il differenziale diventa la differenza fra due infiniti, una forma di indecisione che non siamo in grado di risolvere. Il problema viene dal fatto che in $x = 0$, $f(x)$ non è definita.

Esempio 4.7. Differenzia la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$.
$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} =?$
$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=-1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{-2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} =?$
Questa volta i punti critici sono due. Poiché la funzione non è calcolabile per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$, non è calcolabile nemmeno il suo differenziale.

Nel piano cartesiano tracciamo il grafico delle funzioni degli ultimi tre esempi: $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2-1}$.

Si può osservare che $y = \sqrt{x}$, essendo definita per i valori $x \geqslant 0$, non può essere calcolata per esempio, se $x = -2$ e quindi nemmeno il suo differenziale ha senso in questo punto.
Gli altri due grafici mettono in evidenza questo problema: dove la funzione non è calcolabile, non esiste il punto che rappresenta la funzione nel piano cartesiano reale. Nel piano iperreale,

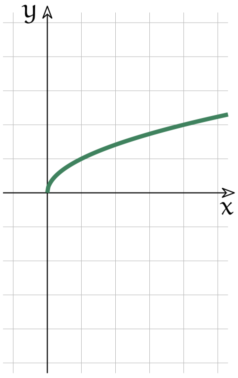


FIGURA 4.1: $y = \sqrt{x}$

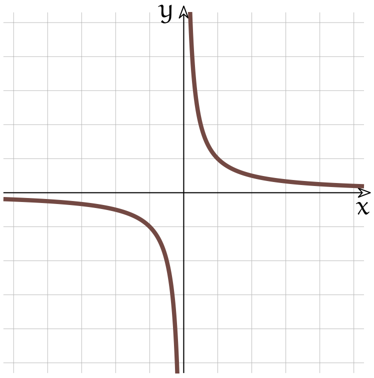


FIGURA 4.2: $y = \frac{1}{x}$

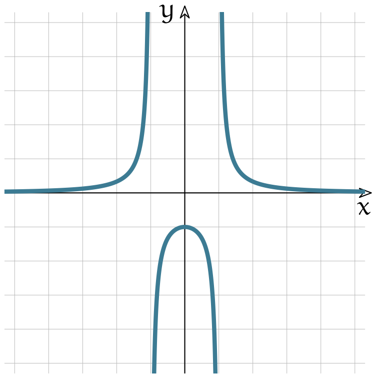
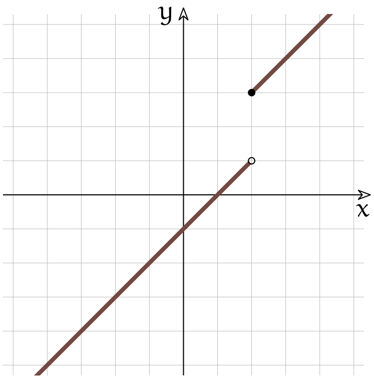


FIGURA 4.3: $y = \frac{1}{x^2-1}$

puntando l'infinito con un telescopio, non riusciamo a focalizzare la differenza infinitesima fra due valori infiniti della funzione.



Consideriamo un tipo diverso di problema.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 2 \\ x+1, & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$f(x)$ ha due rami e il grafico compie un salto per $x = 2$. Le differenze infinitesime calcolate a destra di tale punto saranno diverse da quelle calcolate a sinistra: i differenziali sono calcolabili ma non hanno uguali valori. Anche in questo caso $f(x)$ non è differenziabile per $x = 2$

Continuità e funzioni

Il tema della continuità è vasto e importante e viene trattato nei dettagli nel prossimo capitolo. Per ora ci limitiamo a considerazioni di carattere intuitivo.
Se una funzione è continua, ne puoi tracciare il grafico nel piano cartesiano senza staccare la matita dal foglio. Se ci fosse un punto (o più punti) di discontinuità, saresti obbligato a interrompere il disegno e riprenderlo da punti vicini.

Esempio 4.8. La funzione $f(x) = x$, che ha per grafico la retta $y = x$ è evidentemente una funzione continua: puoi tracciarne il grafico senza interruzioni nell'intervallo $(-M, M)$. Sono anche continue tutte le funzioni che hanno per grafico una retta, come per esempio $f(x) = -\frac{4}{5}x + 9$.
Quindi anche la funzione costante $f(x) = k$, che ha per grafico una retta orizzontale, è una funzione continua.

Esempio 4.9. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua ovunque in $\mathbb{R}$, tranne che per $x = 0$. Infatti se $x = 0$, $f(x)$ non è calcolabile, quindi nel piano cartesiano non puoi disegnare un punto che rappresenta il valore standard $(0; \frac{1}{0})$. Il punto è comunque visibile nel piano iperreale, con un telescopio.

Esempio 4.10. Per ragioni simili, sono discontinue in uno o più punti le funzioni (algebriche o trascendenti), per le quali occorra specificare condizioni di esistenza relative a questi punti. Così $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ è discontinua per $x = \pm 1$, mentre $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ è continua.

Dagli esempi si capisce che *la continuità delle funzioni è una condizione di carattere locale*, cioè per punti. Infatti si possono riconoscere dei punti di discontinuità di una funzione, non degli insiemi di discontinuità. Se ci si accorge che un punto $(x_0; f(x_0))$ è di discontinuità per $f(x)$, allora si dice: $f(x)$ *è discontinua per* $x = x_0$, cioè si indica solo la coordinata x che pone questo problema (non si usa dire: $f(x_0)$ è discontinua).

Esempio 4.11. La funzione $f(x) = \tan x$ è discontinua per $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$.

Definizione 4.5. Se una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo $[a; b]$, allora si dice continua in $[a; b]$.

❑ **Osservazione** Ovviamente la definizione non cambia se l'intervallo è di tipo diverso.

Esempio 4.12. $f(x) = \ln x$ è definita per $x \in (0; M)$ ed è ivi continua.

4.4.2 Combinare differenziali

Nella sezione **??** e in altre ci siamo avvalsi di proprietà così naturali che non è stato necessario sottolinearle. Ma è meglio non lasciarcele sfuggire.

Differenziale del prodotto per una costante

Teorema 4.8. *Se una funzione è moltiplicata per una costante, anche il suo differenziale risulta moltiplicato per la stessa costante.*

Ipotesi: $f(x) = a \cdot g(x)$. Tesi: $df(x) = a \cdot dg(x)$.

Dimostrazione.

$$df(x) = d\,[a \cdot g(x)] = a \cdot g(x + dx) - a \cdot g(x) = a \cdot [g(x + dx) - g(x)] = a \cdot dg(x).$$

□

Differenziale di una somma di funzioni

Teorema 4.9. *Se una funzione è la somma (la differenza) di due funzioni, anche il suo differenziale sarà la somma (la differenza) dei due differenziali.*

Ipotesi: $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. Tesi: $df(x) = df_1(x) \pm df_2(x)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x) &= d[f_1(x) \pm f_2(x)] = [f_1(x+dx) \pm f_2(x+dx)] - [f_1(x) \pm f_2(x)] = \\ &= [f_1(x+dx) - f_1(x)] \pm [f_2(x+dx) - f_2(x)] = df_1(x) \pm df_2(x) \end{aligned}$$

□

Esempio 4.13. Un generico polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una funzione quadratica composta di tre termini. Con le regole precedenti abbiamo: $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ e $df(x) = df_1 + df_2 + df_3$.

- $f_1 = ax^2 \Rightarrow df_1 \sim 2axdx+;$
- $f_2 = bx \Rightarrow df_2 = bdx$
- $f_3 = c \Rightarrow df_3 = 0$

Quindi $df(x) \sim 2axdx + bdx$. Il grafico della funzione è una parabola generica e il differenziale ci dice che l'incremento infinitesimo dx provoca un incremento (o un decremento) variabile sull'asse Y, che dipende dal punto x a partire dal quale si calcola dx.

Completiamo il quadro delle regole di calcolo con l'esame dei differenziali del prodotto e del rapporto di funzioni. Lo studente smart, che si fida un po' troppo delle analogie, potrebbe pensare: "siccome il differenziale di una somma è la somma dei differenziali e lo stesso avviene per la differenza, succederà una cosa simile anche per il prodotto e per il rapporto". Per (s)fortuna le cose a volte sono un po' meno smart.

Differenziale del prodotto di due funzioni

Questa volta, al posto della immarcescibile dimostrazione algebrica, ricorriamo alla geometria. Immaginiamo che le due funzioni, calcolate in un generico punto x, esprimano la base e l'altezza di un rettangolo: $b(x) = b$ sarà la base e $h(x) = h$ sarà l'altezza . L'area ovviamente si ottiene da $b(x) \cdot h(x) = A(x)$. Differenziare il prodotto $d\,[A(x)]$ vuol dire calcolare di quanto aumenta l'area del rettangolo, se i lati subiscono un incremento infinitesimo.

❑ **Osservazione** Gli incrementi della base e dell'altezza possono essere diversi, perché $b(x)$ e $h(x)$ sono funzioni diverse, le quali possono reagire in modo diverso all'incremento dx.

Teorema 4.10. *Se una funzione è il prodotto di due funzioni, il suo differenziale sarà dato da una somma fra tre prodotti: il differenziale della prima funzione per la seconda più la prima funzione per il differenziale della seconda più il prodotto dei due differenziali.*

Ipotesi: $A(x) = b(x) \cdot h(x)$. Tesi: $dA(x) = db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x) + db(x) \cdot dh(x)$.

Dimostrazione. L'incremento infinitesimo di area è la zona colorata del disegno. È formato da tre parti:

- un rettangolo sottile, verticale e sulla destra, di base infinitesima $db(x)$ e altezza $h(x)$;
- un rettangolo orizzontale, in alto, di base $b(x)$ e altezza infinitesima $dh(x)$;
- un rettangolino in alto a destra, di area $db(x)dh(x)$.

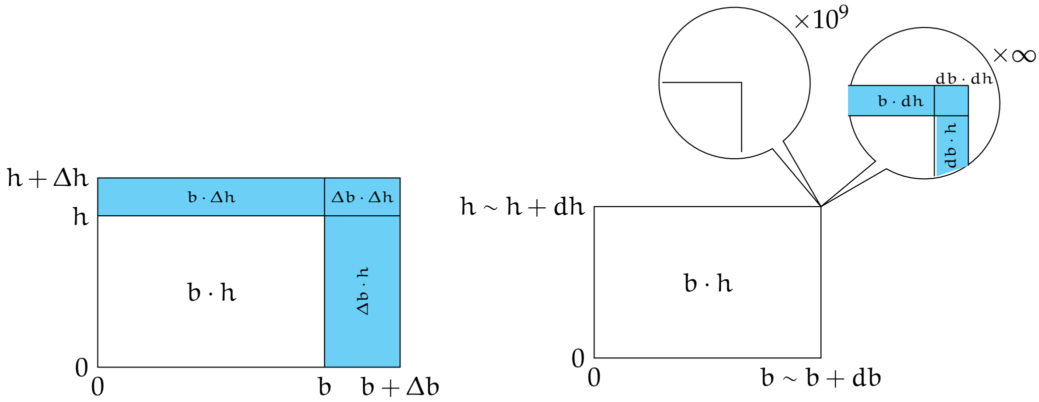


FIGURA 4.4: Incrementi finito e infinitesimo dell'area di un rettangolo

La descrizione geometrica rappresenta bene la tesi e per i nostri scopi è una prova sufficiente. □

Dato che l'ultimo termine è un infinitesimo di ordine superiore, il risultato può essere approssimato alla sua parte principale, senza gravi danni: $dA(x) \sim db(x)\cdot h(x) + b(x)\cdot dh(x)$.

Differenziale del rapporto fra due funzioni

Teorema 4.11. *Se una funzione è data dal rapporto fra due funzioni, con il denominatore non nullo, il suo differenziale si ottiene calcolando la differenza fra due prodotti (il differenziale del numeratore per il denominatore meno il numeratore per il differenziale del denominatore) e dividendo il risultato per il quadrato del denominatore.*

Ipotesi: $h(x) = \dfrac{A(x)}{b(x)}$, con $b(x) \neq 0$. Tesi: $dh(x) = \dfrac{dA(x)\cdot b(x) - A(x)\cdot db(x)}{(b(x))^2}$

Dimostrazione. Ricorriamo alla geometria anche in questo caso.
la quale corrisponde allo gnomone infinitesimo dA, escluso il rettangolo destro infinitesimo, di area $h\cdot db$. Dunque:

$$dh(x) = d\left[\frac{A(x)}{b(x)}\right] = \frac{\left[dA(x) - \dfrac{A(x)}{b(x)}db(x)\right]}{b(x)} = \frac{dA(x)\cdot b(x) - A(x)\cdot db(x)}{(b(x))^2}$$

□

❑ **Osservazione** Si chiama gnomone la figura, a forma di L rovesciata, che rappresenta la crescita dell'area di un rettangolo.

Questa volta, data $A(x) = b(x) \times h(x)$, $\frac{A(x)}{b(x)} = h(x)$ fornisce l'altezza h, fissato x. Ovviamente si spera che sia $b(x) \neq 0$.
Se cerchiamo $dh(x) = dh$, incremento infinitesimo di altezza, siamo costretti a calcolare $d\left[\frac{A(x)}{b(x)}\right]$, differenziale di un rapporto. Guardando il disegno, si tratta dell'altezza della fascia superiore colorata,

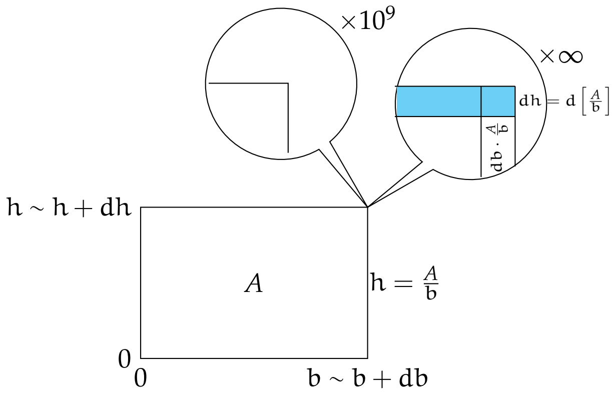


FIGURA 4.5: Incremento infinitesimo dell'altezza

Sintesi della sezione

Ci siamo limitati a calcolare solo alcuni differenziali elementari, attraverso esempi e dimostrazioni. Manca del tutto la trattazione dei differenziali delle funzioni trascendenti. Avremo modo di vedere anche questi nel corso della prossima sezione, dove quanto ottenuto fin qui viene utilmente ripreso e ampliato.

I risultati che abbiamo visto valgono sotto le ovvie ipotesi che si parli di funzioni continue e che i differenziali siano calcolabili per tutti i possibili x del dominio di tali funzioni. Unificando i simboli e restando all'essenziale, abbiamo:

1. $f = k \rightarrow df = 0$;
2. $f = x \rightarrow df = dx$;
3. $f = x^{\alpha} \rightarrow df \sim \alpha x^{\alpha-1} dx$;

4. $d(a \cdot f) = a df$ — differenziale del prodotto per una costante;
5. $d(f \pm g) = df \pm dg$ — differenziale di una somma o differenza;
6. $d(f \cdot g) \sim f \cdot g + f \cdot dg$ — differenziale del prodotto;
7. $d\left(\frac{f}{g}\right) \sim \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ — differenziale del rapporto ($g \neq 0$).

dove k, a, α rappresentano delle costanti, mentre f e g sono funzioni continue.
Sulla scia delle applicazioni illustrate al termine del Cap.2, esaminiamo alcuni problemi facilmente risolvibili con l'aiuto dei differenziali.

4.4.3 Problemi con i differenziali

Esempio 4.14. Un triangolo equilatero ha l'altezza di 8 cm. Di quanto aumenta il suo perimetro, man mano che aumenta l'altezza? L'aumento è legato alla misura iniziale di h?
Il perimetro è $2p = 3l$ e con il Teorema di Pitagora si ha: $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Quindi $l = \frac{2}{\sqrt{3}} h$ e $2p = 2\sqrt{3}h$. Incrementiamo l'altezza a partire da $h_0 = 8$ e ricaviamo il perimetro corrispondente.

$d(2p)|_{h_0=8} = d\left(2\sqrt{3}h\right)|_{h_0=8} = 2\sqrt{3}\cdot(8+dh) - 2\sqrt{3}\cdot 8 = 2\sqrt{3}\cdot dh$.
Per ogni incremento infinitesimo dell'altezza, il perimetro aumenta di $2\sqrt{3}$. Si tratta di un incremento costante, che non dipende dalla misura iniziale dell'altezza. Infatti, se si ripete il calcolo scrivendo il simbolo h_0 al posto della sua misura 8, h_0 non compare nel risultato.
La soluzione può essere ricavata in modo più diretto, applicando le regole 4 e 2 della sintesi a pag.73.

Esempio 4.15. Di quanto aumenta il lato di un triangolo equilatero, man mano che aumenta la sua area? L'aumento è legato al valore iniziale del lato?
Dalla formula dell'area $A = \frac{bh}{2}$ e dall'esempio precedente ($h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$), ricaviamo: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.
Differenziando, con l'aiuto delle regole 4 e 3 della sintesi a pag. 73, abbiamo:
$d(A) = d\left(\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}d\left(l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2l\cdot dl + (dl)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l+dl)\,dl$.
Questa volta la relazione con l'incremento del lato non è elementare: per ogni incremento infinitesimo del lato si ha un incremento di area pari a $\frac{\sqrt{3}}{4}(2l+dl)$, che dipende dalla misura iniziale del lato e dallo stesso incremento. Per gestire il risultato, occorre approssimare questo numero all'indistinguibile più vicino:
$d(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l+dl)\,dl \sim \frac{\sqrt{3}}{2}l\,dl$.
Da qui, applicando la formula inversa, si ottengono le risposte: $dl \sim \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{d(A)}{l}$.

❑ **Osservazione** Una via più diretta per giungere alla soluzione potrebbe essere:
$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}A} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{A} \rightarrow dl = d\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{A}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}d\left(\sqrt{A}\right)$
A questo punto dobbiamo fermare il calcolo, perché sappiamo calcolare $d\left(\sqrt{x}\right)$, ma non sappiamo ancora come calcolare $d\left(\sqrt{f(x)}\right)$. Per farlo, occorre una conoscenza più approfondita della derivate.

4.5 Introduzione alla derivata

La derivata è un ente matematico conosciuto dalla metà del 1700, che da allora si applica utilmente allo studio di fenomeni naturali di ogni tipo.
Studieremo l'argomento puntando lo sguardo sulle funzioni e sui loro grafici nel piano cartesiano. Iniziamo dai grafici più semplici.

4.5.1 Pendenza di una retta

Sappiamo già calcolare la pendenza di una retta dalla semplice osservazione del suo grafico: si fissano sulla retta due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e si calcola il rapporto $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
È come se si volesse misurare la distanza verticale fra i due punti usando la loro distanza orizzontale come unità di misura. Nel caso della retta r, $m = \frac{3}{2}$ e si potrebbe dire: "un punto che si muove sulla retta, se si sposta di due quadretti in orizzontale ne guadagna (o perde) tre in verticale.
Un punto che scorre sulla retta orizzontale, non subisce alcuna variazione lungo l'asse y e per questo $m = 0$; al contrario per la retta verticale le variazioni sono solo verticali e la pendenza è infinita.
Sintetizziamo la formula come rapporto fra differenze: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il simbolo m ci

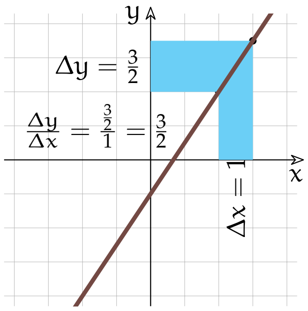


FIGURA 4.6: $y = \frac{3}{2}x - 1$

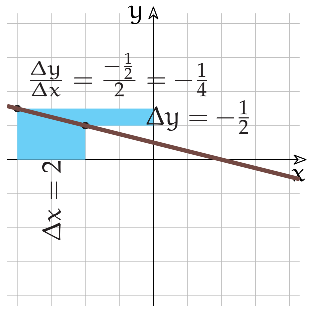


FIGURA 4.7: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

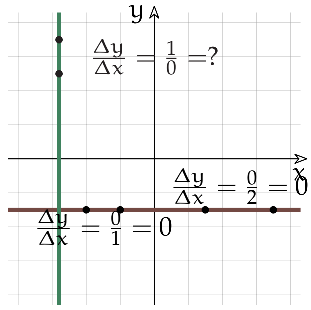


FIGURA 4.8: $y = -\frac{3}{2}$ e $x = -2,8$

riporta all'equazione di una retta generica in forma esplicita $y = mx + q$, dove m rappresenta appunto il coefficiente angolare, cioè l'inclinazione o pendenza.

❑ **Osservazione** Secondo l'uso del capitolo precedente, le indicazioni con la lettera maiuscola Δ (Δx, Δy) si riferiscono a *quantità finite*, cioè a numeri standard.

Rapporto incrementale

C'è un fatto importante: per calcolare la pendenza di una retta, la scelta dei due punti è indifferente. Possono essere molto vicini o molto lontani, scambiati l'uno con l'altro o presso l'origine, oppure no: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è sempre lo stesso, come è giusto che sia per una retta. Da $x_B - x_A = \Delta x$ ricaviamo banalmente $x_B = x_A + \Delta x$, cioè nel piano cartesiano B si colloca a destra (se $\Delta x \geqslant 0$) di A di una quantità finita, grande o piccola che sia.
Δx, Δy sono anche chiamati *incrementi* e quindi...

Definizione 4.6. Si dice *Rapporto Incrementale* (R.I.) il rapporto degli incrementi, cioé la quantità R.I. = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si tratta di una quantità finita, calcolabile se $\Delta x \neq 0$.
Il Rapporto Incrementale, calcolato su una retta fornisce la sua pendenza ed è un valore costante, come abbiamo visto.
Ma il calcolo si può applicare a qualsiasi funzione, anche a quelle che nel piano cartesiano sono rappresentate da curve. Allora le cose cambiano.

Esempio 4.16. I prossimi grafici appartengono alla stessa funzione.
Scegliamo alcuni punti sulla curva e mettiamo in evidenza gli intervalli che consentono il calcolo del rapporto incrementale, in un caso, e la pendenza delle secanti nell'altro.
Rapporti Incrementali:

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{-2-(-3.5)} = \frac{-3}{1.5} = -2 \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-2}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3.8-3)}{2.4-0} = \frac{0.8}{2.4} = \frac{1}{3} \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{1-3.8}{3.5-2.3)} = \frac{-2.8}{1.2} = -\frac{7}{3}$$

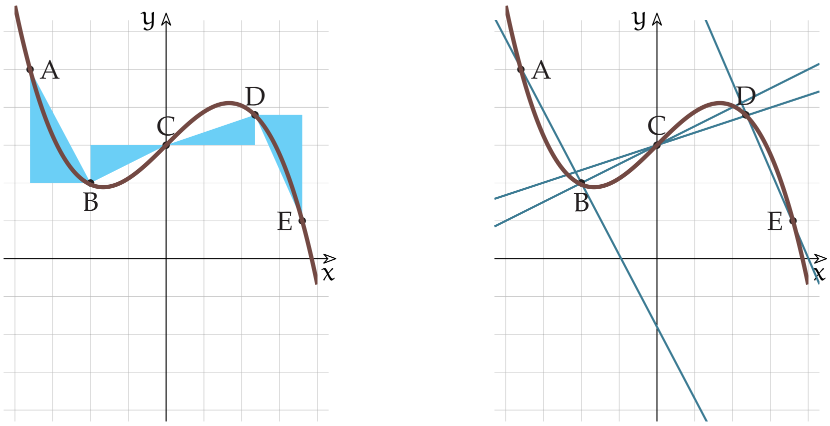


FIGURA 4.9: Rapporti incrementali in una curva e secanti.

Pendenze.

$$m_{AB} = -2 \qquad m_{BC} = \frac{1}{2} \qquad m_{CD} = \frac{1}{3} \qquad m_{DE} = -\frac{7}{3}$$

I calcoli confermano che se il grafico è una curva, il Rapporto Incrementale, calcolato fra varie coppie di punti, ha valori diversi. Il R.I. cambia a seconda della coppia di punti fissati sulla curva.
Se si traccia la retta che unisce la coppia di punti, ne risulta una secante alla curva.
In conclusione, si hanno le seguenti proprietà:

1. Il R.I. è un numero finito e esiste solo se $\Delta x \neq 0$.
2. Il R.I fra le coppie di valori di una funzione è a sua volta una funzione, che dipende dalla coppia scelta.
3. La funzione è costante se applicata al grafico di una retta. In questo caso il R.I calcola la sua pendenza.
4. In generale, R.I. calcola la pendenza della retta secante che unisce due punti del grafico.

Rapporto differenziale

Esempio 4.17. Fissiamo su una curva due punti: uno fisso (A) e l'altro mobile P, cioè in grado di spostarsi lungo la curva dalla posizione più lontana P_1, alla più prossima ad A, cioè oltre P_7, fin quasi a sovrapporsi con A.

Tracciamo le secanti che uniscono A con le varie posizioni di P_n. Man mano che P si avvicina ad A, la secante che li unisce tende ad allinearsi alla tangente ideale.
Quando P è così vicino ad A che la loro distanza è $\overline{AP} < \frac{1}{n}$, $\forall n$, siamo nel campo degli infinitesimi: cambia la natura del Rapporto Incrementale che avevamo imparato a calcolare. Il R.I. si trasforma da un rapporto fra quantità finite a un rapporto fra infinitesimi, quindi non possiamo essere certi su quale sia il tipo del risultato che fornisce.

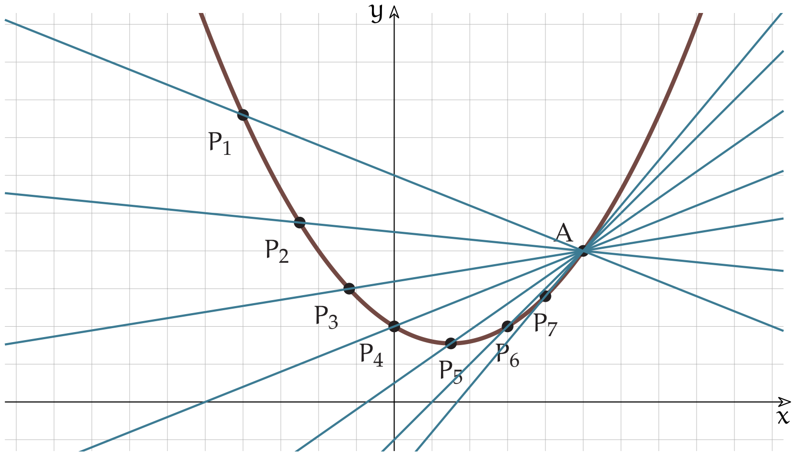


FIGURA 4.10: Dalle secanti alla tangente.

Se escludiamo il caso $dx = 0$ (P_n coinciderebbe con A) e se il rapporto dà un risultato finito, otterremo la pendenza della secante fra i due punti infinitamente vicini $A\,(x_A;\,y_A)$ e $P_n\,(x_A + dx;\; f(x_A + dx))$, quindi di una retta infinitamente vicina alla tangente, cioè distinta da essa solo se guardata con il microscopio a ingrandimento infinito.

Definizione 4.7. Si dice Rapporto Differenziale della funzione $f(x)$, relativo a x_0 il rapporto $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ fra il differenziale della funzione e quello della variabile, calcolati nel punto x_0. $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$, con $dx \neq 0$.

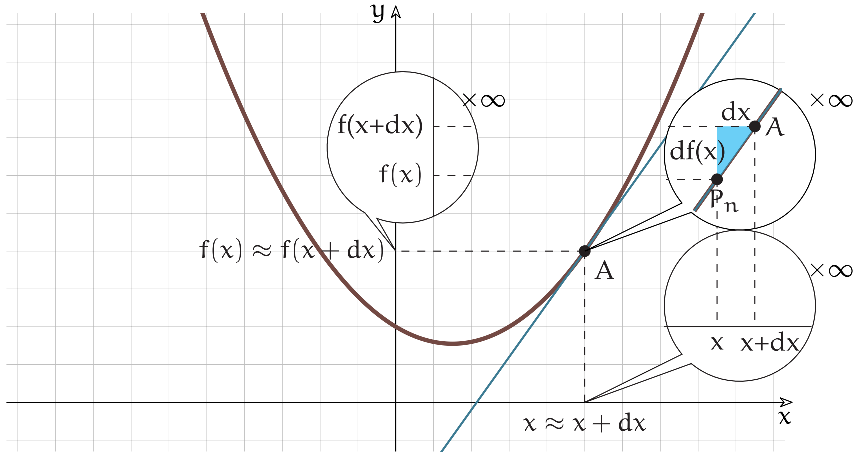


FIGURA 4.11: Secante per due punti infinitamente vicini.

Esempio 4.18. La curva della Fig.12 rappresenta la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2$. Calcoliamo la pendenza della secante che passa per $A\,(5;\ 4)$ e per un altro punto infinitamente vicino.
La funzione è visibilmente continua nel punto A e il differenziale per $x = x_A$, secondo le regole della sezione precedente, è:
$$d(f(x)|_{x=5} = d\left(\frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2\right)\Big|_{x=5} = d\left(\frac{x^2}{5}\right)\Big|_{x=5} - d\left(\frac{3}{5}x\right)\Big|_{x=5} + d(2)|_{x=5} =$$
$$= \frac{1}{5}\left(2xdx + (dx)^2\right)|_{x=5} - \frac{3}{5}dx|_{x=5} + 0 = \frac{2}{5}x|_{x=5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx =$$
$$= \frac{2}{5}5dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 2dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{7}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2$$
Raccogliendo dx nel differenziale della funzione, il rapporto differenziale è:
$$\frac{d(f(x)}{dx}\Big|_{x=5} = \frac{\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx\right)dx}{dx} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx.$$
Come si vede, la pendenza di questa secante è un numero finito del tipo $a + \varepsilon$, che dipende sia dal valore $x_A = 5$, sia dall'infinitesimo dx che compare nel risultato. Si tratta dunque di una pendenza infinitamente vicina al valore $m = \frac{7}{5}$.

Esempio 4.19. Ripetiamo il calcolo precedente, con riferimento all'ascissa del vertice $x_V = \frac{3}{2}$ (per il valore dell'ascissa può essere di aiuto la lettura del grafico, se per caso nel tempo si fosse attenuato il ricordo della regola: $x_V = -b/2a$).
$$d(f(x)|_{x=3/2} = \frac{2}{5}x|_{x=3/2}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{2}{5}\frac{3}{2}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx =$$
$$= \frac{3}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 0 + \frac{1}{5}(dx)^2.$$
Quindi il rapporto differenziale:
$$\frac{d(f(x)}{dx}\Big|_{x=3/2} = \frac{\frac{1}{5}(dx)^2}{dx} = \frac{1}{5}dx.$$
La secante per punti infinitamente vicini al vertice della parabola differisce dalla retta orizzontale per un infinitesimo, cioè è infinitamente vicina alla retta orizzontale.

❑ **Osservazione** La pendenza calcolata nell'esempio 4.18 è $m \approx \frac{7}{5}$, mentre in quest'ultimo esempio 4.19 è $m \approx 0$. Questo conferma che m cambia a seconda del punto della curva: $m = m(x)$.

Esempio 4.20. In quale punto del piano cartesiano la parabola precedente è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale?
Risposta: poiché solo la retta $y = x$ ha in qualsiasi suo punto l'inclinazione richiesta dal problema, occorre cercare in quale punto la parabola risulta inclinata come la retta, cioè ha lo stesso coefficiente angolare. È chiaro che non si può calcolare il coefficiente angolare di una parabola, ma si può immaginare che nel punto desiderato esista una retta tangente che risponde alle nostre esigenze. Cerchiamo quindi in quale punto, almeno approssimativamente, si possa disegnare una retta che ha $m = 1$ e che quasi coincida con la parabola.
Utilizziamo i calcoli precedenti e teniamo incognita x, dato che conosciamo già la pendenza

desiderata:
$$\left.\frac{d(f(x)}{dx}\right|_{x=?} = 1 \;\rightarrow\; \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}dx - \frac{3}{5} = 1 \;\rightarrow\; \frac{2}{5}x = 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}dx \;\rightarrow\; x = \frac{8-dx}{5}\frac{5}{2} = \frac{8-dx}{2}.$$
Il punto in questione ha coordinata $x = 4 - \frac{1}{2}dx \approx 4$.

4.6 Derivata: definizione

Gli esercizi precedenti sono stati risolti con esattezza. Purtroppo, però, il rapporto differenziale ci dà le soluzioni più semplici solo in pochi casi, praticamente inutili, cioè quando si applica alle funzioni polinomiali di primo grado (le rette nel p8iano cartesiano)). In tutti gli altri casi il risultato iperreale contiene infinitesimi che possone essere scomodi da gestire negli sviluppi successivi.

Esempio 4.21. Proseguendo con l'esempio 4.18, calcoliamo in due modi, esatto e approssimato, la coordinata y del punto in questione:

Calcolo esatto: $x = 4 - \frac{1}{2}dx \;\rightarrow\; y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2 = \frac{(4-\frac{1}{2}dx)^2}{5} - \frac{3}{5}(4 - \frac{1}{2}dx) + 2 =$
$= \frac{1}{5}\left(16 - dx + \frac{1}{4}(dx)^2\right) - \frac{12}{5} + \frac{3}{10}dx + 2 = \cdots = \frac{14}{5} + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{20}(dx)^2 \approx \frac{14}{5} = 2,8$
Calcolo approssimato: $x \approx 4 \;\rightarrow\; y \approx \frac{4^2}{5} - \frac{3}{5}4 + 2 = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} + 2 = \frac{14}{5} = 2,8.$

È chiaro che la seconda linea di calcoli è molto più gestibile della prima e vorremmo poter avere sempre la comodità di una gestione facilitata.
Esiste una tecnica da applicare al risultato esatto iperreale per traformarlo nel numero reale più vicino? Se esiste, possiamo guadagnare in agilità di calcolo, senza perdere troppo in precisione.

Definizione 4.8. La *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto $(x_0;\ f(x_0))$ è, se esiste, la parte standard del rapporto differenziale della funzione, calcolato nello stesso punto. La derivata si indica con $f'(x_0)$.
$$f'(x_0) = st\left(\left.\frac{d(f(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\right).$$

La derivata, cioè l'applicazione della funzione $st()$ al rapporto differenziale, soddisfa le nostre esigenze: fornisce la migliore approssimazione reale del risultato ottenuto con il rapporto differenziale. La differenza fra questo e la derivata vale uno o più infinitesimi di ordine superiore, che nella maggior parte dei casi sono trascurabili.
$$\left.\frac{d(f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0) \;\rightarrow\; f'(x_0) \approx \left.\frac{d(f(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Significato della derivata

L'operazione di derivazione ha uno scopo molto più importante dell'indubbia comodità di fornire un risultato privo di infinitesimi: essa consente di calcolare il tasso di variazione di una funzione in un dato punto. Per tasso di variazione non si intende semplicemente la differenza

fra due valori prossimi della funzione $df(x)$, ma la misura di tale differenza, ottenuta usando come unità di misura dx, cioè confrontandola con la variazione della variabile.
Dal punto di vista geometrico, se si considera il grafico della funzione nel piano cartesiano iperreale, la derivata in un punto misura il tasso di crescita della funzione lungo l'asse Y rispetto alla variazione infinitesima lungo l'asse X, quindi misura la pendenza della tangente al grafico in quel punto. Queste osservazioni sono la conseguenza del fatto che la derivata di una funzione in un punto è un numero standard.

❑ **Osservazione** L'operazione di derivazione è conosciuta dai tempi di Leibniz e di Newton, più o meno nei termini che qui sono stati esposti. Il problema attorno al quale i matematici di quell'epoca concentravano i loro sforzi era relativo alle variazioni: le variabili erano chiamate *quantità fluenti* e le variazioni di queste erano dette *flussioni*. Calcolare una velocità, per esempio, era calcolare il rapporto fra la flussione dello spazio rispetto alla flussione del tempo.

Nomi per la derivata

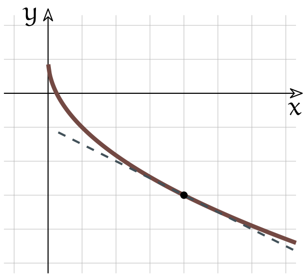
Il nome *derivata* per indicare il calcolo che abbiamo descritto ha origini storiche. Si è diffuso ovunque (derivative, derivada, dérivée, ...) anche se non rende pienamente il significato di ciò che rappresenta. Se ne potrà intuire la ragione in un capitolo successivo, quando parleremo anche di funzioni primitive.
Sempre per ragioni storiche, si sono diffusi vari simboli che rappresentano l'operazione di derivazione:

1. $f'(x_0)$ è il simbolo per il risultato della derivazione di f per $x = x_0$: semplice e sintetico;
2. $D[f(x)]$ indica la formula della derivazione di f, per es. $D\left[5x\sqrt[3]{x^2}\right] = 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{x}}$;
3. $\dot{f}$ equivale a f'; si usa in alcuni corsi universitari;
4. $\dfrac{d}{dx}f(x)$ è come $f'(x)$: si pone in evidenza che si tratta di una rapporto con dx;
5. $\dfrac{df(x)}{dx}$ si trova spesso nei libri come se fosse esattamente uguale a $f'(x)$. Sottolineamo che sono due cose diverse. Nella maggior parte dei casi quest'uguaglianza si può accettare, trattandosi di quantità infinitamente vicine, anzi indistinguibili. Per praticità, potremo anche noi seguire quest'uso, specificando la distinzione solo quando sarà necessario.

