

MATEMATICA C³

MATEMATICA DOLCE 5

Testo per il secondo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Matematicamente.it

2017 Edizione - 2017

Matematica C³– Matematica dolce 5
Copyright © 2017 Matematicamente.it



Questo libro, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia (CC BY-SA 3.0) il cui testo integrale è disponibile al sito <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/legalcode>.

Tu sei libero: di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera, di modificare quest'opera, alle seguenti condizioni:

Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

Condividi allo stesso modo — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Per maggiori informazioni su questo particolare regime di diritto d'autore si legga il materiale informativo pubblicato su <http://www.copyleft-italia.it>.

COORDINATORI DEL PROGETTO Daniele Zambelli.

AUTORI Leonardo Aldegheri, Elisabetta Campana, Luciana Formenti, Carlotta Gualtieri, Michele Perini, Maria Antonietta Pollini, Diego Rigo, Nicola Sansonetto, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca, Daniele Zambelli .

HANNO COLLABORATO Alberto Bicego, Alessandro Canevaro, Alberto Filippini .

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN L^AT_EX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Michele Perini, Andrea Sellaroli, Daniele Zambelli .

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C³ - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 0.0.9 del 27 giugno 2017.

Stampa 2017: giugno 2017.

ISBN 9788899988067

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA

Titolo: Matematica C³, Matematica dolce 5 - 2017.

Codice ISBN: 9788899988067

Editore: Matematicamente.it.

Anno di edizione: 2017.

Prezzo: € 0,00.

Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione	vii
Prefazione alla seconda edizione	ix
Prefazione all'edizione 2016	ix
Prefazione all'edizione 2017	ix
1 Funzioni	1
1.1 Definizione di funzione	1
1.2 La rappresentazione di una funzione	5
1.3 Le proprietà di una funzione	5
1.4 Le caratteristiche di una funzione	7
1.4.1 Monotonia	7
1.4.2 Parità	9
1.4.3 Periodicità	11
1.4.4 Limitatezza	12
1.5 La classificazione delle funzioni	14
1.6 Funzioni inverse, composte e uguali	15
1.7 Esercizi	20
1.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi	20
2 Topologia della retta	25
2.1 La topologia della retta	25
2.2 Gli intervalli	25
2.3 Gli intorni	26
2.4 Insiemi limitati e illimitati	28
2.5 Massimi, minimi ed estremi	30
2.6 I punti di accumulazione	32
2.7 Esercizi	34
2.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi	34
3 Iperreali	37
3.1 Alcune questioni importanti sui numeri in \mathbb{R}	37
3.2 I numeri Iperreali e l'insieme ${}^*\mathbb{R}$	38
3.2.1 Il problema della velocità	38
3.2.2 Un nuovo insieme: gli Iperreali	38
3.2.3 Tipi di Iperreali	39
3.2.4 Iperreali finiti e parte standard	40
3.2.5 Retta Iperreale e strumenti ottici	40
3.2.6 Operazioni	43
3.2.7 Confronto	46

3.2.8	Infinitamente vicini, indistinguibili	48
3.2.9	Postulato di Eudosso-Archimede	49
3.2.10	Principio di transfer	50
3.2.11	Transfer e funzioni trascendenti	51
3.3	Applicazioni	56
3.3.1	Problemi con gli Iperreali	56
3.3.2	Espressioni con gli Iperreali	57
3.4	Esercizi	60
3.4.1	Esercizi dei singoli paragrafi	60
4	Derivate	67
4.1	Introduzione	67
4.2	Velocità di caduta	67
4.3	Continuità	68
4.4	Differenziale	69
4.4.1	Differenziale e funzioni	71
4.4.2	Combinare differenziali	76
4.4.3	Problemi con i differenziali	79
4.5	Introduzione alla derivata	80
4.5.1	Pendenza di una retta	80
4.6	Derivata: definizione	85
4.7	Derivare funzioni algebriche	90
4.8	Regole di derivazione	93
4.9	Derivare funzioni composte e funzioni inverse	95
4.9.1	Funzioni composte	95
4.9.2	Funzioni inverse	98
4.10	Derivare funzioni trascendenti	100
4.10.1	Derivata di $f(x) = a^x$	100
4.10.2	Derivata di $f(x) = \log_a x$	102
4.10.3	Derivata di funzioni circolari	103
4.11	Applicazioni	106
4.11.1	Derivata e tangente	107
4.11.2	Derivata e normale	108
4.11.3	Derivata della derivata	108
4.11.4	Derivata, differenza e differenziale	109
4.11.5	Sintesi	111
4.11.6	Applicazioni non solo matematiche	111
4.12	Esercizi	114
4.12.1	Esercizi dei singoli paragrafi	114
4.12.2	Esercizi sulle derivate	115
4.12.3	Problemi che coinvolgono l'uso della derivata	121
5	Funzioni continue	123
5.1	Limiti	123
5.2	Continuità	123
5.2.1	Definizione di continuità in un punto	123
5.2.2	Definizione di continuità in un intervallo	124

5.3	Massimi e minimi	127
5.4	Massimi e minimi: applicazioni	129
5.5	Derivate e grafico di funzioni	129
5.6	Proprietà delle funzioni continue	129
5.6.1	Numeri iperinteri	129
5.6.2	Alcuni teoremi delle funzioni continue	131
6	Studio di funzioni	135
6.1	Descrizione del grafico	135
6.1.1	Descrizione a parole	136
6.2	Analisi della funzione	137
6.2.1	Le prime caratteristiche	137
6.3	Comportamento asintotico	139
6.3.1	Comportamento agli estremi del campo di esistenza	139
6.3.2	Asintoti	139
6.3.3	Asintoti obliqui	139
6.4	Andamento	140
6.4.1	Punti stazionari	140
6.4.2	Intervalli di monotonia	140
6.5	Concavità	141
6.6	Altre caratteristiche	142
6.7	Esercizi	143
7	Integrali	145
7.1	Un problema di area	145
7.2	L'area sottesa ad una funzione	147
7.3	Definizione	148
7.4	Somme di Riemann inferiore e superiore	149
7.5	Proprietà degli integrali	151
7.5.1	Proprietà rettangolare	151
7.5.2	Altre proprietà	151
7.5.3	Definizione di opposto	151
7.5.4	Proprietà additiva	152
7.6	Funzione integrale	152
7.7	Teorema fondamentale dell'analisi	155
7.7.1	Dimostrazione grafica	155
7.7.2	Dimostrazione algebrica	155
7.8	Integrali indefiniti	156
7.9	Calcolo dell'integrale definito	156
7.10	Esercizi	158
7.10.1	Esercizi dei singoli paragrafi	158
7.10.2	Esercizi riepilogativi	159

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore, lui apprezza molto il progetto Matematica C³ e penso che la tua versione gli possa far comodo soprattutto per i primi anni del nostro serale. Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C³ normale, ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa, promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane (quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra. In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C³, "Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto? Buon lavoro, Alice

Giusto, Alice.

La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.

Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.

Contribuisci alla sua evoluzione.

Grazie, ciao.

Matematica C³ Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica C³*. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica C³*.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica C³* in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in

fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica C³* ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti *Matematica C³* è scaricabile dal sito www.matematicamente.it. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce e bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce. È disponibile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in \LaTeX , che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito www.matematicamente.it sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli

Prefazione alla seconda edizione

Un anno di lavoro ha messo in luce alcuni errori che sono stati corretti, la nuova versione è scaricabile da:

bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce_2ed

e

bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce_2ed.

Ma, soprattutto, in questo anno è sorta una interessante opportunità: è stato finanziato un progetto per tradurre il testo in braille. Il lavoro sta procedendo e alcuni capitoli sono già stati tradotti. Quanto fatto lo si può trovare in:

oer.veia.it

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Prefazione all'edizione 2016

Cambia il modo di indicare le edizioni.

Ma soprattutto è cambiata l'organizzazione del materiale: ora tutto il progetto è contenuto in un unico repository.

Matematica Dolce, oltre ad essere un libro *libero* è anche *polimorfo*: ora è molto semplice creare nuovi libri partendo dal materiale presente nel repository. Già da quest'anno, oltre alla versione orientata ai licei non scientifici, sta prendendo vita una versione per gli istituti professionali. Il tutto è ospitato in:

bitbucket.org/zambu/matematicadolce

Quest'anno altri colleghi si sono uniti al progetto e un alunno ha fornito le immagini per le copertine.

Per quanto riguarda i contenuti, riporto i principali cambiamenti:

- ➔ la geometria è stata inserita nel testo di matematica;
- ➔ nel terzo volume è stato inserito un capitolo che introduce ai numeri Iperreali;
- ➔ è stata riscritta la parte di linguaggio di programmazione per la geometria interattiva;
- ➔ è stato aggiunto il quarto volume.

Abbiamo svolto un gran lavoro, ora è il momento di usarlo.

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Prefazione all'edizione 2017

Raggiunto il traguardo dei cinque volumi: l'opera è completa!

Comunque, chi ha voglia di partecipare alla realizzazione di Matematica Dolce può stare tranquillo: c'è ancora molto lavoro da fare.

Buon divertimento con la matematica!

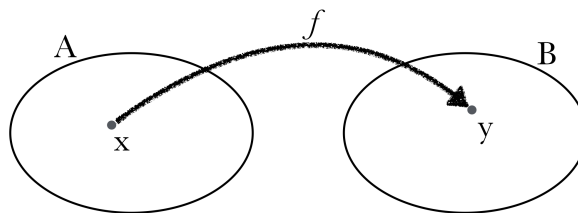
Daniele Zambelli

Funzioni 1

Riprendiamo ora il concetto di funzione, precedentemente studiato nel capitolo 12 del secondo volume, approfondendone alcuni aspetti che ci saranno utili nel proseguo del nostro percorso.

1.1 Definizione di funzione

Definizione 1.1. Dati due insiemi A e B non vuoti definiti in \mathbb{R} è detta f , FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE, una qualsiasi legge, applicazione o corrispondenza che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B .



Una funzione viene indicata:

$f : A \rightarrow B$ tra insiemi $f : x \mapsto y$ tra elementi con $x \in A$ e $y \in B$

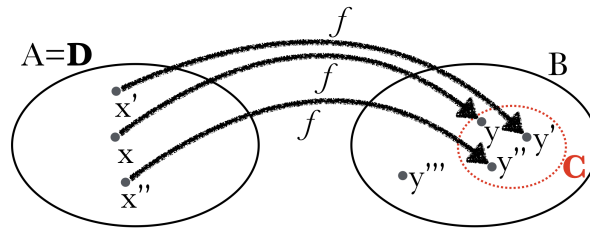
Dobbiamo pensare che x mediante la corrispondenza f diventa y , l'elemento y è dunque l'IMMAGINE di x mediante la trasformazione f ; altrettanto e viceversa possiamo chiamare x CONTROIMMAGINE di y .

L'elemento x viene dunque proiettato mediante una sua trasformazione che chiamiamo f nell'elemento y di B , y risulta così dipendente da x perché determinata proprio in funzione di x , variabile indipendente.

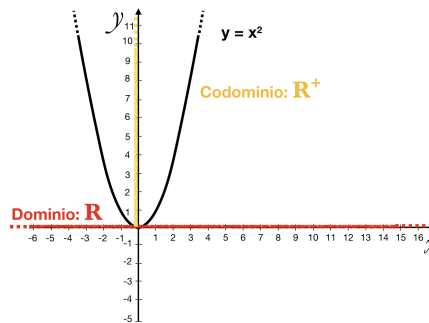
L'immagine y risulta propriamente in funzione di x e possiamo scrivere $f(x) = y$ e la precedente espressione tra elementi diventa $f : x \mapsto f(x) = y$.

Definiamo D DOMINIO l'insieme A delle x e C CODOMINIO il sottoinsieme di B di tutte le immagini di x , cioè di tutte e sole le y generate dalla trasformazione f .

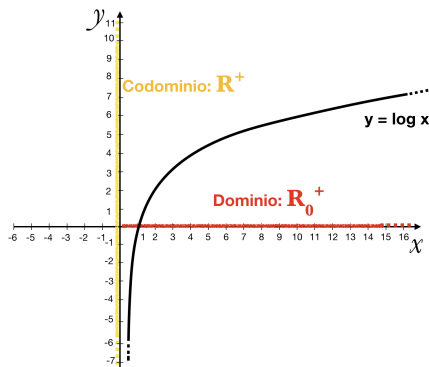
Notiamo, nella figura precedente che mentre il dominio coincide con l'insieme di partenza il codominio è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo.



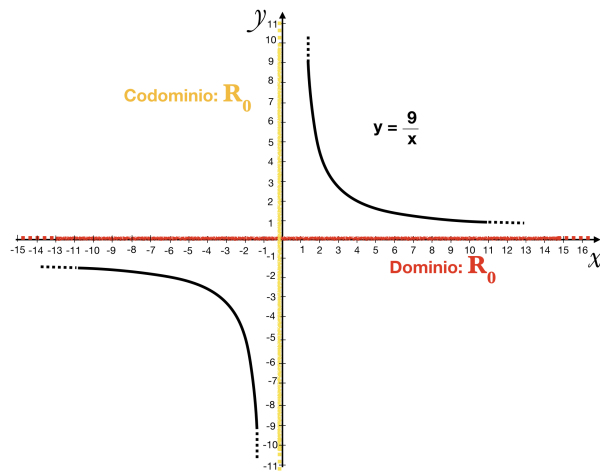
Esempio 1.1. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = x^2$



Esempio 1.2. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = \log x$



Esempio 1.3. Visualizziamo dominio e codominio della funzione $f(x) = \frac{9}{x}$



Per calcolare il dominio delle funzioni, vediamo una tabella riassuntiva dei possibili casi.

Funzione	Dominio	Esempio
Funzioni razionali intere $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$	$D = \mathbb{R}$	$y = x^3 - x^2 + 2x + 1$ $D = \mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi	\mathbb{R} esclusi i valori che annullano $B(x)$, cioè $B(x) \neq 0$	$y = \frac{3+x^2}{x-5}$ $D = \mathbb{R} - \{5\}$
Funzioni irrazionali $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	Se n è dispari il D è il D di $f(x)$ Se n è pari, $D = \{x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0\}$	$y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ $D = \mathbb{R}$ $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $D = x^2 \geq 1 =$ $= x \leq -1 \vee x \geq 1$
Funzioni logaritmiche $y = \log_a f(x)$ con $a > 0$, $a \neq 1$	$D = \{x \in \mathbb{R} f(x) > 0\}$	$y = \log(x + 1)$ $D = x > -1$
$y = \log_{g(x)}(f(x))$	$D = \{x \in \mathbb{R} f(x) > 0 \wedge$ $\wedge g(x) > 0 \wedge g(x) \neq 1\}$	
Funzioni esponenziali $y = a^{f(x)}$ con $a > 0$, $a \neq 1$	D di $f(x)$	$y = 3^{2x}$ $D = \mathbb{R}$
$y = f(x)^{g(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R} f(x) > 0\} \wedge$ D di $g(x)$	$y = e^{\frac{1}{x+1}}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$
Funzioni potenza $y = f(x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$		
a intero positivo	D di $f(x)$	$y = (x - 1)^2$ $D = \mathbb{R}$
a intero negativo	D di $f(x)$ con $f(x) \neq 0$	$y = (x - 1)^{-2}$ $D = x \neq 1$
a razionale	D di $f(x)$ razionale	$y = (x - 1)^{1/2} = \sqrt{x - 1}$ $D = x \geq 1$
a irrazionale positivo	$D = \{x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0\}$	$y = (x - 1)^\pi$ $D = x \geq 1$
a irrazionale negativo	$D = \{x \in \mathbb{R} f(x) > 0\}$	$y = (x - 1)^{-\pi}$ $D = x > 1$
Funzioni goniometriche $y = \sin x$, $y = \cos x$	$D = \mathbb{R}$	
$y = \tan x$, $y = \sec x$	$D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	
$y = \cot x$, $y = \csc x$	$D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$	

Funzioni goniometriche inverse		
$y = \arcsin x, y = \arccos x$	$D = [-1, 1]$	
$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$	$D = \mathbb{R}$	
Funzioni goniometriche composte		
$y = \sin[f(x)], y = \cos[f(x)]$	D di $f(x)$	
$y = \tan[f(x)]$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$y = \tan[2x - 1]$ $2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $D = x \neq \frac{\pi+1+k\pi}{2}$
$y = \cot[f(x)]$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq k\pi\}$	
$y = \arcsin[f(x)],$ $y = \arccos[f(x)]$	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$	$y = \arcsin[x - 1]$ $-1 \leq x - 1 \leq 1$ $0 \leq x \leq 2$
$y = \arctan[f(x)]$	D di $f(x)$	$y = \arctan\left[\frac{x+2}{x+3}\right]$ $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

1.2 La rappresentazione di una funzione

Una funzione può essere rappresentata in diversi modi, i principali sono:

➔ **RAPPRESENTAZIONE TABULARE**

Le funzioni empiriche vengono ricostruite con una tabella in cui ad ogni y corrisponde un certo x . Ad esempio pensiamo ad una tabella che dà la temperatura ora per ora in un certo luogo.

➔ **RAPPRESENTAZIONE ANALITICA**

La funzione è espressa mediante un insieme di operazioni matematiche che applicate in un certo ordine ad x restituiscono un corrispondente valore di y . Esempi ne sono $y = \log(x + 2)$, $y = 2x^3 + 3$ o $y = \sin x + 2^x$, cioè le espressioni, scritte in linguaggio matematico, che siamo abituati a trattare.

➔ **RAPPRESENTAZIONE GRAFICA**

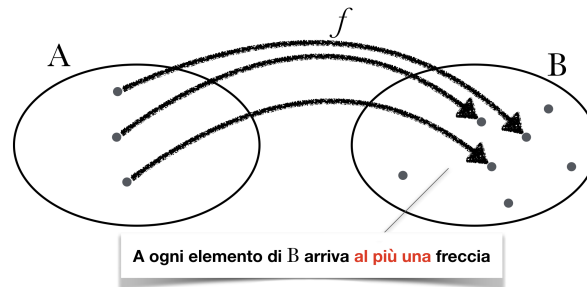
La funzione è rappresentata come una corrispondenza x - y su un grafico cartesiano; in particolare, ricordiamo che: il grafico di una funzione $f: A \rightarrow B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate $(x; y)$ che si ottengono prendendo un valore x in A e trovando il corrispondente valore $y = f(x)$ in B . Ogni coppia ordinata rappresenta un punto nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 .

1.3 Le proprietà di una funzione

Una funzione, a seconda, del modo in cui gli elementi del dominio corrispondono agli elementi del codominio si può definire INIETTIVA, SURIETTIVA e BIETTIVA (o BIUNIVOCA).

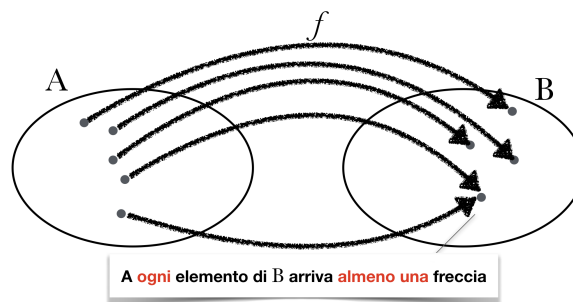
Definizione 1.2. Una funzione da A a B si dice **INIETTIVA** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A ;

$$f : A \rightarrow B \text{ è iniettiva se } \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Definizione 1.3. Una funzione da A a B si dice **SURIETTIVA** quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A ;

$$f : A \rightarrow B \text{ è suriettiva se } \forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$$

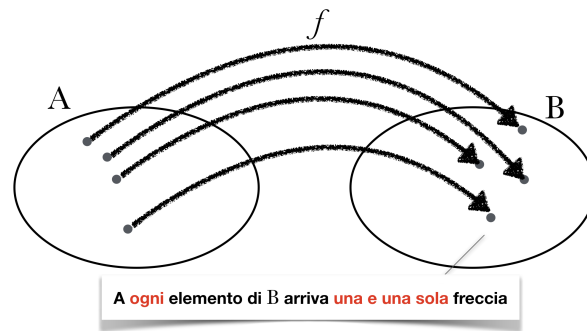


Il fatto che una funzione sia o non sia suriettiva dipende da come si sceglie l'insieme di arrivo. Se lo si sceglie coincidente con il codominio la funzione è suriettiva.

Definizione 1.4. Una funzione da A a B è **BIETTIVA** (o **BIUNIVOCA**) quando è sia iniettiva sia suriettiva.

Esempio 1.4. Quando una funzione è biettiva?

Una funzione biettiva è ad esempio una qualsiasi retta. Una retta è infatti sia iniettiva, che biettiva di dominio \mathbb{R} e codominio \mathbb{R} .



Una funzione biiettiva viene anche detta biiezione o corrispondenza biunivoca fra gli insiemi A e B . Tale relazione tra insiemi è molto forte e specifica in quanto ad ogni elemento di A viene associato un solo elemento di B e, reciprocamente, ad ogni elemento di B è associato un solo elemento di A , in una relazione uno a uno. Per tale ragione, la relazione tra i due insiemi viene indicata con una doppia freccia $A \leftrightarrow B$.

1.4 Le caratteristiche di una funzione

Analizziamo ora le caratteristiche che può manifestare una funzione, qualità che può presentare il suo andamento e che possono contraddistinguerne la forma del grafico.

1.4.1 Monotonia

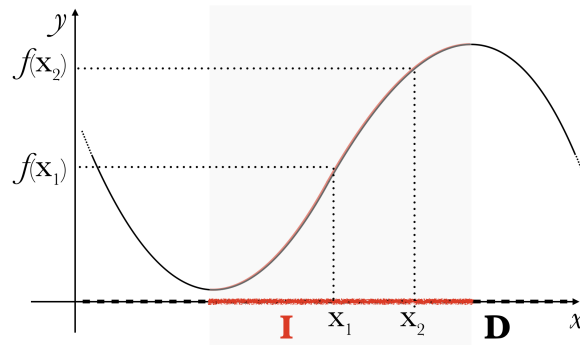
La caratteristica della monotonia vuole evidenziare l'andamento CRESCENTE o DECRESCENTE di una funzione; la monotonia studia il comportamento della variabile dipendente y all'aumentare della variabile indipendente x . All'aumentare dell'ascissa se aumenta anche l'ordinata diremo che la funzione cresce, se l'ordinata diminuisce diremo che la funzione decresce. Vediamo e puntualizziamo meglio.

Definizione 1.5. Una funzione $y = f(x)$ di dominio D , si dice CRESCENTE IN SENSO STRETTO in un intervallo I , sottoinsieme di D , se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) < f(x_2)$$

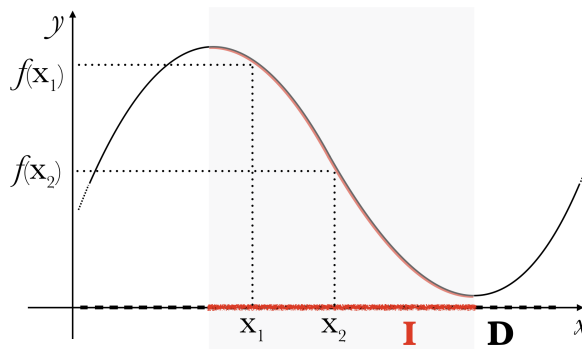
Definizione 1.6. Una funzione è non decrescente o CRESCENTE in senso lato in un intervallo I , sottoinsieme di D , se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Definizione 1.7. Una funzione $y = f(x)$ di dominio D , si dice **DECRESCENTE IN SENSO STRETTO**, in un intervallo I , sottoinsieme di D , se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) > f(x_2)$$



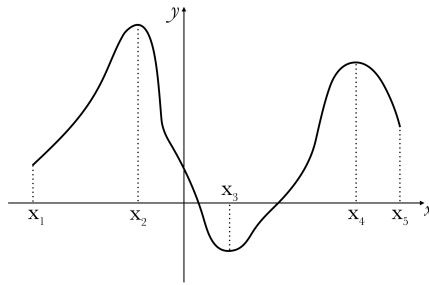
Definizione 1.8. Una funzione è **non crescente** o **DECRESCENTE in senso lato** in un intervallo I , sottoinsieme di D , se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Una funzione, quindi, si dice **monotona** in un intervallo I del suo dominio se in I è sempre crescente o decrescente.

Esempio 1.5. Individuiamo gli intervalli in cui la funzione rappresentata risulta crescente o decrescente.

Negli intervalli finiti $x_1 < x < x_2$, $x_3 < x < x_4$ la funzione risulta essere crescente; negli intervalli finiti $x_2 < x < x_3$, $x_4 < x < x_5$.



1.4.2 Parità

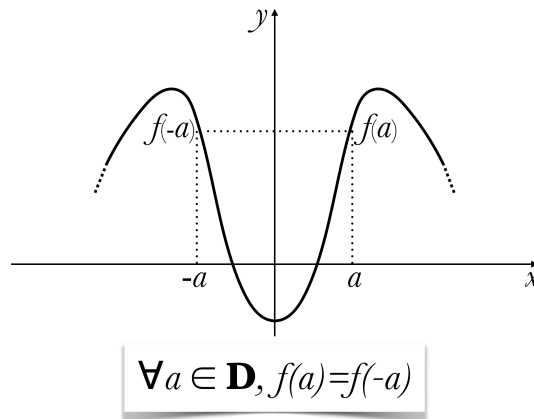
La caratteristica della parità va a verificare se il grafico della funzione che stiamo studiando è simmetrico rispetto all'asse delle Y, cioè il grafico è speculare rispetto all'asse, o se il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine. Nel primo caso parleremo di **PARITÀ** della funzione, nel secondo caso parleremo di **DISPARITÀ** della funzione.

Ovviamente non tutte le funzioni presenteranno questa simmetria, possiamo però individuare delle condizioni che, se presenti nella funzione, ci assicurano che questa è pari o dispari.

Definizione 1.9. Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$. Una funzione si dice **PARI** in D se

$$f(-x) = f(x)$$

per ogni $x \in D$.



Se una funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse Y. Infatti se $P(x; y)$ appartiene al grafico anche $P'(-x; y)$ vi appartiene. Sottolineiamo ancora che la condizione di parità per una funzione è $f(-x) = f(x)$.

Esempio 1.6. Verificare se una funzione è o non è pari.

Per verificare se una funzione è pari basta sostituire nella funzione $-x$ al posto di x e verificare se la nuova $f(-x)$ è uguale alla funzione di partenza, cioè se $f(-x) = f(x)$. Se prendiamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 2}$$

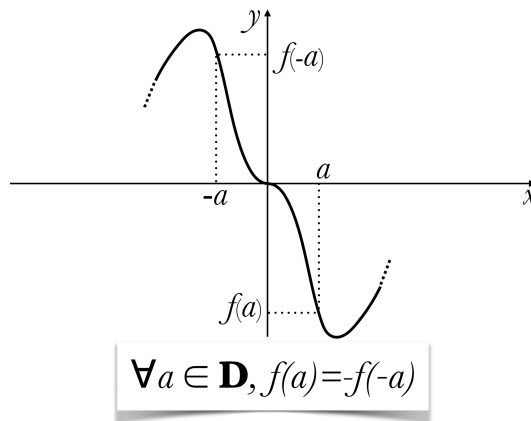
non è pari, infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x) + 2} = \frac{x^2 + 3}{-x + 2} \neq f(x).$$

Definizione 1.10. Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$. Una funzione si dice **DISPARI** in D se

$$f(-x) = -f(x)$$

per ogni $x \in D$.



Se una funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Infatti se $P(x; y)$ appartiene al grafico anche $P'(-x; -y)$ vi appartiene. Sottolineiamo ancora che la condizione di disparità per una funzione è $f(-x) = -f(x)$.

Esempio 1.7. Verificare se una funzione è o non è dispari.

Per verificare se una funzione è dispari basta sostituire nella funzione $-x$ al posto di x e verificare se la nuova $f(-x)$ è uguale alla funzione di partenza cambiata di segno, cioè se $f(-x) = -f(x)$. Se prendiamo la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$$

è dispari, infatti

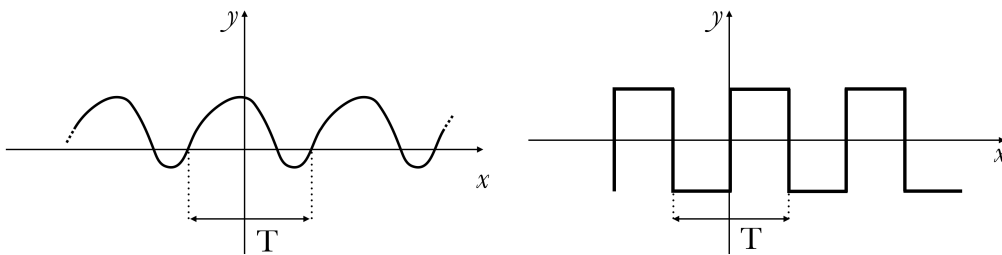
$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x}{x^2 + 2} = -\frac{x}{x^2 + 2} = -f(x).$$

1.4.3 Periodicità

La periodicità di una funzione specifica se questa si ripete uguale a sé stessa ad intervalli regolari.

Definizione 1.11. Una funzione $y = f(x)$, $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice PERIODICA di periodo $T > 0$ di periodo $T > 0$ se $\forall x \in A \rightarrow (x + T) \in A$ e possiamo scrivere

$$f(x + T) = f(x)$$



Esempio 1.8. Calcolare il periodo di una funzione. Calcoliamo il periodo della funzione goniometrica

$$y = \sin 7x$$

con due possibili procedure:

Procedura a) La funzione ha per definizione periodo T se, con k intero,

$$\sin[(7(x + kT))] = \sin 7x$$

cioè,

$$\sin[(7x + 7kT)] = \sin 7x$$

poichè la funzione seno ha periodo 2π , allora

$$\sin[7x + 7kT] = \sin[7x + 2k\pi]$$

e l'uguaglianza è quindi valida se $7T = 2\pi$ da cui

$$T = \frac{2\pi}{7}.$$

Procedura b) La funzione $y' = \sin 7x'$ viene dalla trasformazione della funzione $y = \sin x$, che ha periodo $T = 2\pi$, mediante una sostituzione $7x' = x$, ovvero $x' = \frac{x}{7}$. Se l'asse delle ascisse viene così contratto di un fattore $\frac{x}{7}$, il periodo T' subirà la stessa contrazione e pertanto è pari a

$$T' = \frac{x}{7}(2\pi) = \frac{2\pi}{7}$$

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno periodi diversi T_f e T_g , rispettivamente, le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ hanno un periodo pari al m.c.m. tra T_f e T_g nell'ipotesi che $\frac{T_f}{T_g}$ sia un numero razionale e diverso da 1. Se il rapporto è irrazionale le precedenti combinazioni di funzioni non sono periodiche. Se $T_f = T_g$ il periodo globale è minore o uguale del periodo comune.

Esempio 1.9. Calcolare il periodo di combinazioni di funzioni periodiche e non periodiche.

- a) $f(x) = \sin x + \cos 3x$ è periodica di 2π che è il m.c.m. tra $T_f = 2\pi$ e $T_g = \frac{2}{3}\pi$.
- b) $f(x) = \sin x + \cos \pi x$ non è periodica perché il rapporto $\frac{T_f}{T_g} \notin \mathbb{Q}$, infatti $T_f = 2\pi$ e $T_g = 2$, per cui $\frac{2\pi}{2} = \pi \notin \mathbb{Q}$
- c) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \cos 3x + \tan x$ dove $T_{\sin \frac{x}{2}} = 4\pi$, $T_{\cos 3x} = \frac{2}{3}\pi$, $T_{\tan} = \pi$
- d) Se consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log[\sin x]}$$

il periodo è 2π

Se una funzione è periodica i valori delle sue ordinate si ripetono con regolarità, quindi per studiarne l'andamento su tutto l'asse reale, basterà studiarne l'andamento in un singolo periodo. Ripetiamo ancora che la condizione di parità per una funzione è $f(x + T) = f(x)$ con T periodo.

1.4.4 Limitatezza

La limitatezza di una funzione valuta se le ordinate di una funzione raggiungono un valore massimo e un valore minimo, oppure non hanno un limite.

Definizione 1.12. Consideriamo una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione si dice:

▷ LIMITATA SUPERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ ha un limite superiore k :

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in A, k \geq f(x)$$

▷ LIMITATA INFERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ ha un limite inferiore k :

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in A, k \leq f(x)$$

▷ LIMITATA se il suo codominio $f(A)$ è limitato sia superiormente che inferiormente:

$$\exists k \in \mathbb{R}, k > 0 \forall x \in A, |f(x)| \leq k$$

Se una funzione non è limitata da un valore del codominio k si dirà illimitata, in particolare:

▷ ILLIMITATA SUPERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ non è limitato superiormente;

▷ ILLIMITATA INFERIORMENTE se il suo codominio $f(A)$ non è limitato inferiormente;

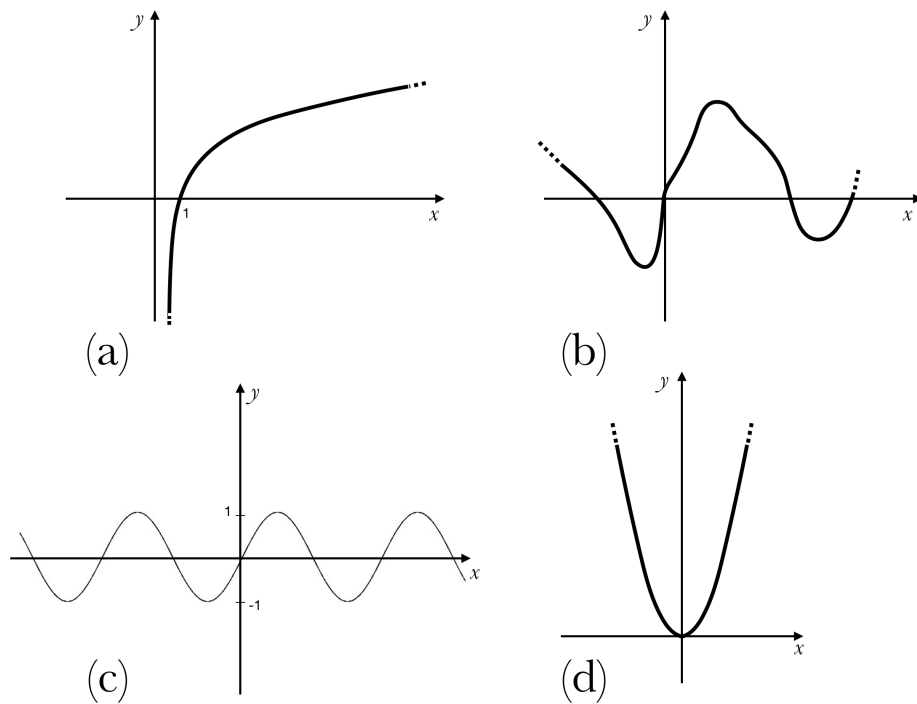
▷ ILLIMITATA se il suo codominio $f(A)$ non è limitato superiormente né inferiormente.

Esempio 1.10. Determinare la limitatezza o illimitatezza di funzioni.

In (a) La funzione $f(x) = \log(x)$ è illimitata: né superiormente né inferiormente limitata;

in (b) La funzione è limitata inferiormente e illimitata superiormente; in (c) La funzione

$f(x) = \sin x$ è limitata sia superiormente che inferiormente; in (d) La funzione $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente e illimitata superiormente.



1.5 La classificazione delle funzioni

Classifichiamo le possibili funzioni che incontreremo o abbiamo incontrato in base alle operazioni che compaiono nella loro espressione analitica. Se nell'espressione analitica di una funzione compaiono le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza con esponente razionale o estrazione di radice siamo di fronte ad una **FUNZIONE ALGEBRICA**.

Le funzioni che non possono essere rappresentate usando solamente le operazioni precedentemente ricordate si dicono **TRASCENDENTI**. Tra le più note funzioni trascendenti ricordiamo le funzioni goniometriche, quelle esponenziali e quelle logaritmiche.

A seconda che le funzioni algebriche contengano o meno l'operazione di radice e l'operazione di divisione suddividiamo le funzioni algebriche in **RAZIONALI FRATTE**, **RAZIONALI INTERE** o polinomiali, **IRRAZIONALI FRATTE** e **IRRAZIONALI INTERE**.

MEMO!! Per non creare equivoci ricordiamo che una funzione è definita fratta quando il denominatore contiene la variabile indipendente x , è invece definita irrazionale quando tale variabile appare sotto il segno di radice.