Derivate facili e meno facili

Nella definizione di derivata troviamo un inciso essenziale: *se esiste*. Significa che la derivata potrebbe anche non esistere, cioè non essere calcolabile? Vediamo alcuni esempi di calcoli che si portano a termine facilmente ed altri più problematici.

Esempio 4.22. Calcola $f'(4)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.



Si richiede la derivata di $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ nel punto $(4;\ f(4))$, che corrisponde, nel grafico, alla pendenza della retta tangente alla curva, per $x = 4$. Cioè dobbiamo calcolare:

1. il differenziale della funzione;
2. il rapporto fra questo e dx per $x = 4$;
3. la parte standard del risultato precedente.

Lo svolgimento dei calcoli:

1. calcolare il differenziale della funzione: dalle regole apprese sui differenziali (pag.67) sappiamo che
   a) il differenziale di una differenza è la differenza dei differenziali: $d(1 - \sqrt{x}) = d(1) - d(2\sqrt{x})$;
   b) il differenziale di una costante è nullo: $d(1) = 0$;
   c) il differenziale del prodotto fra una costante e una funzione è $d(k(f(x)) = kdf(x)$, quindi: $d(2\sqrt{x}) = 2\dfrac{dx}{(\sqrt{x + dx} + \sqrt{x})} \sim \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

   Per cui: $d(1 - 2\sqrt{x}) \sim \left(0 - \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$.
2. calcolare il rapporto fra questo e dx nel punto richiesto: $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=4} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=4} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$;
3. calcolare la parte standard del risultato: la parte standard di un numero indistinguibile da $-\frac{1}{2}$ è semplicemente: $\text{st}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

La retta tangente in $(4;\ f(4))$ ha pendenza pari a $-\frac{1}{2}$.

Con le regole già date sui differenziali il calcolo è privo di difficoltà, non sembra che la derivata per questa funzione possa creare problemi.

Esempio 4.23. Calcola $f'(0)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.
Riutilizziamo i calcoli precedenti.

1. $d(1 - 2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$;
2. $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=0} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{0}} = \ldots ?$
3. ?

Una frazione nulla al denominatore non ha senso, il rapporto differenziale non è calcolabile e la derivata non esiste.

Cerchiamo allora di capire cosa succede se il radicando è un infinitesimo non nullo $\varepsilon > 0$, quindi infinitamente vicino a 0.

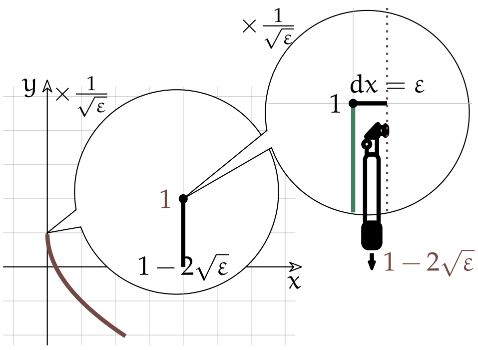
Esempio 4.24. Calcolare $f'(\varepsilon)$, sempre per $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.

1. $d(1 - 2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2. $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} = \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} \sim -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = -M$ (con $\varepsilon, M > 0$);
3. $\mathrm{st}\left(\frac{d(f(x))}{dx}\Big|_{x=\varepsilon}\right) = \mathrm{st}(-M) = ?$

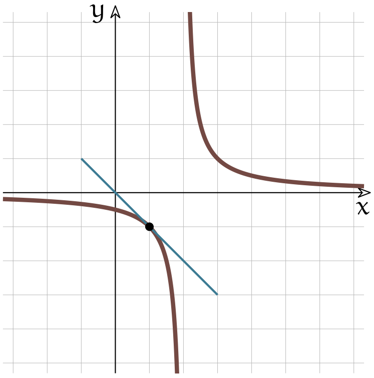
❑ **Osservazione** $-M$ è un infinito negativo perché ε si suppone positivo. Non avrebbe senso, comunque, fare un tentativo con ε negativo, perché la radice quadrata di numeri negativi (reali e iperreali) non è definita.

La parte standard di un numero infinito non esiste. La derivata non esiste, quindi la pendenza della tangente per $x = 0$ non può essere calcolata.
Esiste però la pendenza della retta secante fra i due punti infinitamente vicini $(0;\ f(0) = 1)$ e $(\varepsilon;\ f(\varepsilon))$. Infatti il rapporto differenziale appena calcolato approssima questa pendenza.
Vediamo nel dettaglio l'equazione di questa retta, con la formula della retta passante per i due punti: $A\,(0;\ 1)$ e $B\left(\varepsilon;\ f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$.
$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \to \frac{x - 0}{\varepsilon - 0} = \frac{y - 1}{1 - 2\sqrt{\varepsilon} - 1} \to \frac{x}{\varepsilon} = \frac{y - 1}{-2\sqrt{\varepsilon}} \to y = \frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}x + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$
La pendenza di questa secante è $m = \frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$.
La frazione ha senso per qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi si deve pensare che se x è un infinitesimo sempre più prossimo a 0, m diventa sempre più negativa: la retta accentua sempre più la sua inclinazione verso il basso fino ad assumere una direzione verticale, quando diventerà tangente in $(0;\ 1)$.
Come possiamo visualizzare la pendenza della secante per $x \approx 0$?



In realtà non possiamo. Infatti se $dx = \varepsilon$ abbiamo $f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$. Realizziamo un primo microscopio con ingrandimento infinito, pari a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, così $df(x)$ può essere visualizzata con un tratto verticale verso il basso, a partire dal punto $(0;\ 1)$. Ma l'ingrandimento non è sufficiente per cogliere $dx = \varepsilon$, infinitesimo di ordine superiore, quindi troppo piccolo. Se poi applichiamo un secondo microscopio che visualizza dx, allora $df(x)$ assume lunghezza infinita e non può essere valutato. Nel punto $(0;\ 1)$ la tangente (linea tratteggiata) è verticale.

Esempio 4.25. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ calcola le derivate $f'(1)$ e $f'(2)$.



Per le regole che presto approfondiremo, $d\left[(x-2)^{-1}\right] = d(x^{-1})$ perciò possiamo fare riferimento al teorema pag.68.

1. $d(f(x)) = d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\dfrac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}$;
2. $\left(\dfrac{d(f(x))}{dx}\right)\Bigg|_{x=1} = \left(\dfrac{-\frac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}}{dx}\right)\Bigg|_{x=1} =$
   $= -\dfrac{1}{1-dx}$;
3. $st\left(-\dfrac{1}{1-dx}\right) = -1.$

Per $x = 1$, la tangente ha pendenza $m = -1$.
Vediamo ora la seconda risposta.

1. $d(f(x)) = d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\dfrac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}$;
2. $\left(\dfrac{d(f(x))}{dx}\right)\Bigg|_{x=2} = \left(\dfrac{-\frac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}}{dx}\right)\Bigg|_{x=2} = -\dfrac{1}{0-0dx} =?$;
3. è inutile calcolare la parte standard di un numero privo di senso.

Cosa è successo nel secondo caso? Che la funzione è discontinua per $x = 2$. Lo rende evidente il grafico, ma sarebbe stato meglio, prima ancora di disegnarlo, studiare l'insieme di definizione e evitare calcoli inutili. Infatti dobbiamo ricordarci che il differenziale è calcolabile solo nei punti di continuità, di conseguenza il discorso vale anche per la derivata.

Esempio 4.26. Per la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2}|x-2|+2$ calcola le derivate $f'(0)$, $f'(4)$ e $f'(2)$.
La funzione contiene un valore assoluto e può essere più semplice pensarla come se fosse divisa in due rami:

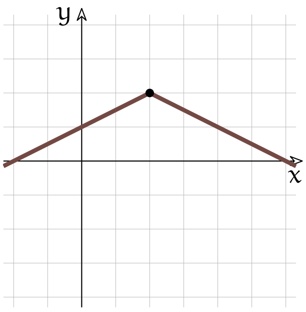


FIGURA 4.12:

$$f(x) = \frac{1}{2}|x-2|+2 =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x-2}{2}+2 & \text{per } x-2<0 \\ \dfrac{-(x-2)}{2}+2 & \text{per } x-2 \geqslant 0 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{per } x<2 \\ -\dfrac{x}{2}+3 & \text{per } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Si tratta di due semirette che si uniscono in $(2;\ 2)$. L'equazione di ciascuna di loro è una funzione lineare e calcolare le derivate $f'(0)$ e $f'(4)$ è inutile: ne ricaveremmo comunque la pendenze delle semirette, cioè $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ e $f'(4) = -\dfrac{1}{2}$.

Il calcolo di $f'(2)$ invece è più interessante:

Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } x < 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{per } x > 2 \end{cases}$. Quale è la pendenza giusta della tangente per $x = 2$, nel punto cioè dove il grafico cambia pendenza all'improvviso?
Tutto dipende dal differenziale e dal rapporto differenziale. La funzione è continua, perciò $df(x)$ è sempre calcolabile.
Immagina $\frac{f(2+dx)-f(2)}{dx}$. Se dx è un qualsiasi infinitesimo positivo, siamo nel ramo destro del grafico e il rapporto risulta negativo. Al contrario, se $dx < 0$ siamo nel ramo sinistro e il rapporto è positivo: la parte standard del rapporto differenziale relativa al punto in cui $x = 2$ non è unica, quindi non esiste. Di conseguenza la derivata non esiste.

Da tutti questi esempi impariamo che per poter calcolare la derivata:

1. $f(x)$ deve essere continua nel punto desiderato ed è una condizione necessaria per poter derivare (ma non sufficiente);
2. il rapporto differenziale deve essere un numero finito;
3. il risultato deve essere indipendente dalla scelta di dx, cioè deve valere $\forall dx$;

❑ **Osservazione** Inoltre abbiamo visto un altro fatto importante: la derivata ha un risultato in genere diverso a seconda del valore x_0 per il quale viene calcolata, cioè varia al variare di x_0. Poiché se si fissa x_0 il risultato, se esiste, è unico allora la derivata di una funzione è a sua volta una funzione.

Definizione 4.9. Una funzione per la quale la derivata è calcolabile $\forall x_0$ del suo dominio si dice funzione derivabile.

❑ **Osservazione** Una funzione derivabile è sicuramente continua, mentre il contrario non vale.

4.7 Derivare funzioni algebriche

Sistemate le questioni preliminari, passiamo al calcolo: impariamo a derivare. Nei casi semplici ci avvarremo di quanto visto a proposito dei differenziali, ma, per le funzioni non trattate allora, dovremo calcolare anche questi. Al termine, raccoglieremo i risultati utili in un prospetto riassuntivo.
Immaginiamo che le funzioni da derivare siano derivabili $\forall x$ dell'insieme di definizione, per cui la derivata di f nel generico punto $(x;\ f(x))$ sarà $f'(x)$.
Grazie al capitolo 4.4.2, sappiamo già come differenziare alcune funzioni algebriche: da quelle regole e dalla definizione di derivata ...deriva direttamente quanto segue.

Teorema 4.12. *La derivata di una funzione costante è 0: $D[k] = 0$.*

Ipotesi: $f(x) = k$. Tesi: $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 0$ □

Teorema 4.13. *La derivata della funzione identica è 1:* $D[x] = 1$.

Ipotesi: $f(x) = x$. Tesi: $f'(x) = 1$.

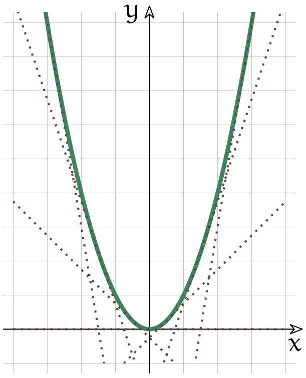
Dimostrazione. Infatti $df(x) = \varepsilon = dx$, quindi il rapporto differenziale è 1 e così anche la sua parte standard. □

❑ **Osservazione** $m = 1$ è quindi anche la pendenza della bisettrice $y = x$, cosa ormai risaputa.

Teorema 4.14. *La derivata della funzione quadratica è:* $D\left[x^2\right] = 2x$.

Ipotesi: $f(x) = x^2$. Tesi: $f'(x) = 2x$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 2xdx + (dx)^2$ e il rapporto differenziale è $2x + dx$ da cui, applicando la definizione di derivata, ... □



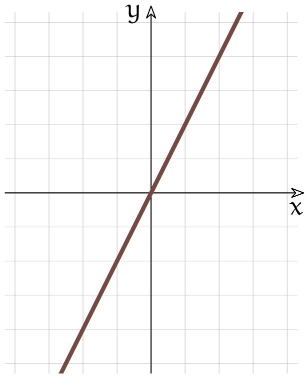


FIGURA 4.13: $y = x^2$ e la pendenza $y = m(x) = 2x$ delle sue tangenti.

Iniziamo dal ramo sinistro del grafico: al crescere di x, la curva e le sue tangenti, indistinguibili da essa nei punti di tangenza, passano da un'inclinazione fortemente verso il basso ($m < 0$) alla direzione orizzontale, nel vertice. Per $x > 0$, poi, l'inclinazione aumenta progressivamente. Il progresso della pendenza delle tangenti è costante: per questo motivo il grafico di $y = m(x)$ è una retta per l'origine.

❑ **Osservazione** Nota che la funzione derivata di una funzione quadratica è una funzione lineare. Detto con eccessiva sintesi: la derivata di una parabola è una retta.
Con più precisione: la pendenza delle tangenti a una parabola varia come varia la y rispetto alla x in una retta.

Teorema 4.15. *La derivata della generica funzione potenza è:* $D[x^n] = nx^{n-1}$.

Ipotesi: $f(x) = x^n$. Tesi: $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = nx^{n-1}dx + \delta(x)$ e, applicando la definizione di derivata, ... □

❑ **Osservazione** Ripetendo l'osservazione a pag.67 relativa a queste funzioni, il teorema 4.15 è del tutto generale: si applica con qualsiasi esponente reale. Vale quindi anche per le funzioni radicali di qualsiasi indice e per le funzioni razionali fratte, come esemplifichiamo nei prossimi due casi, molto comuni.

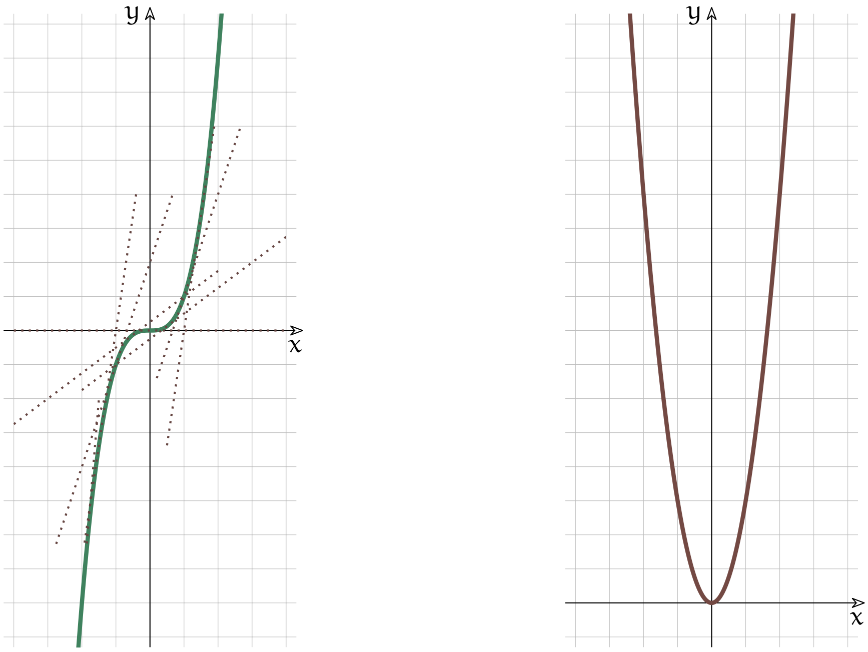


FIGURA 4.14: $y = x^3$ e la pendenza $y = m(x) = 3x^2$ delle sue tangenti.

Come esempio di derivata della funzione potenza, consideriamo $f(x) = x^3$ e il suo grafico nel piano cartesiano. I due rami del grafico sono simmetrici rispetto all'origine e quindi lo sono anche le pendenze delle tangenti. Considerando le x crescenti, quindi da sinistra verso destra, le pendenze delle tangenti sono sempre positive, all'inizio molto accentuate, poi diminuiscono fino a $m = 0$. Oltre l'origine, riprendono a crescere, in maniera sempre più accentuata. Il grafico di $y = m(x) = 3x^2$ ha infatti la forma di una parabola simmetrica rispetto all'asse Y.

Corollario 4.16. *La derivata della funzione radice quadrata è: D* $\left[\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, *con la restrizione* $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \neq 0$. Tesi: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$st\left(\frac{dx}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}\right) = st\left(\frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{st\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{st\left(\sqrt{x+dx}\right)+st\left(\sqrt{x}\right)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \square$$

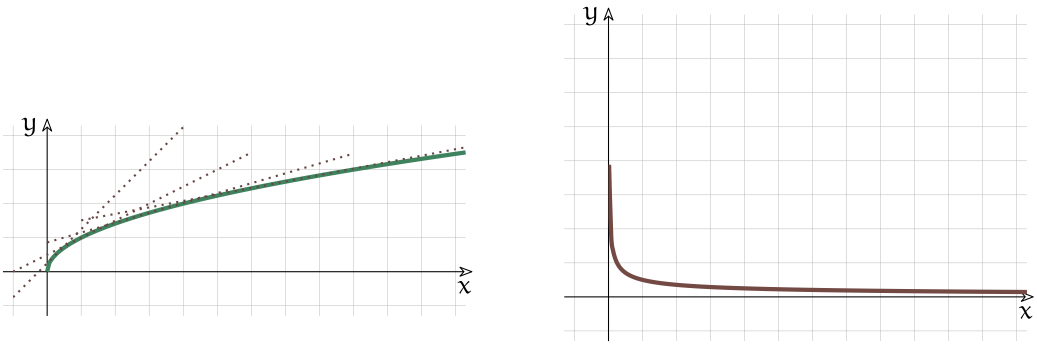


FIGURA 4.15: $y = \sqrt{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ delle sue tangenti.

Le rette tangenti ai punti vicini all'origine hanno una pendenza elevata, che si attenua gradualmente man mano che x aumenta, fino ad assestarsi quasi orizzontalmente.

Corollario 4.17. *La derivata della funzione reciproca è:* $D\left[\dfrac{1}{x}\right] = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ipotesi: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Tesi: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \dfrac{-dx}{x(x+dx)}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$st\left(\frac{-dx}{dx(x(x+dx))}\right) = \frac{-1}{st\,(x(x+dx))} = \frac{-1}{st\,(x)\,st\,(x+dx)} = -\frac{1}{x\cdot x} = -\frac{1}{x^2}. \quad \square$$

❑ **Osservazione** Ovviamente, applicando alla lettera il teorema sulla derivata delle funzioni potenza si ottengono gli stessi risultati esposti in questi due ultimi corollari.

4.8 Regole di derivazione

Possiamo applicare i teoremi precedenti a casi meno elementari, cioè a funzioni algebriche che contengono somme, prodotti e quozienti di funzioni elementari.

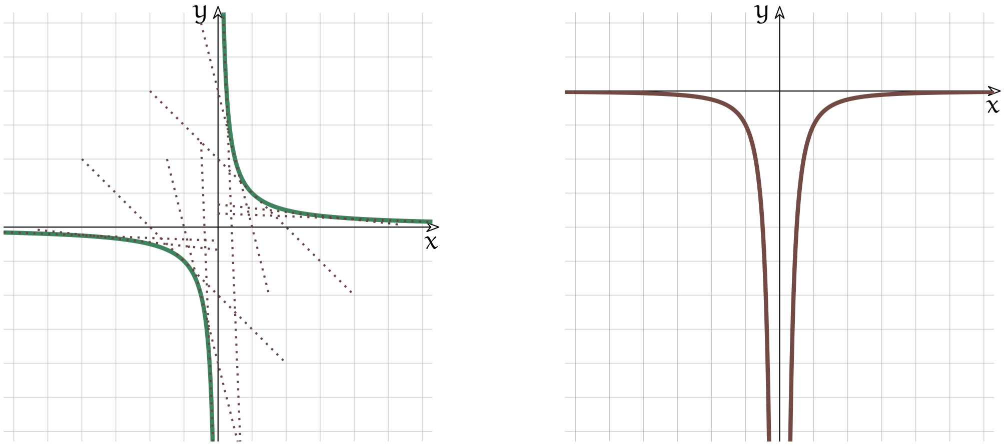


FIGURA 4.16: $y = \frac{1}{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \frac{-1}{x^2}$ delle sue tangenti.

Esempio 4.27. Derivare la funzione $f(x) = 3x - \frac{3}{x}$ in $x_0 = 3$
Si tratta di una funzione nuova, ma è facile riconoscere che è formata dalla somma (algebrica) di due funzioni e ciascuna di queste è data dal prodotto fra la costante 3 e una funzione appena trattata. Perciò:
$D[3x] = 3 \cdot D[x] = 3 \cdot 1 = 3;$ $\quad D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 \cdot D\left[\frac{1}{x}\right] = 3 \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2};$
$f'(x) = D\left[3x - \frac{3}{x}\right] = D[3x] - D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 - \frac{-3}{x^2} = 3 + \frac{3}{x^2};$
$f'(3) = 3 + \frac{3}{9} = 10.$

Senza troppi problemi, abbiamo dato per scontato che

1. La derivata del prodotto tra una costante e una funzione è il prodotto fra la costante e la derivata della funzione:
   $D[kf(x)] = kD[f(x)].$
2. La derivata della somma algebrica fra due funzioni è la somma algebrica delle due derivate:
   $D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)].$

Da dove derivano queste certezze? Basta tornare alle regole di composizione dei differenziali (pag.70) per averne la conferma.

Esempio 4.28. Deriva la funzione che nel piano cartesiano è rappresentata dalla retta $y = x + 9$.
$D[x + 9] = 1.$

Sempre in riferimento a quanto appreso sui differenziali e vista la definizione di derivata e le proprietà della parte standard, giustifichiamo facilmente anche le regole 3 e 4:

3. La derivata del prodotto fra due funzioni è la somma fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) più la prima funzione (non derivata) per

la derivata della seconda:
$D\,[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

4. La derivata del quoziente fra due funzioni è la frazione che ha per denominatore il quadrato del divisore e per numeratore la differenza fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) meno la prima funzione (non derivata) per la derivata della seconda:
$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Esempio 4.29. Calcola la derivata del prodotto $f(x) = x\sqrt{x}$.
$f'(x) = 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$.
Fin qui l'applicazione della regola. Ma il risultato si può scrivere in forma più compatta, perché $\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
In realtà per fare questo calcolo non avremmo bisogno della regola del prodotto, poiché $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Puoi quindi applicare il teorema 4.15 e controllare il risultato.

Esempio 4.30. Derivare $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$.
Seguendo la regola n.4: $f'(x) = \dfrac{1\cdot\sqrt{x} - x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ma guarda che combinazione: abbiamo ottenuto la derivata della radice! Allora la funzione di partenza è equivalente a una radice? (Ad essere precisi, non esattamente. Infatti …)

Esempio 4.31. Sappiamo già che $D\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x^2}$. Mettiamo alla prova ancora una volta la regola n.4: $f'(x) = \dfrac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = \ldots$

Esempio 4.32. Ora finalmente un calcolo che si può svolgere solo con la regola n.4. Derivare $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 - x + 4}$.
$f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^3 - x + 4) - (x+2)(3x^2 - 1)}{(x^3 - x + 4)^2}$. Fin qui l'applicazione della regola.
Con ulteriori calcoli: $\cdots = \dfrac{x^3 - x + 4 - (3x^3 - x + 6x^2 - 2)}{(x^3 - x + 4)^2} = \dfrac{-2x^3 - 6x^2 + 6}{(x^3 - x + 4)^2}$.

4.9 Derivare funzioni composte e funzioni inverse

4.9.1 Funzioni composte

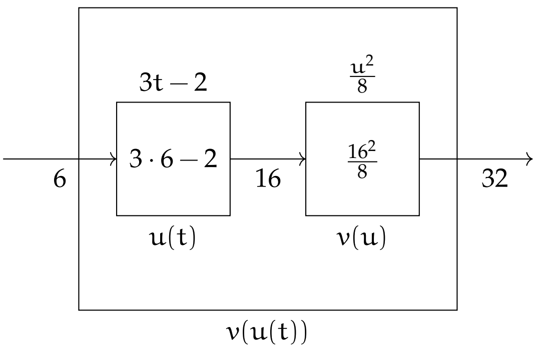
Esempio 4.33. $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ è la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato. Anche se nella formula mancano le usuali sigle $f(x)$, y, x, si tratta di una comunissima funzione polinomiale di 2° grado e le si possono applicare le regole che stiamo studiando, senza problemi.
Infatti, derivando si ottiene $s'(t) = 0 + v_0 + \frac{1}{2}\cdot 2at = v_0 + at$ che, essendo la derivata dello spazio rispetto al tempo, esprime la velocita $v(t)$ in questo tipo di moto.

L'esempio serve a ricordare che le funzioni e le variabili si esprimono con sigle qualsiasi, ma questo non cambia le regole dell'analisi o, più in generale, della matematica. La libertà di uso dei simboli può facilitare i calcoli, come si vede nel caso della derivata di una funzione composta.

Esempio 4.34. Deriva la funzione $v(u) = \frac{u^2}{8}$. Soluzione: $v'(u) = \frac{1}{8}2u = \frac{u}{4}$. Infatti il differenziale è $dv(u) = \frac{1}{8}[2udu + (du)^2]$ perché $df(x) = 2xdx + (dx)^2$ e $d(kf(x) = kdf(x)$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato $\frac{u}{4}$.

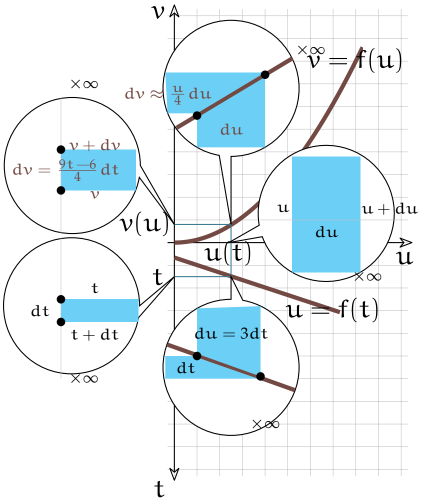
Esempio 4.35. Deriva la funzione $u(t) = 3t - 2$. Soluzione: $u'(t) = 3$. Infatti il differenziale è $du(t) = 3dt + 0$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato 3.

Combiniamo i due esempi: $v = f(u)$ e $u = f(t)$, cioè v è funzione di u, perché i suoi valori dipendono dai quadrati, divisi per 8, dei numeri u , invece u è funzione di t, nel senso che i suoi valori sono i valori t triplicati e poi ridotti di 2. In "matematichese" $v(u(t)) = \frac{[u(t)]^2}{8} = \frac{(3t-2)^2}{8}$.



Si tratta di una specie di catena: se si immette il valore $t = 6$, la macchina sviluppa $u(6) = 3 \cdot 6 - 2 = 16$ in u e infine produce $v(16) = \frac{16^2}{8} = 32$. Una catena del genere si chiama *funzionedi funzione* e v, che produce il risultato finale, si dice *funzione composta*: $v(u(t))$.

Come deriviamo v rispetto a t? Dalla definizione di derivata: $D\,[v(u(t))] = \mathrm{st}\left(\frac{d(v(u(t)))}{dt}\right)$, quindi il punto è il calcolo dei differenziali.



Dal primo esempio sappiamo che $dv = \frac{u}{4}du$ + infinitesimi di ordine superiore. Poiché $u = 3t-2$, $du = 3dt$, avremo:

$dv \approx \frac{u}{4}du.$ $du = 3dt.$

$\rightarrow dv = \frac{3t-2}{4}3dt \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{st}\left(\frac{d(v(u(t)))}{dt}\right) = \frac{(3t-2)3dt}{4dt} = \frac{9}{4}t - \frac{3}{2}.$

C'è un modo più semplice? Sì: basta sviluppare il quadrato $(3t-2)^2$, dividere ogni termine per 8 e poi derivare il polinomio. Ma a volte il modo più semplice non c'è.

Esempio 4.36. Calcolare $f'(x)$, con $f(x) = \sqrt{3-x^2}$.
$f(x)$ è composta: si può pensare formata così: $g(x) = 3-x^2$ e $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{3-x^2}$.
In questo modo si vedono meglio i differenziali. $df(x) = d\left(\sqrt{g(x)}\right) \approx \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x)$ e $dg(x) = d(3-x^2) \approx -2xdx$. Per brevità, raccogliamo sotto un'unica sigla ε tutti gli infinitesimi di ordine superiore, che poi la parte standard si incaricherà di far scomparire nel momento di calcolare la derivata.
Il differenziale: $df(x) = df(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x) + \delta = \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x)dx + \varepsilon.$
Da qui la derivata: $f'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{3-x^2}} + \varepsilon}{dx}\right) = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}.$

Esaminiamo in modo astratto come abbiamo costruito il rapporto differenziale della funzione composta nell'esempio precedente: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$. Sembra un'uguaglianza banale, perché semplificando si ottiene l'identità. In realtà i due differenziali dg hanno un significato diverso. Quello al denominatore differenzia la variabile indipendente per f, quello al numeratore differenzia la variabile che dipende da x.
L'espressione giustifica il teorema seguente.

Teorema 4.18. *Se esistono le derivate $g'(x)$ e $f'(g(x))$ per il medesimo valore x, la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile e la sua derivata si calcola così: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g)g'(x)$, cioè la derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate delle funzioni componenti, ciascuna rispetto alla propria variabile.*

Ipotesi: $f(x) = f(g(x))$, f,g derivabili . Tesi: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Dimostrazione. Tralasciando di specificare la scomparsa degli infinitesimi di ordine superiore e grazie alle proprietà della funzione st (), abbiamo:

$$f'(g(x)) = \mathrm{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{df(g))}{dg}\right)\mathrm{st}\left(\frac{dg(x)}{dx}\right) = f'(g(x))g'(x). \qquad \square$$

Esempio 4.37. Derivare $f(x) = \left(-\frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - 6\right)^5$.

Poniamo $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ e $f(g) = g^5$.

Allora: $f'(g) = 5g^4$ e $g'(x) = -2x^2 + 4x$,

quindi: $f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4(-2x^2 + 4x) = 5\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4(-2x^2 + 4x) =$

$= 10x\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4(-x + 2)$.

❑ **Osservazione** La regola della funzione composta si estende ai casi in cui le funzioni in gioco sono tre, o più: $D\,[f(g(h(x)))] = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$.

❑ **Osservazione** Lo studente smart si era già accorto che la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate. Ora arriva la conferma: il prodotto delle derivate non è la derivata di un prodotto.

4.9.2 Funzioni inverse

Non è difficile invertire una funzione nota, partendo dalla sua espressione analitica. Con pochi pochi passaggi elementari, si ricava la formula inversa.. Ecco alcuni esempi di semplici funzioni algebriche.

$y = f(x)$	$x = g(y)$	$f'(x)$	$g'(y)$
$y = x + c$	$x = y - c$	1	1
$y = kx$	$x = y/k$	k	$\frac{1}{k}$
$y = x^2, x \geqslant 0$	$x = \sqrt{y}$	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$
$y = \frac{1}{x}$	$x = \frac{1}{y}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{y^2} = -x^2$

❑ **Osservazione** La funzione $y = x^2$, nella terza riga della tabella, è definita $\forall x$. Tuttavia qui si restringe il dominio, in modo da considerare un solo ramo della parabola, perché altrimenti la formula inversa non potrebbe essere una funzione. Occorre sempre porre attenzione al dominio di f, quando si vuole definirne l'inversa. Una buona regola pratica per capire se f^{-1} è definibile, è di tagliare il grafico di f con una retta orizzontale: se la retta incrocia il grafico di f in più punti, f^{-1} non esiste.

Le ultime due colonne riportano le derivate rispettive e insinuano in noi qualche sospetto. Considera il caso semplice che segue.

Esempio 4.38. Derivare $f(x) = \sqrt{x^2}$.
Si dirà: non c'è problema, si calcola la funzione e risulta $f(x) = \sqrt{x^2} = x$, perciò $f'(x) = 1$.
Vero. Ma poniamo $g(x) = x^2$ e $f(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$.

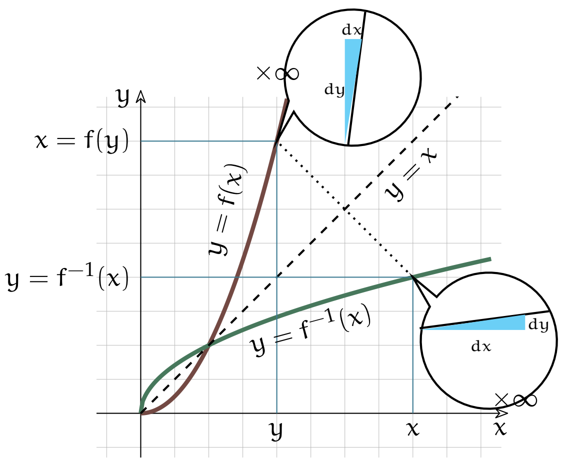
Con la regola delle funzioni composte si ha:
$f'(x) = f'(g)g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g}} \cdot 2x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \dfrac{1}{2x} \cdot 2x = 1.$
Conclusione: $D\left[x^2\right] = \dfrac{1}{D\left[\sqrt{x}\right]}$

Si intuisce che: siccome $f'(g)g'(x) = 1$, allora $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g)}$. Se fosse dimostrato, diventerebbe più facile derivare per esempio le funzioni logaritmiche: basterebbe saper derivare le corrispondenti esponenziali. E così via. Ovviamente occorre qualche cautela: la regola sarebbe applicabile

1. se esiste l'inversa della funzione da derivare;
2. se entrambe le funzioni sono derivabili;
3. se $f'(g) \neq 0$.

Infatti, nell'esempio tutto funziona alla perfezione, ma solo se $x \neq 0$ (ricorda anche l'esempio 4.23).
Se valgono tutte le condizioni favorevoli, allora esistono la funzione f e la sua inversa $g = f^{-1}$. $y = f(x)$ e $y = g(x) = f^{-1}(x)$ hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

❑ **Osservazione** $y = kx$ e $x = \frac{y}{k}$, per esempio, sono formule inverse l'una dell'altra. Ma non sono funzioni inverse, sono due espressioni della stessa iperbole equilatera e hanno lo stesso grafico, quindi le stesse tangenti al grafico e le stesse derivate rispetto a x.
La funzione inversa di cui parliamo, nel caso dell'iperbole è $y = \frac{x}{k}$, cioè è la formula inversa, ma applicata a x. Se invece consideriamo la formula inversa $x = \frac{y}{k}$ come funzione $x = f(y)$, allora dovremo derivare rispetto a y: $x' = \dfrac{dx}{dy}$.



Ogni punto $\left(x;\ f^{-1}(x)\right)$ sulla curva della funzione inversa ha un corrispondente $(y;\ f(y))$ sulla curva $y = f(x)$, nella simmetria rispetto alla bisettrice. Guardiamo come si corrispondono i differenziali: dx e dy sono invertiti in una curva rispetto all'altra. Quindi le derivate corrispondenti sono reciproche l'una con l'altra.

Teorema 4.19. *Le derivate di due funzioni f, g, inverse l'una dell'altra, se esistono e sono diverse da zero, sono reciproche l'una rispetto all'altra.*

Ipotesi: $y = f(x)$, $x = g(y)$ f,g derivabili, con $f' \neq 0$, $g' \neq 0$. Tesi: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Dimostrazione. Grazie alle proprietà della funzione st (), abbiamo:
$f'(x) \cdot g'(y) = \operatorname{st}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \cdot \operatorname{st}\left(\dfrac{dx}{dy}\right) = \operatorname{st}\left(\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy}\right) = \operatorname{st}(1) = 1$
per cui: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$. □

❑ **Osservazione** La dimostrazione fa leva su una semplificazione che sembra banale. In realtà i due rapporti differenziali sono diversi per significato: nel primo la variabile indipendente è x, nel secondo è y.

Esempio 4.39. Trova la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$.

1. Usando il teorema 4.18 e le regole precedenti:
   $f'(x) = D\left[\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}\right] = D\left[(5-x)^{\frac{-1}{2}}\right] = -\dfrac{1}{2}(5-x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \dfrac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}$.
2. Usando la regola appena appresa:
   Costruiamo la formula inversa con pochi passaggi algebrici: riavremo la stessa funzione, in cui y figura come variabile indipendente: $x = f(y)$.
   Quindi deriviamo: $D[x] = x' = f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$.
   $f(x) = y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} \rightarrow y^2 = \dfrac{1}{5-x} \rightarrow y^{-2} = 5-x \rightarrow x = 5 - y^{-2}$ (formula inversa)
   $x' = \dfrac{dx}{dy} = -2y^{-3}$ (derivata della funzione inversa) $\rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{2} = \dfrac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}$.

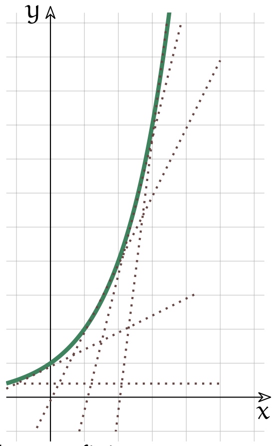
In genere la funzione inversa si costruisce in pochi passaggi semplici, poi la derivazione risulta elementare.