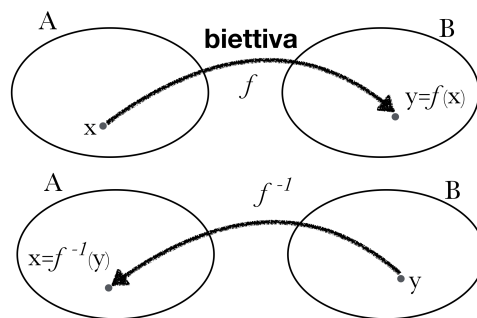
Esempio 1.11. Classificazione di funzioni.
Classifichiamo le seguenti funzioni:

- a) $f(x) = \frac{\sqrt{(x+5)}}{3}$ è una funzione irrazionale intera, infatti pur avendo un denominatore, questo non contiene la variabile indipendente x ;
- b) $g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ è una funzione trascendente di tipo esponenziale;
- c) $h(x) = \sqrt{2}x + 4x$ è una funzione razionale intera, in quanto la radice compare solo nel numero irrazionale a coefficiente della $\sqrt{2}x$.

1.6 Funzioni inverse, composte e uguali

Nella rappresentazione insiemistica studiata finora abbiamo sempre visto le frecce partire dall'insieme A per arrivare nell'insieme B . Esiste una possibile lettura al contrario? Se le frecce partissero da B , dalle y per arrivare alle x , ci troveremmo ancora in presenza di una funzione?

Definizione 1.13. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione biettiva. Si dice funzione inversa di f la funzione $f^{-1} : B \rightarrow A$ che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



Notiamo che se una funzione ammette inversa si dice INVERTIBILE. Significativa è, poi, la relazione tra i codomini e i domini delle due funzioni, f e la sua inversa: il dominio di f^{-1} è l'immagine di f e l'immagine di f^{-1} è il dominio di f .

Esempio 1.12. Calcolare e graficare l'inversa di una funzione, verificando che sia invertibile. Consideriamo la funzione biettiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

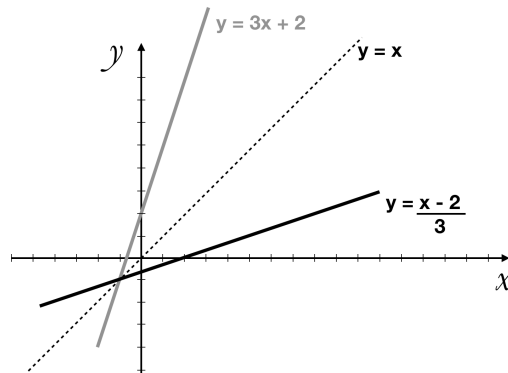
$$f(x) = y = 3x + 2$$

Possiamo ottenere la sua inversa f^{-1} nel seguente modo:

- ⇒ ricaviamo x in funzione di y dalla relazione precedente

$$x = \frac{y-2}{3}$$

- ⇒ sostituiamo la x con y e viceversa.



→ notiamo che il grafico della funzione inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

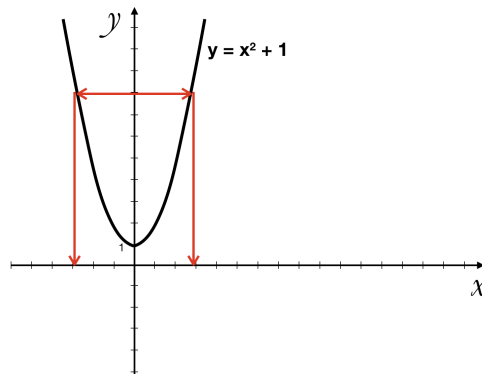
è simmetrico a quello di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta di equazione $y = x$

Esempio 1.13. Disegnare l'inversa di una funzione che originariamente non sia invertibile nel suo dominio.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

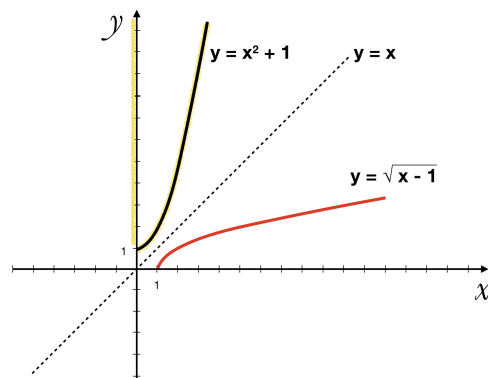
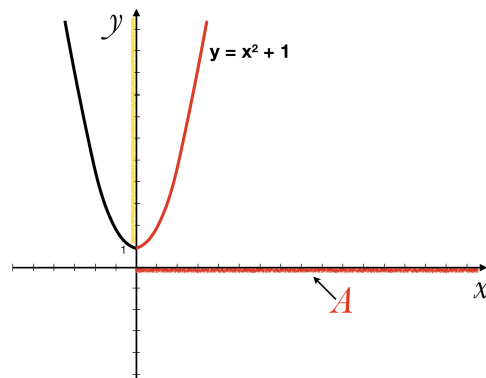
$$f(x) = x^2 + 1$$

→ f non ammette funzione inversa perché non è biiettiva, in quanto non è iniettiva.



→ Se f non è biiettiva e quindi non è invertibile, possiamo operare una **RESTRIZIONE DEL DOMINIO** a un sottoinsieme in cui f risulti biiettiva.

→ Scelgo solo una parte del dominio che chiamo A e disegno l'inversa riflettendo la porzione di funzione biiettiva rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta di equazione $y = x$.



Come visto negli esempi precedenti, il grafico della funzione f^{-1} , inversa della funzione f , è il simmetrico di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Anche se sappiamo che l'inversa di una certa funzione deve essere simmetrica rispetto ad essa, trovare l'inversa di una determinata funzione e in particolar modo la sua forma analitica può non essere immediato. Forniamo quindi una procedura.

Procedura 1.1 Determinare l'inversa di una funzione data: [vedi la procedura a pag 100 vol3]

1. Si verifica che $f(x)$ è invertibile;
2. Si esplicita la f rispetto a x ;
3. Nella forma appena trovata si sostituisce x con y e y con x .

Esempio 1.14. Invertiamo la funzione: $f(x) = y = \sqrt[3]{x} - 1$

1. La funzione è invertibile perché è strettamente crescente in tutto il dominio \mathbb{R} .
2. Esplicitiamo la funzione rispetto a x :
 $y = \sqrt[3]{x} - 1 \rightarrow y + 1 = \sqrt[3]{x} \rightarrow (y + 1)^3 = x$
3. Infine otteniamo: $f^{-1}(x) = y = (x + 1)^3$

Esempio 1.15. Invertiamo la funzione: $f(x) = y = e^{x+1} - 1$

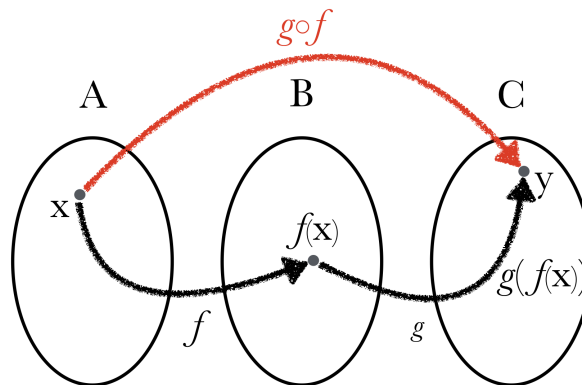
1. La funzione è invertibile perché è strettamente crescente in \mathbb{R} .
2. Esplicitiamo la funzione rispetto a x :
 $y = e^{x+1} - 1 \rightarrow y + 1 = e^{x+1} \rightarrow \ln(y + 1) = \ln(e^{x+1}) \rightarrow \ln(y + 1) - 1 = x$.
3. Infine otteniamo: $f^{-1}(x) = y = \ln(x + 1) - 1$.

Studiate le funzioni inverse discutiamo ora un'operazione tra funzioni che ci consentirà di creare funzioni complesse a partire da funzioni semplici: questa operazione si chiama **COMPOSIZIONE DI FUNZIONI** e il suo risultato sarà una nuova funzione detta composta.

Definizione 1.14. Date le funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ si dice funzione composta $f \circ g$ la funzione: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ che associa ad ogni elemento di A un elemento di C in modo che

- all'elemento $x \in A$ corrisponde mediante f , l'elemento $f(x) \in B$
- all'elemento $f(x) \in B$ corrisponde, mediante g , l'elemento $g(f(x)) \in C$

affinché sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g . Il dominio di $g \circ f$ è costituito da tutti gli elementi del dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g .



La simbologia $g \circ f$ si legge «g composto f» o «g dopo f»; $g(f(x))$ si legge «g di f di x».

Per quanto riguarda le proprietà di questa operazione tra funzioni notiamo che la composizione è associativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, ma in generale non commutativa $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempio 1.16. Date le due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 5$, determiniamo le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Abbiamo $g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$ e il dominio della funzione ottenuta è $x \geq 0$. Otteniamo l'altra composta con un procedimento analogo $f \circ g = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$ e il suo dominio è $x \geq -5$. La diversità delle due funzioni ottenute ci conferma la non commutatività dell'operazione di composizione.

Posso comporre una funzione con la sua inversa?

Sia f una funzione invertibile di dominio D e immagine I , con f^{-1} la sua inversa. Consideriamo la composta $f^{-1} \circ f$, cioè f^{-1} dopo f : x va in $f(x)$ che a sua volta va in x , $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in D$ $f^{-1} \circ f$ è la funzione identità in D , analogamente anche $f(f^{-1}(x)) = x$, $f \circ f^{-1}$ è l'identità in I . Ricordiamo che la funzione identità è una particolare funzione che associa ad ogni x la x stessa, cioè associa ad ogni elemento del dominio, lo stesso elemento nel codominio.

Definizione 1.15. Due funzioni f e g si dicono uguali se hanno lo stesso dominio D e risulta

$$f(x) = g(x)$$

$\forall x \in D$.

Esempio 1.17. Vediamo un esempio di funzioni uguali e non uguali. Le due funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

e

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$$

sono uguali perchè hanno lo stesso dominio ($x \geq 0$) e risulta:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$$

per ogni $x \geq 0$. Vediamo un controesempio di funzioni uguali. Le due funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 4}}$$

e

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x + 4}}$$

non sono uguali perché hanno dominio diverso: la funzione f è definita per $x \geq 0$, mentre la funzione g è definita per $x < -4 \vee x \geq 0$.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$$

per ogni $x \geq 0$.

1.7 Esercizi

1.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 Definizione di funzione

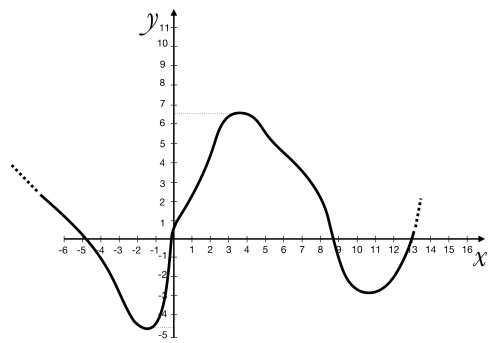
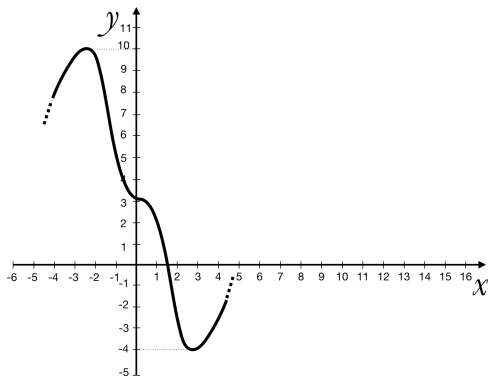
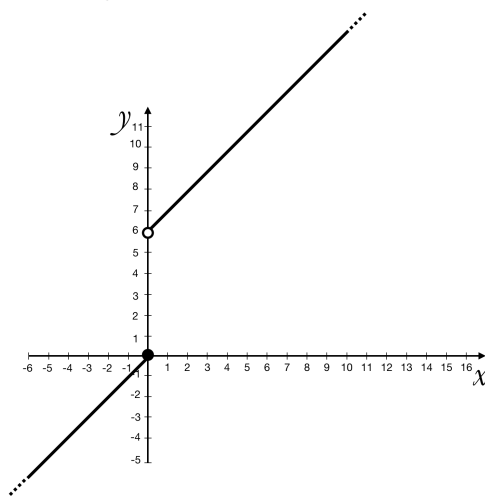
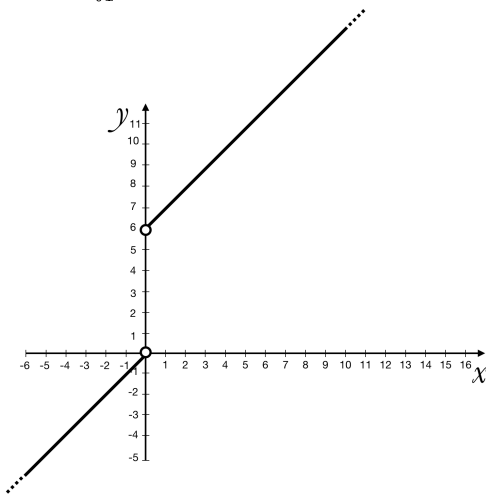
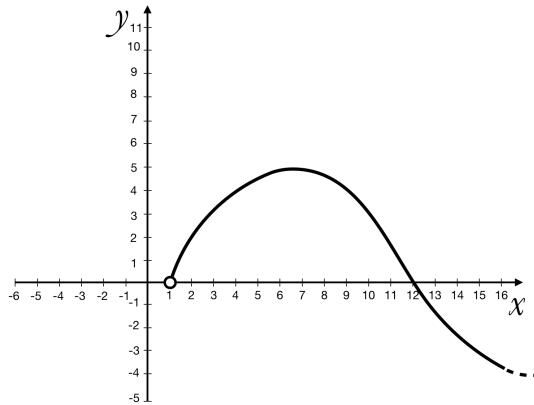
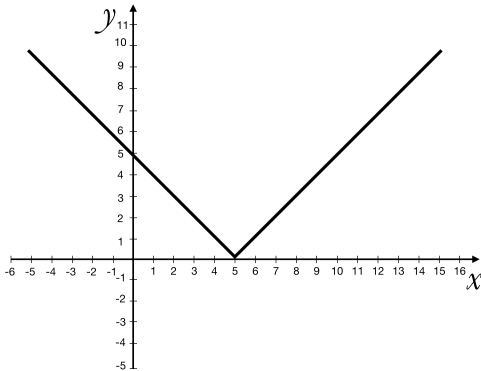
1.1) Riflettendo sulla definizione di funzione rispondi argomentando alle seguenti domande:

- Quali tra i seguenti oggetti, che puoi rappresentare sul piano cartesiano, è una funzione: circonferenza, ellisse, parabola con asse verticale?
- Quali tra i seguenti oggetti, che puoi rappresentare sul piano cartesiano, sono funzioni: retta verticale, retta orizzontale, retta obliqua?
- Considera una parabola con asse verticale e una con asse orizzontale, quale delle due è una funzione?

1.2) Determina il dominio delle seguenti funzioni

- | | |
|--|---|
| a) $y = 4x^2 + x + 2$ | [D = \mathbb{R}] |
| b) $y = \frac{3x+2}{x-5}$ | [D = $\mathbb{R} - \{5\}$] |
| c) $y = \sqrt{9 - x^2}$ | [D = $[-3, 3]$] |
| d) $y = \frac{4x}{\sqrt{x+2}}$ | [D = $]-2, +\infty[$] |
| e) $y = \frac{2+3x}{x^2+7x+12}$ | [D = $\mathbb{R} - \{-3, -4\}$] |
| f) $y = e^{x+3}$ | [D = \mathbb{R}] |
| g) $y = \log_2(x+3)$ | [D = $]-3, +\infty[$] |
| h) $y = \ln(x^2 + 6x + 8)$ | [D = $]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$] |
| i) $y = \frac{x^3+3x}{e^x+5}$ | [D = \mathbb{R}] |
| l) $y = \frac{3x^2+4}{e^x-2}$ | [D = $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$] |
| m) $y = \frac{4x-5}{2x-8} - \sqrt{x+3}$ | [D = $[-3, 4[\cup]4, +\infty[$] |
| n) $y = \sqrt{\log(x+4)}$ | [D = $[-3, +\infty[$] |
| o) $y = (x+5)^{x+3}$ | [D = $]-5, +\infty[$] |
| p) $y = 2 \sin x + \cos 2x$ | [D = \mathbb{R}] |
| q) $y = 2 + \cos 3x \cos 2x$ | [D = $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$] |
| r) $y = \arcsin(x+2)$ | [D = $[-3, -1]$] |
| s) $y = \arctan\left(\frac{3}{x+2}\right)$ | [D = $\mathbb{R} - \{-2\}$] |

1.3) Dall'analisi visiva del grafico deduci il dominio e codominio della funzione.



1.2 La rappresentazione di una funzione

1.4) Immagina l'evoluzione della temperatura ora per ora nella città di Firenze, in una giornata di agosto, costruiscine la rappresentazione tabulare e quella grafica.

1.5) Rappresenta graficamente le seguenti funzioni:

a) $y = \sin 2x$

b) $y = 3x + 2$

c) $y = x^2 + 2$

d) $y = x^2 + 2x + 3$

e) $y = \log(x + 1)$

f) $y = e^x + 2$

g) $y = \frac{x+2}{2x-4}$

h) $y = \sqrt{9-x}$

i) $y = \sqrt{9-4x^2}$

l) $y = \sqrt[3]{x}$

m) $y = |x^2 + 4x + 3|$

1.3 Le proprietà di una funzione

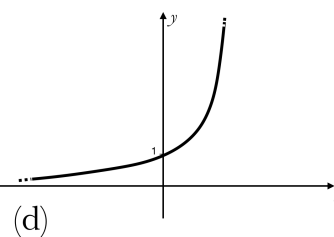
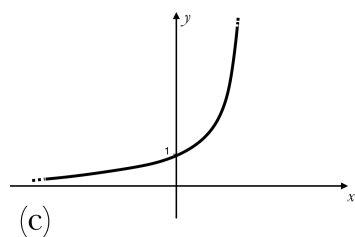
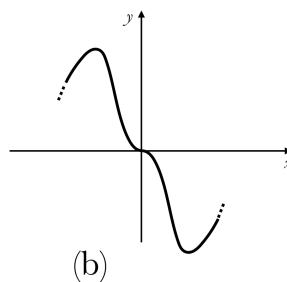
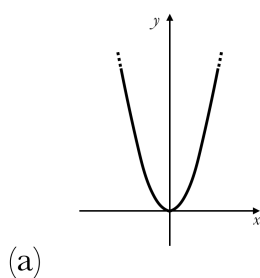
1.6) Stabilisci se le seguenti funzioni, rappresentate graficamente, sono iniettive, suriettive o biunivoce, motivando la risposta.

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$

(d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



1.4 Le caratteristiche di una funzione

1.7) Verifica se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

- | | |
|-----------------------------|----------------------|
| a) $y = 2x + 3$ | [né pari né dispari] |
| b) $y = x^3 + x$ | [dispari] |
| c) $y = \frac{x^2+3}{x}$ | [dispari] |
| d) $y = \frac{3x^4}{2+x^2}$ | [pari] |
| e) $y = \tan x + \sin x$ | [dispari] |
| f) $y = \log(x - 1)$ | [né pari né dispari] |

1.8) Stabilisci se le seguenti funzioni sono periodiche, individuandone l'eventuale periodo.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = \sin 4x$ | [periodica $T = \frac{\pi}{2}$] |
| b) $y = \tan 2x$ | [periodica $T = \frac{\pi}{2}$] |
| c) $y = \cos 3x + 1$ | [periodica $T = \frac{2\pi}{3}$] |
| d) $y = \cos x + x$ | [non periodica] |
| e) $y = \tan \frac{x}{5}$ | [periodica $T = 5\pi$] |
| f) $y = \sin(x + 1)$ | [periodica $T = 2\pi$] |
| g) $y = \sin x + 1$ | [periodica $T = 2\pi$] |
| h) $y = \sin x + x$ | [non periodica] |
| i) $y = \sin \frac{x}{4}$ | [periodica $T = 8\pi$] |
| l) $y = 2^{\sin x}$ | [periodica $T = 2\pi$] |
| m) $y = x \cos x$ | [non periodica] |

1.5 La classificazione delle funzioni

1.9) Classifica prima riguardo alle categorie algebrico o trascendente e poi rispetto alle categorie fratta o intera e razionale o irrazionale le seguenti funzioni.

- | |
|--|
| a) $y = \frac{x^2+x+2}{3x}$ |
| b) $y = \frac{4}{\sqrt{x-6}}$ |
| c) $y = e^x + x$; $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$ |
| d) $y = \frac{1}{3}\sqrt{3-x}$ |
| e) $y = \frac{\sin x}{4}$ |
| f) $y = \frac{x^2-4x}{3+\sqrt{2}}$ |

1.6 Funzioni inverse, composte e uguali

1.10) Stabilisci se le seguenti funzioni sono invertibili senza restrizioni, giustificando la risposta.

- a) $y = 2x + 3$ [invertibile]
 b) $y = x^2 + 9x + 18$ [non invertibile]
 c) $y = e^x$ [invertibile]
 d) $y = \ln x$ [invertibile]
 e) $y = x^3 + 3x^2 + x$ [non invertibile]
 f) $y = \sin x$ [non invertibile]

1.11) Determina l'inversa della funzione data, specificando il suo dominio.

- a) $y = 4x + 3$ [$y = \frac{x-3}{4}$, $D = \mathbb{R}$]
 b) $y = e^{2x}$ [$y = \frac{\ln x}{2}$, $D =]0, +\infty[$]
 c) $y = x + 1$ [$y = x - 1$, $D = \mathbb{R}$]
 d) $y = \ln(x + 1)$ [$y = e^x - 1$, $D = \mathbb{R}$]

1.12) Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ determina le espressioni analitiche di $f \circ g$ e di $g \circ f$. ben leggibile questo esercizio

- a) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$
 $g(x) = \log_4 x$
 $[(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\log_4 x + 3}; (g \circ f)(x) = \log_4 (\sqrt[3]{x+3})]$
- b) $f(x) = 3^x$
 $g(x) = x - 5$
 $[(f \circ g)(x) = 3^{x-5}; (g \circ f)(x) = 3^x - 5]$
- c) $f(x) = \cos 3x$
 $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
 $[(f \circ g)(x) = \cos 3\sqrt{x^2 + 3}; (g \circ f)(x) = \sqrt{(\cos 3x)^2 + 3}]$
- d) $f(x) = x^2 + 3$
 $g(x) = 2x + 1$
 $[(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4; (g \circ f)(x) = 2(x^2 + 3) + 1 = 2x^2 + 7]$

Topologia della retta **2**

2.1 La topologia della retta

Già dall'etimologia del termine, dal greco "topos" che significa "luogo", apprendiamo che il termine topologia indica lo studio ragionato dei luoghi. Nell'ambito dei nostri studi la topologia, o scienza dei luoghi, è quella branca della matematica che studia le proprietà geometriche delle figure piane e spaziali che restano inalterate eseguendo trasformazioni biunivoche. In particolare, con l'espressione topologia della retta si indica lo studio della retta come insieme di punti, approfondendo i concetti di vicinanza, lontananza e distanza tra di essi.

Il primo passo che facciamo è quello di identificare i numeri reali con i punti della retta: ad ognuno degli infiniti punti della retta facciamo corrispondere uno degli infiniti numeri dell'insieme \mathbb{R} . Ricordiamo infatti che entrambi sono insiemi ordinati e completi e possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi, fissando sulla retta un'origine e un verso di percorrenza, come ci consente di fare il postulato di ordinamento sulla retta.

Identificando i numeri reali con i punti della retta, possiamo definire la distanza tra due numeri x e y reali come la distanza $d(x, y)$ tra i punti che li rappresentano. Con $x, y \in \mathbb{R}$ la distanza è data da:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| \quad (2.1)$$

ed ha le seguenti proprietà:

1. $\forall x, y \in A, d(x, y) = d(y, x)$ cioè la distanza è simmetrica,
2. $\forall x, y \in A, d(x, y) \geq 0$,
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
4. $\forall x, y, z \in A, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ detta disuguaglianza triangolare.

2.2 Gli intervalli

Definizione 2.1. Un INTERVALLO è un sottoinsieme di \mathbb{R} , formato da tutti i reali compresi tra due estremi, finiti o infiniti.

Gli intervalli possono essere chiusi o aperti a seconda che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Gli intervalli possono essere limitati se entrambi i loro estremi sono finiti: segmenti o illimitati se un estremo non è finito: semirette.

TABELLA INTERVALLI da rifare o vedi quella a vol.2 pag....

	Tipo di intervallo	Rappresentazione		Grafica
		con le parentesi	algebraica	
intervalli limitati	Intervallo chiuso	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
	Intervallo aperto	(a, b) o $]a, b[$	$a < x < b$	
	Intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra	$[a, b)$ o $]a, b[$	$a \leq x < b$	
	Intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra	$(a, b]$ o $]a, b]$	$a < x \leq b$	
intervalli illimitati	Chiuso, illimitato a destra	$[a, +\infty)$ o $]a, +\infty[$	$x \geq a$	
	Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$ o $]a, +\infty[$	$x > a$	
	Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$ o $] - \infty, a[$	$x < a$	
	Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$ o $] - \infty, a]$	$x \leq a$	

Esempio 2.1. Intervalli finiti e infiniti: metodi di scrittura.

- L'insieme \mathbb{R} si può scrivere come l'intervallo $] - \infty, +\infty[$
- L'insieme $\mathbb{R} - \{3\}$ si può indicare con l'intervallo $] - \infty, 3[\cup]3, +\infty[$
- L'insieme $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ si può indicare con $] - \infty, -2[\cup] - 2, 3[\cup]3, +\infty[$
- L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + 3x > 0$ si può scrivere come $] - \infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

Per quanto riguarda le operazioni tra intervalli evidenziamo che l'unione di intervalli aperti è un insieme aperto; l'intersezione di due intervalli aperti è un aperto. L'intersezione di intervalli chiusi è un intervallo chiuso; l'unione di un numero finito di intervalli chiusi è chiuso. Un intervallo B è chiuso se il suo complementare è aperto.

Grazie alla corrispondenza tra numeri reali e punti di una retta, per indicare un elemento di un intervallo possiamo riferirci indifferentemente a un numero o un punto.

2.3 Gli intorno

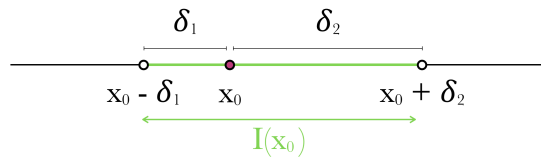
Definizione 2.2. Si definisce intorno o intorno completo di un numero reale x_0 , o punto x_0 , un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0 .

Rappresentiamo in simboli e graficamente un intorno

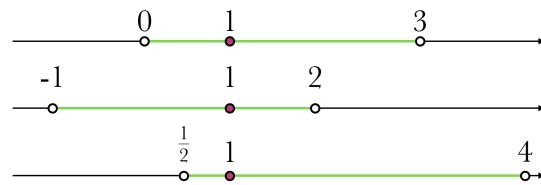
$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\quad (2.2)$$

con δ_1 e δ_2 reali positivi, cioè $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$, o equivalentemente

$$I(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\} \quad (2.3)$$



Da quanto visto risulta chiaro che per ogni numero reale, esistono infiniti intorni. Per quanto riguarda le operazioni associabili agli intorni è da sottolineare che l'intersezione e l'unione di due o più intorni di x_0 sono ancora intorni di x_0 .



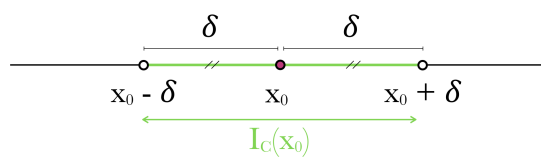
Chiarito il concetto di intorno, introduciamo alcune particolari tipologie di intorno che renderanno più funzionale l'uso di questo concetto. Vedremo l'intorno circolare, l'intorno destro e l'intorno sinistro.

Definizione 2.3. Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ , si definisce **INTORNO CIRCOLARE** di x_0 , di raggio δ , l'intervallo aperto $I_C(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ .

$$I_C(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{2.4}$$

o equivalentemente

$$I_C(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} \tag{2.5}$$

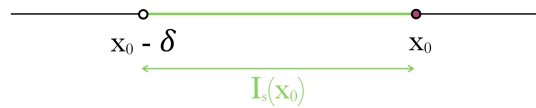


Definizione 2.4. Si dice **intorno sinistro** del numero reale x_0 , $I_s(x_0)$ o $I^-(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo destro. $\delta \in \mathbb{R}$ è detta ampiezza.

$$I_s(x_0) =]x_0 - \delta, x_0[\tag{2.6}$$

o equivalentemente

$$I_s(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0\} \tag{2.7}$$

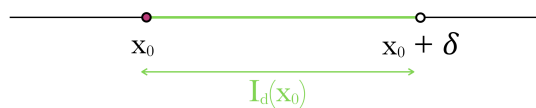


Definizione 2.5. Si dice intorno destro del numero reale x_0 , $I_d(x_0)$ o $I^+(x_0)$, un qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo sinistro. $\delta \in \mathbb{R}$ è detta ampiezza.

$$I_d(x_0) =]x_0, x_0 + \delta[\quad (2.8)$$

o equivalentemente

$$I_d(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 < x < x_0 + \delta\} \quad (2.9)$$



Esempio 2.2. Intorni e intervalli.

- L'intervallo $] - 2, 9[$ è un intorno di $x_0 = 4$; rispetto a $x_0 = 4$ non sono intorni né $]5, 9[$ né $[3, 5]$.
- L'intervallo $]0, 6[$ è un intervallo circolare di $x_0 = 3$ di raggio $\delta = 3$.
- L'intervallo $] \frac{4}{5}, 1[$ è un intorno sinistro di 1 di ampiezza $\frac{1}{5}$.

2.4 Insiemi limitati e illimitati

Consideriamo un insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$. L'insieme A si dice superiormente limitato se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ maggiore o uguale a tutti gli elementi di A , cioè $x \leq \alpha, \forall x \in A$. Tale numero prende il nome di maggiorante, un insieme superiormente limitato ammette infiniti maggioranti. Se un insieme A non è superiormente limitato si dice superiormente illimitato. In simboli:

A è SUPERIORMENTE LIMITATO se

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \alpha \geq x \quad (2.10)$$

A è SUPERIORMENTE ILLIMITATO se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A \mid x > M \quad (2.11)$$

Specularmente l'insieme A si dice inferiormente limitato se esiste un numero $\beta \in \mathbb{R}$ minore o uguale a tutti gli elementi di A , cioè $x \geq \beta, \forall x \in A$. Tale numero prende il nome di

minorante, un insieme inferiormente limitato ammette infiniti minoranti. Se un insieme A non è inferiormente limitato si dice inferiormente illimitato. In simboli:

A è INFERIORMENTE LIMITATO se

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \beta \leq x \quad (2.12)$$

A è INFERIORMENTE ILLIMITATO se

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A \mid x < m \quad (2.13)$$

Infine, completiamo la trattazione appena fatta notando che l'insieme A si dice limitato se è sia inferiormente limitato che superiormente limitato, esiste cioè un intervallo limitato che lo contiene. Un insieme illimitato superiormente e inferiormente si dice illimitato.

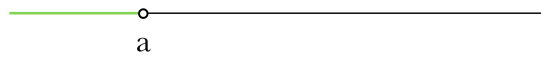
Esempio 2.3. Limitatezza/illimitatezza di insiemi, maggioranti e minoranti.

- L'insieme $A =]-\infty, 4[\cup]8, 15]$ è superiormente limitato, perché tutti i suoi elementi sono minori o uguali a 15. 15 è un maggiorante, ma anche 16, 20 e 204 lo sono. A è, poi, inferiormente illimitato.
- L'insieme $B = \{5\} \cup]9, +\infty[$ è inferiormente limitato e tutti i numeri minori o uguali a 5 sono minoranti; l'insieme è superiormente illimitato.
- L'insieme $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ è limitato, ha 1 come maggiorante e 0 come minorante. Altri minoranti ad esempio sono $-3, -5$ ecc, altri maggioranti 5, 8 ecc.
- L'insieme $D =]3, 5] \cup [7, 9[$ ammette 2 come minorante e 10 come maggiorante, quindi è sia inferiormente che superiormente limitato: D è limitato.
- L'insieme \mathbb{Q} non ammette né minoranti né maggioranti, quindi non è né limitato né inferiormente né superiormente.

Avendo introdotto gli insiemi illimitati possiamo ora parlare degli intorni di infinito. Anche se $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali è utile introdurne gli intorni.

Definizione 2.6. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI MENO INFINITO un qualsiasi intervallo illimitato a sinistra e aperto a destra

$$I(-\infty) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad (2.14)$$



Definizione 2.7. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI PIÙ INFINITO un qualsiasi intervallo illimitato a destra e aperto a sinistra

$$I(+\infty) =]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\} \quad (2.15)$$

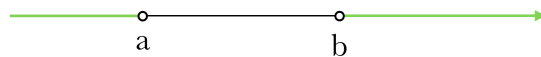


Definizione 2.8. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo INTORNO DI INFINITO l'unione tra un intorno di $-\infty$ e un intorno di $+\infty$

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \vee x > b\} \quad (2.16)$$

e L'INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO, dove $c \in \mathbb{R}^+$ come

$$I_c(\infty) =]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[\quad (2.17)$$



Esempio 2.4. Scrivere gli intervalli risultato di una disequazione come intorni di infiniti.

- Le soluzioni della disequazione $x + 4 > 0$ formano un intorno di $+\infty$. Soluzioni: $x > -4$, $I(+\infty) =]-4, +\infty[$.
- Le soluzioni della disequazione $x^2 + 5x + 6 > 0$ formano un intorno di infinito. Soluzioni: $-3 < x \vee x > -2$, $I(\infty) =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$.
- Consideriamo la disequazione $|x| > 3$, le soluzioni forniscono un esempio di intorno circolare di ∞ che è $I_c(\infty) =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

2.5 Massimi, minimi ed estremi

Ragioniamo ora su quanto appena visto, nel precedente paragrafo. Se un insieme A è superiormente limitato ha infiniti maggioranti; si può allora individuare un insieme di maggioranti, tra i quali non è identificabile un maggiorante più grande di tutti, mentre possiamo pensare a un maggiorante più piccolo di tutti.

Questo maggiorante viene chiamato estremo superiore di A , se tale punto è anche compreso in A prende il nome di massimo. Chiaramente potremmo fare un discorso analogo per i minoranti, individuando il maggiore tra di essi, detto estremo inferiore. Se l'estremo inferiore

appartiene all'insieme che si sta studiando, prende il nome di minimo. Entriamo nel merito delle definizioni.

Definizione 2.9. Un numero reale M si dice massimo di A , $\max A$, se appartiene ad A ed è un maggiorante di A .

Definizione 2.10. Un numero reale m si dice minimo di A , $\min A$, se appartiene ad A ed è un minorante di A .

Definizione 2.11. Si definisce S estremo superiore di A , $\sup A$, se esiste, il minimo dell'insieme dei maggioranti.

Definizione 2.12. Si definisce s estremo inferiore di A , $\inf A$, se esiste, il massimo dell'insieme dei minoranti.

Esempio 2.5. Studiamo i massimi e i minimi dei seguenti intervalli.

Consideriamo l'intervallo chiuso $[0, 2]$, esso presenta un minimo in 0 e un massimo in 2, se prendiamo invece l'intervallo aperto $]0, 2[$ esso non avrà né massimo né minimo, perché né 0 né 1 appartengono all'insieme. Risulta chiaro quindi che nell'intervallo aperto solo a destra $]0, 2[$ sarà presente un minimo, cioè 0, ma non un massimo.

Esempio 2.6. Studiamo gli estremi superiore ed inferiore dei seguenti intervalli.

Consideriamo l'intervallo $A =]1, 5]$, aperto a sinistra e chiuso a destra. L'intervallo ha un estremo inferiore in 1, infatti questo valore è il massimo dei minoranti, 1 però non è minimo in quanto non compreso in A . Lo stesso intervallo ha estremo superiore in 5, che, essendo compreso, è anche massimo. Notiamo che l'insieme dei maggioranti di A è infatti l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$, l'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.

Consideriamo ora l'intervallo $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, non essendo inferiormente limitato B non presenta né estremo inferiore né minimo. L'estremo superiore di B è 3, che non essendo compreso non è massimo.