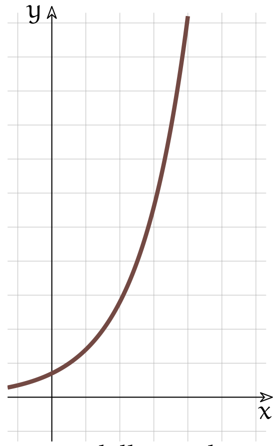
4.10 Derivare funzioni trascendenti

Nel capitolo 4.4 abbiamo imparato a differenziare le funzioni algebriche. In questa parte, quindi, per imparare a derivare le funzioni trascendenti, dovremo calcolare anche i loro differenziali. Si tratta in realtà di un lavoro minimo, perché abbiamo già discusso (pag.51 il comportamento di queste funzioni nell'insieme degli Iperreali e abbiamo ormai un bagaglio di conoscenze sulle derivate che agevola il lavoro.

4.10.1 Derivata di $f(x) = a^x$

Il grafico di una generica funzione esponenziale $y = a^x$, confrontato con quello dell'andamento delle tangenti è una sorpresa rispetto ai confronti che abbiamo fatto per altre funzioni. I due grafici praticamente si accompagnano: rivelano uguali pendenze in coppie di punti di uguale ordinata.





Anche se i due grafici non sono esattamente identici, l'andamento delle pendenze delle tangenti, cioè l'andamento della derivata della funzione, è anch'esso esponenziale. Sviluppiamo matematicamente questa intuizione, ricordando le proprietà delle potenze.
Differenziale di $y = a^x$: $dy = a^{x+dx} - a^x = a^x a^{dx} - a^x = a^x \left(a^{dx} - 1\right)$.
Rapporto differenziale: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(a^{dx} - 1\right)}{dx} a^x$.
Ora dovremmo applicare la parte standard e se vogliamo seguire le indicazioni del grafico, il risultato dovrà essere un'esponenziale. Quindi dobbiamo concentrarci sul rapporto $\dfrac{\left(a^{dx} - 1\right)}{dx}$, il fattore che potrebbe provocare l'allontanamento del grafico dalla forma esponenziale a cui puntiamo.
Negli esponenziali succede che $f(0) = 1$ e $f(x + dx) = f(x)f(dx)$ e il rapporto differenziale in queste funzioni diventa:
$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \dfrac{f(x)f(dx) - f(x)}{dx} = \dfrac{f(dx) - 1}{dx} f(x) = \dfrac{f(0 + dx) - f(0)}{dx} f(x) \sim$
$\sim f'(0)f(x) \ \rightarrow \ f'(x) = f'(0)f(x)$.
La derivata di una funzione esponenziale generica è proporzionale alla funzione stessa, attraverso un fattore che corrisponde alla derivata calcolata in $x = 0$.
Per capire di più cos'è questo fattore, forziamo la situazione e imponiamo che corrisponda a 1. In questo modo la funzione e la sua derivata saranno proprio identiche e i due grafici saranno sovrapposti: finalmente potremo conoscere quanto vale la base generica a.
$f'(0) = 1 \ \rightarrow \ \dfrac{\left(a^{dx} - 1\right)}{dx} = 1 \ \rightarrow \ a^{dx} = dx + 1 \ \rightarrow \ a = (dx + 1)^{\frac{1}{dx}}$.
Abbiamo già incontrato un'espressione analoga in 3.2.11: l'espressione individua il Numero di Nepero e.

Teorema 4.20. *La derivata della funzione esponenziale* $D\left[e^x\right]$ *coincide con la funzione stessa.*

Ipotesi: $f(x) = e^x$. $\quad f'(x) = e^x$

Dimostrazione. La dimostrazione è già stata costruita gradualmente per via intuitiva. Occorrerebbe dimostrare l'unicità della tesi, ma non è essenziale per i nostri scopi. Resta comunque stabilito che *se una funzione coincide con la propria derivata, allora è una funzione esponenziale*. □

A questo punto, l'importanza del numero e risulta ingigantita. Ce ne serviamo subito.

Teorema 4.21. *La derivata della generica funzione esponenziale è:* $D\left[a^x\right] = a^x \ln a$.

Ipotesi: $f(x) = a^x$; Tesi: $f'(x) = a^x \ln a$.

Dimostrazione. Usiamo una trasformazione appresa con lo studio dei logaritmi e applichiamo il teorema 91: $f(x) = a^x = e^{\ln a^x}$. Se poniamo $g(x) = \ln a^x = x \ln a$, si ottiene:
$f(g(x)) = e^{g(x)} \rightarrow f'(g(x)) = f'(g)g'(x) = e^{x \ln a} \ln a = e^{\ln a^x} \ln a = a^x \ln a$. □

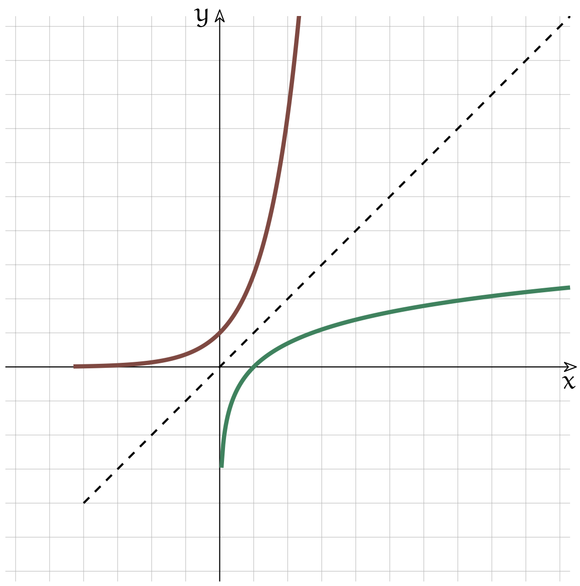
Esempio 4.40. Calcola la derivata di $f(x) = 3e^{x-1}$.
Poniamo $g(x) = x - 1$. $f(x) = 3e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = 3e^{g(x)} \cdot g'(x) = 3e^{x-1} \cdot 1 = 3e^{x-1}$.

Esempio 4.41. Calcola la derivata di $f(x) = e^{x^2}$.
Poniamo $g(x) = x^2 \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

4.10.2 Derivata di $f(x) = \log_a x$

Esempio 4.42. Calcola la derivata di $f(x) = e^{\ln x}$.
Poniamo $g(x) = \ln x \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\ln x} \ldots$???.
Ragioniamo: dalle proprietà dei logaritmi si ha: $e^{\ln x} = x$, che è la funzione identica. Quindi

1. $e^{\ln x} = x$ e anche $\ln e^x = x \ln e = x$, così come $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$: le due funzioni sono una inversa dell'altra, il logaritmo naturale $g(x) = \ln x$ è la funzione inversa della funzione esponenziale $f(x) = e^x$;
2. $D\left[f^{-1}(x)\right] = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;
3. $D\left[\ln x\right] = \dfrac{1}{D\left[e^{g(x)}\right]} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.



Teorema 4.22. *La derivata della funzione logaritmo naturale è:* $D\left[\ln x\right] = \dfrac{1}{x}$.

Ipotesi: $f(x) = \ln x$. b $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Dimostrazione. La dimostrazione è nei ragionamenti dell'esempio precedente, ai quali bisogna aggiungere le precauzioni perché le due funzioni siano invertibili e derivabili: poiché $\ln x$ esiste per $x > 0$, i ragionamenti valgono solo per $x > 0$ □

Vediamo ora il caso generale, quando la base del logaritmo è genericamente $a > 0$.

Teorema 4.23. *La derivata della funzione logaritmo in base* a *è:* $D\left[\log_a x\right] = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Ipotesi: $f(x) = \log_a x$. $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Dimostrazione. Si ottiene direttamente dalla formula del cambiamento di base:
$\log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$. □

Esempio 4.43. Derivare la funzione $f(x) = \mathrm{Log}(x^2+1)^2$.
$g(x) = (x^2+1)^2 \ \to\ f(x) = \mathrm{Log}(g(x)) \ \to\ f'(x) = \dfrac{1}{\ln 10} \dfrac{1}{g(x)} g'(x) =$
$= \dfrac{1}{(\ln 10)(x^2+1)^2} 2(x^2+1)2x = \dfrac{4x}{(\ln 10)(x^2+1)}$.
Nota che $g(x) = (x^2+1)^2$ è a sua volta una funzione composta del tipo $g(x) = [h(x)]^2$ e quindi è stata applicata la regola della derivata di più funzioni composte.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per convalidare l'osservazione al teorema 4.15, a proposito delle funzioni potenza.

Teorema 4.24. *La derivata della funzione potenza* $f(x) = x^\alpha$ *è:* $\quad D\left[x^\alpha\right] = (\alpha - 1)x^\alpha, \forall \alpha$.

Ipotesi: $f(x) = x^\alpha$. $\qquad f'(x) = (\alpha-1)x^\alpha, \forall \alpha$.

Dimostrazione. Combinando alcune delle regole precedenti, si ha:
$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$
$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \alpha \dfrac{1}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.
Poiché non è stata fatta nessuna particolare ipotesi sull'esponente (intero o razionale positivo o negativo, irrazionale ...), allora vale per qualsiasi esponente. □

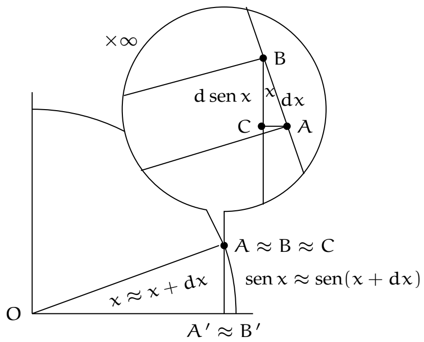
Esempio 4.44. Derivare $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.
$f'(x) = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$.

4.10.3 Derivata di funzioni circolari

Anche per queste funzioni dobbiamo dapprima definire il differenziale. Per una migliore comprensione, ci affidiamo soprattutto al piano cartesiano.

Derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$

Nel capitolo sugli Iperreali abbiamo già visto (vedi pag. 55) che per angoli infinitesimi il seno e l'angolo sono indistinguibili: $\mathrm{st}\left(\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 1$. Dall'analisi del disegno ricaviamo l'espressione del differenziale $df(x) = d(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x + dx) - \operatorname{sen} x$.



Nell'ingrandimento al microscopio nonstandard, l'incremento infinitesimo di arco $\widehat{AB}$ (che corrisponde all'incremento di angolo da x a $x + dx$) è racchiuso fra due raggi indistinguibili da segmenti paralleli nei punti $A \equiv (x;\ \operatorname{sen} x)$ e $B \equiv (x + dx;\ \operatorname{sen}(x + dx))$. L'arco, a sua volta, risulta indistinguibile dal segmento rettilineo AB. I segmenti che uniscono A e B con le loro proiezioni sull'asse X sono verticali e paralleli, perciò ABC è un triangolo rettangolo infinitesimo, simile al triangolo BOC. La sua altezza BC corrisponde a $d \operatorname{sen} x$.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC rispetto al lato BC:
$BC = AB \cdot \cos x \ \rightarrow \ d(\operatorname{sen} x) = dx \cdot \cos x$

Teorema 4.25. *La derivata della funzione* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *è* $D[\operatorname{sen} x] = \cos x$.

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{sen} x$. $\quad f'(x) = \cos x$.

Dimostrazione. Il commento al disegno giustifica la tesi. □

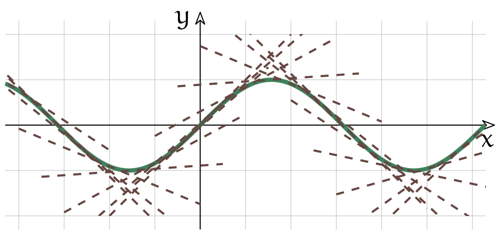
❑ **Osservazione** Si potrebbe criticare il metodo per la dimostrazione: chi assicura che negli altri quadranti le relazioni fra le variabili non cambino? Saremo troppo legati al disegno?
Ci sono altri modi per dimostrare la tesi, più vincolati al calcolo e meno al disegno. Per esempio, dalle formule di addizione abbiamo: $\operatorname{sen}(x + dx) = \operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x$. Allora:

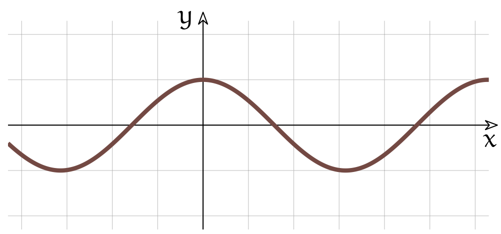
$$\frac{\operatorname{sen}(x + dx) - \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x - \operatorname{sen} x}{dx} =$$

$$= \operatorname{sen} x \frac{\cos x - 1}{dx} + \cos x \frac{\operatorname{sen} dx}{dx} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,$$

in cui si fa uso delle forme indeterminate discusse a pag. 55. Alla fine basta applicare la funzione $\operatorname{st}()$.

❑ **Osservazione** Anche il grafico dell'andamento delle tangenti conferma la tesi in modo assai espressivo.





Esempio 4.45. Quale pendenza ha il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'origine?
$f(x) = \operatorname{sen} x \ \rightarrow \ f'(x) = \cos x \ \rightarrow \ f'(0) = \cos 0 = 1$.
La tangente al grafico nell'origine è la retta $y = x$.

Esempio 4.46. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x^2$.
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$.

Esempio 4.47. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$.
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$.

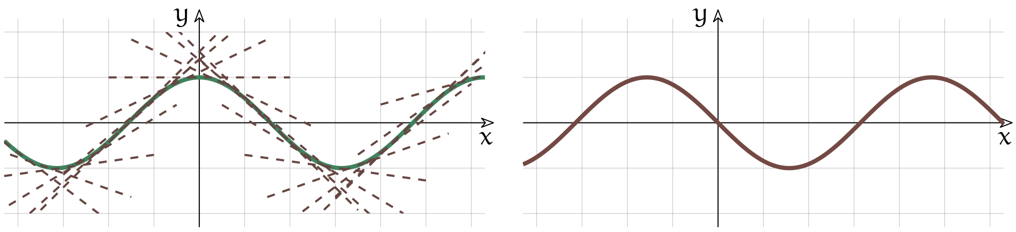
Esempio 4.48. Derivare $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.
Si tratta di una funzione di tipo nuovo, un misto fra una funzione potenza e una funzione esponenziale. Si risolve con una trasformazione che abbiamo già visto e con l'uso delle regole della funzione composta e del prodotto.
$x^{\operatorname{sen} x} = e^{(\ln x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\operatorname{sen} x \ln x}$
$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln x}(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}) = x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x})$.

Derivata di $f(x) = \cos x$

Teorema 4.26. *La derivata della funzione* $f(x) = \cos x$ *è* $D[\cos x] = -\sin x$.

Ipotesi: $f(x) = \cos x$. $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Dimostrazione. Il disegno con cui dimostrare la tesi è uguale a quello di pag. 98. Lo puoi riprodurre, tenendo però l'attenzione concentrata sul segmento AC.
L'unica osservazione importante è che nel passare da x a $x + dx$, cioè mentre l'angolo cresce, il valore del coseno decresce. Infatti, al contrario di quanto avviene per il seno, nel primo quadrante si ha: $\cos(x + dx) < \cos x$. Questa è la ragione del segno meno nel risultato. □



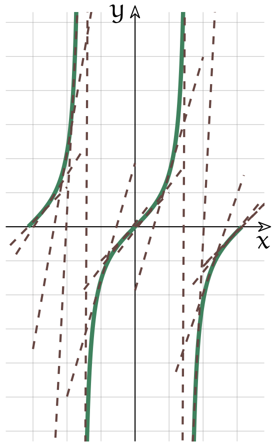
Esempio 4.49. Quale pendenza ha il grafico di $y = \cos x$ nell'origine?
$f(x) = \cos x \ \rightarrow \ f'(x) = -\operatorname{sen} x \ \rightarrow \ f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$.
La tangente al grafico nell'origine è orizzontale.

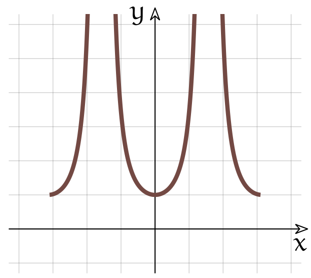
Esempio 4.50. Derivare $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \cos x^2$.
$f'(x) = 2 \cos x(-\operatorname{sen} x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x = -2x \operatorname{sen} x^2$.

Esempio 4.51. Derivare $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$.
$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$.

Derivata di $f(x) = \operatorname{tg} x$

La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è discontinua per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. La derivata quindi non può esistere nei punti corrispondenti, come dimostra il grafico.





Teorema 4.27. *La derivata della funzione* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *è* $D[\operatorname{tg} x] = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ *per* $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{tg} x$. $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, per $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

Dimostrazione. Per calcolare la derivata nei punti in cui la funzione è continua, ricorriamo alla seconda relazione fondamentale: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e sfruttiamo la regola della derivata di un quoziente (pag. 87).

$$D[\operatorname{tg} x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{D[\operatorname{sen} x] \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot D[\cos x]}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 + 1$$

□

Esempio 4.52. Quale è la pendenza del grafico di $y = \operatorname{tg} x$, per $x = \dfrac{\pi}{4}$? E per $x = \dfrac{\pi}{2}$?

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \;\rightarrow\; f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 2$

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \;\rightarrow\; f'(\frac{\pi}{2}) = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} = ???$

Per $x \approx \dfrac{\pi}{2}$ il grafico della funzione cresce verticalmente, la sua pendenza è un numero infinito e la parte standard di un infinito non esiste. D'altra parte, se x è esattamente uguale a $\dfrac{\pi}{2}$, la tangente ha un punto di discontinuità.

4.11 Applicazioni

Si è tanto parlato delle tangenti ai grafici di funzione e delle loro pendenze, senza mai arrivare a definire l'effettiva equazione delle tangenti che interessano. Ora cercheremo di colmare questa lacuna.

4.11.1 Derivata e tangente

Hai già incontrato negli anni scorsi dei problemi in cui si chiedeva di calcolare la tangente ad una parabola in un suo punto. Il metodo di calcolo algebrico che usavi è efficace ma macchinoso e, sfortunatamente, vale solo per le coniche. Il metodo delle derivate, invece, si rivela molto più potente e rapido.
Poiché la tangente è una retta, la sua equazione è del tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$, dove $(x_0;\ y_0)$ è il punto di tangenza e m è la pendenza della retta, sulla quale sappiamo ormai tutto. Si ha $y = m(x - x_0) + y_0$ e poiché $m = f'(x_0)$, relativo alla funzione $f(x)$ di cui si sta studiando il grafico, l'equazione risolvente è:
$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Esempio 4.53. Trova le equazioni delle tangenti alla parabola $f(x) = x^2$ nei suoi punti $V \equiv (0;\ f(0)) = 0$ e $B \equiv (-6;\ f(-6))$.
Soluzione. Nel punto V: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 = m$. La tangente è orizzontale e coincide con l'asse X: $y = m(x - x_0) + y_0 = 0$.
Nel punto B: $f'(-6) = 2 \cdot (-6) = -12$. $m = -12$, la tangente è inclinata verso il basso: $y = m(x - x_0) + y_0 = -12(x - 6) + 36 \ \rightarrow\ y = -12x + 108$.

Esempio 4.54. Trova i punti di intersezione degli assi con la tangente in $(2;\ f(2))$ alla curva $f(x) = 2x^3 - x$.
Soluzione. Ricerca della tangente per $x = 2$: $f'(x) = 6x^2 - 1$ e $f'(2) = 6 \cdot 4 - 1 = 23$.
$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 = 14$. La tangente: $y = 23(x - 2) + 14 = 23x - 32$. Le intersezioni:
Con l'asse X: $y = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{32}{23} \ \rightarrow\ \left(\dfrac{32}{23};\ 0\right)$.
Con l'asse Y: $x = 0 \ \rightarrow\ y = -32 \ \rightarrow\ (0;\ -32)$.

Esempio 4.55. In quale punto del suo grafico la parabola $y = 4x^2 - 3x + 6$ è inclinata di 45°?
Soluzione. Nel punto che cerchiamo, la parabola avrà un'inclinazione indistinguibile da quella della tangente. Le rette inclinate di 45° hanno pendenza $m = 1$, come la bisettrice del primo-terzo quadrante. Dobbiamo quindi imporre alla derivata il valore 1.
$f(x) = 4x^2 - 3x + 6 \ \rightarrow\ f'(x) = 8x - 3$.
$8x - 3 = 1 \ \rightarrow\ x = \dfrac{1}{2}$. Il punto è $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{11}{2}\right)$.

Esempio 4.56. È vero che l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$ ha per vertici i punti medi del segmento che gli assi staccano sulle tangenti ai vertici?
Risposta. Consideriamo per comodità solo il ramo destro del grafico. Il vertice sarà un punto V di coordinate uguali, essendo l'iperbole equilatera. Quindi $V = V(4;\ 4)$.
Poiché la funzione è $y = \dfrac{16}{x}$, la sua derivata in V è $y'|_{x=4} = -\dfrac{16}{x^2}\bigg|_{x=4} = -1$ e l'equazione della tangente in V è $y = -1(x - 4) + 4 = -x + 8$.
La retta $y = -x + 8$ interseca gli assi in $(8;\ 0)$ e $(0;\ 8)$ ed è facile verificare che il punto V è medio fra i due. Per ragioni di simmetria accade lo stesso con il vertice opposto $(-4;\ -4)$.

❑ **Osservazione** In realtà si tratta di una proprietà generale dell'iperbole equilatera. Qualsiasi retta tangente al grafico stacca sugli assi coordinati dei segmenti che hanno il punto medio coincidente con il punto di tangenza. Non è difficile dimostrarlo usando l'equazione generica $yx = k^2$ e per punto di tangenza le coordinate $\left(a;\ \dfrac{k^2}{a}\right)$.

Esempio 4.57. È vero che è inclinata di 30° la retta che contiene il raggio della circonferenza $x^2 + y^2 = 20$ per il punto di ascissa 4?
Risposta. No, non è vero.
Il modo più elementare per verificarlo è calcolare l'ordinata del punto e considerare che il centro si trova nell'origine, poi cercare l'angolo di inclinazione dell'ipotenusa coincidente con il raggio.
L'alternativa è calcolare la derivata: $x^2 + y^2 = 20 \ \rightarrow \ y = \sqrt{20 - x^2}$ (data lo posizione del punto, consideriamo solo la semicirconferenza per $y > 0$).
$f'(4) = \left.\dfrac{-2x}{2\sqrt{20-x^2}}\right|_{x=4} = \dfrac{-4}{\sqrt{20-16}} = \dfrac{-4}{2} = -2.$
Dunque la tangente ha una pendenza pari a -2. Poiché il raggio e la tangente sono perpendicolari, la retta che contiene questo raggio avrà pendenza $-\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.
La pendenza è la tangente dell'angolo al centro. Possiamo controllare la tesi con la calcolatrice.

4.11.2 Derivata e normale

Come si vede dall'ultimo esempio, una volta che si sappia come calcolare la tangente ad una curva, il calcolo della normale risulta molto facile. Poiché la tangente e la normale, se passano per lo stesso punto, sono rette perpendicolari e quindi hanno i coefficienti angolari antireciproci, l'equazione di una normale ad una curva $y = f(x)$ in un punto $(x_0;\ y_0)$ sarà:
$y = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0,$
dove la pendenza della normale $m_n = \frac{-1}{m_t}$ è appunto l'antireciproco della pendenza della tangente.

Esempio 4.58. Scrivi l'equazione della tangente e della normale alla curva di equazione $y = \dfrac{x^2 - 1}{\ln x - 1}$ nel suo punto di ascissa 1.
Soluzione. $y'|_{x=1} = \left.\dfrac{2x(\ln x + 1) - (x^2+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2}\right|_{x=1} = \dfrac{2 \cdot 1(0+1) - (1+1) \cdot 1}{(0+1)^2} = 0.$
La tangente è quindi una retta orizzontale. Di conseguenza la normale è verticale e il calcolo lo mostra immediatamente.

4.11.3 Derivata della derivata

Abbiamo già notato che la derivata di una funzione dipende dal punto in cui si calcola e che, una volta stabilito questo punto, ha un unico risultato. Quindi la derivata di una funzione è a sua volta una funzione e, se ci sono le condizioni, può essere derivata a sua volta.

Definizione 4.10. Se una funzione $f(x)$ è derivabile, la sua derivata è la funzione $f'(x)$. Se anche $f'(x)$ è derivabile, allora esiste la funzione $f''(x)$ ed è chiamata *derivata seconda di* $f(x)$.

Le regole di calcolo della derivata seconda sono le stesse regole che abbiamo già visto, quindi la seconda derivazione, se è possibile, non comporta problemi diversi da quelli conosciuti.
Riferendoci a un generico grafico di funzione $y = f(x)$, la derivata prima $f'(x)$ ci consente di trovare le pendenze delle tangenti al grafico. La derivata seconda $f''(x)$ descrive con quanta rapidità (o lentezza) variano queste pendenze, perciò ci indica quanto siano aperte o chiuse le

concavità che $y = f(x)$ disegna nel piano cartesiano.
Se le condizioni sono favorevoli, esistono e sono calcolabili anche le derivate terze, quarte, ecc. di una funzione, anche se non sono essenziali per i nostri scopi. Il loro calcolo segue i metodi già visti.

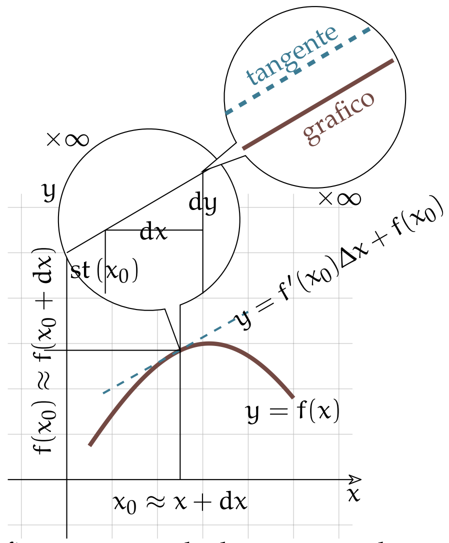
Esempio 4.59. Calcola $f''(1)$ di $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 9$.
Derivata prima: $f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 10x - 6$
Derivata seconda per $x = 1$: $(40x^3 - 36x^2 + 6x + 10)|_{x=1} = 40 - 36 + 6 + 10 = 20$

Esempio 4.60. Calcola $f''(x)$ di $f(x) = \ln x$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

❑ **Osservazione** La funzione $\ln x$ esiste per $x > 0$. Le derivate prima e seconda esistono per $x \neq 0$. In generale, l'esistenza di una derivata (prima, seconda, terza. ...) è indipendente dall'esistenza della funzione da derivare (funzione primitiva).

Esempio 4.61. Calcola le derivate successive di $f(x) = \operatorname{sen} x$.
$f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'''(x) = -\cos x$ $\quad f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \ldots$

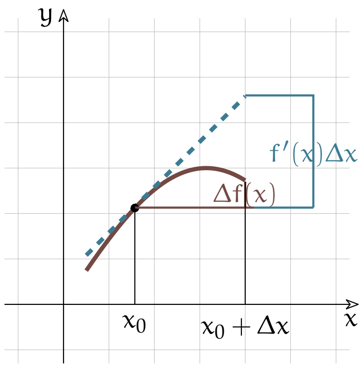
4.11.4 Derivata, differenza e differenziale



Nel punto $(x_0;\ f(x_0))$ il grafico della funzione e la tangente sono indistinguibili. Il campo visivo del primo microscopio mostra x_0 e dx, uno fra gli infiniti infinitesimi nella monade di x_0. A livello microscopico, la curvatura del grafico non esiste, per cui il grafico e la tangente sono sovrapposti. Per cogliere la distinzione fra i due, occorre un secondo microscopio non standard, centrato a distanza infinitesima dal punto. Nel suo campo visivo la tangente e il grafico della funzione appaiono come rette parallele. Nella rappresentazione doppiamente ingrandita, Il punto di coordinate reali più vicino a quello raffigurato si trova a distanza infinita (∞^2).
La figura mostra che la tangente e la secante per due punti infinitamente vicini sono distinguibili solo al dettaglio degli infinitesimi. Lo stesso avviene per la derivata e il rapporto differenziale.
Dalla definizione di derivata $f'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ ricaviamo che $f'(x) \sim \frac{df(x)}{dx}$: la derivata e il rapporto differenziale sono quantità quasi, ma non esattamente, uguali. Possiamo esprimere meglio questo concetto:
$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon(x)$ e quindi $df(x) = f'(x)dx + \varepsilon(x)dx$.

$\varepsilon(x)$ è l'infinitesimo, o l'insieme di infinitesimi, che fa la differenza fra la derivata e il rapporto differenziale. $\varepsilon(x)dx$, un prodotto fra infinitesimi, forma un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f'(x)dx$. Nella maggior parte dei casi pratici si tratta di una differenza trascurabile e si può accettare l'espressione $f'(x)dx$ al posto dell'espressione $df(x)$, che può essere meno comoda da calcolare.
Nella storia del calcolo infinitesimale l'uso di una formula al posto dell'altra è diventato normale e molti testi definiscono differenziale della funzione il prodotto $f'(x)dx$, invece della differenza infinitesimale $df(x)$.

Il problema diventa più critico nelle applicazioni pratiche, quando si devono usare le differenze finite al posto dei differenziali. Si usa allora, per analogia,:
$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x$.
Dato che l'ultimo termine è il meno rilevante, si ha:
$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x \;\rightarrow\; f(x) - f(x_0) \cong f'(x_0)(x - x_0) \;\rightarrow\; f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Si tratta dell'usuale equazione della tangente per $x = x_0$.
La formula è esatta solo per le funzioni rappresentate da rette. Per le altre funzioni la differenza $\Delta f(x)$ fra due valori della funzione può essere anche molto diversa da $f'(x_0)\Delta x$, che è in realtà la differenza fra due valori y, calcolati lungo la tangente.



Allontanandosi da x_0 di una quantità finita Δx, le differenze della funzione $\Delta f(x)$, calcolate a partire da x_0, possono essere anche molto diverse dalle differenze $f'(x_0)\Delta x$, calcolate lungo la tangente.

Nei testi in cui si scrive che $\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x$, $f'(x_0)\Delta x$ viene chiamato differenziale, anche se si tratta di una differenza, una quantità .finita, non infinitesima. In tali testi la differenza $\Delta f(x)$ è detta incremento e l'equazione
$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x$ (*Equazione alle differenze*)
esprime il cosiddetto *teorema dell'incremento*.
Ai fini pratici l'Equazione alle differenze è un'equazione utile, soprattutto quando si studiano i fenomeni naturali, perché le variazioni che si misurano in questi ambiti sono differenze finite. Ovviamente i risultati che si ottengono utilizzando il teorema dell'incremento saranno tanto più precisi quanto più piccola è la variazione Δx, in rapporto ai valori x.

Esempio 4.62. Fare una stima ragionevole della quantità $\sqrt{25,162}$.

Si sta usando la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, la cui derivata è: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Utilizziamo il teorema dell'incremento, fissando $x_0 = 25$ e $\Delta x = 0,162$.
$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x \cong f'(x_0)\Delta x \ \rightarrow \ f(x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$
$f(25,162) \cong f'(25) \cdot 0,162 + f(25) \ \rightarrow \ \sqrt{25,162} \cong \dfrac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0,162 + \sqrt{25} = \dfrac{0,162}{10} + 5 \cong 5,0162.$
Confronta il risultato con quanto propone la calcolatrice.
Poiché l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è Δx, ripeti l'esercizio con $x_0 = 25,1001$ (la cui radice è $5,01$) e quindi $\Delta x = 0,06199$.

4.11.5 Sintesi

Derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$
x	1	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	e^x	e^x

Regole di derivazione

$D\,[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

$D\,[kf(x)] = kf'(x)$

$D\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$D\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$D\,[f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)]$

4.11.6 Applicazioni non solo matematiche

Il calcolo della derivata è entrato da protagonista nella descrizione matematica dei fenomeni naturali da almeno 300 anni e più recentemente anche nello studio delle scienze umane e sociali.
Gli esempi che seguono si servono di questo calcolo in due modi:

1. per trovare il tasso di variazione: data una funzione, si deve cercare quanto rapidamente essa varia rispetto alla sua variabile;

2. attraverso l'equazione alle differenze, nella forma diretta $\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x$, o nella forma inversa $\Delta x \cong \dfrac{\Delta f(x)}{f'(x_0)}$.

L' utilità dell'equazione alle differenze viene dal fatto che si tratta di un'equazione di primo grado in Δx, perché i termini infinitesimi di grado superiore sono trascurati. Le soluzioni che così si ottengono sono approssimate, ma in genere il grado di imprecisione è sopportabile.

Esempio 4.63. Se lanci verso l'alto una palla alla velocità iniziale $v = 20$ m/s, questa viene frenata dalla forza di gravità e la sua legge del moto risulta all'incirca $h(t) = 20t - 5t^2$. Trova a quale altezza h la palla si ferma.
Risposta. Se la palla si ferma, la sua velocità è nulla, quindi:
$v(t) = \dfrac{dh(t)}{dt} = 20 - 10t = 0 \ \rightarrow \ t = 2s \ \rightarrow \ h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20m.$
Dopo quanto tempo dal lancio la palla si trova a metà altezza?
Risposta. $\Delta t \cong \dfrac{\Delta h(t)}{v(0)} = \dfrac{10}{20} = 0,5$ s. Considera l'imprecisione dell'ultima risposta, visto che puoi avere il il risultato esatto direttamente dall'equazione del moto, con $h(t) = 10$.

Esempio 4.64. L'aereo A parte da Milano a mezzogiorno e vola in direzione Ovest mediamente a 800 km/h, mentre l'aereo B parte due ore dopo e si dirige a Sud a 800 km/h. Se volano alla stessa quota, con quale velocità si allontanano l'uno dall'altro dopo 4 ore?
Soluzione. Le due equazioni del moto sono $s_A = 800t$ e $s_B = 800(t-2)$. Calcoliamo prima la distanza fra i due, poi la loro velocità relativa. Si tratta di direzioni perpendicolari e possiamo applicare il teorema di Pitagora.
$s_{AB} = \sqrt{s_A^2 + s_B^2} = \sqrt{(800t)^2 + [(800(t-2)]^2} = 800\sqrt{t^2 + t^2 - 2t + 4} = 800\sqrt{2t^2 - 2t + 4}.$
$v_{AB}|_{t=4} = \dfrac{ds_{AB}}{dt} = \left.\dfrac{800(2t-4)}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 4}}\right|_{t=4} \cong 358$ km/h.

Esempio 4.65. Un circuito è percorso da corrente variabile. Infatti la carica che attraversa il conduttore ad un certo istante t è data da $q(t) = t^3 - 24t$. È possibile che in qualche istante le cariche siano ferme?
Riposta. Se le cariche sono ferme, la corrente è nulla.
$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = 3t^2 - 24 = 0 \ \rightarrow \ t = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ s.

Esempio 4.66. Il biologo Jacques Monod mostrò che lo sviluppo di una colonia di batteri di Escherichia Coli segue una crescita esponenziale, se sufficientemente nutrita. Ogni microrganismo si scinde in due dopo circa 20 minuti, per cui la popolazione al tempo t, misurato in ore, conta $N(t) = N_0 e^{\frac{t}{3}}$ individui. Dopo quante ore il numero di batteri passa da 10^6 a 10^9?
Soluzione: $\Delta N = N'(t)\Delta t = \dfrac{N_0}{3} e^{\frac{t}{3}} \Delta t \ \rightarrow \ \Delta t = \dfrac{3\Delta N}{N_0 e^{\frac{t}{3}}} = \dfrac{3\Delta N}{N(t)}.$

Il numero iniziale di batteri è $10^6 = N(0) = N_0 e^0$. Perciò: $\Delta t = \dfrac{3(10^9 - 10^6)}{10^9}$, che, calcolato in ore, corrisponde a 3 ore meno 11 secondi circa.

❑ **Osservazione** Si tratta di un problema tipico sulla crescita esponenziale, di quelli già risolti quando ancora non conoscevi l'esistenza delle derivate, riguardanti per esempio l'interesse composto o il decadimento radiattivo.

❑ **Osservazione** Come mai in un caso del genere l'uso delle derivate non è indispensabile? Perché la funzione esponenziale è l'unica funzione che ha per derivata...

❑ **Osservazione** Dunque, la risposta è che in quasi 3 ore il numero di batteri passa da un milione a un miliardo, che è 1000 volte tanto. Possiamo pensare che occorra lo stesso tempo per passare da 1 individuo a 1000, oppure da 1000 individui a 1 milione?

Esempio 4.67. Il costo marginale è l'aumento di costo che si ha quando si vuole produrre un'unità in più di un certo bene.
Supponi che per produrre un certo numero n di aghi il costo in euro sia $y = \sqrt{n}$. Calcola il costo marginale per produrne più di 10.000.
Soluzione: $y = \sqrt{n} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Se $n = 10000$, $\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{10000}}\Delta n = \frac{\Delta n}{200}$. Il costo marginale, cioè per unità in più, è quindi dello $0,5\%$.

❑ **Osservazione** Anche in questo caso concreto, non è possibile pensare che Δn sia un infinitesimo, dato che non ha senso calcolare il costo per frazioni infinitesime di un ago.