Soffermiamoci ancora sui concetti di \sup , estremo superiore, e di \inf , estremo inferiore, enunciando la seguente proprietà che precisa l'esistenza e l'unicità di \sup e \inf negli insiemi limitati:

Sia $A \subset \mathbb{R}$, non vuoto:

- ➔ se A è superiormente limitato allora esiste in \mathbb{R} l'estremo superiore di A $\sup A$ ed è unico.
- ➔ se A è inferiormente limitato allora esiste in \mathbb{R} l'estremo inferiore di A $\inf A$ ed è unico.

2.6 I punti di accumulazione

Pensiamo ad un intervallo dato dall'insieme $A =]3,5[$ e ad un insieme fatto invece di singoli punti $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e ragioniamo sul fatto che nel primo insieme preso un qualsiasi punto ad esempio 4, ci sarà sempre un intorno di 4 che contiene altri punti di A ; anche se prendiamo in considerazione 3, che a dire la verità, non fa parte di A , potrei prendere un intorno qualsiasi di 3 e verificare che vi è almeno un punto di A . Questa riflessione non si può applicare invece all'insieme B , perché se prendo un intorno di 3, nella fattispecie un intorno circolare di raggio $\frac{1}{2}$, in quell'intorno non sono compresi altri punti di B perché gli elementi di B più vicini a 3 sono 2 e 4.

Stiamo provando ad illustrare il concetto di contiguità che gli elementi di un insieme mostrano, mentre gli elementi di altri insiemi non mostrano. Siamo pronti per la definizione di punto di accumulazione.

Definizione 2.13. Dato A sottoinsieme di \mathbb{R} , definiamo x_0 punto di accumulazione di A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0 .

- ▷ Un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.
- ▷ Si può dimostrare che se x_0 è punto di accumulazione di A , in ogni intorno di x_0 devono cadere infiniti elementi di A . Conseguenza da questo che un insieme finito è privo di punti di accumulazione.
- ▷ L'insieme costituito dai punti di accumulazione di A si chiama insieme derivato: $\text{Der}A$.

Come abbiamo visto nell'introduzione a questo paragrafo non tutti i punti si comportano come 4 per l'insieme A , cioè sono di accumulazione; possono esserci anche punti che si comportano come 3, per l'insieme B , cioè sono isolati.

Definizione 2.14. Un punto x_0 che appartiene ad A ma non è di accumulazione per A si dice isolato. $x_0 \in A$ è un punto isolato di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0 .

Un sottoinsieme A di \mathbb{R} si dice DISCRETO se non contiene nessuno dei suoi punti di accumulazione. A è discreto se e solo se è formato da punti isolati.

Un insieme B si dice DENSO in sé se ogni suo punto è di accumulazione per esso, cioè se $B \subseteq \text{Der}B$.

Dato $X \subset \mathbb{R}$ classifichiamo i punti di \mathbb{R} relativamente ad X :

- ➔ I punti interni di X sono quelli che appartengono a X e possiedono un intorno interamente contenuto in X .

- ⇒ I punti esterni ad X sono quelli che non appartengono a X e possiedono un intorno completamente disgiunto da X .
- ⇒ I punti di frontiera di X hanno la proprietà che ogni loro intorno contiene sia punti di X che punti che non appartengono a X .

Esempio 2.7. Relazione fra l'appartenenza di un punto all'insieme e l'essere di accumulazione per quell'insieme.

- a) x_0 appartiene ad A , x_0 è di accumulazione per A
 $\rightarrow A =]4, 8[, x_0 = 5 \rightarrow x_0 \in A$ ed è di accumulazione.
- b) x_0 non appartiene ad A , x_0 è di accumulazione per A
 $\rightarrow A =]4, 8[, x_0 = 4 \rightarrow x_0 \notin A$ ed è di accumulazione.
- c) x_0 non appartiene ad A , x_0 non è di accumulazione per A
 $\rightarrow A =]4, 8[, x_0 = 2 \rightarrow x_0 \notin A$ e non è di accumulazione.
- d) x_0 appartiene ad A , x_0 non è di accumulazione per A
 $\rightarrow A =]4, 8[, x_0 = 9 \rightarrow x_0 \in A$ e non è di accumulazione.

Esempio 2.8. Studio dei punti di accumulazione.

- a) L'insieme $A = \{5, 6, 7, 8\}$ essendo finito non ha punti di accumulazione.
- b) Consideriamo l'insieme $C =]1, 6[\cup]6, 8]$
 - ⇒ C non ha minimo, il massimo è 8;
 - ⇒ L'estremo inferiore è 1, l'estremo superiore 8;
 - ⇒ L'insieme dei minoranti è $] -\infty, 1]$;
 - ⇒ L'insieme dei maggioranti è $[8, +\infty[$;
 - ⇒ 1 e 6 sono di accumulazione per C ma non appartengono a C ;
 - ⇒ 8 è di accumulazione per C e appartiene a C ;
 - ⇒ Tutti i numeri compresi tra 1 e 8 sono di accumulazione per C ;
- c) Analizziamo l'insieme \mathbb{Q} che sappiamo essere denso. Ogni numero irrazionale è di accumulazione per \mathbb{Q} , ma anche ogni numero razionale è di accumulazione per \mathbb{Q} . Tutti i numeri reali sono di accumulazione per \mathbb{Q} , \mathbb{R} è l'insieme derivato di \mathbb{Q} .
- d)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

Al crescere di n , gli elementi tendono a 0, che è punto di accumulazione: in ogni intorno di 0 c'è almeno un punto di A . Ci sono tra gli elementi di A o tra i numeri reali altri punti di accumulazione per A , oltre a 0? No, non ci sono.

2.7 Esercizi

2.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

2.1 La topologia della retta

2.1) Rispondi alle seguenti domande, nella maniera più dettagliata e precisa possibile.

- Cosa si intende per topologia della retta?
- Qual è la principale identificazione che si fa nello studio della topologia della retta?
- Descrivi cosa si intende per distanza tra punti.
- Enuncia almeno tre proprietà della distanza, spiegandone il significato.

2.2 Gli intervalli

2.2) Data la rappresentazione algebrica dei seguenti intervalli esprimili sia graficamente che mediante le parentesi:

$$\text{a) } x \geq 2 \quad \text{b) } 3 < x < 5 \quad \text{c) } 4 < x < 7, x \neq 5 \quad \text{d) } x < -3$$

$$\text{e) } \frac{1}{2} < x \leq 2 \quad \text{f) } \frac{3}{4} \leq x \leq 3 \quad \text{g) } x \leq 2 \wedge x \geq 4$$

2.3) Risolvi le seguenti disequazioni, trovandone l'intervallo di soluzione

- | | |
|------------------------------|--|
| a) $x^2 + 2 > 0$ | $] -\infty, +\infty [$ |
| b) $3x^2 - 8x \geq 0$ | $] -\infty, 0] \cup [\frac{8}{3}, +\infty [$ |
| c) $6x^2 - 5x + 1 > 0$ | $] -\infty, \frac{1}{3} [\cup] \frac{1}{2}, +\infty [$ |
| d) $-3x^2 - 2 > 0$ | $[\emptyset]$ |
| e) $x(x-2)(2x+3) < 0$ | $] -\infty, -\frac{3}{2} [\cup] 0, 2 [$ |
| f) $\frac{2x+5}{x-3} \geq 0$ | $] -\infty, -\frac{5}{2}] \cup] 3, +\infty [$ |
| g) $\frac{(x+2)^2}{3-x} > 0$ | $] -\infty, -2 [\cup] -2, 3 [$ |

2.3 Gli intorno

2.4) Ricordando le diverse tipologie di intorno classifica gli intorno seguenti rispetto al punto indicato, determinando ampiezze e raggi.

- | | |
|--|--|
| a) $]3, 7[$ rispetto a $x_0 = 5$ | [circolare di raggio 2] |
| b) $]2, 5[$ rispetto a $x_0 = 2$ | [destro di ampiezza 3] |
| c) $]3, 4[$ rispetto a $x_0 = 4$ | [sinistro di ampiezza 1] |
| d) $]1/4, 3/4[$ rispetto a $x_0 = \frac{1}{2}$ | [circolare di ampiezza $\frac{1}{4}$] |
| e) $]3, 7/2[$ rispetto a $x_0 = 3$ | [destro di ampiezza $\frac{1}{2}$] |
| f) $] \frac{2}{5}, 2[$ rispetto a $x_0 = 2$ | [sinistro di ampiezza $\frac{8}{5}$] |
| g) $] -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}[$ rispetto a $x_0 = -\frac{6}{5}$ | [circolare di ampiezza $\frac{2}{5}$] |

2.4 Insiemi limitati e illimitati

2.5) Stabilisci se i seguenti insiemi sono superiormente/inferiormente limitati/illimitati

$$a) [3,5] \quad b)]3,5[\quad c)]-\infty, \frac{1}{2}[$$

$$d)]-\infty, 3[\cup \{6\} \quad e)]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\quad f)]\sqrt{2}, +\infty[$$

2.5 Massimi minimi ed estremi

2.6) Individua, se esistono, massimi, minimi, estremi superiori ed inferiori dei seguenti intervalli

$$a) A = [1,5] \quad [\min A = 1, \inf A = 1, \max A = 5, \sup A = 5]$$

$$b) A =]3,6[\quad [\min A \text{ non esiste}, \inf A = 3, \max A = 6, \sup A = 6]$$

$$c) A =]-\infty, +\infty[\quad [\min A \text{ non esiste}, \inf A = -\infty, \max \text{ e sup non esistono}]$$

$$d) A = [2,5[\cup]6,8[\quad [\min A = 2, \inf A = 2, \max A \text{ non esiste}, \sup A = 8]$$

$$e) A =]-\infty, 4[\quad [\min \text{ e inf non esistono}, \max A = 4, \sup A = 4]$$

2.6 I punti di accumulazione

2.7) Stabilisci se i punti indicati sono di accumulazione per gli insiemi assegnati

$$a) A = [3,7] \quad x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$$

$$b) A =]4,9[\quad x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 11$$

$$c) A = \{2, 3, 4, 5\} \quad x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 5$$

$$d) \mathbb{R} \quad x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$$

$$e) \mathbb{N} \quad x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 15$$

$$f) A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \quad x_0 = 3, x_1 = 4$$

Iperreali 3

Lo scopo di questo capitolo è riprendere familiarità con l'uso dei numeri iperreali, già descritti verso la fine del terzo anno. Le parti principali utili ai fini della nostra trattazione sono direttamente riportate dal terzo volume.

Il motivo di questi richiami è che in analisi matematica è normale avere a che fare con quantità infinitesime e quantità infinite e valutare il comportamento delle funzioni applicate a tali quantità. Quindi l'uso dei numeri iperreali diviene vantaggioso.

La conoscenza degli iperreali non è molto diffusa neanche fra i matematici, abituati da un secolo e mezzo a procedimenti più impegnativi e sofisticati. La ragione per la quale noi invece ne facciamo uso è che ci rendono il calcolo più semplice e immediato, senza per questo nuocere al rigore e alla precisione dei ragionamenti.

3.1 Alcune questioni importanti sui numeri in \mathbb{R}

I numeri reali formano un insieme *ordinato, denso e completo*: \mathbb{R} . È un insieme ordinato perché fra due numeri reali diversi sappiamo sempre indicare il maggiore e il minore. È denso perché fra due numeri reali diversi, per quanto vicini, se ne può sempre trovare almeno un altro. E infine \mathbb{R} è un insieme completo perché il numero che troveremo fra i due vicini è ancora un numero reale.

Possiamo quindi far corrispondere ad ogni punto della *retta reale* un numero *reale* e, viceversa, ad ogni numero *reale* un punto della *retta reale*. In poche parole, siamo autorizzati a pensare la retta reale come una retta "priva di buchi": c'è almeno un punto in ogni posizione, anche osservando la retta al microscopio, con qualsiasi ingrandimento (ingrandimento reale, come vedremo).

Se usiamo la retta reale come immagine dell'insieme \mathbb{R} è perché si tratta di una rappresentazione efficace. Ma ricordiamoci sempre che un insieme in matematica è un oggetto astratto, quindi la retta reale è solo un modello che ci aiuta a capire le proprietà dell'insieme \mathbb{R} .

Per esempio, a proposito dell'ordinamento in \mathbb{R} , ci riesce facile posizionare i numeri sulla retta, in corrispondenza di punti più vicini o più lontani dall'origine. Così possiamo verificare anche un'ulteriore proprietà, la *proprietà archimedeica*: per quanto piccolo sia un numero, si può sempre trovare una moltiplicazione tale che il prodotto superi altro numero prefissato. Sulla retta: dati due segmenti con un estremo nell'origine, potrai sempre moltiplicare la lunghezza del più breve, in modo che diventi maggiore dell'altro.

A causa della completezza di \mathbb{R} , non è possibile inserire nella retta reale dei punti che non corrispondano a numeri reali. Se inseriamo numeri di nuovo tipo, il modello cambia. Il nuovo insieme e la nuova retta sono diversi dall'insieme dei reali e dalla retta reale: si perde qualche proprietà e se ne acquisiscono di nuove. Infatti...

3.2 I numeri Iperreali e l'insieme ${}^*\mathbb{R}$

In questa sezione vedremo un nuovo insieme di numeri, utile a modellizzare e risolvere nuove classi di problemi. Rispetto a quanto già sappiamo dell'insieme \mathbb{R} , dovremo adattare alcune regole di calcolo e riscontreremo proprietà nuove, mentre dovremo abbandonarne una delle più note e utili.

3.2.1 Il problema della velocità

Alla fine del 1600 Newton e Leibniz studiavano problemi legati alla meccanica. Una delle grandezze alla base della meccanica è la *velocità*. Ma cosa è la velocità? Se l'oggetto A percorre più strada dell'oggetto B possiamo dire che A è più veloce di B? No, non basta misurare lo spazio percorso da un oggetto per calcolare la sua velocità, bisogna anche misurare il tempo impiegato a percorrere quello spazio. Infatti sappiamo che:

$$\text{velocità} = \frac{\text{spaziopercorso}}{\text{tempoimpiegato}}$$

La grandezza calcolata in questo modo è la *velocità media* dell'oggetto, ma in ogni istante del percorso l'oggetto ha una propria velocità. Un modo molto pratico di ottenere la velocità media è di tenere conto del percorso totale e dividerlo per il tempo complessivo impiegato a percorrerlo. Insomma, se ho percorso in bicicletta 8 chilometri in mezz'ora, la mia media è di 16km/h. Nel percorso avrò rallentato in salita, accelerato in discesa, mi sarò fermato agli stop e ai semafori, ecc., e la mia velocità media si ottiene dalla media delle velocità che ho realizzato istante per istante.

Posso sapere la velocità di ogni istante? Potrei misurare gli spazi percorsi in intervalli di tempo molto piccoli, così calcolerei le velocità relative a tratti molto brevi. Ma sarebbero sempre velocità medie. Più restringo l'intervallo di tempo, più la velocità media si avvicina alla velocità istantanea... ma resta sempre una velocità media.

Per trovare la velocità istantanea dovrei riuscire a isolare l'istante di tempo: un numero (positivo) che rappresenta il tempo, più piccolo di qualunque altro numero. L'unico numero reale positivo, più piccolo di qualunque numero, è lo zero, ma non posso usarlo per il calcolo della velocità, perché la divisione per zero non è definita: i numeri reali non ci permettono di calcolare una grandezza così semplice e evidente come la velocità di un oggetto in un dato istante.

Servirebbe un insieme numerico con numeri positivi più piccoli di un qualsiasi altro numero positivo, ma diversi da zero! Ma è possibile trovare tali numeri nell'insieme dei reali che, come abbiamo visto, è un insieme (già) completo?

3.2.2 Un nuovo insieme: gli Iperreali

All'insieme dei numeri reali aggiungiamo un nuovo numero (non reale):

$$\varepsilon > 0 \text{ tale che } \varepsilon < \frac{1}{n} \text{ per qualunque } n \in \mathbb{N}$$

tradotto in simboli:

$$\varepsilon > 0 \quad | \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un numero siffatto lo chiameremo un *infinitesimo* e lo indicheremo con una lettera minuscola dell'alfabeto greco, per esempio ε . Per quanto è già stato detto, un tale numero non può essere un numero reale.

La prima conseguenza all'introduzione di un infinitesimo è che allora ce ne sono infiniti! Infatti anche la metà di un infinitesimo è un infinitesimo e anche il suo doppio o un suo sottomultiplo o un suo multiplo. (Per verificarlo, vedi le tabelle successive; per le conseguenze, vedi il paragrafo 10.)

Altra conseguenza dell'aggiunta di un elemento infinitesimo all'insieme dei reali è che se esiste un numero maggiore di zero più piccolo di tutti gli altri numeri allora esiste anche un numero maggiore di qualunque altro numero:

$$\text{se } \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{allora } \frac{1}{\varepsilon} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi se aggiungiamo all'insieme dei reali un numero infinitesimo e possiamo usarlo nelle usuali 4 operazioni, allora in quell'insieme avremo un numero infinito di infinitesimi e un numero infinito di infiniti.

Chiamiamo *iperreali* l'insieme numerico così ottenuto e lo indichiamo con il simbolo: ${}^*\mathbb{R}$.

3.2.3 Tipi di Iperreali

Abbiamo visto che l'introduzione di un elemento nuovo, così piccolo da poterlo pensare trascurabile, ha reso piuttosto affollato il nuovo insieme numerico. Cerchiamo di fare un po' di ordine. L'insieme degli Iperreali contiene:

- ➔ i numeri reali che d'ora in poi verranno chiamati anche numeri *standard*, tra questi c'è anche lo zero;
- ➔ gli infinitesimi, lo zero è l'unico infinitesimo che è anche un numero reale;
- ➔ i numeri non reali che non sono né infinitesimi né infiniti;
- ➔ gli infiniti, nessun infinito ha una corrispondenza con i numeri reali.