Esempio 4.68. Una barra metallica è lunga 10 m a $T = 0°C$ e al crescere della temperatura si dilata secondo la legge $l(T) = 10(1 + 0,000024T)$. Di quanti gradi occorre aumentare la temperatura perché aumenti la sua lunghezza di 5 cm?
La risposta è la stessa in ogni caso, oppure dipende dal valore iniziale di T?
Risposta. $\Delta T \cong \frac{\Delta l(T)}{l'(T)} = \frac{0,05}{10 \cdot 0,000024} = 208,3°C$.
Nella formula risolutiva non compare il simbolo T, quindi la risposta non dipende dalla temperatura iniziale. Ovviamente tutto questo deve avvenire nei limiti del fenomeno, cioè finché non si raggiunge la temperatura di fusione.

❑ **Osservazione** Si tratta di un semplice esercizio di fisica: la legge coinvolta si chiama legge della dilatazione lineare, perché il suo grafico nel piano cartesiano è una retta. Poiché la legge è espressa da un polinomio di primo grado, la soluzione non contiene la variabile T e l'equazione alle differenze è esatta: non ci sono infinitesimi da trascurare.
Non è indispensabile coivolgere il calcolo infintesimale per un problema di primo grado, come questo: avresti potuto risolverlo anche in terza media.

4.12 Esercizi

4.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.4 Differenziale

4.1. Calcola il differenziale della variabile x nel punto $x = 2$. Ripeti poi il calcolo per $x = \frac{1}{5}$ e per $x = -\frac{2}{3}$.

a) $dx|_{x=2}$
b) $dx|_{x=\frac{1}{5}}$
c) $dx|_{x=-\frac{2}{3}}$
d) $dx|_{x=a}$
e) $dy|_{y=a}$
f) $dz|_{z=k}$
g) $dx|_{x=\varepsilon}$
h) $dx|_{x=M}$

4.2. Calcola il differenziale della funzione identica $y = x$ per i valori elencati.

a) $dy|_{x=0}$
b) $dy|_{x=\frac{1}{2k}}$
c) $dy|_{x=-\frac{2}{3}}$
d) $dy|_{x=a}$
e) $dy|_{x=2\varepsilon}$

4.3. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $y = \frac{3}{2}x$, per $x = 1$ e per $x = 0$; $[\frac{3}{2}dx]$
b) $y = ax$, per $x = 9$ e per $x = -\frac{3}{2}$; $[a dx]$
c) $y = (6-k)x$, per $x = -1$ e per $x = \frac{22}{5}$; $[(6-k)dx]$
d) $y = \frac{k^2+2}{5}x$, per $x = 3$ e per $x = k$; $[\frac{k^2+2}{5}dx]$
e) $y = 5x$, per $x = 0$ e per $x = -10$; $[5dx]$

4.4. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $f(x) = -5 + 2x$; $df(x)|_{x=0} = \dots,$ $df(x)|_{x=-1} = \dots$
b) $f(x) = (a+3)x$; $df(x)|_{x=a} = \dots;$ $df(x)|_{x=-a} = \dots$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 9$; $df(x)|_{x=\frac{2}{7}} = \dots;$ $df(x)|_{x=0} = \dots$
d) $f(x) = \frac{x}{n}$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots;$ $df(x)|_{x=\varepsilon} = \dots$
e) $f(x) = x + k$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots;$ $df(x)|_{x=k} = \dots$

4.5. Calcola i differenziali per le funzioni date

a) Data $y = x^2$, calcola: $dy|_{x=5}$; $[10dx + d^2x \sim 10dx]$
$dy|_{x=-5}$ $[-10dx + d^2x \sim -10dx]$
$dy|_{x=2}$; $[4dx + d^2x \sim 4dx]$
b) Data $y = -x^2$, calcola: $dy|_{x=0}$; $dy|_{x=\frac{1}{2}}$ $dy|_{x=a}$ $[\sim 0; \sim -dx, \sim -2a dx]$;
c) Data $f(x) = 3x^2$, calcola: $df(x)|_{x=-2}$; $f(x)|_{x=\sqrt{2}}$ $[\sim -12dx; 6\sqrt{2}dx]$
$df(x)|_{x=b^2}$; $[\sim 6b^2dx]$

d) Data $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, calcola: $df(x)|_{x=-4}$; $f(x)|_{x=\sqrt{2}}$ $[\sim -2dx; \sim \frac{\sqrt{2}}{2}dx]$
$df(x)|_{x=b}$; $[\sim \frac{b}{2}dx]$

4.6. Differenzia:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ per i valori: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$ $x = a$; $[\text{imp.}; \sim -12dx; \sim -\frac{3dx}{a^2}]$
b) $y = \dfrac{1}{3-x}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$ $x = 3$; $[\sim \frac{dx}{9}; \sim -\frac{4dx}{25}; \text{imp.}]$
c) $f(x) = \dfrac{2}{x} - 2$ per: $x = 2$; $x = \frac{a}{3}$; $x = \frac{1}{2}$ $[\sim -\frac{dx}{2}; \sim -\frac{18dx}{a^2}; \sim -8dx.]$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\sqrt{2}$; $[\text{imp.}; \sim -16dx; \sim -\frac{\sqrt{2}dx}{2}]$
e) $y = \dfrac{1}{2-x^2}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\sqrt{2}$; $[\sim 0; \sim \frac{4dx}{9}; \text{imp.}]$

4.7. Scrivi la funzione che esprime il differenziale delle funzioni date, secondo l'esempio: $f(x) = 3x^2 - 2x + 9 \rightarrow df(x) = 3(2xdx + d^2x) - 2dx \sim 6xdx - 2dx = (6x-2)dx$.

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $[\sim (4x-5)dx]$
b) $f(x) = (2x+3)^2$; $[\sim (8x+12)dx]$
c) $\dfrac{(1-5x)^2}{2}$; $[\sim (-5+25x)dx]$
d) $f(x) = x^3 - 1$; $[\sim 3x^2dx]$
e) $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 6x + 8$; $[\sim (3x^2 + 18x - 6)dx]$
f) $f(x) = 5\sqrt{x}$ $[\sim \frac{5}{2\sqrt{x}}dx]$

4.8. Applica le regole di pag.73 per trovare l'espressione del differenziale.

a) $f(x) = x(1-x^2)$; $[\sim (1-3x^2)dx]$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3x^2$; $[\sim (-\frac{1}{x^2} + 6x)dx]$
c) $f(x) = \dfrac{6-3x}{2x^2} + \sqrt{x}$; $[\sim \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx]$
d) $f(x) = \dfrac{3x^3}{\sqrt{x}}$; $[\sim (9x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x}})dx]$
e) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{1-x}$; $[\sim (\frac{-2x^3+4x^2-2x}{(1-x)^2})dx]$
f) $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$; $[\sim (10x\sqrt{x} + \frac{5x^2}{2\sqrt{x}})dx]$

4.12.2 Esercizi sulle derivate

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto c.

   a) $f(x) = -5x^5 - 5x^2 + 2x$, $c = -1$ [−13]
   b) $f(x) = 3x^5 + 3x^4 + 5x$, $c = -5$ [7880]
   c) $f(x) = -5x^3 - 2x$, $c = -2$ [−62]
   d) $f(x) = 3x^5 - 3x^4$, $c = 1$ [3]
   e) $f(x) = -4x^4 - 2x^3$, $c = -4$ [928]
   f) $f(x) = -3x^3 - x$, $c = -1$ [−10]

g) $f(x) = 2x, \quad c = 2$ [2]
h) $f(x) = x^4 + 4x + 2, \quad c = -4$ [−252]
i) $f(x) = -4x^5 - 2x^4 - x^2, \quad c = -1$ [−10]
j) $f(x) = -x^2, \quad c = -2$ [4]
k) $f(x) = x^5 + x, \quad c = -4$ [1281]
l) $f(x) = 8x^3 + 2x, \quad c = 1$ [26]
m) $f(x) = 2x^5 + x^3, \quad c = 0$ [0]
n) $f(x) = -x^5 + x^4, \quad c = -2$ [−112]
o) $f(x) = -3x^5 + x^4 - x^2, \quad c = -1$ [−17]

2. Calcola la retta tangente alla funzione nel punto P.

a) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 4x - 8, \quad P(2;\, -4)$ [$y = 28x - 60$]
b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 7, \quad P(1;\, -7)$ [$y = 3x - 10$]
c) $f(x) = -9x^3 + 12x^2 + 12x - 10, \quad P(-3;\, 305)$ [$y = -303x - 604$]
d) $f(x) = -5, \quad P(2;\, -5)$ [$y = -5$]
e) $f(x) = 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 10x + 7, \quad P(0;\, 7)$ [$y = -10x + 7$]
f) $f(x) = 11x^3 - 12x^2 - x + 7, \quad P(-4;\, -885)$ [$y = 623x + 1607$]
g) $f(x) = 11x^3 - 11x^2 - 9x - 6, \quad P(-5;\, -1611)$ [$y = 926x + 3019$]
h) $f(x) = -7x - 5, \quad P(-3;\, 16)$ [$y = -7x - 5$]
i) $f(x) = -8, \quad P(2;\, -8)$ [$y = -8$]
j) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x + 5, \quad P(3;\, 347)$ [$y = 450x - 1003$]
k) $f(x) = 11, \quad P(0;\, 11)$ [$y = 11$]
l) $f(x) = -3x^3 - 7x^2 + 3x - 10, \quad P(1;\, -17)$ [$y = -20x + 3$]
m) $f(x) = 4x + 4, \quad P(-3;\, -8)$ [$y = 4x + 4$]
n) $f(x) = 5, \quad P(-3;\, 5)$ [$y = 5$]
o) $f(x) = 10x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x - 7, \quad P(4;\, 3021)$ [$y = 2869x - 8455$]

3. Deriva le seguenti funzioni del tipo: y=f(x)+g(x).

a) $f(x) = -4x^5 + 5x^2 + 4x$ [$-20x^4 + 10x + 4$]
b) $f(x) = 5x^5 - 4x^2 + x$ [$25x^4 - 8x + 1$]
c) $f(x) = -x^4 + x + 4$ [$-4x^3 + 1$]
d) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ [$8x^3 + 9x^2$]
e) $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1$ [$8x^3 + 6x^2$]
f) $f(x) = -5x^4 + 3$ [$-20x^3$]
g) $f(x) = -x^4 + x^2 + 1$ [$-4x^3 + 2x$]
h) $f(x) = -2x^3 - 3x^2$ [$-6x^2 - 6x$]
i) $f(x) = 4x^4 - x^2 - 3x$ [$16x^3 - 2x - 3$]

j) $f(x) = -x^5 + 3x^2$ $[-5x^4 + 6x]$

k) $f(x) = 2$ $[0]$

l) $f(x) = 11x^3$ $[33x^2]$

m) $f(x) = 5x^3$ $[15x^2]$

n) $f(x) = x^4 - 3x$ $[4x^3 - 3]$

o) $f(x) = 3x^4 - x^2$ $[12x^3 - 2x]$

4. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

a) $f(x) = \left(9 + \frac{5}{x}\right)\left(-2x^3 + 5\right)$ $[-6x^2\left(9 + \frac{5}{x}\right) - \frac{5}{x^2}\left(-2x^3 + 5\right)]$

b) $f(x) = \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)(5x - 3)$ $[5 + \frac{20}{x^2} - \frac{8}{x^3}(5x - 3)]$

c) $f(x) = \left(-9 + \frac{2}{x^4}\right)\left(-6 + \frac{2}{x^2}\right)$ $[-\frac{4}{x^3}\left(-9 + \frac{2}{x^4}\right) - \frac{8}{x^5}\left(-6 + \frac{2}{x^2}\right)]$

d) $f(x) = \left(-2 + \frac{3}{x}\right)(-x - 1)$ $[2 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}(-x - 1)]$

e) $f(x) = (3x - 10)\left(2x^2 - 10\right)$ $[6x^2 + 4x(3x - 10) - 30]$

f) $f(x) = -\frac{3}{x}\left(1 + \frac{4}{x^3}\right)$ $[\frac{3}{x^2}\left(1 + \frac{4}{x^3}\right) + \frac{36}{x^5}]$

g) $f(x) = \left(-7 - \frac{5}{x^4}\right)\left(x^4 - 6\right)$ $[4x^3\left(-7 - \frac{5}{x^4}\right) + \frac{20}{x^5}\left(x^4 - 6\right)]$

h) $f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x}\right)\left(-x^4 - 2\right)$ $[-4x^3\left(-2 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\left(-x^4 - 2\right)]$

i) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(3x^4 + 9\right)$ $[12x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(3x^4 + 9\right)]$

j) $f(x) = \left(10 - \frac{5}{x^2}\right)\left(-4x^4 - 9\right)$ $[-16x^3\left(10 - \frac{5}{x^2}\right) + \frac{10}{x^3}\left(-4x^4 - 9\right)]$

k) $f(x) = \left(-3 + \frac{5}{x}\right)(-5x - 5)$ $[15 - \frac{25}{x} - \frac{5}{x^2}(-5x - 5)]$

l) $f(x) = -3x^3\left(8 + \frac{2}{x}\right)$ $[-9x^2\left(8 + \frac{2}{x}\right) + 6x]$

m) $f(x) = \left(5x^2 + 5\right)\left(x^3 - 4\right)$ $[3x^2\left(5x^2 + 5\right) + 10x\left(x^3 - 4\right)]$

n) $f(x) = \left(5 + \frac{1}{x}\right)\left(-x^4 - 8\right)$ $[-4x^3\left(5 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(-x^4 - 8\right)]$

o) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{x^4}\right)\left(2x^4 + 1\right)$ $[8x^3\left(5 - \frac{3}{x^4}\right) + \frac{12}{x^5}\left(2x^4 + 1\right)]$

5. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

a) $y = \frac{10x-8}{9x+6}$ $[\, y' = 10\,(9x+6)^{-1} - 9\,\frac{10x-8}{(9x+6)^2}\,]$

b) $y = \frac{-5x-9}{4x+6}$ $[\, y' = -5\,(4x+6)^{-1} - 4\,\frac{-5x-9}{(4x+6)^2}\,]$

c) $y = \frac{-6x-8}{-7x-9}$ $[\, y' = -6\,(-7x-9)^{-1} + 7\,\frac{-6x-8}{(-7x-9)^2}\,]$

d) $y = \frac{x-6}{3x+4}$ $[\, y' = (3x+4)^{-1} - 3\,\frac{x-6}{(3x+4)^2}\,]$

e) $y = (3x+4)^{-1} - 3\,\frac{x-6}{(3x+4)^2}$ $[\, y' = -6\,(3x+4)^{-2} + 18\,\frac{x-6}{(3x+4)^3}\,]$

f) $y = \frac{4x-3}{-7x+3}$ $[\, y' = 4\,(-7x+3)^{-1} + 7\,\frac{4x-3}{(-7x+3)^2}\,]$

g) $y = \frac{-6\,x+6}{2\,x-2}$ $[\, y' = -6\,(2\,x-2)^{-1} - 2\,\frac{-6\,x+6}{(2\,x-2)^2}\,]$

h) $y = \frac{-3\,x-9}{-3\,x-2}$ $[\, y' = -3\,(-3\,x-2)^{-1} + 3\,\frac{-3\,x-9}{(-3\,x-2)^2}\,]$

i) $y = \frac{5\,x+3}{4\,x+5}$ $[\, y' = 5\,(4\,x+5)^{-1} - 4\,\frac{5\,x+3}{(4\,x+5)^2}\,]$

j) $y = \frac{-3\,x-8}{-3\,x-3}$ $[\, y' = -3\,(-3\,x-3)^{-1} + 3\,\frac{-3\,x-8}{(-3\,x-3)^2}\,]$

k) $y = \frac{-9\,x-1}{-5\,x-10}$ $[\, y' = -9\,(-5\,x-10)^{-1} + 5\,\frac{-9\,x-1}{(-5\,x-10)^2}\,]$

l) $y = -\frac{x+8}{9\,x}$ $[\, y' = -\frac{1}{9\,x} + \frac{x+8}{9\,x^2}\,]$

m) $y = \frac{-4\,x+3}{-9\,x+7}$ $[\, y' = -4\,(-9\,x+7)^{-1} + 9\,\frac{-4\,x+3}{(-9\,x+7)^2}\,]$

6. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

a) $f(x) = -x^3 \cos(x)$ $[x^3 \sin(x) - 3x^2 \cos(x)]$

b) $f(x) = -5x^4 \sin(x)$ $[-5x^4 \cos(x) - 20x^3 \sin(x)]$

c) $f(x) = -3x^3 \tan(x)$ $[-3x^3 \left(\tan^2(x) + 1\right) - 9x^2 \tan(x)]$

d) $f(x) = -2x^3 \sin(x)$ $[-2x^3 \cos(x) - 6x^2 \sin(x)]$

e) $f(x) = 2x^2 \sin(x)$ $[2x^2 \cos(x) + 4x \sin(x)]$

f) $f(x) = -4x \cos(x)$ $[4x \sin(x) - 4 \cos(x)]$

g) $f(x) = x \cos(x)$ $[-x \sin(x) + \cos(x)]$

h) $f(x) = 5x \cos(x)$ $[-5x \sin(x) + 5 \cos(x)]$

i) $f(x) = x^3 \tan(x)$ $[x^3 \left(\tan^2(x) + 1\right) + 3x^2 \tan(x)]$

j) $f(x) = x^2 \tan(x)$ $[x^2 \left(\tan^2(x) + 1\right) + 2x \tan(x)]$

k) $f(x) = -4x^4 \sin(x)$ $[-4x^4 \cos(x) - 16x^3 \sin(x)]$

l) $f(x) = 5x^4 \sin(x)$ $[5x^4 \cos(x) + 20x^3 \sin(x)]$

m) $f(x) = 2x^3 \cos(x)$ $[-2x^3 \sin(x) + 6x^2 \cos(x)]$

n) $f(x) = -4x^3 \sin(x)$ $[-4x^3 \cos(x) - 12x^2 \sin(x)]$

o) $f(x) = 2x \sin(x)$ $[2x \cos(x) + 2 \sin(x)]$

7. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: y=f[g(x)].

a) $f(x) = -3 \cos(5x)$ $[15 \sin(5x)]$

b) $f(x) = 5 \cos\left(4x^4\right)$ $[-80x^3 \sin\left(4x^4\right)]$

c) $f(x) = -3 \cos\left(2x^4\right)$ $[24x^3 \sin\left(2x^4\right)]$

d) $f(x) = -5 \tan\left(3x^2\right)$ $[-30x \left(\tan^2\left(3x^2\right) + 1\right)]$

e) $f(x) = 5 \tan(5x)$ $[25 \tan^2(5x) + 25]$

f) $f(x) = 4 \sin\left(2x^2\right)$ $[16x \cos\left(2x^2\right)]$

g) $f(x) = -3 \cos\left(x^2\right)$ $[6x \sin\left(x^2\right)]$

h) $f(x) = 5 \cos(5x)$ $[-25 \sin(5x)]$

i) $f(x) = \sin\left(4x^3\right)$ $[12x^2 \cos\left(4x^3\right)]$

j) $f(x) = -\sin\left(3x^2\right)$ $[-6x\cos\left(3x^2\right)]$

k) $f(x) = 5\sin(5x)$ $[25\cos(5x)]$

l) $f(x) = 5\sin(2x)$ $[10\cos(2x)]$

m) $f(x) = 3\sin\left(5x^4\right)$ $[60x^3\cos\left(5x^4\right)]$

n) $f(x) = 5\cos\left(2x^3\right)$ $[-30x^2\sin\left(2x^3\right)]$

o) $f(x) = -4\tan\left(4x^4\right)$ $[-64x^3\left(\tan^2\left(4x^4\right)+1\right)]$

8. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: $y = f[g(x)]$.

a) $f(x) = -3e^{\sqrt{x^2+3}}$ $[-\frac{3xe^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}}]$

b) $f(x) = 3e^{\sqrt{3x^2+3}}$ $[\frac{9xe^{\sqrt{3x^2+3}}}{\sqrt{3x^2+3}}]$

c) $f(x) = e^{\sqrt{3x^3-5}}$ $[\frac{9x^2e^{\sqrt{3x^3-5}}}{2\sqrt{3x^3-5}}]$

d) $f(x) = -e^{\sqrt{5x^3-3}}$ $[-\frac{15x^2e^{\sqrt{5x^3-3}}}{2\sqrt{5x^3-3}}]$

e) $f(x) = -e^{\sqrt{-5x^3+1}}$ $[\frac{15x^2e^{\sqrt{-5x^3+1}}}{2\sqrt{-5x^3+1}}]$

f) $f(x) = 5e^{\sqrt{2x^4-5}}$ $[\frac{20x^3e^{\sqrt{2x^4-5}}}{\sqrt{2x^4-5}}]$

g) $f(x) = -e^{\sqrt{-x+1}}$ $[\frac{e^{\sqrt{-x+1}}}{2\sqrt{-x+1}}]$

h) $f(x) = -5e^{\sqrt{3x^3+1}}$ $[-\frac{45x^2e^{\sqrt{3x^3+1}}}{2\sqrt{3x^3+1}}]$

i) $f(x) = 2e^{\sqrt{-x^3-5}}$ $[-\frac{3x^2e^{\sqrt{-x^3-5}}}{\sqrt{-x^3-5}}]$

j) $f(x) = 2e^{\sqrt{-2x^4+5}}$ $[-\frac{8x^3e^{\sqrt{-2x^4+5}}}{\sqrt{-2x^4+5}}]$

k) $f(x) = 2e^{\sqrt{2x^3-4}}$ $[\frac{6x^2e^{\sqrt{2x^3-4}}}{\sqrt{2x^3-4}}]$

l) $f(x) = -4e^{\sqrt{-5x^3-3}}$ $[\frac{30x^2e^{\sqrt{-5x^3-3}}}{\sqrt{-5x^3-3}}]$

m) $f(x) = 2e^{\sqrt{-4x^4-4}}$ $[-\frac{16x^3e^{\sqrt{-4x^4-4}}}{\sqrt{-4x^4-4}}]$

n) $f(x) = 2e^{\sqrt{-3x^2-4}}$ $[-\frac{6xe^{\sqrt{-3x^2-4}}}{\sqrt{-3x^2-4}}]$

o) $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+1}}$ $[\frac{3x^2e^{\sqrt{2x^3+1}}}{\sqrt{2x^3+1}}]$

9. Deriva le seguenti funzioni contenenti funzioni esponenziali e logaritmiche.

a) $f(x) = 4(\log x - 1)$ $[\frac{4}{x}]$

b) $f(x) = \log 4x)$ $[\frac{1}{x}]$

c) $f(x) = x(\ln x - 1)$ $[\ln x]$

d) $f(x) = e^x(\ln x)$ $[e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)]$

e) $f(x) = x^3(\log x)$ $[x^2\left(3\log x + 1\right)]$

f) $f(x) = e^{3x} - \ln x^2$ $[3e^{3x}\frac{2}{x}]$

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $[\dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)]$

h) $f(x) = e^x(\ln x)$ $[e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)]$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $[-\dfrac{1}{x\ln^2 x}]$

j) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$ $[\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{x-2}{x}}]$

k) $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ $[\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}]$

l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + 3$ $[2xe^{x^2} + e^x]$

m) $f(x) = e^{2x}\ln(1+x)$ $[e^{2x}\left[2\ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x}\right]]$

n) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\sqrt{x}}$ $[\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}]$

10. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

a) $f(x) = \left(x^2 - 6\right)\left(2x^2 + 6\right)$ $[4x\left(x^2 - 6\right) + 2x\left(2x^2 + 6\right)]$

b) $f(x) = -5\tan\left(x^2\right)$ $[-10x\left(\tan^2\left(x^2\right) + 1\right)]$

c) $f(x) = 4e^{\sqrt{4x^2-2}}$ $[\frac{16x\,e^{\sqrt{4x^2-2}}}{\sqrt{4x^2-2}}]$

d) $f(x) = 4e^{\sqrt{-5x^2-1}}$ $[-\frac{20x\,e^{\sqrt{-5x^2-1}}}{\sqrt{-5x^2-1}}]$

e) $f(x) = -8x^3 + 2x, \quad c = -1$ $[-22]$

f) $f(x) = -x^2, \quad c = 1$ $[-2]$

g) $f(x) = -2\sin\left(5x^3\right)$ $[-30x^2\cos\left(5x^3\right)]$

h) $f(x) = -5x^4\sin(x)$ $[-5x^4\cos(x) - 20x^3\sin(x)]$

i) $f(x) = -5x^4 - 5x^3 + 5$ $[-20x^3 - 15x^2]$

j) $f(x) = -4\tan\left(2x^2\right)$ $[-16x\left(\tan^2\left(2x^2\right) + 1\right)]$

k) $f(x) = -2\tan\left(5x^2\right)$ $[-20x\left(\tan^2\left(5x^2\right) + 1\right)]$

l) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 12, \quad P(-3;\ -57)$ $[y = 47x + 84]$

m) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + x^2$ $[-4x^3 + 6x^2 + 2x]$

n) $f(x) = -x^3\tan(x)$ $[-x^3\left(\tan^2(x) + 1\right) - 3x^2\tan(x)]$

o) $f(x) = -4x^4$ $[-16x^3]$

p) $f(x) = -7x + 1, \quad P(0;\ 1)$ $[y = -7x + 1]$

q) $f(x) = 2e^{\sqrt{x^4+1}}$ $[\frac{4x^3e^{\sqrt{x^4+1}}}{\sqrt{x^4+1}}]$

r) $f(x) = -3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x - 12, \quad P(-1;\ -15)$ $[y = 10x - 5]$

11. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

a) $f(x) = 3x^5 - 3x^4, \quad c = -5$ $[10875]$

b) $f(x) = -2x^4, \quad c = 4$ $[-512]$

c) $y = \frac{-5x+6}{9x-6}$ $[\, y' = -5\ (9x-6)^{-1} - 9\, \frac{-5x+6}{(9x-6)^2}\,]$

d) $y = \frac{8x-9}{-9x+3}$ $[\, y' = 8\ (-9x+3)^{-1} + 9\, \frac{8x-9}{(-9x+3)^2}\,]$

e) $y = \frac{-7x+6}{-5x+3}$ $[\, y' = -7\ (-5x+3)^{-1} + 5\, \frac{-7x+6}{(-5x+3)^2}\,]$

f) $f(x) = -8x^4$ $[-32x^3]$

g) $f(x) = 2x^5 - 2x^3 - 5x$ $[10x^4 - 6x^2 - 5]$

h) $y = \frac{-4x+4}{5x+6}$ $[\, y' = -4\ (5x+6)^{-1} - 5\, \frac{-4x+4}{(5x+6)^2}\,]$

i) $y = \frac{-10x+10}{-5x-8}$ $[\, y' = -10\ (-5x-8)^{-1} + 5\, \frac{-10x+10}{(-5x-8)^2}\,]$

j) $y = \frac{6x-10}{2x-9}$ $[\, y' = 6\ (2x-9)^{-1} - 2\, \frac{6x-10}{(2x-9)^2}\,]$

k) $y = \frac{4x+6}{-2x+10}$ $[\, y' = 4\ (-2x+10)^{-1} + 2\, \frac{4x+6}{(-2x+10)^2}\,]$

l) $y = \frac{10x-6}{-x+2}$ $[\, y' = 10\ (-x+2)^{-1} + \frac{10x-6}{(-x+2)^2}\,]$

m) $f(x) = -4x^5 - 4x^4, \quad c = 0$ $[0]$

n) $f(x) = -3x\tan(x)$ $[-3x\left(\tan^2(x) + 1\right) - 3\tan(x)]$

o) $f(x) = \sin\left(3x^4\right)$ $[12x^3\cos\left(3x^4\right)]$

p) $f(x) = \left(-5x^2 + 9\right)\left(4x^2 - 5\right)$ $[8x\left(-5x^2 + 9\right) - 10x\left(4x^2 - 5\right)]$

q) $y = \frac{8x-9}{-x-8}$ $[\, y' = 8\ (-x-8)^{-1} + \frac{8x-9}{(-x-8)^2}\,]$

r) $y = \frac{-2x-9}{3x+10}$ $[\, y' = -2\ (3x+10)^{-1} - 3\, \frac{-2x-9}{(3x+10)^2}\,]$

s) $y = \frac{4x+10}{-8x+1}$ $[\, y' = 4\ (-8x+1)^{-1} + 8\, \frac{4x+10}{(-8x+1)^2}\,]$

t) $y = \frac{-7x+6}{-2x+3}$ $[\, y' = -7\ (-2x+3)^{-1} + 2\, \frac{-7x+6}{(-2x+3)^2}\,]$

4.12.3 Problemi che coivolgono l'uso della derivata

1. Quale è l'equazione delle rette tangenti al grafico di $y = \operatorname{sen} x$, nell'intervallo $[0;\ 2\pi]$, nei punti comuni con l'asse delle x? $[y = \pm x \mp k\pi]$

2. Data la curva $y = \dfrac{x+3}{x}$, trovare il punto in cui la tangente ha la pendenza $m = -2$. $[x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$

3. Trova le equazioni delle tangenti al grafico della parabola $y = -x^2 + 7x - 6$ nei punti in cui esse formano un angolo di $\pm 45°$ rispetto all'orizzontale e trova la loro intersezione. $[y = x + 3; y = -x + 10\ \left(\frac{7}{2};\ \frac{13}{2}\right)]$

4. Se la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore segue la legge $q = e^{-2t+3}$, dove t è il tempo in secondi, determina l'intensità di corrente dopo $5\,s$. [$i = -1,8 \times 10^{-3}\,A$]

5. Un triangolo rettangolo ha per base un cateto di $10\,cm$. Il secondo cateto all'inizio misura $0\,cm$, ma cresce al ritmo di $1\,cm$ ogni secondo. Con quale ritmo cresce l'ipotenusa? Si tratta di un ritmo costante o variabile? Controlla le risposte calcolando la velocità di crescita dell'ipotenusa quando il secondo cateto misura $10\,cm$, $20\,cm$, $30\,cm$ ...
[$\frac{di}{dt} = \frac{c}{\sqrt{100+c^2}}$; variabile]

6. È noto che il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato è uguale a $\sqrt{2}$. Prolungando la diagonale di un infinitesimo, anche il lato subisce un allungamento infinitesimo. Che rapporto c'è fra i due allungamenti? Puoi giustificare la risposta alla luce delle tue conoscenze del calcolo infinitesimale?

7. Un recipiente ha la cavità interna a forma di cono equilatero, con il diametro di base di $30\,cm$. Il rubinetto che lo riempie eroga $4\,l$ al minuto. In quanto tempo il recipiente sarà pieno a metà? Il livello dell'acqua all'interno cresce in modo costante? Con quale velocità cresce il livello dell'acqua, quando il recipiente è riempito per metà? E quando è quasi pieno? [$53\,s$; variabile; $5,66\,cm/min$; $1,41\,cm/min$]

8. Una lastra di policarbonato spessa $1\,cm$ è trasparente per l'85%, cioè trattiene il 15% della radiazione luminosa che l'attraversa. Due lastre uguali non trattengono il doppio, perché la seconda trattiene il 15% di quanto le perviene dalla prima lastra: il 15% dell'85%. La diminuzione di intensità luminosa $dI(s)$ è quindi proporzionale alla radiazione in arrivo I e allo spessore ds della lastra: $dI = -0,15 \cdot I \cdot ds$. Riscrivi la legge come derivata: quali funzioni hanno la derivata proporzionale alla funzione stessa? Scrivi la legge dell'attenuazione luminosa $I = f(s)$. Quale spessore di policarbonato è sufficiente ad attenuare l'intensità luminosa del 40%? [$I'(s) = -0,15 \cdot I$; $I = I_0 e^{-0,15s}$; $3,4\,cm$]

Funzioni continue 5

5.1 TODO

5.2 Limiti

In alcuni problemi non siamo interessati a sapere come si comporta una funzione per un valore ben preciso, dove magari non è definita, ci interessa di più sapere come si comporta quando si *avvicina* a quel valore.

Per trattare queste situazioni i matematici si sono inventati il concetto di *limite*.

TODO problema sensato sui limiti.

Definizione 5.1. l è il **limite** di una funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c, se, quando x è infinitamente vicino a c, ma diverso da c, allora $f(x)$ è infinitamente vicino a l. E si scrive:

$$l = \lim_{x \to c} f(x) \Leftrightarrow \forall x\left((x \approx c \wedge x \neq c) \Rightarrow (f(x) \approx l)\right)$$

5.3 Continuità

5.3.1 Definizione di continuità in un punto

Definizione 5.2. Diremo che una funzione è **continua** in un punto c, se è definita in c e, quando x è infinitamente vicino a c, allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$. E si scrive::

$$f \text{ è continua in } c \Leftrightarrow \forall x\left((x \approx c) \Rightarrow (f(x) \approx f(c))\right)$$

Esempio 5.1. Data la funzione $f(x) = x^2 - 3x$ dimostrare che $f(x)$ è continua in 4.

La funzione è continua in 4 se per ogni x infinitamente vicino a 4 $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(4)$. Cioè se $x - 4 = \varepsilon$ allora $f(x) - f(4) = \delta$ dove ε e δ sono due infinitesimi.

dimostrazione

Da $x - 4 = \varepsilon$ si ricava che $x = 4 + \varepsilon$, quindi:

$$f(x) - f(4) = f(4+\varepsilon) - f(4) = (4+\varepsilon)^2 - 3(4+\varepsilon) - \left(4^2 - 3 \cdot 4\right) =$$

$$= \cancel{16} + 8\varepsilon + \varepsilon^2 \cancel{-12} - 3\varepsilon \cancel{-16} \cancel{+12} = +8\varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon = \varepsilon(5+\varepsilon)$$

Ora, il prodotto tra un infinitesimo e un finito è un infinitesimo, quindi, se la distanza tra x e 4 è infinitesima, anche la distanza tra $f(x)$ e $f(4)$ è infinitesima. qed

Esempio 5.2. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{x}$ non è continua in 0.
dimostrazione TODO

Esempio 5.3. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{3}$ è continua in 0.
dimostrazione TODO

Esempio 5.4. Studiare la continuità di una funzione definita a tratti nel punto di giunzione.
TODO

Per riassumere, data una funzione $y = f(x)$ definita in c, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua in c;
2. se $x \approx c$ allora $f(x) \approx f(c)$;
3. se $st(x) = c$ allora $st(f(x)) = f(c)$;
4. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$;
5. se x si allontana da c di un infinitesimo allora $f(x)$ si allontana da $f(c)$ di un infinitesimo.

Teorema 5.1 (Derivabilità e continuità)**.** *Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua in quel punto.*

Ipotesi: $f(x)$ è derivabile in c Tesi: $f(x)$ è continua in c.

Dimostrazione. TODO □

5.3.2 Definizione di continuità in un intervallo

Dimostrare che una funzione è continua in un punto è piuttosto laborioso, pur non essendo complicato, ma presenta un problema quando sono interessato a studiare la continuità di una funzione in un intervallo. Infatti in un intervallo, anche piccolo, i punti sono infiniti e dimostrare la continuità per ognuno di essi risulta piuttosto lungo. . . .

Per superare questo scoglio, i matematici hanno pensato un approccio diverso:

- dimostrare che alcune funzioni elementari sono continue;
- dimostrare che la somma, il prodotto, il quoziente e la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

In questo modo si può riconoscere la continuità di un gran numero di funzioni senza fare noiosi calcoli. Di seguito vediamo qualcuno di questi teoremi.

Funzioni elementari

Dimostriamo la continuità di alcune funzioni elementari.

Teorema 5.2 (Continuità delle costanti)**.** *Le funzioni costanti sono continue.*

Ipotesi: $f(x) = k$. Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

$$\forall x \text{ se } x_0 \approx x \text{ allora } f(x_0) \approx f(x)$$

Poniamo $x_0 = x + \varepsilon$, essendo la funzione costante, anche

$$f(x + \varepsilon) = k$$

che, ovviamente, è infinitamente vicino a k. In simboli:

$$f(x_0) = f(x + \varepsilon) = k \approx k = f(x)$$

□

Teorema 5.3 (Continuità della funzione identica)**.** *La funzione identica ($y = x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = x$. Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

$$\forall x \text{ se } x_0 \approx x \text{ allora } f(x_0) \approx f(x)$$

Poniamo $x_0 = x + \varepsilon$, $f(x_0) = f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon$. Dato che la differenza:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = x + \varepsilon - x = \varepsilon$$

è un infinitesimo, allora i due valori sono infinitamente vicini. In simboli:

$$f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon \approx x = f(x)$$

□

Teorema 5.4 (Continuità della funzione seno)**.** *La funzione seno ($y = \operatorname{sen} x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Usando la prima proprietà delle potenze:

$$f(x + \varepsilon) = \operatorname{sen}(x + \varepsilon) = \operatorname{sen} x \cos \varepsilon - \cos x \operatorname{sen} \varepsilon$$

Se un angolo è infinitamente vicino a zero avrà il coseno infinitamente vicino a uno e il seno infinitamente vicino a zero. Quindi:

$$\operatorname{sen}(x + \varepsilon) = \operatorname{sen} x + \delta$$

Perciò:

$$f(x + \varepsilon) = \operatorname{sen}(x + \varepsilon) = \operatorname{sen}(x + \varepsilon) = \operatorname{sen} x + \delta \approx \operatorname{sen} x = f(x)$$

□

Teorema 5.5 (Continuità della funzione esponenziale)**.** *La funzione esponenziale ($y = a^x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = a^x$. Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Usando la prima proprietà delle potenze:

$$f(x+\varepsilon) = a^{x+\varepsilon} = a^x \cdot a^\varepsilon \approx a^x \cdot 1 = a^x = f(x)$$

□

Oltre alle funzioni precedenti, anche altre funzioni elementari sono continue, il seguente elenco riporta le principali funzioni continue:

- $y = k$
- $y = x$
- $y = \frac{1}{x}$ $\quad *$
- $y = \sqrt[n]{x}$ $\quad *$
- $y = |x|$
- $y = a^x$
- $y = \log_a x$ $\quad *$
- $y = \operatorname{sen} x$
- $y = \cos x$
- $y = \operatorname{tg} x$ $\quad *$

❑ **Osservazione** Le funzioni segnate da $*$sono continue non su tutto $\mathbb{R}$, ma solo **all'interno del loro campo di esistenza**.

Composizione di funzioni

Vediamo ora che anche componendo in alcuni modi funzioni continue otteniamo ancora funzioni continue.

Teorema 5.6 (Somma di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f+g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e$g(x)$ sono continue Tesi: $f(x) + g(x)$ è continua.

Dimostrazione. Dato che sono continue:

$$f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon) = f(x) + \alpha + g(x) + \beta$$

Ma la somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo quindi:

$$f(x) + g(x) + (\alpha + \beta) \approx f(x) + g(x)$$

□

Teorema 5.7 (Prodotto di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f \cdot g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e$g(x)$ sono continue Tesi: $f(x) \cdot g(x)$ è continua.

Dimostrazione. Dato che sono continue:

$$f(x+\varepsilon)\cdot g(x+\varepsilon) = (f(x)+\alpha)\cdot(g(x)+\beta) = f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\beta+g(x)\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta \approx f(x)\cdot g(x)$$

Dato che sia il prodotto tra un numero finito e un infinitesimo, sia il prodotto tra due infinitesimi sono infinitesimi e lo è anche la loro somma. □

Corollario 5.8. *Ogni funzione polinomiale è continua.*

Dimostrazione. Dato che una funzione polinomiale si può ottenere partendo da funzioni costanti e da funzioni identiche attraverso moltiplicazioni e addizioni, la tesi consegue dai teoremi precedenti. □

Esempio 5.5. Dimostrare che $f(x) = 2x^2 + 3$ è una funzione continua.

Dimostrazione. $f(x) = 2x^2 + 3$ è continua perché è somma di due funzioni continue:

- $y = 2x^2$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
  - $y = 2$ è continua perché è una costante;
  - $y = x^2$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
    - $y = x$ è continua perché è una funzione identica;
    - $y = x$ è continua perché è una funzione identica;
- $y = 3$ è continua perché è una costante;

□

Teorema 5.9 (Funzioni di funzioni). *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, anche $f(g(x))$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e$g(x)$ sono continue

Tesi: $f(x) \star g(x) = f(g(x))$ è continua.

Dimostrazione. Dato che g è continua:

$$f(g(x+\varepsilon)) = f(g(x)+\alpha)$$

e dato che f è continua:

$$f(g(x)+\alpha) = f(g(x))+\beta$$

quindi:

$$f(g(x+\varepsilon)) = f(g(x)+\alpha) = f(g(x))+\beta \approx f(g(x))$$

□

5.4 Massimi e minimi

Data una funzione definita in un certo intervallo, può darsi che questa funzione abbia un massimo un minimo in questo intervallo.

Definizione 5.3. Chiamiamo **massimo** di una funzione in un intervallo I un punto $(c;\ f(c))$ tale che, per ogni x appartenente all'intervallo, $f(c)$ sia maggiore o uguale a $f(x)$:

$$(c;\ f(c)) \text{ è un massimo se } \forall x \in I \quad f(c) \geqslant f(x)$$

La definizione di **minimo** in un intervallo si ottiene facilmente modificando quella di massimo (scrivila tu e poi confrontala con quella scritta dagli altri tuoi compagni.

In un intervallo, una funzione potrebbe avere *più* minimi o massimi. Oppure potrebbe *non* avere minimi o massimi.

Esempio 5.6. $y = 3$ TODO

Esempio 5.7. $y = \operatorname{sen} x$ TODO

Esempio 5.8. $y = \dfrac{1}{x}$ TODO

Un importante teorema che riguarda i massimi e i minimi delle funzioni continue dice che se una funzione è continua e ha in punto di massimo (o di minimo), allora questo può trovarsi:

i) o in un estremo;
ii) o in un punto non derivabile;
iii) o in un punto la cui derivata vale zero.

Noi dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 5.10 (Teorema di Fermat)**.** *Se una funzione è definita in un intervallo chiuso, ha un massimo (minimo) in un punto interno all'intervallo e in quel punto è derivabile, allora in quel punto ha derivata nulla.*

Ipotesi:
1. f è una funzione definita nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$
2. c appartiene all'intervallo aperto $]a;\ b[$
3. $f(c)$ è un massimo (minimo);
4. f è derivabile in c

Tesi:
la derivata $f'(c) = 0$

Dimostrazione. Consideriamo un valore Δ positivo abbastanza piccolo in modo che $c + \Delta$ appartenga ancora all'intervallo $[a;\ b]$. Poiché $f(c)$ è un massimo:

$$f(c + \Delta) \leqslant f(c) \Rightarrow f(c + \Delta) - f(c) \leqslant 0$$

Dividendo entrambi i membri per Δ otteniamo:

$$\frac{f(c + \Delta) - f(c)}{\Delta} \leqslant 0$$

Questa disuguaglianza continua a valere anche se Δ è un infinitesimo:

$$\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \leqslant 0$$

e prendendo la parte standard dell'espressione otteniamo:

$$f'_+(c) = \operatorname{st}\left(\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta}\right) \leqslant 0$$

Ora possiamo ripetere le stesse considerazioni prendendo un valore Δ negativo. Poiché $f(c)$ è un massimo:

$$f(c+\Delta) \leqslant f(c) \Rightarrow f(c+\Delta) - f(c) \leqslant 0$$

Questa volta dividendo entrambi i membri per Δ dobbiamo tener conto che Δ è negativo quindi dobbiamo invertire il verso del predicato:

$$\frac{f(c+\Delta) - f(c)}{\Delta} \geqslant 0$$

Questa disuguaglianza continua a valere anche se Δ è un infinitesimo:

$$\frac{f(c+\delta) - f(c)}{\delta} \geqslant 0$$

e prendendo la parte standard dell'espressione otteniamo:

$$f'_{-}(c) = \operatorname{st}\left(\frac{f(c+\delta) - f(c)}{\delta}\right) \geqslant 0$$

Ma poiché per ipotesi la funzione è derivabile in c, il valore dell'espressione: $\operatorname{st}\left(\frac{f(c+\delta)-f(c)}{\delta}\right)$ non dipende dal valore dell'infinitesimo δ perciò: $f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$. Quindi:

$$0 \leqslant f'_{-}(c) = f'_{+}(c) \leqslant 0$$

Da cui si ricava la tesi:

$$f(c) = 0$$

□

Metodo per trovare i massimi e minimi

5.5 Massimi e minimi: applicazioni

5.6 Derivate e grafico di funzioni

5.7 Proprietà delle funzioni continue

5.7.1 Numeri iperinteri

Per affrontare alcuni dei prossimi argomenti, abbiamo bisogno di un altro strumento matematico: l'insieme dei numeri *Iperinteri*. Non è difficile visualizzare sulla retta dei numeri questo insieme.

Per dare una definizione rigorosa dei numeri Iperinteri abbiamo bisogno di usare la funzione *parte intera* di un numero: che si indica con il simbolo: $[x]$.

x	-3	-2,4	-2,01	-1,2	-1,03	-0,3	0,2	1	1,6	1,99	2	2.03	2.9	3,42
$y = [x]$	-3	-3	-3	-2	-2	-1	0	1	1	1	2	2	2	3

La parte intera di un numero x è il più grande numero intero n minore o uguale a x. Attenzione che mentre per i numeri positivi il concetto è abbastanza naturale, per quelli negativi il concetto non è altrettanto immediato, vedi la tabella precedente.

Applicando la funzione parte intera ai numeri Iperreali otteniamo gli Iperinteri.

Definizione 5.4. I numeri **Iperinteri** sono quei numeri Iperreali per cui vale l'uguaglianza:

$$x = [x]$$

Possiamo fare alcune osservazioni sugli Iperinteri:

1. La somma algebrica di due numeri Iperinteri è un numero Iperintero.
2. Ogni numero Iperreale si trova tra due numeri Iperinteri:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R}\ [x] \leqslant x < [x] + 1$$

Possiamo usare gli Interi per dividere un intervallo Reale $[a;\ b]$ in n parti uguali. Ciascuna di queste n parti uguali è lunga $l = \frac{b-a}{n}$.

Gli n sotto intervalli che si ottengono sono:

$$[a;\ a+l[,\ [a+l;\ a+2l[,\ \dots,\ [a+jl;\ a+(j+1)l[,\ \dots,\ [a+(n-1)\,l;\ a+nl=b]$$

Gli estremi di questi intervalli sono chiamati punti di partizione dell'intervallo:

$$a;\ a+l;\ a+2l;\ a+3l;\ \dots;\ a+(n-1)\,l;\ a+nl=b$$

Possiamo ora estendere questo procedimento ai numeri Iperreali. Scegliamo un numero infinito iperintero H e dividiamo in parti uguali l'intervallo di numeri Iperreali $[a;\ b]$. Ogni sotto intervallo avrà la stessa lunghezza infinitesima $\delta = \frac{b-a}{H}$.

Gli H sotto intervalli che si ottengono sono:

$$[a;\ a+\delta[,\ [a+\delta;\ a+2\delta[,\ [a+j\delta;\ a+(j+1)\delta[,\ \dots,\ [a+(H-1)\,\delta;\ a+H\delta=b]$$

e i punti di partizione sono:

$$a;\ a+\delta;\ a+2\delta;\ \dots;\ a+j\delta;\ \dots;\ a+H\delta=b$$

cioè i punti $a+j\delta$ con j che varia da 0 a H.

Ogni numero iperreale x appartenente all'intervallo $[a;\ b[$ apparterrà a uno dei sotto intervalli infinitesimi:

$$x \in [a+j\delta;\ a+(j+1)\,\delta[\quad \Rightarrow \quad a+j\delta \leqslant x < a+(j+1)\,\delta$$

Possiamo ora affrontare alcuni teoremi riguardanti le funzioni continue.

5.7.2 Alcuni teoremi delle funzioni continue

Il prossimo teorema riguarda gli zeri di una funzione. Con zero di una funzione si intende un valore della x che rende la funzione uguale a zero:

Definizione 5.5. c è uno **zero** della funzione $f(x)$ se $f(c) = 0$

Teorema 5.11 (Teorema degli zeri). *Supponiamo che una funzione $f(x)$ sia continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$ e agli estremi dell'intervallo assuma valori di segno opposto allora la funzione ha uno zero nell'intervallo aperto $]a;\ b[$.*

Ipotesi:
1. f è una funzione continua;
2. f è definita nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$;
3. $f(a) \cdot f(b) < 0$ (equivale a dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno valori discordi).

Tesi:
$\exists\, c \in\,]a;\ b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, posto H un Iperintero infinito, dividiamo l'intervallo iperreale $[a;\ b]$ in H parti uguali

$$a;\ a+\delta;\ a+2\delta;\ \dots;\ a+j\delta;\ \dots;\ a+H\delta = b$$

Chiamiamo k l'indice per il quale:

$$f(a+k\delta) \leqslant 0 < f(a+(k+1)\delta)$$

Dato che f è continua:

$$a+k\delta \approx a+(k+1)\delta \quad \Rightarrow \quad f(a+k\delta) \approx f(a+(k+1)\delta)$$

Ma l'unico numero standard che è infinitamente vicino ad un numero minore di zero e anche ad un numero maggiore di zero è zero. Quindi chiamando:$c = \operatorname{st}(a+k\delta) = \operatorname{st}(a+(k+1)\delta)$

$$f(c) = f(\operatorname{st}(a+k\delta)) = \operatorname{st}(f(a+k\delta)) = 0$$

In modo analogo si dimostra il caso in cui $f(a) > 0 > f(b)$. □

Il teorema dimostra che in $[a;\ b]$ c'è almeno uno zero della funzione, ma non dice nulla sul numero degli zeri.

La dimostrazione di questo teorema permette di dimostrarne facilmente degli altri:

Corollario 5.12. *Il teorema dei valori intermedi dice che se una funzione è continua in un intervallo $[a;\ b]$ allora tra a e b assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Suggerimento: supponiamo che $f(a) \leqslant h < f(b)$, costruiamo una nuova funzione: $g(x) = f(x) - h$. La funzione g soddisfa tutte le ipotesi del teorema precedente per cui:

$$\exists\, c \in\,]a;\ b[\text{ tale che } g(c) = 0$$

e sostituendo la funzione g otteniamo:

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - h = 0 \Rightarrow f(c) = h$$

. □

Corollario 5.13. *Se una funzione è continua in un intervallo* $[a;\ b]$ *e* $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a;\ b]$ *allora:*

1. *se* $f(c) < 0$ *per un qualunque* $c \in [a;\ b]$ *allora* $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a;\ b]$*;*
2. *se* $f(c) > 0$ *per un qualunque* $c \in [a;\ b]$ *allora* $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a;\ b]$*.*

Dimostrazione. Suggerimento: consideriamo il primo caso: $f(c) > 0$ se esistesse un valore $d \in [a;\ b]$ per cui $f(d) > 0$ allora nell'intervallo $[c;\ d]$ esiste un punto $e \Rightarrow f(e) = 0$ essendo $[c;\ d] \subseteq [a;\ b]$ ciò contraddirebbe l'ipotesi. In modo analogo si dimostra il secondo caso. □

Un altro importante teorema è il seguente.

Teorema 5.14 (Teorema di Weierstrass)**.** *Supponiamo che una funzione* $f(x)$ *sia continua nell'intervallo chiuso* $[a;\ b]$ *allora, in questo intervallo assume un valore massimo e un valore minimo.*

Ipotesi:
1. f è una funzione continua;
2. f è definita nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$

Tesi:
1. $\exists\, c \in [a;\ b]$ tale che $f(c) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a;\ b]$;
2. $\exists\, c \in [a;\ b]$ tale che $f(c) \leqslant f(x) \quad \forall x \in [a;\ b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima tesi.

Operiamo una divisione infinita dell'intervallo $[a;\ b]$ ottenendo i punti di partizione:

$$a;\ a+\delta;\ a+2\delta;\ \dots;\ a+j\delta;\ \dots;\ a+H\delta = b$$

Per il principio di tranfer posso confrontare tra di loro tutti i valori della funzione in questi punti e troverò che uno di questi è maggiore o uguale a tutti gli altri, supponiamo che questo punto sia: $a+(k+1)\delta$:

$$f(a+k\delta) \geqslant f(a+j\delta) \text{ per ogni j Iperintero}$$

Considerando la parte standard se $c = \mathrm{st}\,(a+k\delta)$ e $d = \mathrm{st}\,(a+j\delta)$ ne deriva che:

$$f(c) \geqslant f(d)$$

In modo analogo si dimostra la seconda tesi. □

Teorema 5.15 (Teorema di Rolle)**.** *Supponiamo che una funzione* $f(x)$ *continua nell'intervallo chiuso* $[a;\ b]$*, sia derivabile nell'intervallo aperto* $]a;\ b[$ *e, agli estremi, assuma lo stesso valore:* $f(a) = f(b)$ *allora esiste un punto* c *dell'intervallo* $]a;\ b[$ *nel quale la derivata è nulla:* $f'(c) = 0$*.*

Ipotesi:
1. f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$
2. f è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a;\ b[$
3. $f(a) = f(b)$

Tesi:
$\exists\, c \in\,]a;\ b[$ tale che $f'(c) = 0$;

Dimostrazione. Dato che valgono le ipotesi del teorema di Weierstrass, nell'intervallo $[a;\ b]$ esisterà un massimo M e un minimo m. Si possono distinguere 3 casi:

1. Se $M = m = f(a) = f(b)$, la funzione è costante. In questo caso la dimostrazione è banale poiché $f'(c) = 0 \forall c \in\,]a;\ b[$
2. Se $M > f(a)$ vuol dire che la funzione ha un massimo in c ovvero $f(c) = M$. La funzione f nel punto c soddisfa tutte le ipotesi del teorema del punto critico,
   a) f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$;
   b) c appartiene all'intervallo aperto $]a;\ b[$;
   c) $f(c)$ è un massimo;
   d) f è derivabile in c.

   quindi in c la funzione ha derivata nulla: $f'(c) = 0$.
3. Se $m < f(a)$ vuol dire che la funzione ha un minimo in c ovvero $f(c) = m$. Si dimostra in modo analogo al punto 2.

□

Teorema 5.16 (Teorema di Lagrange o della pendenza media)**.** *La pendenza media di una funzione* f *in un intervallo* $[a;\ b]$ *è data da:*

$$\textit{pendenza media} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se una funzione f *è continua nell'intervallo chiuso* $[a;\ b]$ *e è derivabile nell'intervallo aperto* $]a;\ b[$ *allora esiste un punto* c *dell'intervallo* $]a;\ b[$ *nel quale la derivata è ha lo stesso valore della pendenza media:* $f'(c) =$ *pendenza media.*

Ipotesi:
1. f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$
2. f è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a;\ b[$

Tesi:
$\exists\, c \in\,]a;\ b[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

Dimostrazione. Chiamiamo m la pendenza media: $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. La funzione lineare che congiunge i due punti $(a;\ f(a))$ e $(b;\ f(b))$ è:

$$l(x) = f(a) + m(x - a)$$

Costruiamo una nuova funzione uguale alla distanza in verticale tra $f(x)$ e $l(x)$:

$$h(x) = f(x) - l(x)$$

Questa nuova funzione soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle:
1. h è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a;\ b]$ poiché è somma di due funzioni continue;
2. h è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a;\ b[$ poiché è somma di due funzioni derivabili;
3. $h(a) = h(b)$ poiché:
   $h(a) = f(a) - (f(a) + m(a - a)) = f(a) - f(a) - 0 = 0$
   e
   $h(b) = f(b) - (f(a) + m(b - a)) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) =$
   $= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$

   Quindi esiste un punto c dell'intervallo $]a;\ b[$ tale che:

$$h'(c) = 0$$

Sostituendo la funzione h con la sua definizione otteniamo:

$$h'(c) = f'(c) - l'(c) = f'(c) - m = 0 \Rightarrow f'(c) = m$$

E sostituendo m otteniamo la tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 5.17. *Derivata e andamento di una funzione. Se in una funzione $f'(x) > 0$ per ogni punto di un certo intervallo I, allora la funzione è crescente in tutto l'intervallo.*

Dimostrazione. Consideriamo due punti $x_0 < x_1 \in I$, per il teorema della pendenza media:

$$\exists c \in I \text{ tale che } f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Dato che

$$\forall c \in I \Rightarrow f'(c) > 0$$

si ha:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$$

E poiché il denominatore è positivo, $x_1 - x_0 > 0$

$$f(x_1) - f(x_0) > 0 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_0)$$

□

5.8 TODO

5.9 Esercizi

5.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

?? ??

5.1. testo esercizio

5.2. Consegna:

a)

5.9.2 Esercizi riepilogativi

5.3. testo esercizio

5.4. Consegna:

a)

6 Studio di funzioni

In generale rappresentiamo una funzione con un'espressione simile a: $y0f(x)$ dove y è il risultato dell'espressione $f(x)$ che contiene la variabile x.

y viene anche detta variabile dipendente e x variabile indipendente.

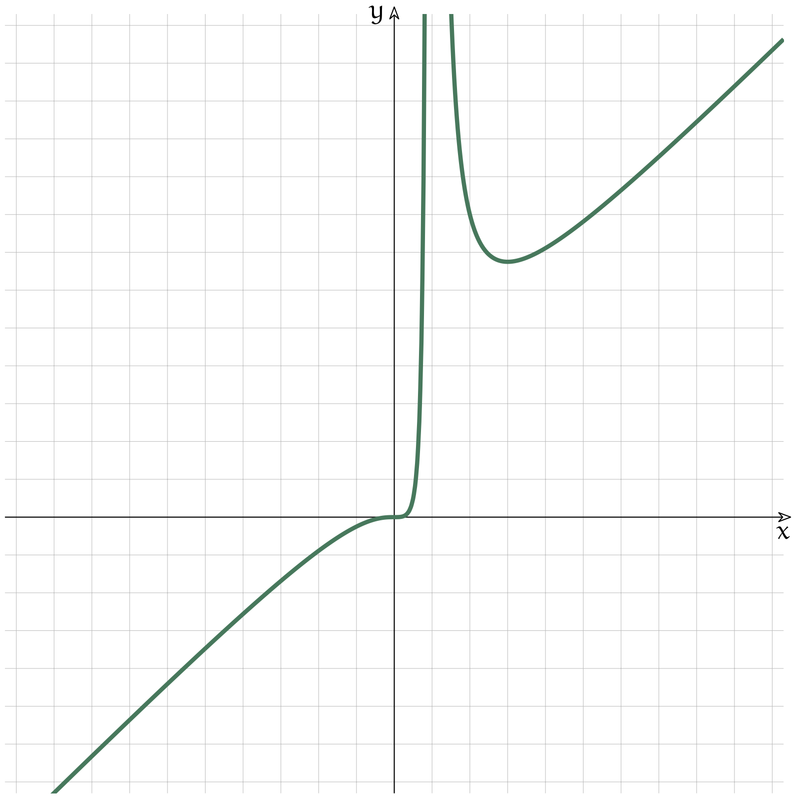
Una funzione può anche essere rappresentata su un piano cartesiano da un grafico. Il grafico di una funzione avrà la particolarità di intersecare ogni retta parallela all'asse y al massimo in un punto.

Scopo di questo capitolo è descrivere il comportamento di una funzione.

6.1 Descrizione del grafico

Iniziamo da un esempio non troppo banale. Consideriamo la seguente funzione che è rappresentata sia come espressione matematica che come grafico.

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$



Per ora ci fidiamo che quello di destra è proprio il grafico corrispondente all'espressione scritta a sinistra.

La descrizione:

"Sono due linee che vanno su e giù nel piano cartesiano."
è un po' troppo generica e potrebbe descrivere una grande quantità di grafici.
Di seguito vediamo quante informazioni possiamo ricavare dal grafico.

6.1.1 Descrizione a parole

Ogni volta che dovrai descrivere una funzione tieni conto dei seguenti punti:

1. *Prime caratteristiche*
   a) *Campo di esistenza*
      È definita per ogni valore di x tranne che nella zona attorno a $+1$.
   b) *Continuità*
      È continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne che attorno a $+1$.
   c) *Intersezioni con gli assi*
      Interseca l'asse y nel punto zero e l'asse x solo nel punto zero.
   d) *Segno*
      È negativa quando $x < 0$ e positiva quando $x > 0$.
   e) *Simmetrie*
      Non è simmetrica né rispetto all'asse y né rispetto all'origine.
2. *Comportamento agli estremi del campo di esistenza*
   a) Quando x è un infinito negativo anche y è un infinito negativo.
   b) Quando x è infinitamente vicino a 1, da entrambi i lati, y è un infinito positivo.
   c) Quando x è un infinito positivo anche y è un infinito positivo.
3. *Asintoti*
   a) *Asintoti verticali*
      Vicino a 1 c'è un asintoto verticale.
   b) *Asintoti orizzontali*
      Non ci sono asintoti orizzontali.
   c) *Asintoti obliqui*
      Potrebbe esserci un asintoto obliquo.
4. *Punti stazionari*
   a) In $(0;\ 0)$ c'è un flesso orizzontale.
   b) Quando x vale circa 3 c'è un punto di minimo.
5. *Andamento*
   a) È crescente fino a 1.
   b) È decrescente da 1 a 3.
   c) È crescente da 3 in poi.
6. *Concavità*
   a) Fino a 0 ha la concavità verso il basso.
   b) Da 0 a 1 ha la concavità verso l'alto.
   c) Da 1 in poi ha la concavità verso l'alto.
7. *Insieme immagine*
   L'insieme immagine è tutto $\mathbb{R}$ perché ogni valore di y è immagine di almeno un valore di x.

❑ **Osservazione** Abbiamo tratto una serie di informazioni da un grafico limitato lavorando molto di fantasia: chi ci dice che allontanandomi molto a sinistra o a destra il comportamento della funzione non sia completamente diverso da quello che appare nel piccolo spazio visualizzato? Potrebbero esserci degli intervalli in cui non è definita, oppure in cui inverte la pendenza, ...

Cosa possiamo dire della funzione nell'intervallo attorno a $x = 1$ dove non è visualizzata? Potrebbe non essere definita in un intervallo o solo in un punto o avere dei valori molto distanti da quelli visualizzati nel nostro piccolo disegno.

E siamo sicuri che un ingrandimento in un punto qualsiasi non potrebbe rivelare un comportamento imprevedibile? Potrebbero esserci dei buchi, delle oscillazioni, ...

6.2 Analisi della funzione

L'analisi dell'espressione matematica della funzione può darci informazioni più precise e più sicure di quelle ricavate osservando il grafico.Riprendiamo quindi l'espressione matematica della funzione e andiamo a studiarne le sue proprietà:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

❑ **Osservazione** Man mano che procediamo con l'analisi, riportiamo su un grafico le informazioni ottenute in questo modo possiamo effettuare un controllo di coerenza dei risultati e, alla fine, avremo la possibilità di disegnare il grafico con una buona precisione.

6.2.1 Le prime caratteristiche

Campo di esistenza

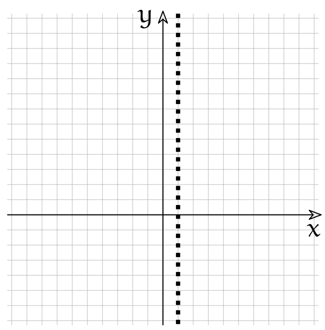
Nella funzione è presente una sola operazione critica: la divisione. La divisione non dà risultato se il divisore è uguale a zero quindi questa funzione non è definita se:

$$(x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

Questo significa che il campo di esistenza della funzione è:

$$CE = \mathbb{R} - 1$$

Cioè la funzione è definita per qualunque valore di x tranne che per $x = 1$.



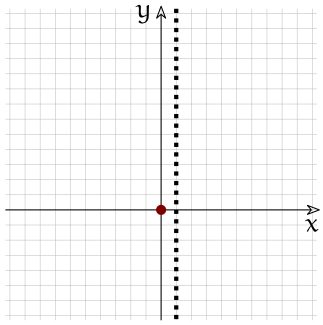
Continuità

Dato che la funzione è data dalla combinazione di tutte funzioni continue tranne la divisione, sarà continua in tutto $\mathbb{R}$ tranne che in 1 dove questa divisione, e quindi la funzione, non è definita.

Intersezioni con gli assi

Intersezione con l'asse y Dato che l'asse y ha equazione $x = 0$ l'intersezione può essere trovata risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0^3}{(0-1)^2} \Rightarrow y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$$



Quando x vale zero, anche y vale zero: la funzione passa per l'origine degli assi.

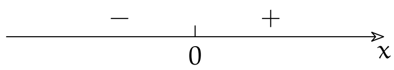
Intersezione con l'asse x Dato che l'asse x ha equazione $y = 0$ l'intersezione può essere trovata risolvendo il sistema:

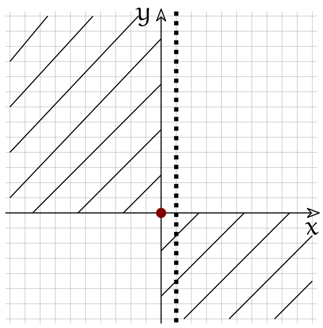
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ci ricordiamo infatti che una frazione vale zero solo quando è nullo il suo numeratore. Quindi y vale zero solo quando anche x vale zero.

Segno

Per studiare il segno di una funzione dobbiamo studiare il segno del numeratore del denominatore e calcolare poi il segno della funzione usando la regola dei segni della divisione. Nel nostro caso, però, possiamo osservare che il denominatore non è mai negativo, essendo il quadrato di una funzione, quindi il segno della frazione è uguale al segno del numeratore:





Quindi l'intera funzione è negativa quando x è negativo e positiva quando x è positivo. Nel piano cartesiano cancelliamo le superfici in cui non è presente la funzione.

Simmetrie

Il campo di esistenza non è simmetrico rispetto all'origine questo basta per dire che anche la funzione non potrà avere alcuna simmetria rispetto all'origine, non sarà né pari né dispari.

Viceversa, se il campo di esistenza fosse simmetrico, questo non basta per dire che la funzione sia simmetrica rispetto all'asse di simmetria (funzione pari) o rispetto all'origine (funzione dispari).

Per stabilire questo, bisogna sostituire nell'espressione x con $-x$ e verificare quale di queste tre situazioni si ottiene:

1. $f(-x) = f(x)$: funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y;
2. $f(-x) = -f(x)$: funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine;
3. *altrimenti*: nessuna simmetria.

Nel nostro caso:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{((-x)-1)^2} = -\frac{(x)^3}{(-x-1)^2}$$

Che è diverso sia da $\frac{x^3}{(x-1)^2}$ sia da $-\frac{x^3}{(x-1)^2}$

6.3 Comportamento asintotico

In questa parte della ricerca vogliamo scoprire come si comporta la funzione quando si avvicina ai punti dove non è definita.

6.3.1 Comportamento agli estremi del campo di esistenza

Nel primo punto abbiamo visto che il campo di esistenza è composto da due intervalli: $]-\infty; 1[$ e $]1; +\infty[$quindi dobbiamo studiare come si comporta la funzione quando:

1. x è un infinito, $x = M$:

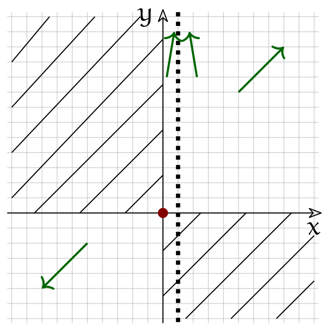
$$y = \frac{M^3}{(M-1)^2} \sim \frac{M^3}{M^2} = M$$

quindi se $x = M$ anche $y = M$ questo significa che quando x è un infinito negativo anche y lo è e quando x è un infinito positivo, anche y lo è.

2. x è infinitamente vicino a 1, $x = 1 + \varepsilon$:

$$y = \frac{(1+\varepsilon)^3}{((1+\varepsilon)-1)^2} = \frac{(1+\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} = M > 0$$

quindi se $x \sim 1$ allora $y = M > 0$.



6.3.2 Asintoti

Possiamo concludere che la nostra funzione:

1. ha come asintoto verticale la retta di equazione: $x = 1$;
2. non ha asintoti orizzontali;
3. potrebbe avere asintoti obliqui.

6.3.3 Asintoti obliqui

Una funzione ha asintoto obliquo se $dfracf(M)M$ è un numero finito. In questo caso il precedente rapporto è proprio il coefficiente angolare dell'asintoto. Calcoliamo il rapporto nel caso della nostra funzione:

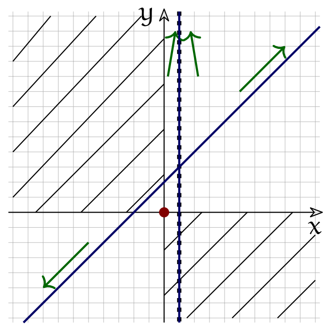
$$m = \frac{M^3}{M(M-1)^2} = \frac{M^3}{M^3 - 2M^2 + M} \sim \frac{M^3}{M^3} = 1$$

Calcolato il coefficiente angolare dobbiamo trovare l'intercetta.

Dall'equazione generica della retta, $y = mx + q$ esplicitiamo il valore dell'intercetta: $q = y - mx$. Ma y è il valore della nostra funzione, quindi: $q = f(x) - mx$. E con quale valore di x dobbiamo eseguire questo calcolo? Trattandosi di asintoti ci serve un valore infinito:

$$q = f(M) - mM = \frac{M^3}{(M-1)^2} - M =$$
$$= \frac{M^3 - M^3 + 2M^2 - M}{M^2 - 2M + 1} \sim \frac{+2M^2}{M^2} = 2$$

Il nostro asintoto è dunque: $y = x + 2$. Disegniamolo nel piano cartesiano.



6.4 Andamento

Ora vogliamo sapere dove la funzione è crescente, dove è decrescente e dove non è né crescente né decrescente. Partiamo da quest'ultimo punto.

6.4.1 Punti stazionari

Un punto stazionario è un punto in cui la tangente alla funzione è orizzontale, cioè dove la derivata è nulla: $f'(x) = 0$.

Quindi per prima cosa calcoliamo la funzione derivata:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3(2(x-1)\cdot 1)}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{3x^2(x^2-2x+1) - x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x^4 + 2x^3}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{x^2(x^2 - 4x + 3}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

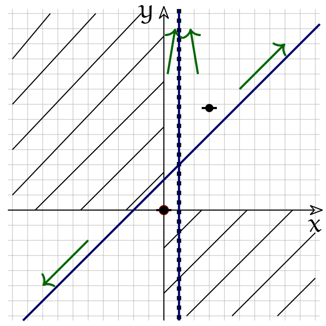
Come è immediato osservare questa funzione ha tre zeri:

$$\frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_3 = 3$$

Uno zero doppio in 0 e uno in 3. Quindi abbiamo due punti stazionari:

$$(0;\ 0) \text{ e } \left(3;\ \frac{27}{4}\right)$$

Riportiamo anche questi nel grafico.



6.4.2 Intervalli di monotonia

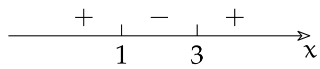
Il segno della derivata ci permette di trovare quando la funzione è crescente e quando decrescente. Lo studio del segno risulta più semplice se partiamo dalla derivata scritta in questo modo:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-4x+3)}{(x-1)^4}$$

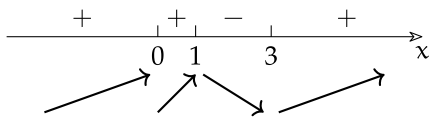
perché abbiamo alcuni fattori di grado pari che non potranno essere negativi.

Il segno di questa espressione corrisponde al segno del trinomio:

$$x^2 - 4x + 3$$



E riportando anche gli altri zeri del numeratore e del denominatore della derivata, si possono ottenere i seguenti intervalli in cui la funzione cresce o decresce:



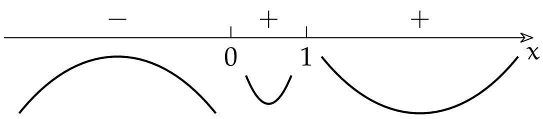
Osservando l'andamento della funzione possiamo osservare che in 0 c'è un flesso orizzontale e in 3 c'è un punto di minimo.

6.5 Concavità

Il calcolo della derivata seconda ci permette di ricavare gli intervalli della funzione in cui la concavità è rivolta verso l'alto e quelli in cui è rivolta verso il basso. Vogliamo derivare la funzione derivata: $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2)}{(x-1)^3}$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3-3x^2)(3(x-1)^2)}{(x-1)^6} = \\
&= \frac{3x((x-2)(x^3-3x^2+3x-1)-(x^2-3x)(x^2-2x+1))}{(x-1)^6} = \\
&= \frac{3x(x^4-3x^3+3x^2-x-2x^3+6x^2-6x+2-x^4+2x^3-x^2+3x^3-6x^2+3x)}{(x-1)^6} = \\
&= \frac{3x(2x^2-4x+2)}{(x-1)^6} = \frac{6x(x^2-2x+1)}{(x-1)^6} = \frac{6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}
\end{aligned}
$$

Da cui possiamo ricavare la concavità:



A questo punto abbiamo tutti gli elementi per disegnare il grafico della funzione con una buona approssimazione.

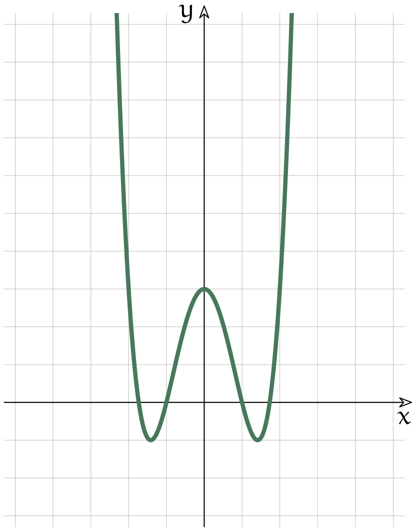
6.6 Altre caratteristiche

Osservando il grafico possiamo ricavare alcune altre caratteristiche della funzione.

- *Suriettiva*: l'insieme immagine è tutto $\mathbb{R}$ infatti ogni valore di y è immagine di almeno un valore di x.
- *Non iniettiva*: infatti alcuni valori di y sono immagini di più valori x.