Possiamo vedere questo insieme anche come formato dai seguenti elementi:

zero è un infinitesimo ed è un numero standard;

infinitesimi non nulli tutti gli infinitesimi diversi da zero;

finiti tutti quei numeri che sono, in valore assoluto, minori di un numero reale;

finiti non infinitesimi tutti quei numeri che sono in valore assoluto compresi tra due numeri reali diversi da zero;

infiniti tutti quei numeri che sono maggiori di qualsiasi numero reale

Per semplificare la scrittura (e complicare la lettura) adotteremo delle sigle e delle convenzioni per indicare questi diversi tipi di numeri:

tipo	sigla	simboli
zero		0
infinitesimo	i	
infinitesimo non nullo	inn	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$
finito non infinitesimo	fni	a, b, c, d, \dots
finito	f	a, b, c, d, \dots
infinito	I	A, B, C
qualsiasi		x, y, z, \dots

3.2.4 Iperreali finiti e parte standard

Gli Iperreali finiti sono quei numeri che sono compresi tra due numeri Reali:

Definizione 3.1. Il numero Iperreale x è compreso tra due numeri Reali allora x è un Iperreale finito:

$$\text{Se } x \in {}^*\mathbb{R} \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge a < x < b \text{ allora } x \text{ è un Iperreale finito.}$$

Ogni numero finito può essere visto come la somma di un numero reale più un Infinitesimo: se x è finito allora $x = a + \varepsilon$, quindi $x = a + \varepsilon \approx a$. Si può immaginare ogni Iperreale finito come una nuvola contenente un numero standard a e tutti gli infinitesimi che lo circondano, così vicini ad a da non potersi confondere con altri infiniti infinitesimi di una nuvola vicina, appartenenti per esempio al numero Iperreale $y = b + \varepsilon$. Un numero Iperreale finito non può essere infinitamente vicino a due numeri reali diversi quindi esiste un solo numero Reale infinitamente vicino ad un numero Iperreale. Questo numero reale si chiama *parte standard* del numeri Iperreale.

Definizione 3.2. La parte standard di un numero Iperreale finito è il l'unico numero Reale infinitamente vicino:

$$\text{Se } x \in {}^*\mathbb{R} \wedge x = a + \varepsilon \text{ allora } a = \text{st}(x) \text{ (st = parte standard).}$$

3.2.5 Retta Iperreale e strumenti ottici

In un paragrafo precedente abbiamo visto che si può accettare il postulato che dice che ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale. Questa affermazione non è un teorema dimostrato, è un postulato. Fa parte del modello di numeri usato, cioè è caratteristico dei numeri reali. Giacché ora stiamo cambiando modello, cambiamo anche questo postulato. Lo riformuliamo così:

Postulato 3.1. Ad ogni numero Iperreale corrisponde un punto della retta (iperreale) e ad ogni punto della retta (iperreale) corrisponde un numero Iperreale.

Oppure:

Postulato 3.2. C'è una corrispondenza biunivoca tra i numeri Iperreali e i punti della retta (iperreale).

Con i numeri reali abbiamo una certa abitudine a rappresentare numeri. Per rappresentare i numeri Iperreali dobbiamo procurarci degli strumenti particolari: *microscopi*, *telescopi*, *grandangoli*.

Diamo una sbirciata al loro manuale di istruzioni.

Microscopi

Il microscopio permette di ingrandire una porzione di retta. Un microscopio permette di visualizzare i seguenti numeri:

$$\Rightarrow +4,998$$

$$\Rightarrow -3,000002$$

$$\Rightarrow 2 - 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow -4 + 2\delta$$

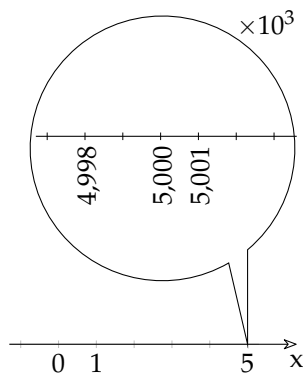


FIGURA 3.1: Microscopio per vedere 5,004.

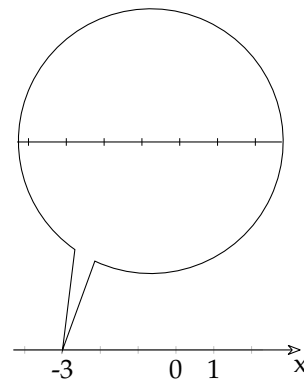


FIGURA 3.2: Microscopio per vedere $-3,000002$.

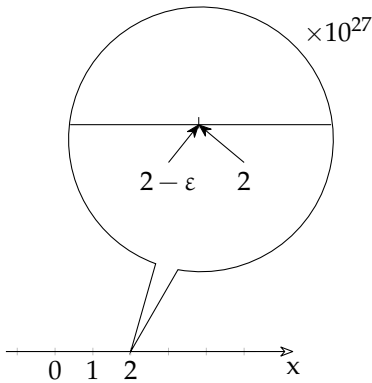


FIGURA 3.3: Microscopio per NON vedere $2 - 3\varepsilon$.

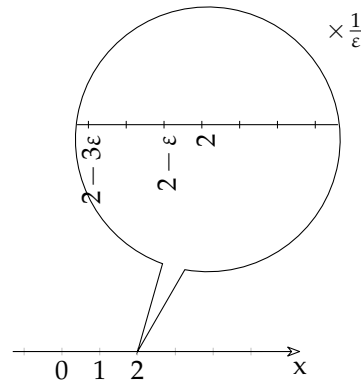


FIGURA 3.4: Microscopio per vedere $2 - 3\varepsilon$.

Si può osservare come ci siano microscopi “standard” che ingrandiscono un numero *naturale* di volte e microscopi “non standard” che ingrandiscono infinite volte.

Telescopi

Il telescopio permette di avvicinare una porzione di retta senza cambiare la sua scala. Con un telescopio possiamo visualizzare i seguenti numeri:

$$\Rightarrow +127034$$

$$\Rightarrow -3600$$

$$\Rightarrow A + 3$$

$$\Rightarrow -B + 2$$

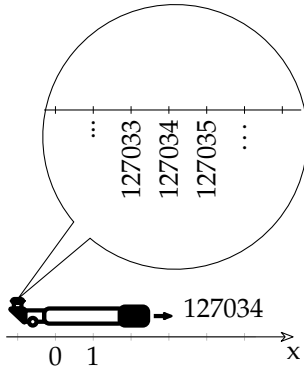


FIGURA 3.5: Telescopio per vedere 127034.

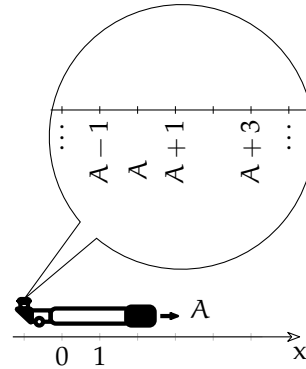


FIGURA 3.6: Telescopio per vedere $A + 3$.

Anche per i telescopi, i modelli più moderni offrono la possibilità di operare ingrandimenti “standard” o “non standard” a piacere.

Grandangoli (Zoom)

Il Grandangolo permette di cambiare la scala della visualizzazione della retta, in questo modo possiamo far rientrare nel campo visivo anche numeri molto lontani. Possiamo usare uno zoom per visualizzare i seguenti numeri:

$$\Rightarrow 300$$

$$\Rightarrow -5000$$

$$\Rightarrow -2A$$

$$\Rightarrow 3B$$

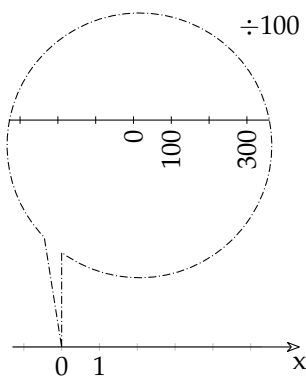


FIGURA 3.7: Grandangolo per vedere 300.

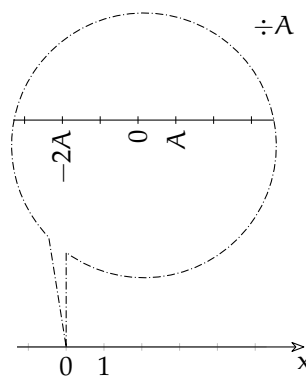


FIGURA 3.8: Grandangolo per vedere $-2A$.

Anche per questi strumenti utilizzeremo versioni che permettono zoomate “standard” e “non standard”.

3.2.6 Operazioni

Vediamo di seguito alcune regole relative alle operazioni che valgono nei numeri Iperreali.

Addizione

Alcune osservazioni:

1. Le regole relative all'addizione valgono anche per la sottrazione, se uno degli addendi è negativo.
2. Zero è l'elemento neutro dell'addizione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x + 0 = 0 + x = x$.
3. Un infinitesimo più un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha + \beta = \gamma$.
4. Un infinitesimo non nullo più un altro infinitesimo non nullo può dare per risultato anche zero: ...
5. Un finito più un infinitesimo dà come risultato un finito.
6. Un finito più un finito dà come risultato un finito.
7. Un finito più un finito può dare come risultato un infinitesimo.
8. Un infinito più un finito dà come risultato un infinito.
9. Un infinito più un infinito può dare come risultato zero, un infinitesimo, un finito non infinitesimo, un finito, un infinito.

Nel precedente elenco abbiamo visto che alcune addizioni danno un risultato che dipende solo dai tipi degli operandi, altre operazioni danno dei risultati che dipendono dal valore degli operandi. Possiamo costruire una tabella che organizza le precedenti osservazioni.

+	0	inn	fni	I
0	0	inn	fni	I
inn	inn	i	fni	I
fni	fni	fni	f	I
I	I	I	I	?

Moltiplicazione

Alcune osservazioni:

1. Zero è l'elemento assorbente: il prodotto di un iperreale per zero dà come risultato zero: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. Uno è l'elemento neutro della moltiplicazione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3. Un infinitesimo per un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha \cdot \beta = \gamma$.
4. Un infinitesimo non nullo per un altro infinitesimo non nullo dà per risultato un infinitesimo non nullo.
5. ...
6. ...
7. Il prodotto fra un finito e un infinitesimo apre a importanti riflessioni sulla proprietà archimedea. Ne parliamo più avanti, in un paragrafo dedicato.

E la tabella corrispondente:

\times	0	1	inn	fni	I
0	0	0	0	0	0
1	0	1	inn	fni	I
inn	0	inn	inn	inn	?
fni	0	fni	inn	fni	I
I	0	I	?	I	I

Divisione

Alcune osservazioni:

1. Anche negli Iperreali la divisione per zero non è definita.
2. Uno può essere visto come un elemento neutro solo destro: $x \div 1 = x$.
3. Per cercare i risultati possiamo rifarci alla definizione di quoziente.
4. ...

E la tabella corrispondente:

\div	0	1	inn	fni	I
0		0	0	0	0
1		1	I	fni	inn
inn		inn	?	inn	inn
fni		fni	I	fni	inn
I		I	I	I	?

Reciproco

Alcune osservazioni:

1. Dalla tabella precedente si può estrarre la riga corrispondente a 1 e si ottiene la tabella del reciproco.
2. Una volta convinti della regola del reciproco, si può ricavare la tabella della divisione attraverso la regola: $x \div y = x \times \left(\frac{1}{y}\right)$.

E la tabella corrispondente:

numero	0	1	inn	fni	I
reciproco		1	I	fni	inn

□ **Osservazione** Non ci sono regole immediate per le seguenti operazioni:

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\delta} \qquad \Rightarrow \frac{A}{B} \qquad \Rightarrow A \cdot \varepsilon \qquad \Rightarrow A + B$$

In questi casi il tipo di risultato dipende dall'effettivo valore degli operandi. Ad esempio, nel caso del quoziente tra due infinitesimi possiamo trovarci nelle seguenti situazioni:

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon \quad (\text{i}) \qquad \Rightarrow \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2 \quad (\text{fni}) \qquad \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{I})$$

Possiamo ora esercitarci nel calcolo con questi nuovi numeri. Continuiamo ad utilizzare la convenzione di indicare gli infinitesimi con lettere greche minuscole ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$), i finiti non infinitesimi con lettere latine minuscole ($a, b, c, \dots, m, n, \dots$) e gli infiniti con lettere latine maiuscole ($A, B, C, \dots, M, N, \dots$).

Semplifichiamo le seguenti espressioni scrivendo il tipo di risultato ottenuto.

Esempio 3.1. $3\varepsilon + 5 + 6M - 2\varepsilon + 7 - 2M = 4M + 12 + \varepsilon$ (tipo = I)

□ **Osservazione** Quando il risultato è la somma di più elementi, li scriviamo, ordinandoli dal più grande, in valore assoluto, al più piccolo. scrivendoli

Esempio 3.2. $7 + 8M - 5\varepsilon - 4 + 3\varepsilon - 2N = 8M - 2N + 3 - 2\varepsilon$ (tipo non definito)

Esempio 3.3. $(3M + 2\varepsilon)(3M - 2\varepsilon) = 9M - 4\varepsilon$ (tipo=I)

Esempio 3.4. $(M + 3)(M - 3) - (M + 2)^2 + 4(M + 3) =$
 $= M^2 - 9 - M^2 - 4M - 4 + 4M + 12 = -1$ (tipo=fni)

Esempio 3.5. $10a - (A + 1)^2 - 3a + 2(a + 2\alpha) + A^2 + 6(b - 3\alpha) + 2A =$
 $= 10a - A^2 - 2A - 1 - 3a + 2a + 4\alpha + A^2 + 6b - 18\alpha + 2A = 9a + 6b - 14\alpha$ (tipo=fni)

3.2.7 Confronto

L'insieme dei numeri Reali ha un ordinamento completo, se a e b sono due numeri reali qualunque è sempre valida una e una sola delle seguenti affermazioni:

$$a < b \quad a = b \quad b < a$$

Per confrontare due numeri Reali possiamo utilizzare le seguenti regole:

- ➔ qualunque numero negativo è minore di qualunque numero positivo;
- ➔ se due numeri sono negativi, è minore quello che ha il modulo maggiore;
- ➔ se a e b sono due numeri positivi, $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$ (o $a - b < 0$).

Anche negli Iperreali valgono le proprietà dei Reali richiamate sopra. Ma l'insieme degli Iperreali non ha un ordinamento completo: se di ε e δ sappiamo solo che sono due infinitesimi, non è possibile dire se $\varepsilon < \delta$ o $\varepsilon > \delta$. E questo si ripercuote anche su tutti gli altri numeri: senza ulteriori informazioni non possiamo dire se $a + \varepsilon$ è maggiore minore o uguale a $a + \delta$. Problemi analoghi si incontrano nel confronto degli infiniti. Vediamo allora come è possibile affrontare il problema del confronto tra Iperreali.

□ **Osservazione** Manteniamo valide le regole per il confronto di numeri con segno diverso o numeri negativi. Possiamo quindi concentrare l'attenzione sul confronto dei soli numeri positivi. Nei prossimi paragrafi assumeremo che le variabili si riferiscano solo a numeri positivi.

Restringendo l'osservazione ai numeri positivi, possiamo affermare che:

Gli infinitesimi sono più piccoli dei non infinitesimi e i finiti sono più piccoli degli infiniti:

$$i < \text{fni} < I$$

Passiamo ora al confronto all'interno dei diversi tipi di numeri Iperreali.

Confronto tra finiti non infinitesimi

Se due numeri Iperreali hanno parte standard diversa allora è maggiore quello che ha la parte standard maggiore:

$$x < y \Leftrightarrow \text{st}(x) < \text{st}(y)$$

Nel caso i due numeri abbiano la stessa parte standard si deve studiare l'ordinamento degli infinitesimi, cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

Confronto tra infinitesimi

Di seguito vediamo i diversi casi in cui ci possiamo imbattere quando vogliamo confrontare i numeri Iperreali.

1. Zero è minore di qualunque infinitesimo.

Se sappiamo soltanto che ε e δ sono due infinitesimi non possiamo stabilire quale dei due sia il maggiore e quale il minore. Servono più informazioni. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 3.6. Nel caso $\delta = \varepsilon + \gamma$ con γ infinitesimo positivo, dato che $\delta - \varepsilon = \varepsilon + \gamma - \varepsilon = \gamma > 0$, δ sarà maggiore di ε .

Esempio 3.7. Nel caso $\delta = 2\varepsilon$, dato che $\delta - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$, δ sarà maggiore di ε .

Esempio 3.8. Vediamo un altro modo per trattare il caso $\delta = 2\varepsilon$, dato che $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2 > 1$, δ sarà maggiore di ε .

Questo secondo metodo permette di ricavare delle informazioni interessanti. Vediamo alcuni esempi:

2. Una parte infinitesima di un infinitesimo è più piccola di quell'infinitesimo.

Esempio 3.9. Se $\delta = \varepsilon \cdot \gamma$, dato che $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{\varepsilon} = \gamma < 1$, δ sarà minore di ε .

□ **Osservazione** In questo caso il rapporto non solo è più piccolo di 1 ma è addirittura un *infinitesimo*. Quando il rapporto tra due infinitesimi è un infinitesimo possiamo dire che il primo è un infinitesimo di *ordine superiore* e si scrive: $\delta = o(\varepsilon)$.

3. Un infinitesimo è maggiore di una sua parte infinitesima.

Esempio 3.10. Se $\varepsilon = \delta \cdot \gamma$, dato che $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\delta \cdot \gamma}$, si ha: $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\delta}{\delta \cdot \gamma} = \frac{1}{\gamma} = M > 1$. Quindi δ sarà maggiore di ε .

□ **Osservazione** In questo caso il rapporto non solo è più grande di 1 ma è addirittura un *infinito*. Quando il rapporto tra due infinitesimi è un infinito possiamo dire che il primo infinitesimo è di *ordine inferiore*.

Confronto tra infiniti

Anche tra gli infiniti possiamo effettuare il confronto calcolando la differenza tra due numeri o il quoziente e anche tra gli infiniti l'uso del quoziente ci dà delle informazioni interessanti.

Esempio 3.11. Confrontare $M + \varepsilon$ con M .

- ⇒ Usando la differenza: $M + \varepsilon - M = \varepsilon$ quindi $M + \varepsilon > M$;
- ⇒ Usando il quoziente: $\frac{M + \varepsilon}{M} = \frac{M}{M} + \frac{\varepsilon}{M} = 1 + \frac{\varepsilon}{M} > 1$ quindi $M + \varepsilon > M$;

Anche con gli infiniti il metodo del quoziente ci dà delle informazioni particolari:

1. Due infiniti sono dello *stesso ordine* se il loro rapporto è un finito non infinitesimo.

Esempio 3.12. Il confronto tra $2M$ e M dà: $\frac{2M}{M} = 2$. Quindi sono due infiniti dello stesso ordine.

2. Un infinito è di ordine maggiore di un altro se il rapporto tra i due è un numero infinito.

Esempio 3.13. Il confronto tra M^2 e M dà: $\frac{M^2}{M} = M$. Quindi il primo infinito è di ordine maggiore del secondo.