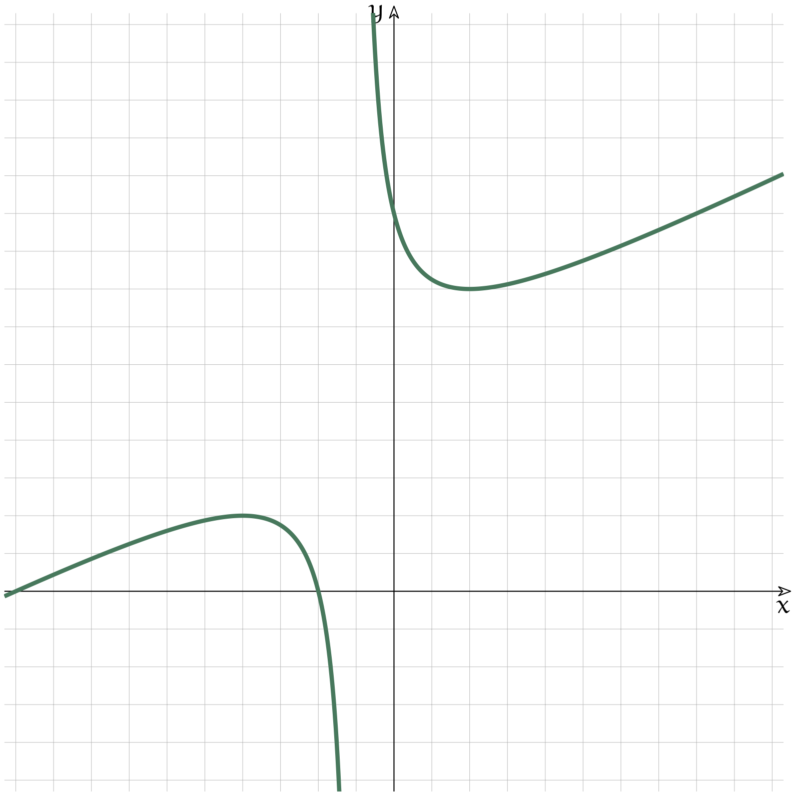
Esempio 6.1. Descrivi a parole il grafico poi analizza la seguente funzione.

$$y = x^4 - 4x^2 + 3$$


y
x

Esempio 6.2. Descrivi a parole il grafico poi analizza la seguente funzione.

$$y = \frac{x^2 + 12x + 20}{2x + 2}$$



6.7 TODO

6.8 Esercizi

6.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi

?? ??

6.1. testo esercizio

6.2. Consegna:

a)

6.8.2 Esercizi riepilogativi

6.3. testo esercizio

6.4. Consegna:

a)

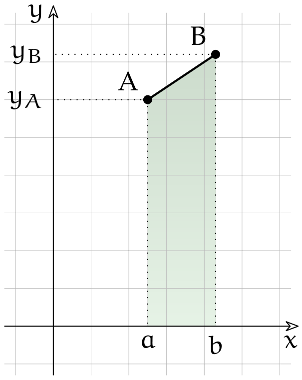
7 Integrali

7.1 Un problema di area

Uno dei primi problemi affrontati usando il piano cartesiano è stato quello di determinare l'area sottesa ad un segmento. In questo capitolo vogliamo riprendere quel tipo di problemi e generalizzarlo alla ricerca dell'area sottesa ad una funzione qualsiasi.

Quando diciamo area sottesa ad un segmento intendiamo la parte di piano delimitata dal segmento, dalle rette parallele all'asse y passanti per i suoi estremi e dall'asse x.

Esempio 7.1. Dati i punti $A(2,5;\ 6)$ e $B(4,3;\ 7,2)$, calcola l'area sottesa al segmento AB.



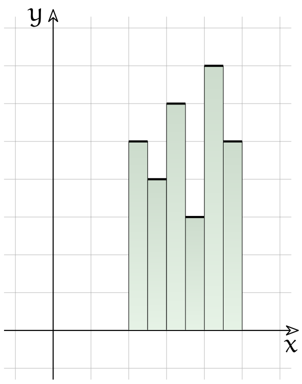
Possiamo riconoscere che la superficie sottesa al segmento ha la forma di un trapezio rettangolo con le due basi lunghe y_A e y_B e l'altezza lunga $b - a = x_b - x_a$. L'area è quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \cdot (y_B + y_A) \cdot (x_b - x_a) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (7,2 + 6) \cdot (4,3 - 2,5) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (13,2) \cdot (1,8) = 11,88\end{aligned}$$

Abbiamo anche calcolato l'area della superficie sottesa ad una sequenza di segmenti consecutivi sommando le varie aree sottese. Ma non è necessario che i segmenti siano consecutivi possono anche essere staccati uno dall'altro.

Esempio 7.2. Calcola l'area sottesa ai segmenti paralleli all'asse x, di lunghezza $0,5$ e di ordinata rispettivamente:

5; 4; 6; 3; 7; 5



Prima di affrontare i calcoli possiamo fare alcune osservazioni:

1. i vari segmenti non sono in continuità uno con l'altro;
2. formano delle colonne rettangolari;
3. le colonne sono appoggiate le une alle altre e non si sovrappongono;
4. l'area complessiva si può calcolare sommando le aree di tutte le colonne;
5. la larghezza complessiva delle colonne è 3;
6. la colonna più bassa ha altezza 3;
7. la colonna più alta ha altezza 7;
8. di sicuro l'area è maggiore di $3 \cdot 3$;
9. di sicuro l'area è minore di $3 \cdot 7$;

La soluzione consiste nel calcolare l'area di ogni rettangolo e sommarli tutti. Chiamiamo:
$\mathcal{A}_0$ l'area sottesa al segmento S_0,
$\mathcal{A}_1$ l'area sottesa al segmento S_1,
...
$\mathcal{A}_i$ l'area sottesa al segmento S_i,
...
$\mathcal{A}_n$ l'area sottesa al segmento S_n (dove con n intendiamo l'ultimo segmento).

Possiamo calcolare allora l'area con la seguente formula:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_i + \dots + \mathcal{A}_n = \\ &= y_0 \cdot \Delta_x + y_1 \cdot \Delta_x + y_2 \cdot \Delta_x + y_3 \cdot \Delta_x + y_4 \cdot \Delta_x + y_5 \cdot \Delta_x = \\ &= 5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = \\ &= 2,5 + 2 + 3 + 1,5 + 3,5 + 2,5 = 15\end{aligned}$$

Le scritture usate per le formule scritte sopra non piacciono ai matematici perché risultano lunghe da scrivere e nascondono la sostanza delle operazioni che vengono fatte in mezzo a molti simboli che si ripetono. È stato così inventato un altro simbolo detto *Sommatoria* che indica la somma di un certo numero di espressioni che si assomigliano. Il simbolo usato è la *Sigma* (la esse greca) maiuscola:

$$\sum$$

Intorno a questo simbolo vengono aggiunte tutte le informazioni che servono per precisare il calcolo:

- *sotto*: da dove si inizia, nel nostro caso: da 0;
- *sopra*: fin dove si arriva, nel nostro caso: fino a 6;
- *dopo*: cosa si somma, nel nostro caso, la formula per calcolare le diverse aree da sommare: $y_i \cdot \Delta_x$.

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{6} \mathcal{A}_i = \sum_{i=0}^{6} y_i \cdot \Delta_x = 15$$

Con il linguaggio di programmazione Python:

```
def areasottesa_segmenti(delta_x, ordinate):
    """Restituisce l'area sottesa a sementi:
- paralleli all'asse x;
- lunghi delta_x;
- con le ordinate contenute in ordinate."""
    return sum(y_i * delta_x for y_i in ordinate)

print(areasottesa_segmenti(delta_x=0.5, ordinate=[5, 4, 6, 3, 7, 5]))
```

Che può essere tradotto: somma $y_i \cdot \mathrm{delta}_x$ con y_i che va dal primo all'ultimo valore contenuto in ordinate.

7.2 L'area sottesa ad una funzione

Calcolare l'area sottesa ad un segmento è un problema piuttosto banale, l'avevamo già risolto diversi anni fa, ma nel mondo reale ci sono poche linee rette, la vita è tutta una curva! Se vogliamo risolvere teoricamente un problema che abbia utilità pratica dobbiamo cercare di calcolare l'area sottesa ad una funzione qualunque.

Ed è quello che intende fare lo studio degli *integrali definiti*. L'integrale definito di una funzione f è proprio l'area compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e due rette verticali per gli estremi a e b di un intervallo chiuso in cui la funzione è definita.

DISEGNO: AREA SOTTESA AD UNA FUNZIONE

Fissata la funzione f, tale area dipenderà dalla scelta degli estremi a e b dell'intervallo, ed è possibile indicarla come:

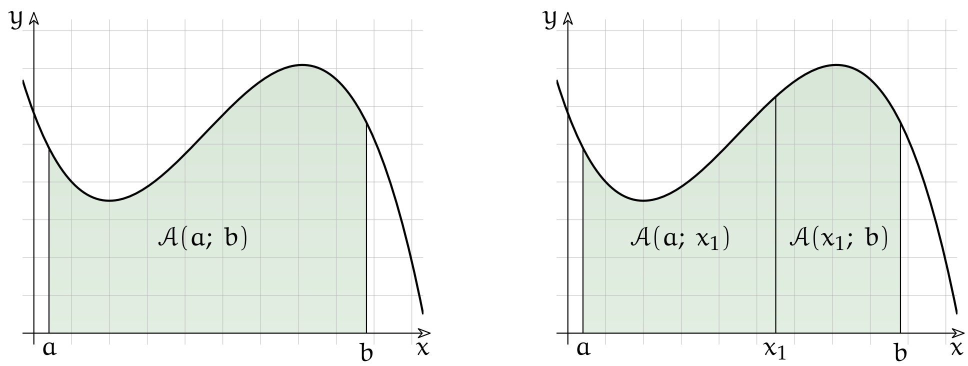
$$\mathcal{A}(a, b)$$

Con questa scrittura indichiamo che, *fissata la funzione*, il valore dell'area ($\mathcal{A}$) dipende solo da due parametri che sono gli stremi sull'asse x della superficie.

ESEMPI: f=k; f=-2x;

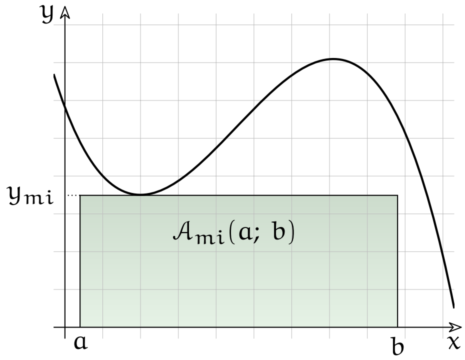
La funzione binaria $\mathcal{A}$, area sottesa ad una funzione in un intervallo, ha due tipiche proprietà che potranno essere usate per determinarla. Esse sono:

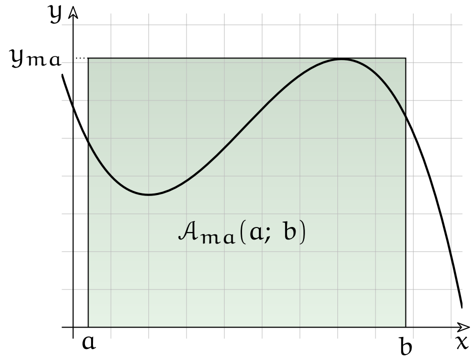
1. La *proprietà additiva*, dice che se a, b e x_1 sono tre valori che appartengono all'intervallo in cui è definita f e $a < x_1 < b$ allora $\mathcal{A}(a,\ b) = \mathcal{A}(a,\ x_1)$+$\mathcal{A}(x_1,\ b)$).

   Questa proprietà afferma che se una superficie viene divisa in due parti da una linea, allora l'area totale è la somma delle aree delle due parti. Nel nostro caso la linea è la retta di equazione: $x = x_1$.

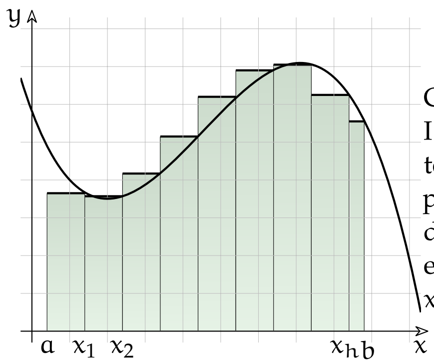
2. La *proprietà rettangolare* rispetto alla funzione f, dice che se m è il minimo e M massimo della funzione f nell'intervallo $[a;\ b]$ allora
   $m \cdot (b - a) = \mathcal{A}_{mi}(a,\ b) < \mathcal{A}_{ma}(a,\ b) < M \cdot (b - a)$,





Questa proprietà afferma che l'area sottesa ad una funzione è maggiore dell'area di un rettangolo di ugual base che ha per altezza il minimo della funzione f nell'intervallo $[a;\ b]$ e minore di un rettangolo con la stessa base che ha per altezza il massimo della funzione f nell'intervallo $[a;\ b]$.

7.3 Definizione



Consideriamo una funzione continua f su un intervallo I cui appartengono i punti a e b, e una partizione dell'intervallo chiuso $[a;\ b]$ in sotto intervalli di uguale ampiezza Δ separati dai punti: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_h \leqslant b$ dove $x_i = x_0 + i\Delta \quad \text{e} \quad x_{i+1} - x_i = \Delta$ e dove h è il massimo numero naturale tale che: $x_0 + h\Delta \leqslant b$, e dunque $b - x_h \leqslant \Delta$.

Si può considerare la sommatoria

$$\left(\sum_{i=0}^{h-1} f(x_i) \cdot \Delta\right) + f(x_i) \cdot (b - x_h)$$

che è l'area dell'unione dei rettangoli che hanno per altezza $f(x_i)$ e per base i segmenti di lunghezza Δ) e un segmento di lunghezza $b - x_{h-1}$.

Chiamiamo questa area *somma di Riemann finita*.

Abbiamo già dimostrato che una funzione f continua in $[a;\ b]$ in un intervallo chiuso ha massimo e minimo. Chiamiamo M il massimo e m il minimo di f nell'intervallo $[a;\ b]$.

Allora anche per la somma di Riemann finita vale la proprietà rettangolare:

$$m \cdot (b - a) \leqslant \sum_{a}^{b} f(x) \cdot \Delta \leqslant M \cdot (b - a)$$

Quindi una somma di Riemann finita è senz'altro un numero finito.

Questa sommatoria dipende solo dagli estremi a e b e da Δ, essendo h e la successione degli x_i determinati dalle quantità indicate, sicché la denoteremo come

$$\sum_a^b f(x) \cdot \Delta$$

Se fissiamo anche a e b allora la somma di Riemann è una funzione reale unaria che dipende solo da Δ.

ESEMPI DI SOMME DI RIEMANN AL VARIARE DI DELTA

Possiamo osservare che al diminuire della distanza Δ tra i punti di partizione l'area coperta da questa unione di rettangoli sarà sempre più vicina all'area sottesa alla funzione.

Usando i numeri iperreali possiamo dare a Δ un valore infinitesimo e per distinguerlo lo chiameremo: dx.

Chiamiamo H il numero infinito di partizioni dell'intervallo $[a;\ b]$ tale che $x_H = x_0 + H \cdot dx$ e $x_H \leqslant b$.

Chiamiamo *somma di Riemann infinita* questa nuova sommatoria:

$$\sum_a^b f(x) \cdot dx$$

Per il principio di transfer, anche le per la somma di Riemann infinita vale che

$$m \cdot (b - a) \leqslant \sum_a^b f(x) \cdot dx \leqslant M \cdot (b - a)$$

e pertanto anche la somma di Riemann infinita sarà un iperreale finito. Possiamo quindi calcolare la sua parte standard.

A questa parte standard diamo il nome di *integrale definito*

Definizione 7.1. Data una funzione standard f continua su $[a;\ b]$, chiamiamo *integrale definito* la parte standard della somma di Riemann infinita:

$$\operatorname{st}\left(\sum_a^b f(x) \cdot dx\right)$$

Per semplificare un po' la notazione useremo per indicare questa quantità un nuovo simbolo, una specie di esse stirata che è il simbolo di integrale:

$$\int_a^b f \cdot dx = \operatorname{st}\left(\sum_a^b f(x) \cdot dx\right)$$

7.4 Somme di Riemann inferiore e superiore

Mentre le somme di Riemann finite dipendono dal valore di Δ, i matematici hanno dimostrato che le somme di Riemann infinite non dipendono dall'infinitesimo scelto come base dei rettangolini.

Ma il lettore attento e pignolo può avere il dubbio che definendo somme di Riemann in modo diverso si ottengano integrali definiti diversi. Noi abbiamo calcolato l'area dei rettangolini prendendo come altezza il valore di f nell'estremo destro dell'intervallo, ma cosa succede se consideriamo l'estremo sinistro o se consideriamo un punto a caso dell'intervallo?

Vediamo qualche esempio:

ESEMPI DI SOMME DI RIEMANN FINITE CON SCELTE DIVERSE DI F(Xi)

Se in ogni sottointervallo chiamiamo $_{-}f(x_i)$ il minimo valore assunto dalla funzione e $^{-}f(x_i)$ il suo massimo valore, allora possiamo definire le somme di Riemann finite superiore e inferiore.
La somma di Riemann finita inferiore è:

$$\sum_{i=0}^{h} {}_{-}f(x_i) \cdot \Delta = \sum_{a}^{b} {}_{-}f(x) \cdot \Delta$$

e quella superiore è:

$$\sum_{i=0}^{h} {}^{-}f(x_i) \cdot \Delta = \sum_{a}^{b} {}^{-}f(x) \cdot \Delta$$

Evidentemente

$$\sum_{a}^{b} {}_{-}f(x) \cdot \Delta \leqslant \sum_{a}^{b} f(x) \cdot \Delta \leqslant \sum_{a}^{b} {}^{-}f(x) \cdot \Delta$$

dato che ogni rettangolino della prima somma ha un'altezza non maggiore dell'altezza del corrispondente rettangolino della seconda somma e:

- per la proprietà rettangolare, l'area sottesa alla funzione in ogni sottointervallo, sarà compresa tra il rettangolino inferiore e quello superiore.
- per la proprietà additiva, l'area sottesa alla funzione sarà maggiore della somma di tutti i rettangolini inferiori e minore della somma di tutti i rettangolini superiori.

Passando alle loro estensioni naturali non standard, cioè riducendo la base di ogni rettangolino a un infinitesimo risulta ancora

$$\sum_{a}^{b} {}_{-}f \cdot dx \leqslant \sum_{a}^{b} f \cdot dx \leqslant \sum_{a}^{b} {}^{-}f \cdot dx$$

e si mantengono le proprietà rettangolare e additiva. Ma se dx è un infinitesimo e la funzione è continua, allora anche la differenza tra $_{-}f(x_0)$ e $^{-}f(x_0)$ è un infinitesimo (per la definizione di funzione continua) e anche il prodotto tra questa differenza e l'intervallo dx è un infinitesimo, e anche la somma di questi prodotti è un infinitesimo quindi la differenza tra la somma di Riemann infinita superiore e inferiore è un infinitesimo mentre il valore di una di queste somme è un valore finito perciò le due somme sono indistinguibili e la loro parte standard è la stessa.

$$\int_{a}^{b} {}_{-}f \cdot dx = \int_{a}^{b} {}^{-}f \cdot dx$$

Possiamo perciò chiamare integrale la parte standard di una una qualsiasi somma di Riemann infinita:

$$\int_{b}^{a} f \cdot dx = st\left(\sum_{a}^{b} {}_{-}f \cdot dx\right) = st\left(\sum_{a}^{b} {}^{-}f \cdot dx\right)$$

7.5 Proprietà degli integrali

7.5.1 Proprietà rettangolare

Partendo dalle disequazioni relative alla somma di Riemann infinita:

$$m \cdot (b-a) \leqslant \sum_{a}^{b} f(x) \cdot dx \leqslant M \cdot (b-a)$$

e passando alle parti standard, che preservano le disequazioni, poiché il primo e l'ultimo termine sono parti standard di se stessi in quanto reali, si ha:

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_{a}^{b} f \cdot dx \leqslant M \cdot (b-a)$$

e quindi anche per l'integrale vale la proprietà rettangolare.

7.5.2 Altre proprietà

Dalla definizione di integrale seguono le seguenti proprietà:

1. Se l'intervallo è nullo, sarà nullo anche l'integrale:
$$\int_{a}^{a} f \cdot dx = 0$$
2. l'integrale di una costante k è uguale all'area del rettangolo:
$$\int_{a}^{b} k \cdot dx = k \cdot (b-a)$$
3. l'integrale di una costante k per una funzione f è uguale alla costante per l'integrale della funzione:
$$\int_{a}^{b} k \cdot f \cdot dx = k \cdot \int_{a}^{b} f \cdot dx$$
4. l'integrale della somma di due funzioni è uguale alla somma degli integrali:
$$\int_{a}^{b} (f+g) \cdot dx = \int_{a}^{b} f \cdot dx + \int_{a}^{b} g \cdot dx$$
5. se, in un certo intervallo, la funzione f è sempre inferiore alla funzione g allora, in quell'intervallo, anche l'integrale di f è minore dell'integrale di g:
$$f \leqslant g \forall x \in [a;\ b] \ \Rightarrow \int_{a}^{b} f \cdot dx \leqslant \int_{a}^{b} g \cdot dx$$

7.5.3 Definizione di opposto

Definiamo poi che, se scambiamo gli estremi di integrazione, otteniamo l'opposto dell'integrale definito:

$$\int_{b}^{a} f \cdot dx = -\int_{a}^{b} f \cdot dx$$

7.5.4 Proprietà additiva

Poiché la scelta del sottointervallo infinitesimo non cambia il valore dell'integrale definito, nell'integrale vale anche la proprietà additiva, infatti:

$$\int_a^b f \cdot dx + \int_b^c f \cdot dx = \int_a^c f \cdot dx$$

Passando alle sommatorie

$$\sum_a^b f \cdot dx, \quad \sum_b^c f \cdot dx \quad \text{e} \quad \sum_a^c f \cdot dx$$

e prendendo $dx = (b - a)/H$ con H ipernaturale infinito, i punti di ripartizione degli intervalli $[a;\ b]$ e $[b;\ c]$ coincidono con quelli dell'intervallo $[a;\ c]$ sicché la terza sommatoria è evidentemente la somma delle altre due. Passando alla loro parti standard, operazione che preserva l'addizione, si ottiene il risultato voluto.

7.6 Teorema fondamentale dell'analisi

Il valore di un integrale definito può essere calcolato con una certa approssimazione attraverso le somme di Riemann finite, ma questo, a volte, risulta piuttosto scomodo. I matematici hanno trovato un modo per poter calcolare il valore di un integrale lavorando più con i simboli che con i numeri.

ESEMPI DI FUNZIONI SEMPLICI: COSTANTE, LINEARE, QUADRATA

SPIEGARE IL CONCETTO DI FUNZIONE INTEGRALE

Partiamo da una funzione integrale qualsiasi:

$$F(x) = \int_a^x f \cdot dx$$

Vogliamo dimostrare che la derivata della funzione integrale è proprio la funzione integranda cioè che

$$F'(x) = f(x)$$

Applichiamo alla funzione F la regola del calcolo della derivata:

$$F'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{F(x + dx) - F(x)}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\int_a^{x+dx} f \cdot dx - \int_a^x f \cdot dx}{dx}\right) =$$

che per l'arbitrarietà dell'incremento (l'incremento d'integrazione dx può essere du) è uguale a

$$\mathrm{st}\left(\frac{\int_a^{x+dx} f \cdot dx - \int_a^x f \cdot dx}{dx}\right) =$$

per l'additività degli integrali consideriamo che

$$\mathrm{st}\left(\frac{\int_x^{x+dx} f \cdot dx}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x) \cdot dx}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(f(x)\right) = f(x)$$

essendo $f(x)$ un numero reale.

La prima uguaglianza della riga precedente è giustificata dal fatto che, per definizione

$$\int_{x}^{x+dx} f \cdot dx \approx \sum_{x}^{x+dx} f \cdot dx = f(x) \cdot dx$$

Volendo raggiungere l'espressione che consente di calcolare un integrale definito dai valori di una primitiva negli estremi di integrazione, si può osservare che, ricordando ancora che le primitive di una funzione continua in un intervallo differiscono per una costante, si può osservare che

$$F(b) = \int_{a}^{b} f \cdot dx = G(b) + k$$

dove G è una qualsiasi primitiva di f e k dipende da G. Per determinare k, si osservi che

$$0 = \int_{a}^{a} f \cdot dx = G(a) + k$$

sicché deve essere $k = -G(a)$, e si ottiene nuovamente la classica relazione tra integrale definito e primitive della funzione integranda

$$\int_{a}^{b} f \cdot dx = G(b) - G(a)$$

La determinazione mediante le primitive può esser un ottimo modo per determinare il risultato. Ma anche in questo caso ci sono difficoltà. Non c'è un calcolo delle primitiva, data una funzione f per trovarne una primitiva bisogna ricordare di avere incontrato f come derivata di una certa funzione. I metodi d'integrazione aiutano a modificare la situazione nella speranza di arrivare al punto di dover trovare primitive di funzioni che si ricorda di aver incontrato come derivate di altre funzioni. Così, non essendoci un calcolo (metodo automatico, con precise regole sulla scrittura delle funzioni, che non richiede la conoscenza dei significati) la determinazione delle primitive, è spesso una sfida aperta.

7.7 Integrali indefiniti

Il teorema fondamentale dell'analisi dice che la funzione integrale è una primitiva della funzione integranda quindi se ho imparato a derivare una funzione posso, con il procedimento inverso trovare una funzione integrale della funzione integranda:

$$D[F] = f \;\Rightarrow\; \int f dx = F$$

Ma dalle regole delle derivate sappiamo che tutte le funzioni che differiscono per una costante hanno la stessa derivata quindi se $D[F] = f$ allora anche $D[F+5] = f$, e anche $D[F+4,57] = f$, e, in generale, anche $D[F+C] = f$ con C costante. quindi se F è una primitiva della funzione f e C è una costante, allora tutte le funzioni del tipo: $F + C$ sono primitive di f.

Di seguito vediamo una tabella con le primitive di alcune funzioni.

primitiva	f	derivata
$kx + C$	k	0
$\frac{1}{2}x^2 + C$	x	1
$\frac{k}{2}x^2 + C$	kx	k
$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	x^n	nx^{n-1}
$e^x + C$	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln a} + C$	a^x	$(\ln a)\, a^x$
$\ln \lvert x \rvert + C$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x + C$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\operatorname{sen} x + C$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{2 \cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$

Esempio 7.3.

7.8 TODO

7.9 Esercizi

7.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

?? ??

7.1. testo esercizio

7.2. Consegna:

a)

7.9.2 Esercizi riepilogativi

7.3. testo esercizio

7.4. Consegna:

a)

Modelli Economici 8

La parte più discorsiva di questo capitolo è tratta da wikipedia:
it.wikipedia.org/wiki/Economia
it.wikipedia.org/wiki/Microeconomia
a cui si rimanda per la bibliografia e per i collegamenti di approfondimento.

8.1 TODO

8.2 Economia

Per "economia" – dal greco (*oikos*), "casa" inteso anche come "beni di famiglia", e (*nomos*), "norma" o "legge" – si intende sia l'organizzazione dell'utilizzo di risorse scarse (limitate o finite) quando attuata al fine di soddisfare al meglio bisogni individuali o collettivi, sia un sistema di interazioni che garantisce un tale tipo di organizzazione, sistema detto anche *sistema economico*. (*Lionel Robbins, Essay on the Nature and Significance of Economic Science, Macmillan, London, 1945* http://mises.org/books/robbinsessay2.pdf)

Per l'economista e politico francese Raymond Barre (*Raymond Barre, Economie politique, Presses universitaires de France, 1959*):

> L'economia è la scienza della gestione delle risorse scarse. Essa prende in esame le forme assunte dal comportamento umano nella gestione di tali risorse; analizza e spiega le modalità secondo le quali un individuo o una società destinano mezzi limitati alla soddisfazione di esigenze molteplici ed illimitate.

Per l'economista inglese Alfred Marshall: (*Alfred Marshall, Principi di Economia, 1890*)

> L'economia è uno studio del genere umano negli affari ordinari della vita.

I soggetti che creano tali sistemi di organizzazione possono essere persone, organizzazioni o istituzioni. Normalmente si considerano i soggetti (detti anche "agenti" o "attori" o "operatori" economici) come attivi nell'ambito di un dato territorio; peraltro si tiene conto anche delle interazioni con altri soggetti attivi fuori dal territorio.

8.3 Il sistema economico

Il sistema economico, secondo la visione dell'economia di mercato della moderna società occidentale, è la rete di interdipendenze ed interconnessioni tra operatori o soggetti economici che svolgono le attività di produzione, consumo, scambio, lavoro, risparmio e investimento per soddisfare i bisogni individuali e realizzare il massimo profitto, ottimizzando l'uso delle risorse, evitando sprechi e aumentando la produttività individuale anche diminuendo il costo del lavoro.

8.3.1 Componenti o sottosistemi

I componenti o sottosistemi del sistema economico sono:

Sistema di produzione , attraverso la produzione promuove e determina l'offerta di beni e servizi sotto continua spinta all'investimento per produrre innovazione (aziende e imprese).

Sistema dei consumatori , promuove e determina attraverso il consumo la domanda e offerta di beni e servizi (es. famiglie e in parte anche imprese).

Sistema creditizio-finanziario , da esso i precedenti sottosistemi afferiscono fondi di liquidità (capitali) e strumenti finanziari per promuovere e raggiungere i loro obiettivi (produzione e/o consumo) (banche e istituti di intermediazione finanziaria).

Mercato , è l'ambiente di interazione dei precedenti sottosistemi dove avviene lo scambio di beni, servizi e denaro tipicamente regolati dalla legge della domanda e dell'offerta.

Stato , alimenta il sistema economico attraverso la spesa pubblica (offerta di servizi pubblici a fronte di prelievo fiscale), regolandolo anche attraverso interventi mirati di politica economica (politica di bilancio e politica monetaria).

Il livello di sviluppo ed efficienza di tali sottosistemi e del relativo sistema economico riflette il livello di sviluppo della società stessa e varia in funzione delle epoche storiche o della parte del mondo o Stato considerato. Storicamente si passa da economie prettamente agricole ad economie agricole-industriali fino ad arrivare a economie agricole-industriali-terziarie, mentre attualmente e geograficamente si classifica l'efficienza dei sistemi economici con le denominazioni di primo mondo, secondo mondo, terzo mondo e quarto mondo. Il processo di globalizzazione sta gradualmente portando ad una progressiva omogeneizzazione dei vari sistemi economici mondiali grazie all'interdipendenza a livello internazionale dei vari mercati nazionali (internazionalizzazione).

8.3.2 Operatori economici e loro funzioni

Il sistema economico può definirsi, altresì, come l'ambiente o l'insieme delle attività promosse dagli operatori economici per le suddette finalità. Gli operatori economici svolgono una o più delle seguenti funzioni: un

- produzione di beni e servizi;
- consumo di beni e servizi;
- intermediazione finanziaria;
- accumulazione di ricchezza;
- redistribuzione del reddito e della ricchezza;
- assicurazione.

Classificazione degli operatori

Gli operatori economici vengono classificati secondo le funzioni svolte. Si hanno:

- le famiglie, che consumano beni e servizi prodotti (prodotti nel territorio considerato, o importati, a cura di altri operatori, dal "resto del mondo"), ma possono anche produrre e accumulare (Impresa | imprese individuali, Azienda | aziende familiari);
- le società che svolgono attività finalizzate al conseguimento di utili ed all'accumulazione:
  - le società di intermediazione finanziaria (in primo luogo le banche; in Italia vi sono poi le Società di Intermediazione Mobiliare (SIM), le Società di gestione del risparmio (SGR), le SICAV ecc.);
  - le società di assicurazione;
  - le società (dalle grandi società per azioni alle piccole società di persone) che producono altri beni e servizi;
- la pubblica amministrazione, in tutte le sue articolazioni, che contribuisce al consumo (cosiddetti consumi collettivi), produce prevalentemente servizi non destinati alla vendita (istruzione, ordine pubblico, Ministero della difesa ecc.) e redistribuisce il reddito e la ricchezza tra gli operatori del sistema;
- altre organizzazioni senza finalità di lucro, che erogano servizi a beneficio delle famiglie (partiti, sindacati dei lavoratori, organizzazioni religiose, associazioni culturali ricreative e sportive, enti di beneficenza ed assistenza).
- Professionisti (avvocati, commercialisti, farmacisti...) che offrono servizi regolati da ordini professionali.

Le operazioni economiche

Gli operatori interagiscono con operazioni economiche che possono essere:

operazioni su beni e servizi : sono sia quelle che danno origine a beni e servizi mediante la produzione o l'importazione, sia quelle che ad essi danno destinazione (consumi intermedi o finali, investimenti, esportazioni);

operazioni finanziarie : consistono nell'acquisizione o cessione di attività finanziarie (acquisto di azioni o altri titoli, apertura di depositi, erogazione di prestiti ecc.);

operazioni di distribuzione e redistribuzione del reddito e della ricchezza : fanno sì che il valore aggiunto generato dall'attività produttiva venga sia distribuito fra i fattori della produzione (percezione del profitto e del reddito da lavoro autonomo, distribuzione di redditi da capitale da parte delle società, pagamento di Redditi di lavoro redditi da lavoro dipendente), sia redistribuito tra gli operatori (riscossione di imposte e tasse, erogazione di contributi).

Vi sono poi altre operazioni quali gli ammortamenti o lo scambio di attività non finanziarie non prodotte (terreni, brevetti, licenze).

Tutte le operazioni indicate costituiscono *flussi*; vengono pertanto misurate tenendo conto delle variazioni (creazione, trasformazione, scambio, trasferimento di valore) che intervengono in un dato periodo di tempo. Ad esempio, si misura l'insieme delle vendite effettuate da una società, oppure l'insieme delle imposte percepite dalla pubblica amministrazione, nel corso di un anno.

Le operazioni possono avere o non avere una contropartita. Nel primo caso (ad esempio, la vendita di un bene), ad un flusso di denaro o in natura corrisponde un flusso di beni o servizi di pari valore; nel secondo caso (ad esempio, l'erogazione delle pensioni) non vi è una diretta contropartita e si parla di operazioni unilaterali o trasferimenti.

8.3.3 I settori economici

Le diverse attività di produzione di beni e servizi vengono ripartite in settori economici. Al livello più generale si usa la tradizionale distinzione tra:

settore primario , che comprende l'agricoltura, la selvicoltura, la pesca, lo sfruttamento delle cave e delle miniere;
settore secondario , che comprende l'industria in senso stretto, l'edilizia e l'artigianato;
settore terziario , che produce e fornisce servizi.

Vengono attualmente utilizzate, tuttavia, classificazioni più articolate:

- l'ESCAP delle Organizzazione delle Nazioni Unite propone una classificazione che individua 20 settori economici. http://www.unescap.org/publications/accsectors.asp|titolo=SettorieconomiciESCAP
- la Divisione Statistica delle Organizzazione delle Nazioni Unite usa l'ISIC (International Standard Industrial Classification of All Economic Activities), che individua 21 settori (detti "sezioni");
- l'Eurostat, organo statistico della Commissione europea, usa la classificazione NACE, derivata dall'ISIC;
- in Italia, l'ISTAT adotta la classificazione ATECO, traduzione italiana del NACE.

8.3.4 La ricchezza di un sistema economico

Gli operatori che svolgono la funzione di accumulazione danno luogo a variazioni delle attività del sistema. Altre variazioni possono manifestarsi indipendentemente dalla loro volontà (incendi, catastrofi naturali, ecc.).

Le attività si dividono in non finanziarie e finanziarie. Tra le prime rientrano:

attività fisse materiali : terreni, abitazioni, macchine e impianti, mezzi di trasporto, giacimenti minerari ecc.;
attività fisse immateriali : opere artistiche, software, brevetti ecc.;
scorte di materie prime , prodotti in corso di lavorazione, prodotti finiti;
oggetti di valore : pietre e metalli preziosi, oggetti di antiquariato ecc.
attività finanziarie : vi sono monete, depositi, azioni ed altri titoli ecc.

La misurazione delle attività ad una certa data consente di determinare la ricchezza, a quella data, di un sistema economico (si tratta di uno *stock*, non di un *flusso*).

8.4 Tipi di sistemi economici

Si possono individuare diversi tipi di sistemi economici, sulla base della presenza di tutti, o solo di alcuni, degli operatori sopra indicati, della maggiore importanza di alcuni rispetto ad altri, di diverse modalità di esplicazione delle loro funzioni, di diverse regole per l'esecuzione delle operazioni. Su tali aspetti influiscono le Istituzione|istituzioni politiche e sociali, le tecnologie disponibili, aspetti culturali e ideologici.

Nel corso della storia si sono susseguiti diversi sistemi economici, mentre altri sono stati solo ideati e mai realizzati.

8.4.1 Sistemi economici nella storia

Antichità

Vi è stata una grande varietà di sistemi economici nell'antichità. In generale si può dire che, per millenni, hanno dominato l'agricoltura, finalizzata prevalentemente all'autoconsumo, ed il commercio lungo vie d'acqua anche con terre lontane. Si faceva inoltre ampio ricorso alla schiavitù.

Medioevo

Nell'Alto Medioevo si diffuse in un primo tempo l'economia curtense. Derivate dalle ville romane, le corti costituivano unità produttive autosufficienti, in cui il commercio aveva un ruolo limitato e gli scambi avvenivano spesso in natura.

Con l'affermazione dell'Impero Carolingio, l'economia curtense si trasformò in economia feudale.

Nel Basso Medioevo si ebbero graduali ma significativi progressi sia nell'agricoltura che nei commerci. Nell'Europa settentrionale iniziarono a diffondersi la rotazione triennale e l'uso dell'aratro pesante, che consentirono aumenti delle rese agricole e, con ciò, la disponibilità di maggiori eccedenze da dedicare al commercio. Lo sviluppo del commercio favorì, a sua volta, la nascita e la crescente importanza delle città.

In Italia le città acquisirono importanza tale da costituirsi in comuni (trasformatisi poi in signorie) e, in qualche caso, in repubbliche marinare.

Nel resto d'Europa si formarono invece fin dal XIII secolo i primi Stati nazionali, che furono poi i protagonisti dell'età moderna.

Età moderna

L'età moderna è caratterizzata, in estrema sintesi, dall'espansione territoriale nelle regioni rese accessibili dalle scoperte geografiche, dallo sviluppo del commercio marittimo internazionale, dalla progressiva affermazione degli Stati nazionali come Stati assoluti, dall'affermazione di una aristocrazia fondiaria e di un ceto borghese dedito al commercio ed alla finanza.

Età contemporanea

L'età contemporanea inizia, da un punto di vista economico, con la rivoluzione industriale: un processo di evoluzione che da un'economia agricola-artigianale-commerciale portò ad un'economia industriale moderna, caratterizzata dall'uso generalizzato di macchine azionate da energia meccanica e dall'utilizzo di nuove fonti energetiche inanimate (in primo luogo i combustibili fossili).

Ne sono seguiti il progressivo declino dell'agricoltura (il numero degli occupati nel settore agricolo iniziò a diminuire costantemente dopo la Grande depressione del 1873-1895, detta *Long Depression*) e, con esso, quello dell'aristocrazia, la crescente importanza della borghesia produttiva, lo sviluppo sostenuto delle città, l'estensione della produzione per il mercato e la tendenziale scomparsa di quella per l'autoconsumo, la nascita di un mercato del lavoro.

Attraverso grandi momenti di crisi economica (la *Long Depression* e il crollo di Wall Street del 1929) e politica (la Prima guerra mondiale, la Rivoluzione russa, la Repubblica di Weimar), si sono affermati nel XX secolo tre diversi sistemi economici:

l'economia di mercato : è basata sull'interazione degli operatori economici privati, con un ruolo limitato dello Stato (ordine pubblico, difesa, giustizia, istruzione, costruzione di infrastrutture);

l'economia pianificata : in essa la gestione delle dinamiche del sistema economico compete allo Stato, che elabora piani di breve-media durata che stabiliscono gli obiettivi e regolano conseguentemente l'impiego delle risorse;

l'economia mista : accanto all'interazione degli operatori privati, lo interviene direttamente nel funzionamento del sistema economico, a sostegno della produzione e dell'occupazione, utilizzando la spesa pubblica ed avvalendosi di politiche fiscali e monetarie.

Nelle economie moderne il motore della crescita economica spesso è stato rappresentato dall'innovazione tecnologica: questa componente è stata infatti in grado di generare un effetto a catena/valanga sulle altre variabili macroeconomiche con conseguenziale aumento dei consumi, della produttività (PIL) e dell'occupazione. Fondamentale per la creazione di innovazione sotto forma di ricerca e sviluppo è ed è stato anche l'accesso al credito degli istituti di credito da parte delle imprese per la promozione dei loro investimenti, cioè l'interazione forte tra i sottosistemi di produzione e consumo e il sistema creditizio-finanziario all'interno del sistema economico stesso.

8.4.2 Sistemi economici ideati e mai realizzati pienamente

Aspetti economici possono ravvisarsi in molte utopie. Nel XX secolo vi sono stati, peraltro, sistemi economici "ideali" che sono stati assunti come obiettivo da partiti politici:

il comunismo , caratterizzato dall'abolizione della proprietà privata, dalla proprietà collettiva dei mezzi di produzione ed ispirato al motto "da ciascuno secondo le sue capacità, a ciascuno secondo le sue necessità";

il fascismo , basato anch'essa sulla proprietà collettiva dei mezzi di produzione, ma nell'ambito dello Stato corporativo.

Oltre questi sistemi economici ne esiste un altro, diverso da essi perché apolitico: è il Venus Project, ideato da Jacque Fresco, basato sull'abbondanza delle risorse attraverso l'utilizzo della tecnologia odierna.

Un altro sistema economico apolitico è quello fondato sul modello di Ayres-Warr (base della green economy), simile alla teoria "dell'astronave" ove la terra è considerata un sistema chiuso, come una grande nave, la cui somma delle risorse non è infinita e in cui occorre quindi fare attenzione al rapporto tra lo sfruttamento delle risorse del territorio e le esigenze dell'umanità. In questo modello il saldo entropico viene escluso dalle convenzionali esternalità negative dell'economia neoclassica, perché fondate sulla fisica newtoniana.

8.5 Studio dei sistemi economici

L'Economia politica studia i sistemi economici per individuarne le leggi di funzionamento. L'economia politica in senso moderno nasce quando si afferma la separazione tra etica e politica e ci si pone espressamente il problema della potenza economica degli Stati. Per lungo tempo tale disciplina si è occupata prevalentemente di sistemi economici nazionali; i suoi concetti e metodi si sono tuttavia progressivamente estesi allo studio sia di sistemi sociali di ogni genere (economia aziendale), sia di singoli settori economici (economia agraria, economia industriale ecc.).

La Statistica economica ha invece come obiettivo la misurazione degli aspetti quantitativi di un'economia, dalla misura di grandezze semplici e di loro aggregati, all'analisi della dinamica e alle previsioni economiche, alla stima e alla verifica di modelli di comportamenti economici. Ad esempio, lo stato di un'economia nazionale viene rilevato mediante la contabilità economica nazionale (in Europa si usa il sistema di conti detto Sec95).

La Storia economica tenta di ricostruire il funzionamento di sistemi economici del passato, avvalendosi sia dei concetti dell'economia politica che dei metodi della statistica economica.

A partire dalla conoscenza o analisi del sistema economico è possibile agire sul sistema economico stesso con misure o interventi di politica economica mirati a stimolarne la stabilità o la crescita economica.

La Filosofia dell'economia è una branca della filosofia che studia le questioni relative all'economia o, in alternativa, il settore dell'economia che si occupa delle proprie fondamenta e del proprio *status* di scienza umana.

8.6 Microeconomia

La *microeconomia* è quella branca della teoria economica che studia il comportamento dei singoli agenti economici, o sistemi con un numero limitato di agenti, che operano in condizioni di*scarsità di risorse*. Assieme alla *macroeconomia*, che studia sistemi a livello aggregato, costituisce la macro-categoria in cui si possono raggruppare tutte le discipline legate all'economia politica.

8.6.1 Differenze con la macroeconomia

La macroeconomia si occupa delle grandezze economiche cosiddette "aggregate", come, per esempio, il livello e il tasso di crescita del prodotto nazionale, i tassi di interesse, la disoccupazione e l'inflazione, le quali dipendono in qualche modo dalla "somma" delle grandezze microeconomiche ovvero dai comportamenti microeconomici globali dei consumatori. La filosofia di fondo è dunque quella del riduzionismo classico: il sistema economico globale è descritto a partire dalla somma delle azioni o comportamenti dei singoli consumatori.

Il confine tra la microeconomia e la macroeconomia è diventato negli ultimi anni sempre meno netto. Il motivo principale è dovuto al fatto che anche la macroeconomia ha a che fare con l'analisi dei mercati. Per capire come funzionano, infatti, è necessario comprendere prima di tutto il comportamento dei singoli operatori che costituiscono questi mercati. Quindi i macroeconomisti sono diventati sempre più attenti ai fondamenti microeconomici dei fenomeni economici aggregati.

8.6.2 L'uso e i limiti della teoria microeconomica

Come ogni scienza, l'economia si occupa della *spiegazione* e della *previsione* dei fenomeni osservati. La spiegazione e la previsione sono fondate su *teorie*, le quali servono a spiegare i fenomeni osservati, in termini di un insieme di regole e di ipotesi di base. La teoria dell'impresa, per esempio, nasce da una semplice ipotesi: le imprese cercano di massimizzare il profitto (anche se in alcuni particolari mercati non è sempre così: per esempio secondo la teoria di Baumol in mercati monopolistici le imprese potrebbero perseguire il fine di massimizzare i ricavi totali, mantenendo il pareggio di bilancio del profitto come semplice vincolo sotto cui non eccedere). La teoria utilizza questa ipotesi per spiegare come le imprese scelgono l'ammontare di forza lavoro, di capitale e di materie prime da usare per la produzione, così come le quantità di beni da produrre. Questa teoria serve anche a spiegare in che modo queste scelte dipendono dai *prezzi* dei fattori produttivi e qual è il prezzo che le imprese sono in grado di ottenere per i loro prodotti.

Le teorie economiche servono anche da presupposto per fare previsioni. Quindi, la teoria dell'impresa ci dice se il livello di produzione di un'impresa aumenterà o diminuirà in seguito ad un aumento dei salari o a una diminuzione del prezzo delle materie prime. Utilizzando tecniche statistiche ed econometriche, la teoria può dunque essere usata per costruire *modelli*, sui quali poi basare previsioni di tipo quantitativo. Un modello è una rappresentazione di tipo matematico, fondato sulla teoria economica di un'impresa, di un mercato o di qualche altro tipo di entità economica.

Nessuna teoria è perfettamente corretta. Ognuna parte da assunzioni di base o da approssimazioni più o meno ragionevoli o realistiche della realtà. L'utilità e la validità di una teoria dipendono dalla capacità che essa ha di spiegare e prevedere l'insieme dei fenomeni reali che si vogliono studiare. Dato questo obiettivo, le teorie sono continuamente messe a confronto (testate) con le osservazioni della realtà; in seguito a questo confronto, esse sono spesso soggette a modifica e riformulazione, e a volte anche al rigetto. Il processo di verifica e riformulazione è di primaria importanza per lo sviluppo dell'economia come scienza. Per valutare una teoria, è importante tenere presente che essa è necessariamente imperfetta.

8.6.3 Analisi positiva e analisi normativa

Le teorie nascono per spiegare i fenomeni, vengono confrontate con l'osservazione e sono utilizzate per costruire modelli su cui basare le previsioni. L'uso della teoria economica per formulare previsioni è importante sia per i manager delle imprese sia per le politiche economiche pubbliche.

La microeconomia dà risposta a diversi interrogativi siano essi di natura *positiva* o di natura *normativa*. Gli interrogativi di natura ″positiva“ hanno a che fare con la spiegazione e la previsione, mentre le questioni di natura ″normativa“ riguardano ciò che dovrebbe essere.

A volte si vuole andare oltre la spiegazione e la previsione per porsi domande del tipo: «Che cosa sarebbe meglio fare?». È questo il campo dell'analisi *normativa*, anch'essa importante sia per i manager d'impresa sia per coloro che devono prendere decisioni di politica economica. L'analisi normativa non si occupa soltanto delle diverse opzioni di politica economica, ma riguarda anche l'implementazione delle politiche prescelte. Questa analisi è spesso accompagnata da giudizi di valore. Ogni volta che sono necessari giudizi di valore, la microeconomia non è in grado di dirci quale sia la soluzione migliore, ma può chiarire i vari trade-off (scelte alternative) e aiutare quindi a individuare i problemi e a mettere a fuoco i termini della questione.

8.7 Teoria del consumatore

La teoria del comportamento del consumatore si fonda su un modello razionale di scelta che si può riassumere dicendo che fra tutte le alternative possibili il consumatore sceglie quella che egli ritiene migliore. La teoria neoclassica del I due pilastri di questa teoria sono il *vincolo di bilancio* e le *preferenze*.

Il vincolo di bilancio Il consumatore dispone di una certa somma (il suo reddito o le sue risorse) per acquistare dei beni o dei servizi. Il prezzo di questi beni è fisso. Il vincolo di bilancio ci dice che la somma spesa per l'acquisto di questi beni non deve essere superiore al reddito disponibile. Se si fa l'ipotesi di non sazietà, allora tutto il reddito sarà speso e, nel caso di due beni, il vincolo di bilancio può essere rappresentato graficamente da una retta con una pendenza negativa.

Le preferenze Le preferenze del consumatore sono espresse da una funzione di utilità quasi-concava (curve di indifferenza convesse). Graficamente e nel caso di due beni si utilizza il medesimo metodo delle carte geografiche o meteorologiche. Si prende un valore dell'utilità e si costruisce una curva di indifferenza. La pendenza di questa curva è chiamata il saggio marginale di sostituzione poiché esprime quante unità del secondo bene devono essere sostituite con un'unità del primo bene allo scopo di avere la medesima utilità.

Paul Samuelson ha proposto di dedurre le preferenze osservando il consumatore mentre fa gli acquisti. La sua teoria della preferenza rivelata permette una verifica operazionale del modello del consumatore.

8.7.1 Teoria delle scelte

Siccome la teoria del consumatore serve a spiegare le sue scelte (i beni acquistati), si può costruire una teoria delle scelte senza passare per la funzione d'utilità o le curve di indifferenza. Prendiamo dei complessi o panieri di beni **A**, **B**, **C**, eccetera. Un paniere può essere costituito, per esempio, di 2 kg di pane, 3 litri di vino, 1 giornale, eccetera. Esprimiamo le preferenze del consumatore utilizzando la relazione binaria $\succcurlyeq$, per esempio $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}$ (**A** preferito o uguale a **B**, oppure **B** almeno tanto buono quanto **A**). Questa relazione è simile al segno matematico $\geqslant$ (maggiore o uguale a). Supponiamo che questa relazione binaria soddisfi gli assiomi seguenti:

1) riflessività: $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{A}$

2) transitività: $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \succcurlyeq \mathbf{C}$ implica $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{C}$

3) completezza: si ha $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}$ oppure $\mathbf{B} \succcurlyeq \mathbf{A}$ o i due casi (indifferenza)

Se queste condizioni sono soddisfatte abbiamo una relazione di ordine totale che può essere utilizzato per spiegare le scelte del consumatore. Basta però aggiungere l'assioma seguente (una condizione matematica):

4) continuità: $\{\mathbf{A} \in X | \mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}\}$ e $\{\mathbf{A} \in X | \mathbf{B} \succcurlyeq \mathbf{A}\}$ sono insiemi chiusi, e allora esiste una funzione di utilità. Le preferenze che non possono essere espresse da una funzione di utilità sono dei casi speciali (per esempio l'ordine lessicografico).

8.7.2 Equilibrio del consumatore

Il consumatore sceglie il paniere di beni che preferisce, tenendo conto del reddito disponibile. Matematicamente, si tratta di massimizzare l'utilità sotto il vincolo di bilancio. Utilizzando il metodo di Lagrange, si può scrivere, nel caso di due beni x_1 , x_2:

$$L = u(x_1, x_2) + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

dove p_1 , p_2 sono i prezzi e y il reddito disponibile.

Le derivate parziali (condizione di primo ordine) sono

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \tag{8.3}$$

Eliminando λ, si ottiene:
: $\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2} = \lambda$

L'utilità marginale ($\frac{\partial u}{\partial x_1}$), divisa per il prezzo, deve essere uguale per tutti i beni. Si tratta della seconda legge di Hermann Heinrich Gossen. Graficamente, il saggio marginale di sostituzione deve essere uguale al rapporto dei prezzi.

[[File:ConsumersOptimum.png | framed | center | Paniere ottimo del consumatore dati due beni x₁ e x₂ e reddito y]]

Se la curva di indifferenza è convessa, questa condizione garantisce un massimo di utilità. Una curva concava è poco probabile poiché allora il consumatore acquista un solo bene. Una soluzione ad angolo si presenta quando un consumatore non acquista un bene, anche se lo desidera, poiché costa troppo.

8.7.3 La funzione di domanda

La teoria del consumatore serve a spiegare la domanda di beni e servizi. Prendendo l'esempio di due beni, sviluppato qui sopra, si ottiene, risolvendo il sistema di equazioni delle condizioni di primo ordine:

$x_1 = \varphi_1(p_1, p_2, y) \quad ; \quad x_2 = \varphi_2(p_1, p_2, y)$

La domanda dipende dunque dal prezzo di tutti i beni e dal reddito del consumatore.

Se il prezzo di tutti i beni e il reddito raddoppiano, la domanda non cambia. Per esempio, il passaggio dalla lira all'euro non doveva avere nessun effetto sulla domanda (tutto è diviso per 1936.27) se non ci fosse stato il problema degli arrotondamenti.

Gli effetti di un cambiamento dei prezzi o del reddito sono studiati utilizzando il concetto di elasticità della domanda. Designiamo con il simbolo ε_{ij} l'elasticità della domanda del bene i quando il prezzo j aumenta. Se la domanda del bene i è elastica (superiore all'unità in valore assoluto), allorquando il suo prezzo aumenta la spesa diminuisce e viceversa per una domanda inelastica.

L'elasticità della domanda quando il reddito aumenta è chiamata elasticità-reddito. Designiamo con il simbolo η_i questa elasticità. L'elasticità-reddito è superiore all'unità per i beni superiori, inferiore all'unità per i beni necessari (questi due tipi di beni sono chiamati beni normali) e infine negativa per i beni inferiori. La legge di Engel ci dice che i beni alimentari sono dei beni necessari.

8.7.4 Effetto di sostituzione

L'effetto di sostituzione è l'effetto osservato qualora vi siano modifiche nei prezzi relativi delle merci.

Il grafico sottostante mostra l'effetto di un aumento di prezzo per il bene Y. Se il prezzo di Y aumenta, il vincolo di bilancio farà perno da BC2 a BC1.

Per massimizzare l'utilità, con la riduzione del vincolo di bilancio, BC1, il consumatore potrà riassegnare il reddito per raggiungere la curva di indifferenza più elevata disponibile, che è tangente alla BC1. Come mostrato nel diagramma qui di seguito, che la curva è I1, e quindi la quantità di bene acquistato Y si sposterà da Y2 di Y1, e l'importo del bene acquistato X per il passaggio da X2 a X1. L'effetto opposto si verifica se il prezzo di Y diminuisce causando il passaggio da BC2 per BC3, e I2 di I3.

[[File:effetto sostituzione.JPG | 400px | left]]

8.7.5 Effetto di reddito

L'effetto di reddito è il fenomeno osservabile mediante cambiamenti osservati in potere d'acquisto. Si rivela il cambiamento in termini di quantità richiesta promossa da un cambiamento in termini di reddito reale (utilità). Graficamente, fintanto che i prezzi rimangono costanti, la modifica del reddito creerà un parallelo spostamento del vincolo di bilancio. Aumentando il reddito si sposterà a destra il vincolo di bilancio, in quanto si possono acquistare maggiori quantità di entrambi i beni, e la diminuzione del reddito si sposterà a sinistra.

[[File:effetto reddito normale.JPG | 400px | left]]

Eugen Slutsky ha utilizzato la teoria del consumatore per determinare il segno di una variazione del prezzo. Normalmente, quando il prezzo aumenta la domanda diminuisce (segno negativo). C'è però il caso dei beni inferiori che impedisce una risposta univoca. Slutsky ha allora diviso in due parti l'effetto di una variazione del prezzo. Un aumento del prezzo diminuisce il reddito reale del consumatore. Se si vuole ottenere l'effetto puro, bisogna eliminare questo effetto di reddito. Supponiamo allora che il consumatore sia compensato affinché possa ancora acquistare il medesimo paniere di beni. Slutsky ha mostrato che il consumatore non lo acquista ma diminuisce la domanda del bene che è diventato più caro. L'equazione ottenuta da Slutsky è:

$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ (se consumatore compensato) $\quad - \frac{\partial x_1}{\partial y} x_1$

Utilizzando l'elasticità-prezzo e l'elasticità-reddito si può scrivere:

$\varepsilon_{11} = \xi_{11} - \omega_1 \eta_1$

Dove ξ_{11} è chiamata l'elasticità-prezzo pura (senza l'effetto di reddito) e ω_1 è la parte del reddito consacrato al bene 1.

Il primo termine è sempre negativo. Il secondo è pure negativo per i beni normali. Se un bene è inferiore allora il secondo effetto è positivo e l'effetto totale è indeterminato. C'è quindi il caso teorico di un effetto di reddito che può più che compensare l'effetto di sostituzione è arrivare ad un effetto totale positivo. Questo bene è chiamato un bene Giffen dal nome dell'economista che avrebbe trovato questo caso durante la carestia irlandese degli anni 1740-1741. L'esistenza di beni Giffen è contestata. Possono essere considerati una curiosità teorica. In definitiva, la curva di domanda ha una pendenza negativa.

Gli effetti incrociati (variazione della quantità del bene 1 quando il prezzo del bene 2 aumenta) possono essere positivi o negativi. Nel caso generale, l'equazione di Slutsky diventa:

$\varepsilon_{ij} = \xi_{ij} - \omega_j \eta_i$

Un bene sostituto ha un'elasticità positiva (effetto lordo o non compensato se $\varepsilon_{ij} > 0$; effetto netto o compensato se $\xi_{ij} > 0$). Un bene complemento ha un'elasticità negativa (effetto lordo o netto secondo le elasticità).

La *curva di indifferenza* in microeconomia è l'insieme dei beni che garantiscono al consumatore lo stesso livello di utilità. In termini formali, data una generica funzione di utilità del tipo:

$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dove "U" è l'utilità e x_i è il bene i-esimo, la curva di indifferenza è definita come:

$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{U}\}$

Ad ogni livello di utilità corrisponde dunque una diversa curva di indifferenza.

Supponiamo per esempio che un consumatore acquisti delle combinazioni diverse di beni (o più verosimilmente di due panieri di beni). L'ottenimento di una quantità maggiore di un bene compensa la rinuncia ad alcune unità di un secondo bene.

La convessità della curva è dovuta alla *sostituzione*. Se il bene è scarso avremo un effetto di sostituzione maggiore e l'utilità marginale sarà maggiore dell'utilità marginale del bene più scarso.

L'inclinazione in ogni punto della curva di indifferenza è il *saggio marginale di sostituzione*, che misura il rapporto di scambio tra due beni tale da non far variare il livello di utilità, ed è quindi una misura della sostituibilità soggettiva tra beni.

La combinazione fra il vincolo di bilancio rilevante, determinato dal prezzo relativo dei beni e dalla ricchezza, e la famiglia di curve di indifferenza consente di risolvere il problema di massimizzazione vincolata dell'utilità del consumatore. In particolare, il paniere ottimale è quello in corrispondenza del quale, data qualsiasi coppia di beni, il saggio marginale di sostituzione eguaglia il loro prezzo relativo. Per il calcolo analitico del punto dove il consumatore massimizza la soddisfazione (punto di tangente tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza), ricordando la condizione di tangenza $y = (p_x/p_y)x$ e tenendo conto che essendo $R = p_x x + p_y y$, risolvendo con qualche passaggio algebrico avremo che $x = R/2p_x$ ed $y = (p_x/p_y)R/2p_x$. Sostituendo i valori noti di R, p_x e p_y troveremo l'esatto punto di tangenza.

8.7.6 Elasticità della domanda

In microeconomia si parla di *elasticità della domanda*, o sensibilità alla variazione dei prezzi, quando all'aumento dei prezzi corrisponde una riduzione della domanda e alla riduzione dei prezzi un aumento della domanda.

L' elasticità della domanda rispetto ai prezzi venne elaborata dall'economista Léon Walras, e indica l'attesa variazione percentuale della domanda di un dato prodotto/servizio (quantità venduta Q) rispetto ad una variazione percentuale del prezzo dello stesso prodotto o di altri prodotti (elasticità incrociata):

$$e_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Gli incrementi possono essere fatti tendere a zero, considerando variazioni infinitesime anziché variazioni finite, per usare le derivate e i relativi strumenti di calcolo:

$$e_p = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial p}{p}}$$

Ogni bene differisce dall'altro per quanto riguarda l'elasticità, ossia la sensibilità alle variazioni del prezzo. L'elasticità della domanda dipende da numerosi fattori economici, anche se tende ad essere più elevata per i beni di lusso, per i quali sono disponibili beni sostitutivi. Vi sono diverse categorie di elasticità:

domanda elastica rispetto al prezzo Quando una variazione del prezzo dell'1% genera una variazione della quantità domandata superiore all'1%.

domanda a elasticità unitaria Quando una variazione del prezzo dell'1% genera una variazione della domanda dell'1%.

domanda rigida rispetto al prezzo Quando una variazione del prezzo dell'1% genera una variazione della quantità domandata inferiore all'1%.

Se tale valore è negativo, la funzione di domanda, inclinata negativamente, è del tipo $P = a - b \cdot Q$. La pendenza (o coefficiente angolare) di una retta è $b = \frac{\partial P}{\partial Q}$ (oppure $b = \frac{\partial Q}{\partial P}$, se si considera la funzione inversa $Q = a - b \cdot P$).

Per quanto riguarda la relazione tra l'elasticità ed il ricavo, dove il ricavo è dato dal prodotto fra quantità e prezzo, sappiamo che:

- se la domanda è *rigida* rispetto al prezzo, una diminuzione del prezzo riduce il ricavo totale.
- se la domanda è *elastica* rispetto al prezzo, una diminuzione del prezzo aumenta il ricavo totale.
- se la domanda è a *elasticità unitaria*, una diminuzione del prezzo non modifica il ricavo totale.

Lo stato è incentivato a tassare beni con curva di domanda anelastica.

È evidente che l'elasticità è strettamente legata alla funzione di domanda. Solitamente si usa per misurare la reattività del mercato rispetto al prezzo (Q è la variabile dipendente e P la leva sulla quale il produttore può agire).

L'elasticità può però essere usata anche in senso opposto, per misurare la variazione del prezzo in seguito ad un aumento dell'offerta: in questo caso si sostituisce a Q la funzione domanda $Q = a - b \cdot P$. Tale calcolo può per esempio essere utile quando una nuova azienda entra in un settore, per cui le aziende già presenti, per favorire una rapida espulsione dal mercato del nuovo concorrente, aumentano l'offerta in modo da abbassare i prezzi, proprio nel momento in cui l'altro ha contratto dei debiti, anche a causa agli alti costi fissi, proprio dovuti per l'ingresso sul mercato.

L'*elasticità incrociata* ha una notevole importanza in quanto misura la sostituibilità di beni succedanei o alternativi alla funzione prezzo. Per esempio burro contro margarina, oppure Mercedes classe E contro BMW serie 5.

L'elasticità parte dal presupposto che nessun soggetto economico ha un tale potere sul mercato da poter determinare contemporaneamente sia la quantità che il prezzo. Se uno è conosciuto, l'altro è determinato dal mercato e non è noto a priori, ma è una grandezza da misurare.

La funzione della domanda è in generale una curva, semplificata in una retta la cui equazione è un caso particolare di quella della curva. Se la domanda è approssimata con una retta, essendo una funzione lineare, è anche invertibile, e come detto si può anche esprimere la quantità in funzione del prezzo.

8.7.7 Utilità marginale

L'*utilità marginale* di un bene è concetto cardine della teoria neoclassica del valore in economia ed è definibile come l'incremento del livello di utilità (ΔU), ovvero della soddisfazione che un individuo trae dal consumo di un bene, ricollegabile ad aumenti marginali nel consumo del bene (Δx_i), dato e costante il consumo di tutti gli altri beni.

Definizione 8.1. Si dice utilità marginale la quantità di soddisfazione che fornisce ogni singola dose di un bene consumato.

In termini non formali, l'utilità marginale può definirsi come l'utilità apportata dall'ultima unità o dose consumata di un bene.

In modo più formale, data una funzione di utilità $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, una funzione cioè che lega il consumo di quantità date di beni e servizi al livello di utilità, l'utilità marginale del bene x_i è data dalla derivata parziale della funzione rispetto ad x_i; in simboli:

:$U_i = \frac{\partial U(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i} (> 0)$

La legge del *utilità marginale decrescente* afferma che all'aumentare del consumo di un bene, l'utilità marginale di quel bene diminuisce. La *condizione di equilibrio* afferma che ogni individuo effettua le proprie scelte di consumo in modo che ogni singolo bene fornisca le stesse utilità marginali per euro di spesa. Il *principio di utilità marginali uguali per euro di spesa per ciascun bene* afferma che la condizione essenziale per ottenere massimo soddisfacimento o utilità è la seguente: di fronte ai prezzi di mercato dei beni un consumatore con reddito dato ottiene il massimo soddisfacimento quando l'utilità marginale dell'ultimo euro speso per un bene è esattamente uguale all'utilità marginale dell'ultimo euro speso per qualsiasi altro bene.

L'ipotesi di utilità marginale decrescente

Al concetto di utilità marginale risulta strettamente collegato l'assunto di "utilità marginale decrescente". In pratica si assume che l'utilità marginale di un bene diminuisca al crescere del livello assoluto di consumo del bene. Formalmente questo comporta assumere che:

[[File:Erstes gossensches gesetz.png | thumb | upright=2 | Figura 1:Funzione di utilità]]
: $U_{ii} = \frac{\partial^2 U(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i^2} < 0$

Queste due ipotesi implicano che la funzione di utilità sia monotona crescente e concava rispetto al consumo dei singoli beni.

Solitamente si assume anche che:

$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial U}{\partial x_i} = +\infty$

$\lim_{x_i \to +\infty} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$

8.7.8 Un esempio

Per comprendere meglio i concetti esposti si può pensare all'atteggiamento che l'individuo medio potrebbe avere di fronte ad una crostata di fragole.

Il primo pezzo di torta sarebbe molto gradito, apportando un incremento Δu_1. L'incremento di utilità che genererebbe un secondo pezzo di crostata, sebbene consistente, sarebbe sicuramente minore del primo ($\Delta u_2 < \Delta u_1$). L'incremento del terzo ancora minore e così via.

Nel caso della crostata di fragole è poi anche verosimile immaginare che vi sarà un punto in cui il nostro consumatore sarà "sazio".

Una volta raggiunto il *punto di sazietà* eventuali altri incrementi del consumo del bene (il mangiare altri pezzi di torta) probabilmente apporteranno una *disutilità*, diminuiranno cioè il livello di soddisfazione individuale.

In corrispondenza del punto di sazietà l'utilità marginale è nulla (il consumatore è indifferente se mangiare il pezzo di crostata oppure no) ed il suo livello di utilità è massimo.

8.7.9 Prezzo di mercato e l'utilità marginale decrescente

Se un individuo possiede un bene o un servizio la cui utilità marginale, per lui, è inferiore a quella di qualche altro bene o servizio per il quale avrebbe potuto scambiarlo, allora è nel suo interesse effettuare il commercio.

Se l'utilità marginale di un bene o un servizio sta diminuendo e l'altro non è in aumento, un individuo tenterà di ottenere un rapporto sempre maggiore tra ciò che si acquista a ciò che viene venduto.

In economia, l'utilità marginale di una quantità è chiaramente associata al miglior bene o servizio che si potrebbe acquistare a parità di prezzo. Questo concetto è alla base della teoria della domanda e dell'offerta, nonché degli aspetti essenziali dei modelli di concorrenza imperfetta.

8.7.10 Il paradosso di acqua e diamanti

Il "paradosso dell'acqua e dei diamanti", più comunemente associato ad Adam Smith, è l'apparente contraddizione che l'acqua possiede un valore di gran lunga inferiore a quello dei diamanti, anche se l'acqua risulta essere vitale per un essere umano.

Il prezzo è determinato sia dall'utilità marginale che dal costo marginale: la chiave per il paradosso è che il costo marginale dell'acqua è di gran lunga inferiore a quello dei diamanti. Questo non vuol dire che il prezzo di un qualsiasi bene o servizio è semplicemente l'utilità marginale che ha per un individuo, piuttosto, gli individui sono disposti a negoziare sulla base delle rispettive utilità marginali dei beni che hanno o che desiderano, dunque i prezzi risultano vincolati da tali utilità marginali.

8.7.11 La legge di Engel

La *legge di Engel* indica che la proporzione del reddito di una famiglia che viene consacrato all'alimentazione diminuisce quando il reddito aumenta.

Esaminando le spese di circa 200 famiglie belghe, l'economista tedesco Ernst Engel ha costatato che la proporzione del reddito che viene consacrato all'alimentazione diminuisce quando il reddito aumenta. Siccome questa relazione è valevole per tutti i paesi, si parla oggi di legge di Engel. Ciò significa che l'elasticità della domanda rispetto al reddito è inferiore all'unità. Infatti, sia y il reddito, p il prezzo e q la quantità di beni alimentari. La proporzione del reddito consacrato all'alimentazione è:

$\omega = \frac{p \cdot q}{y}$

Se questa proporzione diminuisce quando il reddito aumenta la derivata è negativa. Si ha allora:

$\frac{d\omega}{dy} = \frac{py\frac{dq}{dy} - pq}{y^2} < 0 \rightarrow \eta = \frac{dq}{dy}\frac{y}{q} < 1$

La legge di Engel è una delle leggi tra le più generali in economia. Tutte le stime effettuate mostrano che la legge è verificata per i paesi sviluppati come per i paesi in via di sviluppo. Ciò non significa che le elasticità siano uguali. Si trova sovente delle elasticità basse per i paesi sviluppati o per i redditi alti e delle elasticità più alte per i paesi in via di sviluppo o per i redditi bassi.

Si può rappresentare graficamente la relazione tra la spesa per un bene e il reddito. Questa relazione è chiamata la curva di Engel.

8.8 La teoria della produzione

La*teoria della produzione* è lo studio della produzione o del processo economico di conversione di beni primari ("input") in beni e prodotti finali a valore aggiunto ("output"). Dato che la produzione è un processo che si verifica attraverso il tempo e lo spazio, possiede uno stretto contatto con il concetto matematico di flusso. La produzione è infatti misurata come "tasso di produzione in output in rapporto all'unità di tempo".

I tre aspetti principali del processo di produzione sono:

1. la quantità di beni o servizi da produrre;
2. la forma del bene o servizio creato;
3. la distribuzione spazio-temporale del bene o servizio prodotto.

8.8.1 Fattori di produzione

Gli ingressi o le risorse utilizzate nel processo di produzione vengono chiamati fattori di produzione. La miriade di possibili fattori di solito è raggruppata in cinque categorie, ovvero:

1. materia prima;
2. macchinario;
3. lavoro;
4. capitale;
5. terra.

Nel lungo periodo, tutti questi fattori possono essere variabili. Il breve periodo, invece, è definito come un periodo in cui è fissato almeno uno dei fattori di produzione.

Un fattore di produzione fisso è quello la cui quantità non può essere facilmente modificata. Alcuni esempi sono le attrezzature più importanti o lo spazio dedito alle fabbriche.

Un fattore di produzione variabile è uno il cui utilizzo può mutare facilmente. Gli esempi includono il consumo di energia elettrica, i servizi di trasporto e i materiali di base.

8.8.2 Funzione di produzione

[[File:Total product curve small.png | thumb | Esempio di funzione di produzione]]

Dato un insieme di produzione (l'insieme di tutte le combinazioni di input/output tecnicamente realizzabili), la *funzione di produzione* consiste nella frontiera di tale insieme. Essa descrive il massimo livello di output dato un vettore di input.

Generalmente la funzione di produzione è descritta come:

$q = f(\mathbf{X})$,

dove q è la quantità di prodotto e $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ è il vettore di input.

[[File:Average and marginal product curves small.png | thumb | Esempio di curve di produttività marginale e media]]

Data una funzione di produzione, la variazione del livello di output in corrispondenza di una variazione della i-esima variabile è chiamata *produttività marginale* del fattore x_i, ed è definita come:

$PMG_i = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}$.

Il rapporto tra il livello di output e l'ammontare complessivo dell'input utilizzato è invece chiamato *produttività media* definita come: name="Varian"/>

$PME_i = \frac{df(x_i)}{dx_i}$.

È degno di nota che, finché PMG<sub>i</sub»PME_i, la produttività media dell'i-esimo input sarà crescente.

Dimostrazione

$\frac{dPME_i}{dx_i} > 0;$

$\frac{f'(x_i)}{x_i} - \frac{f(x_i)}{{x_i}^2} > 0;$

$\frac{f'(x_i)}{x_i} > \frac{f(x_i)}{{x_i}^2};$

$f'(x_i) > \frac{f(x_i)}{x_i};$

$PME_i > PMG_i$.

8.8.3 Isoquanti e isocosti

Fissato un valore di output q_0, si otterrà la relazione

$q_0 = f(x_1, x_2)$,

la quale descrive la mappa dell'isoquanto (ovvero, tutte le combinazioni di input che restituiscono il valore di output fissato).

Ora, detta $C = c(w_1, w_2, q)$ la funzione di costo (funzione che esprime i costi minimi necessari per produrre q unità di output, dati i prezzi di input w_1 e w_2), per un determinato costo c_0 tutte le combinazioni di input che generano tale costo possono essere rappresentate mediante la cosiddetta retta di isocosto, la cui equazione è:

$x_1 = -\frac{w_2}{w_1} \cdot x_2 + \frac{c_0}{w_1}$,

avente come coefficiente angolare (la pendenza della retta rispetto agli assi) $-\frac{w_2}{w_1}$. È da notare che, se w_1 e w_2 sono costanti, le rette di isocosto saranno tutte parallele fra loro.

[[File:TE-Production-Isoquant.png | thumb | Retta di isocosto tangente alla curva di isoquanto]]

Dato un isoquanto, per minimizzare i costi di produzione, è necessario individuare il punto di tangenza con la retta di isocosto più bassa possibile.

8.8.4 Saggio di sostituzione tecnica

Il saggio di sostituzione tecnica (o saggio tecnico di sostituzione, STS) rappresenta la misura della sostituibilità degli input, fissato un output, ed è dato da:

$STS_{2,1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$.

[[File:MRTS small.png | thumb | Saggio marginale di sostituzione tecnica]]

Il saggio marginale tecnico di sostituzione (o saggio marginale di sostituzione tecnica, SMST), invece, rappresenta la pendenza dell'isoquanto, ed è dato da:

$SMST_{2,1} = \frac{dx_2}{dx_1}$.

Esiste un teorema che dimostra quanto segue:

$SMST_{2,1} = -\frac{PMG_1}{PMG_2}$.