3. Un infinito è di ordine minore di un altro se il rapporto tra i due è un numero infinitesimo.

Esempio 3.14. Confrontare M e 2^M . Dobbiamo calcolare: $\frac{M}{2^M}$. Studiando le due successioni $y_1 = \langle 2^x \rangle$ e $y_2 = \langle x^2 \rangle$:

$$\begin{array}{cccccccc} 2^x & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ x^2 & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{array}$$

Possiamo vedere che dal quinto elemento in poi la prima successione è maggiore della seconda quindi, essendo l'infinito più grande di cinque, possiamo scrivere:

$$\frac{M}{2^M} < \frac{M}{M^2} = \frac{1}{M} < 1$$

Quindi $M^2 < 2^M$.

Ma $\frac{1}{M}$ è un infinitesimo quindi possiamo affermare che M è un infinito di ordine inferiore di 2^M .

In conclusione, possiamo confrontare fra di loro i numeri Iperreali utilizzando la differenza o il quoziente tra i numeri. L'uso del quoziente ci permette di ricavare un'informazione interessante l'ordine di infinitesimo o di infinito.

- un infinitesimo di ordine maggiore è un infinitesimo infinitamente più piccolo;
- un infinito di ordine maggiore è un infinito infinitamente più grande.

3.2.8 Infinitamente vicini, indistinguibili

Il confronto tra due numeri Iperreali ci permette costruire altri due concetti interessanti, vediamoli.

Infinitamente vicini

Definizione 3.3. Due numeri si dicono *infinitamente vicini* (simbolo: \approx) se la loro differenza è un infinitesimo:

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y = \varepsilon$$

- Tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro e sono infinitamente vicini allo zero.
- Se due numeri finiti, a e b , sono infinitamente vicini si possono scrivere nella forma: $a = c + \varepsilon$ e $b = c + \delta$ dove c è un numero reale. Il numero reale infinitamente vicino ad un numero iperreale finito si chiama *parte standard* del numero iperreale.
- Due numeri infiniti sono infinitamente vicini se uno è uguale all'altro più un infinitesimo.

Il fatto che due numeri siano infinitamente vicini non ci dà molte informazioni, più interessante è il concetto presentato nel prossimo paragrafo.

Indistinguibili

Definizione 3.4. Due numeri si dicono *indistinguibili* (simbolo: \sim) se il rapporto tra la loro differenza e ciascuno di essi è un infinitesimo:

$$x \sim y \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{x} = \varepsilon \quad \wedge \quad \frac{x-y}{y} = \delta \right)$$

□ **Osservazione** È importante osservare che per poter applicare la definizione entrambi i numeri che vogliamo confrontare devono essere diversi da zero.

Teorema 3.3. Due numeri x e y , finiti non infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se sono infinitamente vicini

$$\text{Ipotesi: } (x \sim y \wedge x, y : \text{fni}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tesi: } x \approx y.$$

Dimostrazione.

$$x \approx y \quad \text{infatti} \quad \frac{x-y}{x} = \varepsilon \quad \wedge \quad \frac{x-y}{y} = \delta \Rightarrow x = y + \varepsilon x = y + \beta \quad \wedge \quad y = x - \delta y = x + \alpha$$

$$x \sim x + \varepsilon \quad \text{infatti} \quad \frac{x-y}{x} = \frac{x - (x + \alpha)}{x} = \frac{\alpha}{x} = \xi \quad \wedge \quad \frac{x-y}{y} = \frac{x - (x + \alpha)}{y} = \frac{\alpha}{y} = \gamma$$

□

Per quanto riguarda gli infinitesimi, non basta che siano infinitamente vicini per essere indistinguibili (d'altra parte tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini).

Teorema 3.4. Due numeri infinitesimi sono indistinguibili se differiscono di un infinitesimo di ordine superiore.

Due numeri infiniti possono essere indistinguibili anche se differiscono di un valore finito o addirittura infinito.

Teorema 3.5. Due infiniti sono indistinguibili se differiscono di un finito o di un infinito di ordine inferiore.

3.2.9 Postulato di Eudosso-Archimede

Proviamo a fare un *semplice* esperimento mentale. Prendo un foglio di carta e lo piego su se stesso un po' di volte. Che spessore raggiungo? Per semplificarci i calcoli, supponiamo che il foglio abbia lo spessore di $0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m} = 10^{-4} \text{ m}$. Che spessore otterrò piegando il foglio su se stesso 64 volte?

Il calcolo è abbastanza semplice:

Numero piegature	spessore ottenuto	in metri
0	1	10^{-4}
1	2	10^{-4}
2	4	10^{-4}
3	8	10^{-4}
4	16	10^{-3}
5	32	10^{-3}
6	64	10^{-3}
7	128	10^{-2}
...	...	
n	2^n	...

Quindi piegando il foglio 64 volte ottengo uno spessore che è 2^{64} volte lo spessore di partenza quindi basta calcolare:

$$2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

che, convertito in metri, dà: 1.844.674.407.370.955m circa; è uno spessore considerevole, quasi duemila volte la distanza Terra-Sole: 149.600.000.000m.

Si fa risalire ai matematici Eudosso e Archimede l'osservazione che per quanto piccolo si prenda un numero (lo spessore di un foglio di carta), basta moltiplicarlo per un numero sufficientemente grande (2^{64}) per farlo diventare maggiore di un qualsiasi altro numero, per quanto sia grande (come la distanza Terra-Sole).

Vale anche il contrario: per quanto grande sia un numero posso dividerlo per un numero abbastanza grande da farlo diventare più piccolo di un qualunque numero.

Ma questa osservazione di Eudosso-Archimede non è un teorema, non è un'osservazione dimostrata, è un postulato, un accordo fatto tra matematici che può essere utile in moltissimi casi e che vale per tutti gli insiemi numerici visti finora.

Abbiamo visto, nella tabella della moltiplicazione e in tanti esempi successivi, che moltiplicando fra loro due iperreali non si è minimamente sicuri di ottenere un valore maggiore di una quantità iperreale prefissata. Infatti *potrebbe essere vero* che:

$$\text{se } \varepsilon < \delta \quad \text{allora } 2^{64}\varepsilon < \delta,$$

mentre è *sicuramente vero* che:

$$\text{poiché } \varepsilon < 1 \quad \text{allora } 2^{64}\varepsilon < 1;$$

anzi, dati $a > 1$ e n naturale qualsiasi, allora $a^n \varepsilon < 1$.

Abbiamo quindi perduto la proprietà archimedea. Questo ci obbliga a

- ➔ diffidare dei segni $>, =, <$ nel confronto fra due iperreali (non standard, ovviamente);
- ➔ utilizzare il rapporto come strumento per il confronto fra iperreali infiniti o fra iperreali infinitesimi, o fra espressioni con iperreali di tipo diverso, come è illustrato nelle pagine precedenti.

3.2.10 Principio di transfer

Abbiamo applicato agli Iperreali le operazioni aritmetiche con grande naturalezza estendendo i metodi e i risultati che già conosciamo nei Reali. Ma è possibile fare ciò per qualunque funzione? Sì, è possibile assumere che per ogni funzione definita nei Reali esista una corrispondente funzione con dominio e codominio negli Iperreali che, ristretta ai Reali coincida con la funzione reale. In questo modo tutto quello che è possibile fare con i numeri Reali lo si può fare anche con gli Iperreali.

□ **Osservazione** Non vale il viceversa. Dato che gli Iperreali estendono i Reali, ci sono delle funzioni che, definite negli Iperreali non hanno un valore corrispondente nei Reali.

Esempio 3.15. Consideriamo ad esempio la funzione: $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$
È facile costruire la funzione *f (*effe star*) con dominio e codominio negli Iperreali:

${}^*f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$.

Ogni volta che *f è applicata a numeri standard (fni), si comporta come la funzione f , applicata a $x \in \mathbb{R}$; ma, in più, la funzione *f :

- è definita anche per valori infinitamente vicini a zero e in questo caso dà come risultato un valore infinito che non è un numero reale;
- è definita anche per valori infiniti e in questo caso dà come risultato un valore infinitesimo che non è un numero reale.

3.2.11 Transfer e funzioni trascendenti

Se fossimo obbligati alla pignoleria, dovremmo scrivere d'ora in poi *f , al posto di f , per indicare che usiamo l'estensione iperreale della funzione f . Così $\log(x)$ dovrebbe essere scritta ${}^*\log(x)$, ${}^*\sin(x)$ sostituirebbe $\sin(x)$ e avremmo a che fare con ${}^*x^3$ al posto di x^3 , e simili.

Per fortuna questi dettagli non ci servono: le funzioni che abbiamo già imparato ad usare si comportano con i numeri standard esattamente come si comportano con i reali, cioè conservano tutte le loro proprietà. C'è semmai da approfondire cosa succede quando le funzioni trascendenti vengono applicate a infiniti, infinitesimi non nulli e finiti non infinitesimi.

Per facilitare la comprensione, è di grande utilità avere presente i grafici base di queste funzioni.

Funzione esponenziale

La funzione $f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}$, con $f(x) = a^x$, è definita $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$. Come nel caso reale, consideriamo solo i casi in cui $a > 0$. Ricordando quanto già appreso, il grafico della funzione esponenziale generica ha due forme (speculari).

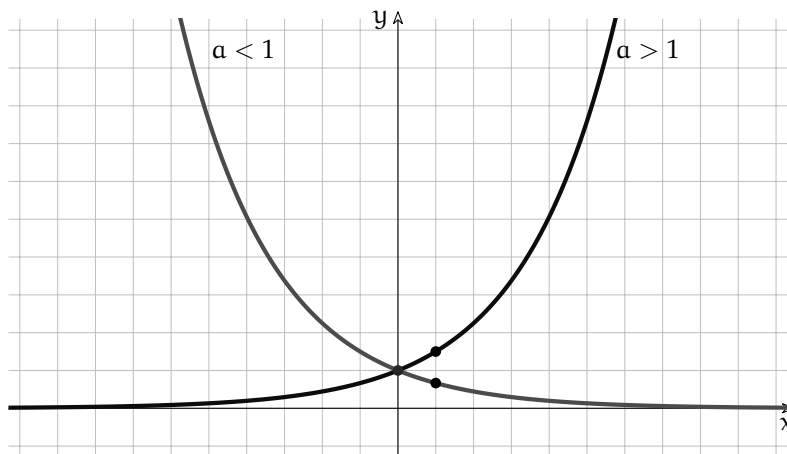


FIGURA 3.9: Esponenziali con diverse basi.

Se $a > 1$:

- il grafico è crescente e sale rapidamente all'infinito, verso destra: con $X > 0$ (infinito positivo) $a^X = Y$ (infinito positivo);

- come si dimostra più avanti, la rapidità di questa salita è maggiore rispetto a qualsiasi altra funzione crescente di altro tipo (per esempio le funzioni potenza x^n);
- a sinistra, cioè per $x < 0$, il grafico tende ad adagiarsi sull'asse orizzontale ($y = 0$, cioè tende ad annullarsi), toccandolo all'infinito. Si dice che l'asse x è asintoto sinistro per il grafico: con $X > 0$ (infinito positivo) $a^{-X} = 0$;
- quindi il grafico non ha punti nel semipiano negativo ($y < 0$). La funzione ha valori positivi $y \geq 0, \forall x \in {}^*\mathbb{R}$;
- il grafico interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$, dato che qualsiasi numero elevato alla 0 ...

Quindi, applicando la funzione esponenziale a valori non standard, avremo, sempre nel caso di X positivo:

$$a^{\pm \varepsilon} = 1 \pm \delta, \quad a^X = Y, \quad a^{-X} = \varepsilon$$

Se $0 < a < 1$, il grafico è speculare e lascio a te la sua descrizione.

Se $a = 1$, il grafico non dovrebbe essere troppo difficile da immaginare ...

□ **Osservazione** Analogamente al caso reale, vi sono situazioni speciali in cui non si capisce il comportamento della funzione, come ci è già capitato per alcune operazioni elementari dal risultato incerto. Si tratta dei seguenti casi:

$$0^0, \quad \varepsilon^\varepsilon, \quad M^0, \quad M^\varepsilon, \quad 1^M,$$

sono detti forme di indecisione esponenziale e più avanti vedremo di risolvere alcuni casi. Nota l'ultima delle forme di indecisione precedenti e confrontalo con quanto scritto poche righe sopra.

Numero di Nepero e

La forma di indecisione 1^M ha una soluzione particolare in un caso importantissimo. Si tratta della funzione

$$f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}, \text{ con } f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

definita per $x \neq 0$. È una particolare funzione esponenziale che, se x assume valori infiniti, dà luogo a risultati del tipo $(1 + \varepsilon)^M$.

Cerchiamo di capire cosa succede facendo alcuni tentativi con numeri standard:

Esempio 3.16. Calcolare $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, nei casi: $x = 10$, $x = 100$, $x = 1000$, $x = 10000$...

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937424\dots$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048138\dots$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692393\dots$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,71814592\dots$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2,71826824\dots$$

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,71828047\dots$$

...

Al di là di ogni tentativo, è possibile dimostrare, ma noi lo evitiamo, che per $x = M$ il calcolo ha un risultato esatto, il numero standard

$$\text{st} \left(1 + \frac{1}{M} \right)^M = e.$$

$e = 2,7182818284\dots$ è un irrazionale, quindi la quantità di decimali è infinita e non c'è periodo. Si tratta del cosiddetto Numero di Nepero (anche se il suo nome viene dall'iniziale del matematico Euler).

Funzione logaritmica

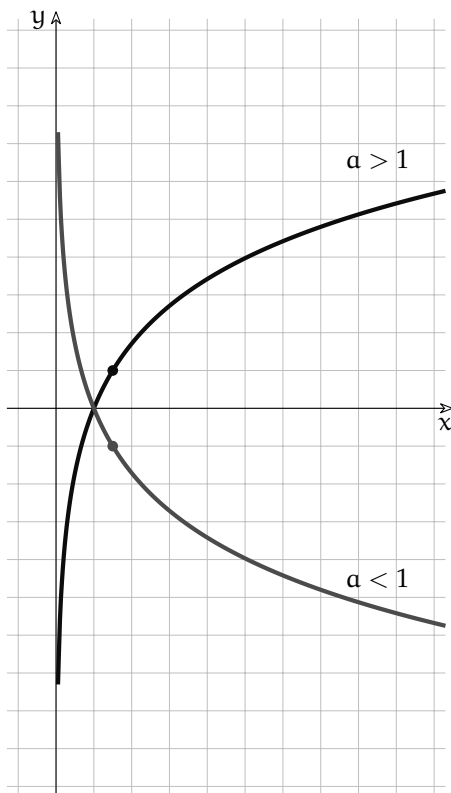
$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Il logaritmo è l'esponente da usare per calcolare una potenza. La funzione log permette di sapere quale esponente è stato applicato ad una certa base in modo da ottenere come risultato una potenza data.

Estendendo la funzione agli iperreali standard, non ci sono cambiamenti rispetto ai reali. Perciò verifichiamo cosa succede nel calcolo di espressioni come $\log_a \varepsilon$, $\log_a X$ e simili. Anche in questo caso esaminiamo il grafico base.

La funzione $f : {}^*\mathbb{R} \mapsto {}^*\mathbb{R}$, con $f(x) = \log_a x$ è definita per $x > 0$. Come per le funzioni esponenziali, la base a è positiva e distinguiamo due casi.

Se $a > 1$:



- ➔ il grafico occupa soltanto il semipiano corrispondente a $x > 0$, perché, essendo la base a positiva, non è possibile avere per argomento potenze negative;
- ➔ il grafico è crescente: sale rapidamente da $-\infty$ verso $y = 0$, ma, oltrepassato l'asse orizzontale, la sua salita si attenua progressivamente, senza mai appiattirsi del tutto quando x diventa un numero infinito;
- ➔ come si dimostra più avanti, il rallentamento di questa tendenza a crescere è più forte del rallentamento che ha il grafico di qualsiasi altra funzione di altro tipo (per esempio le funzioni potenza $x^{\frac{1}{n}}$, $\forall n$);
- ➔ a sinistra, cioè per $x = \varepsilon$ $f(x) = -M$, con ($a > 0$ e $M > 0$) il grafico tende ad adagiarsi sull'asse verticale, toccandolo all'infinito. Si dice che l'asse y negativo è asintoto sinistro per il grafico;
- ➔ il grafico interseca l'asse x nel punto tipico $(1; 0)$, dato che qualsiasi numero, diverso da 0, elevato alla 0 ...
- ➔ c'è un altro punto tipico: se la base e la potenza sono uguali, allora l'esponente vale 1, quindi il grafico passa per il punto $\forall a$.

Quindi, applicando la funzione \log_a a valori non standard, nel caso di $a > 1$, avremo:

$$\log_a \delta = -M, \quad \log_a(1 + \varepsilon) = +\delta, \quad \log_a X = Y \text{ (sempre nel caso di } X \text{ positivo)}$$

Se $0 < a < 1$, il grafico è simmetrico rispetto all'asse x e lascio a te la sua descrizione.

Se $a = 1$, il grafico è un problema serio ...

□ **Osservazione** Fra tutte le possibili basi dei logaritmi, due hanno una posizione privilegiata. Per questo i logaritmi che usano queste basi hanno un tasto dedicato nelle calcolatrici scientifiche:

⇒ base 10 : $\text{Log}(x)$.

La funzione $\log_{10} x$ si scrive usualmente $\text{Log}(x)$ e si legge "logaritmo decimale di x ". È importante perché le potenze di 10 costituiscono la base più diffusa tra gli umani;

⇒ base e : $\ln(x)$.

La funzione $\log_e(x)$ si scrive usualmente $\ln(x)$ ("logaritmo naturale di x ") e il suo legame con gli esponenziali dipende dalla particolare definizione del numero e , riportata in precedenza. Le proprietà del logaritmo naturale sono tali che vale la trasformazione:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln[f(x)]}.$$

□ **Osservazione** Le forme di indecisione che coinvolgono la funzione logaritmo sono connesse strettamente a quelle della funzione esponenziale. Nella formula precedente, infatti, vediamo che un'eventuale indecisione sul risultato di un'esponenziale diventa un'indecisione nel prodotto fra due esponenti. Questo tornerà utile negli esempi e nelle applicazioni che seguono.