Dimostrazione Dato che, se si parla di isoquanti, q risulta essere fisso, la sua derivata sarà nulla. Ma, per la formula del differenziale totale:

$dq = dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + dx_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2};$

$\Rightarrow dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + dx_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0;$

$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2};$

$\Rightarrow SMST_{2,1} = -\frac{PMG_1}{PMG_2}$.

8.8.5 Concorrenza perfetta e monopolio

Si è in presenza di una *concorrenza perfetta* laddove si riscontrino le seguenti ipotesi:

Polverizzazione (o[atomizzazione) del mercato : esistono molti piccoli produttori dello stesso bene.

Omogeneità del prodotto : le imprese non hanno la possibilità di differenziare i propri prodotti. Di conseguenza, il consumatore percepisce in maniera identica il valore dello stesso prodotto di due imprese distinte.

Assenza di barriere all'entrata : le imprese che vogliono entrare nel mercato non incontrano alcun ostacolo.

Se sussistono tali condizioni, le imprese del mercato possono essere considerate price-taker. Il prezzo, infatti, dipende solo dalla domanda e dall'offerta del mercato del bene in questione.

Nell'analisi della produzione, una delle caratteristiche fondamentali del regime di concorrenza perfetta è che l'impresa, per massimizzare il proprio profitto, sceglie il prezzo eguagliandolo al costo marginale di produzione.

Dimostrazione Detto p^e il prezzo di equilibrio:
$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0;$
$\Rightarrow \frac{\partial (q \cdot p^e - C(q))}{\partial q} = p^e - \frac{\partial C(q)}{\partial q} = 0;$
$\Rightarrow p^e = \frac{\partial C(q)}{\partial q} = CMG.$

Il *monopolio*, invece, è una forma di mercato in cui una merce, di cui non esiste un sostituto equivalente, è prodotta da un'unica impresa. Sono inoltre presenti delle barriere all'entrata, quindi non è possibile per le altre imprese entrare facilmente nel mercato. L'impresa che detiene il monopolio viene detta price maker.

8.9 concorrenza perfetta

In economia, la *concorrenza perfetta* (in inglese "perfect competition" o "pure competition") è una forma di mercato caratterizzata dall'impossibilità degli imprenditori di fissare il prezzo di vendita dei beni prodotti, che è fissato invece dall'incontro della domanda e dell'offerta, che a loro volta sono espressione dell'utilità e del costo marginale. L'impresa non può determinare contemporaneamente quantità e prezzo d'equilibrio del mercato.

La definizione di concorrenza perfetta fa riferimento a quella situazione in cui, per il numero degli operatori economici presenti sul mercato, ciascuno di essi (sia esso espressione della domanda ovvero *consumatore* e/o sia esso espressione dell'offerta ovvero *produttore*) non ha la possibilità di influenzare in alcun modo, attraverso i propri comportamenti, il prezzo di vendita dei beni e/o servizi scambiati sul mercato.

==Descrizione==

La curva di domanda è semplificata con una retta, ovvero una funzione lineare e quindi invertibile di prezzo e quantità, inclinata negativamente. Il mercato di concorrenza perfetta, lungi dall'essere una rappresentazione veritiera della realtà, costituisce un presupposto alla base di molti modelli economici di analisi dell'equilibrio.

L'equilibrio concorrenziale si contrappone ad altri modelli, ma possiede delle caratteristiche che lo rendono desiderabile rispetto a questi ultimi dal punto di vista dell'efficienza economica.

Un mercato si può definire perfettamente concorrenziale quando si verificano le seguenti ipotesi:

1. il bene prodotto è omogeneo, quindi le unità di un certo tipo di bene sono tutte uguali tra loro;
2. le imprese operano in condizione di "informazione completa e simmetrica" (trasparenza di mercato), ossia tutti gli agenti economici (produttori e consumatori) dispongono di informazioni complete in merito ai costi di produzione, ai prezzi, alle caratteristiche dei beni, alla disponibilità sul mercato, al salario reale di equilibrio, ecc.;
3. le imprese che operano sul mercato hanno una dimensione atomistica, tale da non poter influenzare in alcun modo i prezzi di vendita (le imprese sono Price-taker);
4. i consumatori hanno chiare le loro preferenze e le imprese conoscono le tecnologie messe a loro disposizione, che sono uguali per tutti e non possono essere sostituite;
5. gli agenti economici dispongono delle stesse informazioni in maniera certa;
6. la chiusura di un'impresa, giungerà quando essa non sarà più in grado di coprire i costi variabili, e quando il prezzo di vendita del bene sul mercato sarà inferiore al [[costo variabile]] unitario del bene;
7. libertà di entrata e uscita dal mercato, quindi non c'è il vincolo dei costi di transazione;
8. sono resi certi i diritti di proprietà delle risorse disponibili, in modo da conferire agli agenti economici una certa responsabilità nell'impiego dei propri mezzi;

Secondo la teoria microeconomica classica, la concorrenza perfetta è il meccanismo ottimale per l'allocazione efficiente delle risorse in quanto il prezzo di vendita che si forma sul mercato è quello che remunera tutti i fattori di produzione in base alla loro produttività marginale e non consente: creazione di extra profitti e sfruttamento del lavoro. Inoltre il prezzo (o meglio il sistema dei prezzi relativi) è anche quello che consente ai consumatori di massimizzare la loro soddisfazione. Questo risultato è noto come primo teorema dell'economia del benessere.

La concorrenza perfetta è stata studiata in particolar modo da Léon Walras.

8.9.1 Equilibrio e impostazione del prezzo

Impresa è *price taker* in un mercato di concorrenza perfetta. L'impresa in questo caso trova l'equilibrio e può essere nel breve periodo o nel lungo periodo agendo sui costi CMg = RMg = P un'impresa che massimizza i profitti stabilisce di produrre un livello di output al quale il costo marginale è uguale al prezzo. Graficamente questo significa che la curva del costo marginale di un'impresa corrisponde alla curva di offerta.

Questa equazione è la condizione di massimo profitto, che si ricava ponendo a zero la derivata del profitto rispetto alla quantità prodotta, per trovarne il massimo.

La derivata dei ricavi totali rispetto alla quantità è il prezzo, mentre il termine che riguarda i costi fissi (indipendenti dalla quantità prodotta) si azzera durante la derivazione.

Il ricavo marginale e costo marginale sono l'incremento di ricavo e costo per l'impresa per ogni unità *nuova* di prodotto; se il costo e ricavo marginale si eguagliano, l'aggravio di costi e l'incremento di ricavi che genera un nuovo prodotto si compensano e danno un incremento di profitto pari a zero. È coerente il fatto che il massimo profitto si trovi in corrispondenza di un incremento dei profitti nullo (il valore è massimo quando la variabile non può più aumentare).

La decisione di chiusura in concorrenza perfetta:

- nel breve periodo i costi fissi sono irrecuperabili quindi l'impresa deve coprire almeno i costi variabili;
- nel lungo periodo l'impresa deve coprire tutti i costi;
- se non si coprono i costi si cessa l'attività.

Quando la retta del ricavo marginale, che coincide con il prezzo, scende al di sotto del minimo della curva del costo variabile medio, non è più conveniente produrre. Tale punto di minimo è detto punto di fuga (dei produttori dal mercato).

Quando il prezzo è compreso fra il minimo del costo totale medio e quello del costo variabile medio, ci si trova in una situazione in cui è conveniente produrre in perdita pur di ammortizzare gli alti costi fissi.

Di seguito, riportiamo i principali grafici che descrivono un regime di concorrenza perfetta.

1. il mercato fa il prezzo;
2. confronto prezzo dato dal mercato e costi marginali (CMg);
3. confronto CMg con costi variabili (CV);
4. nel lungo periodo prezzo uguale al minimo del costo medio e al costo marginale.

[[File:Dom-off Cmg.JPG]] [[File:Me-cmg.JPG]]

8.9.2 Critica al modello

Intorno agli anni '40 nasce la tesi della concorrenza non-perfetta, e quindi nuovi approcci che tentano di risolvere il problema dell'informazione incompleta:

- la teoria dei giochi;
- la teoria dei contratti.

Nella realtà:

- Non c'è omogeneità di prodotto, ma differenziazione per massimizzare il profitto e ottenere una posizione vantaggiosa sul mercato; questo consente di avere un margine di manovra sul prezzo praticato, benché minimo (le imprese non sono price-taker): monopolio. Inoltre la differenziazione di prodotto genera anche dei tentativi di carpire quali sono i gusti del consumatore.
- È impossibile che ci siano infiniti operatori sul mercato, per via delle economie di scala: oligopolio.

Friedrich von Hayek: "L'informazione in mano ai vari operatori presenti sul mercato è imperfetta"; quando si analizza la collettività, non si può definire l'informazione come data, acquisita, rigida, ma è necessario capire quanta e quale informazione hanno gli individui a loro disposizione; infatti, una comunità di individui che interagiscono non ha informazioni immutabili e informazioni sono anche le decisioni che gli altri individui prendono, influenzando in questo modo l'ambiente circostante (anche le imprese). La concorrenza perfetta è un processo, un punto di partenza. Attraverso la sua evoluzione porta al risultato di uno stato di equilibrio ideale (il prezzo unico) che è il punto di arrivo.

Milton Friedman: non può esserci un punto d'equilibrio nella concorrenza. Una teoria è corretta quando non viene smentita dalla realtà: per arrivare ad una teoria, è necessario formulare un'ipotesi, che deve essere generale e astratta (non reale); la teoria non descrive, non analizza comportamenti, ma individua delle condizioni. Il modello di concorrenza perfetta rappresenta una legge generale, con cui analizzare e osservare i mercati reali.

Sia Hayek che Friedman sostengono che, pur non potendo essere assunta a verità assoluta, la concorrenza perfetta è una teoria utile per formulare previsioni.

8.10 Domanda e offerta

[[File:Supply-and-demand.svg | thumb | Il prezzo P di un prodotto, che rende massimo il ricavo, è determinato dall'equilibrio tra le due curve della domanda D e dell'offerta S. Il grafico mostra l'effetto di una crescita della curva di domanda da D1 a D2: il prezzo P e la quantità totale Q venduta aumentano ambedue.]]

In economia *domanda e offerta* è un modello matematico di determinazione del prezzo nell'ambito del sistema matematico denominato tecnicamente, con termine intuitivo, mercato.

8.10.1 Domanda

In microeconomia per *domanda* s'intende la quantità di consumo richiesta dal mercato e dai consumatori di un certo bene o servizio, dato un determinato prezzo e quanto spenderebbero se tale prezzo variasse. In ottica macroeconomica, per la scuola neoclassica l'insieme delle domande dei singoli consumatori costituisce la domanda collettiva o "domanda aggregata".

Ci sono diversi fattori che influenzano la domanda:

1. Il prezzo del bene acquistato;
2. Il prezzo dei beni complementari e succedanei;
3. Il reddito del consumatore;
4. Le aspettative soggettive dei consumatori;
5. Il costo del denaro;
6. L'elasticità o la rigidità della domanda;
7. Bisogni del consumatore.

Caratteristiche della domanda

La domanda si caratterizza principalmente per quattro fattori:

Concentrazione della domanda : la domanda può costituirsi di un unico acquirente (in genere in una ben definita area geografica, ad esempio un'impresa produttrice di binari ferroviari in Italia ha come unico acquirente le Ferrovie dello Stato) e in tal caso si parla di monopsonio; di pochi grandi acquirenti e si parla di oligopsonio; oppure di tanti piccoli acquirenti per cui si parla di domanda polverizzata.

Elasticità della domanda : indica la variabilità della domanda in relazione ad un determinata variabile (prezzo, reddito, ecc.). Una domanda molto elastica varia notevolmente in seguito ad un minimo aumento/riduzione del prezzo, ad esempio. La curva del grafico sarà tendenzialmente orizzontale. Ad una domanda infinitamente elastica corrisponde una curva del tutto orizzontale, dato che i consumatori acquistano la quantità massima di un bene in corrispondenza di un singolo prezzo.

Differenziazione della domanda , che definisce tante più domande (e offerte) quanto più sono i segmenti di mercato.

Rigidità della domanda : indica la costante in funzione dell'offerta variabile. Ciò significa che all'aumento del prezzo, la domanda cala lentamente. Questo succede ai beni di prima necessità.

Domanda e offerta

[[File:Domanda.png | thumb | Grafico della domanda individuale]]
In generale tutte le "curve di domanda" hanno pendenza negativa (in caso di beni o servizi normali), questo significa che più il prezzo di un bene o servizio è alto, meno ne viene richiesto. Viceversa più un bene o servizio è a buon mercato, più ne viene venduto. La relazione tra quantità e prezzo è dunque inversa. I beni per cui la funzione di domanda ha pendenza positiva sono detti [[beni di Giffen]].

Domanda di mercato

Per ottenere la domanda di mercato bisogna sommare orizzontalmente tutte le domande individuali; graficamente: * la pendenza (e quindi la relazione) rimane negativa ma può cambiare (rimane uguale solo in caso tutte le pendenze siano perfettamente uguali); * mentre la curva, detta funzione di domanda "a gomito", si sposta verso destra (ovviamente la quantità richiesta aumenta se sommiamo tutte le curve).
[[File:Sommaorizzontale.gif | thumb | upright=3 | center | Grafico della domanda di mercato | 451x451px]]
Influiscono sulla domanda di mercato:

- gusti e redditi dei consumatori;
- i prezzi degli altri beni di consumo;
- l'aumento demografico che porta la curva a slittare verso destra;
- la concentrazione del reddito nazionale.

Se la domanda è molto elastica rispetto al prezzo, la curva del grafico sarà tendenzialmente piatta, dato che ad una piccola variazione di prezzo corrisponde una notevole variazione nella richiesta. Ad una domanda infinitamente elastica corrisponde una curva del tutto orizzontale: i consumatori acquistano la quantità massima di un bene in corrispondenza di un singolo prezzo.

8.10.2 Offerta

In economia, per *offerta* si intende la quantità di un certo bene o servizio che viene messa in vendita in un dato momento a un dato prezzo.
Si suppone che per ogni bene si possa tratteggiare una curva di offerta (curva con pendenza positiva per la [[legge dei rendimenti decrescenti]]), rappresentante le diverse quantità messe in vendita dalle imprese di un bene o servizio in corrispondenza di ciascun prezzo.
Le caratteristiche dell'offerta influenzano il prezzo e il tipo di [[mercato]] per un dato bene. Essa viene influenzata da diversi fattori:

Costi di produzione : la diminuzione dei salari percepiti dagli operai nel settore, abbassa i costi e incrementa l'offerta.

Tecnologia : migliore tecnologia comporta un'iniziale spesa maggiore per la Ricerca e lo Sviluppo, ma poi riduce i costi di produzione e incrementa l'offerta.

Prezzi

Politiche governative : l'abolizione dei dazi doganali determina un aumento dell'offerta dei prodotti esportabili.

Se esiste un solo venditore si parla di monopolio, di duopolio nel caso vi siano due soli venditori, di oligopolio se i venditori sono pochi. In presenza di moltitudini di venditori, ognuno dei quali non è in grado di determinare il prezzo di vendita si parla di "concorrenza perfetta".

L'offerta "individuale" di un bene è la quantità di quel bene che i venditori sono disposti a offrire sul mercato in un determinato momento e a un certo prezzo. L'offerta "collettiva" è l'insieme delle offerte individuali.

Curva di Offerta del lavoro

Il lavoro non è un bene omogeneo. Nel caso del lavoro, la "domanda" è fatta dalle imprese, mentre "l'offerta" è fornita dai lavoratori. Il lavoro è caratterizzato da una retta a pendenza negativa (con assi con ordinata W, profitto, e ascissa L, lavoro) e da differenziali compensativi: si tende a pagare di più per lavori che nessuno "vuole" fare.

- La "curva di offerta del lavoro" è una curva simile all'offerta, ma con un'involuzione finale che riporta la curva verso quantità di lavoro minori. Questo perché, più il salario tende a salire più l'utilità marginale diventa piccola; per questa ragione, la curva S, per W molto alti, tende a diventare verticale o addirittura a tornare indietro.
- Significativo è sottolineare la differenza tra "non lavoratori" e "disoccupati": mentre i primi hanno scelto di non lavorare, i secondi sono disposti a lavorare al salario corrente ma non trovano lavoro.

Un problema di equilibrio

In ambito economico, l'equilibrio è una condizione del sistema economico in cui le forze sono equilibrate: in assenza di fattori esterni, le variabili micro e macroeconomiche rimangono immutate.

L'equilibrio è la condizione in cui il prezzo di mercato è determinato in un regime di concorrenza perfetta: tale prezzo è strettamente legato alla domanda e offerta. Adam Smith, economista affiliato alla teoria liberista, ribattezzò questo fenomeno di equilibrio dinamico "mano invisibile".

Per risolvere il problema di prezzo di equilibrio si devono tracciare le curve d'offerta e di domanda ed eguagliarle in equazione.

Un esempio può essere:

$$Q_s = 124 + 1.5 \cdot P \tag{8.4}$$
$$Q_d = 189 - 2.25 \cdot P \tag{8.5}$$
$$\tag{8.6}$$
$$Q_s = Q_d \tag{8.7}$$
$$\tag{8.8}$$
$$124 + 1.5 \cdot P = 189 - 2.25 \cdot P \tag{8.9}$$
$$(1.5 + 2.25) \cdot P = (189 - 124) \tag{8.10}$$
$$P = \frac{189 - 124}{1.5 + 2.25} \tag{8.11}$$
$$P = \frac{65}{3.75} \tag{8.12}$$
$$P = 17.33 \tag{8.13}$$
$$\tag{8.14}$$

In qualsiasi prezzo al di sopra P offerta supera la domanda, mentre ad un prezzo inferiore P, la quantità eccede l'offerta. In altre parole, se i prezzi di domanda e offerta non sono uguali, allora sono definiti punti di squilibrio, e creano eccesso o carenza di bene. Cambiamenti nelle condizioni di domanda o di offerta sposteranno a loro volta le curve di offerta e di domanda finché non si troveranno in equilibrio.

Si consideri il seguente schema di domanda e offerta:

Prezzo (€)	Domanda	Offerta
8.00	6 000	18 000
7.00	8 000	16 000
6.00	10 000	14 000
5.00	12 000	12 000
4.00	14 000	10 000
3.00	16 000	8 000
2.00	18 000	6 000

- Il prezzo di equilibrio del mercato è pari a € 5,00 dove la domanda e l'offerta sono pari a 12.000 unità.
- Se il prezzo corrente di mercato è di € 3,00 - vi sarebbe un eccesso di domanda per 8.000 unità, creando una carenza di bene.
- Se il prezzo corrente di mercato fosse di € 8,00 - vi sarebbe eccesso di offerta di 12.000 unità.

Quando vi è una carenza nel mercato vediamo che, al fine di correggere questo disequilibrio, il prezzo del bene sarà aumentato a un prezzo di € 5,00, riducendo così il quantitativo domandato e aumentando quello offerto, così da mantenere il mercato in equilibrio.

Quando vi è un eccesso di un bene, ad esempio quando il prezzo è al di sopra di $ 6.00, allora vediamo che i produttori di diminuiranno il prezzo al fine di aumentare la domanda di richiesta per il bene, in modo da eliminare l'eccesso e tornare all'equilibrio di mercato.

ciclo del maiale

[[File:Schweinezyklus.svg | thumb | upright=1.2 | Grafico che illustra il ciclo del maiale]]

Il *ciclo del maiale* è un termine originariamente derivato dalle scienze agrarie per descrivere una fluttuazione periodica del mercato dei maiali. L'uso si è poi esteso anche nell'ambito dell'economia.

Quando i prezzi tendono a raggiungere valori elevati, gli investimenti tendono ad aumentare. Questo effetto è però ritardato dal tempo necessario alla riproduzione degli animali. Il mercato diviene quindi saturo e ciò si traduce in una diminuzione dei prezzi. Come conseguenza la produzione diminuisce ma gli effetti vengono osservati solo dopo un certo periodo di tempo, quindi si tornerà a una situazione di aumento della domanda e a un aumento dei prezzi. Questo processo si ripete ciclicamente. Il grafico risultante offerta/domanda somiglia a una ragnatela. L'economista agrario Mordecai Ezekiel fu uno dei primi a dare una interpretazione del ciclo del maiale.

In economia questo concetto è stato similmente applicato per la descrizione di vari tipi di mercato. Ad esempio, nell'ambito del mercato del lavoro salari alti o maggiori possibilità di inserimento lavorativo associati a un particolare settore provocano un aumento di immatricolazioni universitarie relativamente ad un certo indirizzo di studi. Dopo un po' di tempo si giungerà a una condizione di saturazione dell'offerta lavoro e il numero di immatricolazioni tenderà a diminuire. La produzione di beni industriali, il mercato immobiliare e la produzione di petrolio e suoi derivati sono altri importanti esempi in cui è applicato proficuamente il ciclo del maiale.

8.11 Concorrenza monopolistica

La *concorrenza monopolistica* è una forma di mercato molto diffusa. Spesso caratterizza i mercati di libri, ristoranti, film, abbigliamento, ecc.

8.11.1 La differenziazione del prodotto

Si instaura quando un certo numero di venditori offre sul mercato beni o prodotti che, nati per soddisfare lo stesso bisogno, si presentano in modo diverso. Esiste quindi per ogni prodotto una domanda stabile e ripetuta dalla clientela che apprezza quelle caratteristiche. Una variazione di prezzo crea comunque una variazione di segno contrario della domanda.

Il prodotto può essere differenziato in vari modi:

- secondo il tipo e lo stile;
- secondo la localizzazione;
- secondo la qualità.

8.11.2 Modello di Chamberlin

Edward Chamberlin osserva che in molti rami economici ci sono numerose imprese che vendono dei beni differenziati (marca, qualità, localizzazione differenti). Il potere di monopolio di queste imprese è molto limitato poiché ci sono molti beni sostituti. A lungo termine i ricavi della maggioranza di queste imprese coprono appena i costi di vendita. I piccoli negozi di quartiere, i ristoranti, i parrucchieri o gli idraulici sono degli esempi di queste imprese.

La curva di domanda dell'impresa rappresentativa ha un pendenza negativa siccome la differenziazione dei prodotti le conferisce un certo potere di mercato. Se il prezzo aumenta l'impresa non perde tutti i suoi clienti.

Nel breve periodo l'impresa genera profitti positivi (e.g. un ristorante che apre in un nuovo quartiere). Il primo grafico illustra questa situazione. L'equilibrio dell'impresa implica l'uguaglianza tra il ricavo marginale (Rm) e il costo marginale (Cm). Il prezzo di vendita è p*. Il profitto (π) è dato dalla differenza tra il ricavo medio (RM), la curva di domanda, e il costo medio (CM) moltiplicata per la quantità prodotta (q*).

Questi profitti extra attirano dei nuovi operatori economici (e.g. ristoranti che vedono la possibilità di fare degli ottimi affari nel medesimo quartiere). Siccome non ci sono delle barriere all'entrata nel settore, la curva di domanda per i prodotti dell'impresa si sposta a sinistra (il primo ristorante avrà perso una parte dei suoi clienti). Tale movimento continua fino alla scomparsa del profitto (equilibrio a lungo termine = extra profitti nulli). Dal punto di vista analitico, la curva dei costi medi (CM) sarà tangente alla curva di domanda RM.

Rispetto alla [[concorrenza perfetta]], il prezzo sarà più alto e l'impresa non produce ai costi minimi. C'è un eccesso di capacità in questo ramo (si può produrre di più e a dei costi più bassi) ma c'è anche una più grande varietà.

8.11.3 Altri modelli

Dixit e Stiglitz introducono esplicitamente le preferenze per le varietà nella funzione di utilità del consumatore rappresentativo Due casi sono esaminati: nel primo le preferenze sono rappresentate da una funzione di utilità a elasticità di sostituzione costante; nel secondo l'elasticità è variabile.

Produrre al livello di costi minimi non è una soluzione ottimale dal punto di vista dell'utilità sociale quando i diversi beni non sono dei sostituti perfetti. Non c'è dunque troppa varietà nella concorrenza monopolistica.

Il modello di Dixit e Stiglitz è stato utilizzato da Paul Krugman nei suoi modelli di commercio internazionale e sulla concorrenza spaziale delle attività economiche .

Ogni modello di concorrenza monopolistica deve basarsi sulle condizioni seguenti:

- numerose imprese che producono dei beni differenziati;
- le imprese sono piccole e hanno degli effetti trascurabili sulle altre imprese;
- la libera entrata sul mercato conduce a lungo termine alla scomparsa del profitto;
- la domanda dei prodotti delle imprese ha una pendenza negativa.

Hart suppone numerosi consumatori con dei gusti differenti e numerose imprese che producono dei beni differenti. I consumatori sono interessati ad un numero limitato di questi beni. Ogni bene ha la medesima probabilità di essere desiderato dal consumatore. Gli effetti di un cambiamento dell'offerta di un'impresa sono allora ripartiti su tutte le altre imprese. Hart arriva alla conclusione che, secondo i casi, ci possono essere troppe o troppo poche varietà.

",

8.11.4 Monopolio

Monopolio (dal greco "mònos" «solo» e "pólion" «vendere») è una forma di mercato, dove un unico venditore offre un prodotto o un servizio per il quale non esistono sostituti stretti ("monopolio naturale") oppure opera in ambito protetto ("monopolio legale", protetto da barriere giuridiche). Consiste insomma nell'accentramento dell'offerta o della domanda del mercato di un dato bene o servizio nelle mani di un solo venditore o di un solo compratore.

Storia

Il primo grande monopolio della [[storia moderna]] fu la [[Compagnia britannica delle Indie orientali|Compagnia delle Indie orientali]], che per tutto il [[1600]] e gran parte del [[1700]] fu l'unica compagnia dell'[[Civiltà occidentale|Occidente]] a controllare il commercio di merci provenienti dall'[[Estremo Oriente]], e in particolare dell'[[Oceano Indiano]].

Cause

Una situazione di monopolio può crearsi come conseguenza di:

1. esclusività sul controllo di "input" essenziali (es. diamanti grezzi "[[De Beers]]");
2. economie di scala: i costi di produzione rendono ottimale la presenza di un solo produttore invece che di una moltitudine di produttori diversi. Ciò è dovuto al fatto che per quel singolo produttore la curva del costo medio di lungo periodo è decrescente, quindi un aumento della produzione, diluendo i costi su più unità di prodotto, ne riduce l'incidenza media (si viene a determinare un monopolio naturale); un esempio è il caso delle ferrovie o delle autostrade;
3. brevetti;
4. licenze governative.

Forme di monopolio

I monopoli sono spesso caratterizzati in base alle circostanze da cui hanno origine. Tra le categorie principali si hanno monopoli che sono il risultato di leggi o regolamentazione (monopoli legali), monopoli che hanno origine dalla struttura dei costi di un dato sistema produttivo ([[monopolio naturale]]). I fautori del [[liberismo]] in [[economia]] sostengono che una classificazione più fondamentale dovrebbe distinguere tra monopoli che nascono e prosperano grazie a una violazione dei principi del [[libero mercato]] (monopolio coercitivo) e quelli che si mantengono tali grazie alla superiorità del prodotto o servizio offerto rispetto a quello dei potenziali concorrenti.

Monopolio legale Un monopolio basato su leggi che esplicitamente limitano la concorrenza le quali fungono da intermediazione dei diritti su opere tutelate di rappresentazione, esecuzione e recitazione, radiodiffusione riproduzione meccanica e cinematografica è detto monopolio legale (o "de jure"). Il monopolio legale inoltre può proteggere l'interesse privato nella concessione di diritti esclusivi per offrire un servizio particolare in una regione specifica (ad es invenzioni brevettate), accettando di avere le loro politiche e dei prezzi controllati. Il monopolio legale è regolamentato dall'[[art 180]] Un monopolio legale può assumere la forma di un monopolio di governo in cui lo Stato possiede i mezzi di produzione ([[monopolio di stato]]).

Un esempio classico per poter più facilmente comprendere la questione e la funzione di questo monopolio è: supponendo che il bene prodotto in regime di monopolio dovuto a brevetto sia una nuova medicina. Da un lato, la [[concorrenza perfetta]] consentirebbe un maggiore livello di produzione ad un prezzo più contenuto; dall'altro, se non ci fosse stata la possibilità di agire in una condizione di monopolio grazie al brevetto, il bene in questione non sarebbe stato introdotto sul mercato. Quando un'impresa investe tempo e denaro per sviluppare un nuovo prodotto desidera che tale investimento renda: il brevetto è un modo per garantire tale rendimento poiché, almeno per un certo numero di anni, l'impresa potrà raccogliere i frutti della propria inventiva.

Questo tipo di monopolio è di solito in contrasto con [[monopolio di fatto]] che è una vasta categoria di monopoli che non vengono creati dal governo.

Monopolio naturale Situazione in cui un'impresa è in grado di generare l'intera produzione del mercato a un costo inferiore a quello che sarebbe praticato in presenza di diverse imprese.

8.11.5 Analisi economica

Caratteristiche del monopolio:

Venditore unico In un monopolio "puro", un'unica impresa è l'unico produttore di un bene, o il solo fornitore di un servizio, solitamente a causa di restrizioni all'entrata nel mercato. La definizione del mercato, e dunque della natura di monopolio, può essere d'altronde non univoca: ad esempio, l'impresa che produce il gelato "A" è monopolista nel mercato per il gelato "A", ma non nel mercato dei gelati in generale; questo porta al punto seguente.

Assenza di beni o servizi sostitutivi Il prodotto o servizio deve essere unico in una maniera che vada al di là della vera identità del marchio, e non può essere facilmente rimpiazzato (la [[Coca-Cola]], per esempio, "non" è un monopolista).

Comportamento da "price maker" In un monopolio "puro", l'impresa monopolista controlla l'intera offerta del bene o servizio, ed è in grado di esercitare un rilevante controllo sul prezzo, cambiando la quantità prodotta, adottando, dunque, un comportamento da "price maker" (in opposizione al comportamento da "price taker" dell'impresa che opera in concorrenza perfetta).

Barriere all'entrata La ragione per cui un monopolista non ha concorrenti è che barriere di un qualche tipo limitano la possibilità che altre imprese accedano al mercato. A seconda della forma di monopolio, tali barriere possono essere economiche, tecniche, legali (ad es. nel caso di brevetti o concessioni), innocenti (ricerca-sviluppo, tecnologia, licenze, brevetti, economie di scala e curve di esperienza), strategiche (guerra dei prezzi, costi all'entrata, minaccia).

8.11.6 Confronto tra Monopolio e Concorrenza Perfetta

- Il monopolista fa profitti positivi (P- Cm) Q, mentre l'industria in concorrenza perfetta non fa profitti.
- Dal punto di vista del consumatore è meglio trovarsi in una situazione di concorrenza perfetta poiché vi è una maggiore quantità di merci a prezzo più basso, mentre dal punto di vista del produttore è più vantaggioso il monopolio perché comporta ricavi maggiori.
- Per quanto riguarda il "benessere complessivo" (surplus del produttore + surplus del consumatore) in concorrenza perfetta i consumatori pagano di meno di quello che

sarebbero disposti a pagare per ogni singolo prodotto,quindi la concorrenza perfetta rispetto al monopolio crea un maggiore benessere complessivo.

In alcuni casi però monopolio e concorrenza perfetta possono essere equivalenti dal punto di vista del benessere complessivo.

- *[[Discriminazione di prezzo]] di primo grado*: caso teorico in cui il monopolista conosce perfettamente la disponibilità a pagare degli acquirenti (presuppone l'impossibilità che gli acquirenti si possano rivendere tra di loro i beni), allora il surplus del produttore risulta essere uguale al surplus del consumatore nel caso della concorrenza perfetta.

8.11.7 Produzione in condizioni di monopolio

A differenza delle imprese che operano in condizioni di concorrenza perfetta, l'impresa che opera in condizioni di monopolio deve soddisfare l'intera domanda di mercato per il suo prodotto. Si suppone che la domanda sia, "ceteris paribus", una funzione decrescente del prezzo; rovesciando questa argomentazione, il prezzo del "lato della domanda", che i consumatori sono disposti a pagare per acquistare il prodotto, è una funzione decrescente della quantità offerta, $p(q)$ tale che $\frac{dp}{dq} < 0$.

Il monopolista fissa la quantità di prodotto ottima q^* in maniera tale da rendere massimo il proprio profitto; risolve dunque implicitamente un problema di ottimizzazione:

$q^* = \arg\max_q \pi(q) = p(q)q - c(q)$

dove $\pi(q)$ è la [[Funzione (matematica) | funzione]] profitto, "p(q)q" sono i ricavi e "c(q)" denota i costi sostenuti per la produzione, anch'essi funzione della quantità prodotta. La condizione del primo ordine per un massimo è:

$\frac{d\pi}{dq} = p(q) + p'(q)q - c'(q) = 0$

Le quantità $p(q) + p'(q)q$ e "c<nowiki>'</nowiki>(q)" sono dette rispettivamente "ricavo marginale" e "costo marginale" ; condizione per l'ottimalità della produzione è dunque:

$MR(q) = MC(q)$

Dividendo ambo i membri per la quantità non negativa "p(q)" e riorganizzando i termini, tale condizione può essere riscritta come:

$\frac{p(q)-c'(q)}{p(q)} = -\frac{dp}{dq}\frac{q}{p(q)} = -\frac{1}{\eta}$

dove η denota l'*elasticità della domanda* rispetto al prezzo, $\eta = \frac{p(q)}{q}\frac{dq}{dp}$ (ossia la variazione percentuale della quantità domandata in risposta a una variazione infinitesimale del prezzo). Dunque la condizione di ottimalità della produzione in condizioni di monopolio può scriversi come:

$p(q)\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = c'(q)$

Quest'ultima espressione giustifica il cosiddetto "indice di Lerner" di potere di mercato, dato da:

$\frac{p(q)}{c'(q)} = \frac{1}{1+\frac{1}{\eta}}$

che misura la "distanza" del prezzo di mercato dal costo marginale, a cui sarebbe pari in condizioni di concorrenza perfetta, e del quale è maggiore in condizioni di monopolio.

In più, dobbiamo considerare le leggi dell'Economia Politica, le quali dicono che in assenza di monotonicità, convessità e transitività, le curve di indifferenza dei consumatori, in regime di monopolio, si intersecheranno e non si avrà più soddisfazione maggiore passando ad una curva di indifferenza più "alta". Stessa cosa varrà per il monopolista, anche se questa cosa riguarderà le curve isoquanti, i quali rappresentano le combinazioni di fattori che producono output diversi.

8.11.8 Rappresentazione grafica

[[File:Equilibrio monopolista.svg | frame | Curve dei costi medio e marginale, del prezzo e del ricavo marginale in regime di monopolio]]

Le curve del costo medio e del costo marginale sono identiche a quelle che si assumono per la concorrenza perfetta. Tuttavia:

- il prezzo è funzione decrescente della quantità offerta;
- il ricavo marginale non è uguale al prezzo (come invece accade in concorrenza perfetta), ma è anch'esso decrescente; inoltre, un aumento delle vendite comporta una diminuzione del prezzo non solo per l'ultima unità venduta, ma anche per quelle che, prima delle maggiori vendite, avevano un prezzo più alto; ne segue che il ricavo marginale decresce più rapidamente del prezzo;
- l'impresa raggiunge il suo equilibrio nel punto in cui il costo marginale ed il ricavo marginale sono uguali, vendendo la quantità q^* al prezzo "P"; in regime di concorrenza, l'impresa avrebbe venduto la maggiore quantità "q<nowiki>'</nowiki>" al prezzo inferiore "P<nowiki>'</nowiki>";
- l'impresa monopolistica consegue un maggiore profitto rispetto a quella concorrenziale; nel lungo periodo, infatti, l'impresa concorrenziale è in equilibrio quando sono uguali [[costo marginale]], [[costo medio]] e prezzo; ciò comporta che ricavi totali (quantità per prezzo) e costi totali (quantità per costo medio) sono uguali e il profitto è nullo; l'impresa monopolista, invece, sopporta un costo medio pari a "C", quindi costi totali pari al rettangolo $0CEq^*$ nella figura a lato, e ricavi pari a $0PAq^*$, con un profitto pari a $CPAE$;
- il consumatore, dovendo sopportare un maggior prezzo, perde una parte del suo surplus, quella corrispondente al trapezio $P'PAF$;
- l'impresa monopolistica si appropria di una parte del surplus perso dal consumatore, il rettangolo $P'PAB$, ma, vendendo una quantità minore di quella che avrebbe venduto in concorrenza, perde la parte del proprio surplus corrispondente alla regione BDF;
- la parte del surplus del consumatore di cui l'impresa non si appropria, il triangolo ABF, e la parte del surplus del produttore perso dall'impresa (BDF) costituiscono, insieme, la cosiddetta "perdita netta di monopolio" (ADF).

Monopolio come fallimento del mercato

Il monopolio può dar luogo a un [[fallimento del mercato]]; esso dà infatti adito a una perdita secca di [[surplus del consumatore]] rispetto alla [[concorrenza perfetta]]; tuttavia, qualora fosse fornito un sussidio alla produzione in modo tale che questa raggiunga lo stesso livello che avrebbe in condizioni di concorrenza perfetta, il benessere sarebbe comunque massimizzato. Tale passaggio sposta però il problema sulla equità nella distribuzione del surplus piuttosto che sulla sua massimizzazione. Per questa ragione in democrazia i monopoli (e gli [[oligopoli]]) privati sono combattuti con leggi dello Stato, fatto salvo per i monopoli statali, che di solito riguardano beni o servizi di particolare importanza per la comunità, che in questo caso sono di proprietà di tutti i cittadini.