Forme di indecisione risolte grazie al numero e

Il risultato di uno dei calcoli precedenti, cioè $\log_a(1 + \varepsilon) = +\delta$ diventa particolarmente semplice con l'uso dei logaritmi naturali. Dimostriamo che $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon$. La definizione di e può essere scritta in questo modo:

$$e \sim (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri:

$$\ln(e) \sim \ln(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$1 \sim \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\varepsilon \sim \ln(1 + \varepsilon)$$

e quindi:

$$\text{st} \left(\frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right) = 1.$$

Come si vede, si tratta del rapporto fra due infinitesimi, un calcolo aperto a qualsiasi tipo di risultato.

Con alcuni passaggi algebrici e sfruttando le proprietà dei logaritmi, da $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon$ si ottiene anche: $1 + \varepsilon \approx e^\varepsilon \rightarrow \varepsilon \approx e^\varepsilon - 1$ e quindi

$$\text{st}\left(\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) = 1.$$

La semplicità di queste espressioni ci fa intuire la comodità dell'uso di e .

Funzioni periodiche

Facciamo riferimento al primo capitolo, per la parte generale sulle funzioni periodiche. L'estensione iperreale di queste funzioni non cambia il loro comportamento quando le applichiamo a iperreali standard. Il nostro interesse, in questo momento, è capire come si comportano le principali funzioni periodiche ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$) quando vengono applicate a infinitesimi e a infiniti. In particolare, nel caso di x infinitesimo, occorre riflettere sul significato del numero π .

Numero π

Il numero π ha una lunga storia. Identifica il rapporto fra una qualsiasi circonferenza e il suo diametro: $\pi = \frac{C}{2r}$. Anche se risulta da un rapporto, il suo valore ($\pi = 3,14159265\dots$) ha la parte decimale infinita e priva di periodo, quindi non è un numero razionale: come il numero e , è un irrazionale trascendente.

Si è giunti a definire il valore di π per approssimazioni successive, già dai tempi di Archimede. Il suo metodo era di calcolare i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza, ipotizzando che la circonferenza assumesse valori intermedi. Archimede giunse a calcolare i perimetri di poligoni con 96 lati, ma noi possiamo pensare di portare la sua idea all'infinito. Vedremmo così che la circonferenza e i perimetri dei poligoni di infiniti lati si fondono insieme in un'unica linea: nel linguaggio degli iperreali diciamo che le loro lunghezze hanno valori infinitamente vicini.

Se i lati dei poligoni inscritti e circoscritti sono in numero infinito, allora uno dei lati interni (la corda), l'arco corrispondente e il segmento tangente sono infinitesimi. Quindi la conseguenza della definizione di π è: più piccolo è l'arco di circonferenza, più le tre lunghezze (della corda, dell'arco e del segmento tangente) si avvicinano.

Dimezzando l'arco si dimezza anche la corda e questa metà corrisponde al seno, mentre la metà del segmento tangente corrisponde alla funzione tangente: il seno dell'arco, l'arco e la sua tangente tendono ad essere infinitesimi contemporaneamente.

Nella parte che segue, il numero iperreale x è l'arco e il raggio è l'unità di misura. In questo modo, la circonferenza misura 2π e l'arco viene misurato in radianti.

Infine, il fatto che si tratti di funzioni periodiche impedisce di calcolare il loro comportamento all'infinito. Di conseguenza non cercheremo di calcolare espressioni del tipo $\sin M$, $\tan M$ o simili.

Funzione seno

Quando x è infinitesimo, anche $\sin x$ lo è. Di conseguenza il rapporto $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ dovrebbe essere una forma di indecisione. Invece Poiché la circonferenza è indistinguibile da un poligono

regolare di infiniti lati:

$$\text{st} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 1.$$

Funzione coseno

Analogamente al seno, anche il rapporto $\frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon}$ sembra una forma di indecisione. Ma non è così. Si può dimostrare con considerazioni geometriche che la quantità $(1 - \cos x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x e quindi:

$$\text{st} \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0.$$

$1 - \cos \varepsilon$ è quindi un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ε : infatti vale

$$\text{st} \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Entrambi i risultati possono essere dimostrati banalmente moltiplicando i numeratori e i denominatori per $(1 + \cos \varepsilon)$, oppure attraverso metodi analitici che vedremo in seguito.

□ **Osservazione** Se dovessimo stilare una graduatoria di infinitesimi, si dovrebbe dire che il seno è un infinitesimo di ordine corrispondente al suo arco e che il coseno (nell'espressione $1 - \cos \varepsilon$) è infinitesimo di un grado superiore rispetto al seno. Quindi se l'arco è infinitesimo di primo grado, anche il seno lo è, mentre il coseno lo è di secondo grado.

Invece, dato il rapporto fra circonferenza e diametro, in caso (per fortuna raro) di circonferenza di raggio infinitesimo, l'arco infinitesimo e il suo seno diventano infinitesimi di secondo grado e $1 - \cos x$ diventa infinitesimo di terzo.

3.3 Applicazioni

Dopo aver dato un'occhiata a cosa sono e come funzionano i numeri iperreali vediamo qualche problema che si può convenientemente risolvere con gli Iperreali.

3.3.1 Problemi con gli Iperreali

Esempio 3.17. Calcola l'area iperreale di una cornice quadrata, di lato interno pari a l e spessore infinitesimo ε . Calcola infine l'area reale.

Chiamiamo dS l'area iperreale della cornice: $dS = (l + \varepsilon)^2 - l^2 = l^2 + 2l\varepsilon + \varepsilon^2 - l^2 = 2l\varepsilon + \varepsilon^2$.

Chiamiamo ΔS la corrispondente area reale: $\Delta S = \text{st}(dS) = \text{st}(2l\varepsilon + \varepsilon^2) = \text{st}(2l\varepsilon) + \text{st}(\varepsilon^2) = 0 + 0 = 0$.

Poichè la differenza di area dS è la somma di due infinitesimi, uno del primo e l'altro del secondo ordine, la parte standard di entrambi è nulla e la somma risulta nulla. In conclusione, se l'incremento del lato è infinitesimo, cioè infinitamente vicino a zero, a maggior ragione sarà infinitamente vicino a zero l'incremento dell'area.

Esempio 3.18. Calcola di quanto diminuisce rispetto al raggio una circonferenza di raggio r , quando il raggio subisce una contrazione infinitesima $dr = -\varepsilon$.

Chiamiamo dC (differenza di C) la contrazione della circonferenza: $dC = 2\pi r - 2\pi(r - \varepsilon) =$

$2\pi r - 2\pi r + 2\pi\epsilon = 2\pi\epsilon$. Dunque la circonferenza si riduce di un infinitesimo, cioè 0 in numeri standard. Ma se misuriamo la riduzione della circonferenza in termini di riduzione del raggio, si ha: $\frac{dC}{dr} = \frac{2\pi\epsilon}{-\epsilon} = -2\pi$: ogni unità di variazione del raggio, comporta una variazione della circonferenza pari a 2π .

Esempio 3.19. Quanto volume acquisisce un guscio sferico di raggio r nel gonfiarsi progressivamente?

Volume iniziale: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se il raggio aumenta e diventa $r + \epsilon$, la variazione di volume sarà:

$$V(r + \epsilon) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r + \epsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\epsilon + 3r\epsilon^2 + \epsilon^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(3r^2\epsilon + 3r\epsilon^2 + \epsilon^3).$$

Per sapere quanto varia il volume per ogni variazione infinitesima di raggio, si calcola:

$\frac{dV}{dr} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3r^2\epsilon + 3r\epsilon^2 + \epsilon^3)}{\epsilon} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r\epsilon + \epsilon^2)$, che è un numero di tipo inn. La sua parte standard è $\text{st}\left(\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi r^2$. Nota che questa è l'espressione dell'area della superficie sferica. Come era prevedibile, infatti, un guscio sferico di spessore infinitesimo approssima la superficie sferica.

3.3.2 Espressioni con gli Iperreali

I numeri iperreali semplificano la ricerca della soluzione di molti problemi. Il calcolo delle soluzioni ci porta a risultati espressi quasi sempre da numeri standard, che corrispondono ai reali. Infatti quasi sempre, il calcolo termina ricorrendo alla funzione $\text{st}()$.

Questo metodo, cioè ricorrere ad un insieme più astratto di \mathbb{R} , svolgervi i calcoli secondo le nuove regole e alla fine esprimere i risultati in \mathbb{R} , invece di fare tutto il procedimento solo con numeri reali, sembra inutilmente complicato, soprattutto se si parte dall'illusione che i numeri reali siano "i numeri della realtà". Ma anche se lo fossero (e non può essere vero), i critici probabilmente dimenticano che i numeri reali non vengono quasi mai usati per davvero, perché di solito ci si accontenta delle loro approssimazioni razionali. Eppure nessuno dei critici lamenta l'eccessiva ricchezza di numeri, regole, proprietà dell'insieme \mathbb{R} .

Vediamo, con alcuni esempi, come si possono applicare le regole presentate in precedenza al calcolo di espressioni contenenti numeri Iperreali (dove usiamo le solite convenzioni):

- ⇒ con le lettere greche minuscole indichiamo gli infinitesimi non nulli;
- ⇒ con x, y, z indichiamo un numero iperreale qualsiasi;
- ⇒ con le altre lettere latine minuscole indichiamo i numeri finiti non infinitesimi;
- ⇒ con le lettere latine maiuscole indichiamo gli infiniti.;
- ⇒ con $\text{st}(x)$ indichiamo la parte standard di x .

Esempio 3.20. $\text{st}\left(\frac{7-3\epsilon}{9+2\delta}\right) \stackrel{1}{=} \frac{\text{st}(7-3\epsilon)}{\text{st}(9+2\delta)} \stackrel{2}{=} \frac{\text{st}(7-\alpha)}{\text{st}(9+\beta)} \stackrel{3}{=} \frac{7}{9}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la parte standard di un quoziente, con il divisore finito non infinitesimo, è uguale al quoziente delle parti standard;
2. se ϵ e δ sono infinitesimi, anche 3ϵ e 2δ sono infinitesimi;
3. la parte standard di un numero reale più (o meno) un infinitesimo è quel numero reale.

Esempio 3.21. $\text{st}\left(\frac{4\epsilon^4 - 7\epsilon^3 + \epsilon^2}{5\epsilon}\right) \stackrel{1}{=} \text{st}\left(\frac{(4\epsilon^3 - 7\epsilon^2 + \epsilon)\epsilon}{5\epsilon}\right) \stackrel{2}{=} \frac{4\epsilon^3 - 7\epsilon^2 + \epsilon}{5}$

$$\stackrel{2}{=} \text{st} \left(\frac{4\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2 + \varepsilon}{5} \right) \stackrel{3}{=} \text{st} \left(\frac{\alpha}{5} \right) \stackrel{4}{=} \text{st}(\beta) \stackrel{5}{=} 0$$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. si può raccogliere ε al numeratore;
2. dato che ε è diverso da zero, si può semplificare la frazione;
3. i prodotti tra un finito e un infinitesimo sono infinitesimi e la somma di infinitesimi è un infinitesimo;
4. il quoziente tra un infinitesimo e un non infinitesimo è un infinitesimo;
5. la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 3.22. $\text{st} \left(\frac{5\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3}{2\varepsilon + 4\varepsilon^2} \right) \stackrel{1}{=} \text{st} \left(\frac{5 - 3\varepsilon + 6\varepsilon^2}{2 + 4\varepsilon} \right) \stackrel{2}{=} \frac{\text{st}(5 - 3\varepsilon + 6\varepsilon^2)}{\text{st}(2 + 4\varepsilon)} \stackrel{3}{=} \frac{5}{2}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. si può raccogliere ε al numeratore;
2. dato che ε è diverso da zero, si può semplificare la frazione;
3. i prodotti tra un finito e un infinitesimo sono infinitesimi, la somma di infinitesimi è un infinitesimo e la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 3.23. $\text{st} \left(\frac{-6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 8\varepsilon^5}{7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4} \right) \stackrel{1}{=} \text{st} \left(\frac{-6 + 4\varepsilon - 8\varepsilon^3}{7\varepsilon + 2\varepsilon^2} \right) \stackrel{2}{=} \text{st}(A) \stackrel{3}{=} \infty$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. si può raccogliere e semplificare ε^2 dato che ε è *inn*;
2. il numeratore è *fni* mentre il denominatore è *inn* e quoziente tra un finito e un infinitesimo non nulli è un infinito;
3. la parte standard di un infinito non esiste, per convenzione viene indicata con ∞ (che non è un numero reale).

□ **Osservazione** In questo caso, se ε è positivo, l'infinito sarà un infinito negativo, se ε è negativo, l'infinito sarà un infinito positivo.

Esempio 3.24. $\text{st} \left(\frac{-3H^2 - 4H}{2H^2 + 4H - 3} \right) \stackrel{1}{=} \text{st} \left(\frac{\left(-3 - \frac{4}{H}\right) \cdot H^2}{\left(2 + 4\frac{H}{H} - \frac{3}{H^2}\right) \cdot H^2} \right) \stackrel{2}{=} \text{st} \left(\frac{-3 - 4\varepsilon}{2 + 16\varepsilon - 3\varepsilon} \right) \stackrel{3}{=} -\frac{3}{2}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. qui è stato inventato uno sporco trucco: si raccoglie a fattore comune H^2 anche se non è presente in tutti gli addendi e poi lo si semplifica;
2. altro trucco: $\frac{1}{H}$ è un infinitesimo, riscriviamo l'espressione sostituendo al posto di $\frac{1}{H}$ con ε ;
3. tenendo conto che il numeratore è indistinguibile da -3 e il denominatore da 2 si ottiene il risultato.

□ **Osservazione** Se due numeri iperreali sono indistinguibili avranno anche la stessa parte standard.

Esempio 3.25. $\sqrt{H-1} - \sqrt{H+1}$

□ **Osservazione** Si potrebbe pensare che essendo $H - 1$ indistinguibile da H e anche $H - 1$ indistinguibile da H la precedente espressione sia equivalente a $\sqrt{H} - \sqrt{H} = 0$. Ma il concetto di indistinguibile, per come è definito, non si può mai applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che $\sqrt{H-1} - \sqrt{H+1} \approx 0$ e tanto meno: $\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1} = 0$

Anche in questo caso usiamo un trucco una specie di inverso della razionalizzazione:

$$\begin{aligned} \sqrt{H-1} - \sqrt{H+1} &\stackrel{1}{=} (\sqrt{H-1} - \sqrt{H+1}) \cdot 1 \stackrel{2}{=} (\sqrt{H-1} - \sqrt{H+1}) \cdot \frac{\sqrt{H-1} + \sqrt{H+1}}{\sqrt{H-1} + \sqrt{H+1}} \stackrel{3}{=} \\ &\stackrel{3}{=} \frac{H-1 - H-1}{\sqrt{H-1} + \sqrt{H+1}} \stackrel{4}{=} \frac{-2}{\sqrt{H-1} + \sqrt{H+1}} \stackrel{5}{=} \varepsilon \end{aligned}$$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la prima uguaglianza è banale essendo 1 l'elemento neutro della moltiplicazione;
2. al posto del numero 1 sostituiamo una frazione con il numeratore e il denominatore uguali;
3. eseguendo il prodotto magari tenendo conto di uno dei prodotti notevoli imparati in prima otteniamo questa frazione;
4. tenendo conto che $+H$ e $-H$ si annullano otteniamo una nuova frazione che, a prima vista non sembra aver semplificato il problema iniziale, ma a ben guardare la differenza tra le due radici si è trasformata in una somma e quindi il denominatore, somma di due infiniti positivi è un infinito positivo;
5. da cui si ottiene il risultato. Positivo o negativo?

Esempio 3.26. $\text{st} \left(\left(1 + \frac{k}{N}\right)^N \right) \stackrel{1}{=} \text{st} \left(\left(1 + \frac{1}{M}\right)^{kM} \right) \stackrel{2}{=} \text{st} \left(\left[\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M \right]^k \right) \stackrel{3}{=} e^k.$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. un altro sporco trucco: la sostituzione. Supponiamo $\frac{k}{N} = \frac{1}{M}$. Allora $N = kM$;
2. una potenza di potenza è una potenza che ha...
3. per la definizione del numero e e per le proprietà della funzione $\text{st}()$.

Esempio 3.27. $\text{st} \left(\frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \stackrel{1}{=} \text{st} \left(\frac{\delta}{\log_a(\delta+1)} \right) \stackrel{2}{=} \text{st} \left(\frac{1}{\frac{\log_a(\delta+1)}{\delta}} \right) \stackrel{3}{=} \text{st} \left(\frac{1}{\frac{1}{\ln a}} \right) = \ln a.$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. ancora una sostituzione: poniamo $a^\varepsilon - 1 = \delta$. Allora $\varepsilon = \log_a(\delta + 1)$;
2. una capriola algebrica: oplà!
3. per le forme di indecisione discusse a proposito del numero di Nepero e per il cambiamento di base;

Esempio 3.28. $\text{st} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) = 0.$

Dove l'uguaglianza si giustifica per quanto detto a proposito dell'ordine degli infinitesimi, ma gli appassionati del calcolo possono provare a moltiplicare il numeratore e il denominatore per ...

3.4 Esercizi

3.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 I numeri iperreali e l'insieme ${}^*\mathbb{R}$

Di seguito sono riportate alcune domande, scrivi sul quaderno una risposta e poi confrontala con quella riportata sotto.

Domande ¹

- | | |
|--|---|
| <p>3.1. Enunciare l'assioma di Eudosso-Archimede per i segmenti e discutere in quale senso esso esclude l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.</p> | <p><i>Reciproco:</i>
<i>Divisione:</i></p> |
| <p>3.2. Cosa intendiamo per numeri standard e per segmenti standard?</p> | <p>3.17. Che cosa si intendono per forme indeterminate?</p> |
| <p>3.3. Che cos'è un segmento infinitesimo?</p> | <p>3.18. Quando due numeri si dicono infinitamente vicini (\approx)?</p> |
| <p>3.4. Che cos'è un segmento infinito?</p> | <p>3.19. Di quali proprietà gode la relazione $x \approx y$?</p> |
| <p>3.5. Che cos'è un segmento finito?</p> | <p>3.20. Che cos'è una monade e che cosa si intende per monade principale?</p> |
| <p>3.6. Che cos'è un segmento non infinitesimo?</p> | <p>3.21. Quando due numeri si dicono a distanza finita (\approx)?</p> |
| <p>3.7. Che cos'è un segmento finito non infinitesimo?</p> | <p>3.22. Di quali proprietà gode la relazione $x \approx y$?</p> |
| <p>3.8. Che cos'è un numero infinitesimo?</p> | <p>3.23. Che cos'è una galassia e che cosa si intende per galassia principale?</p> |
| <p>3.9. Che cos'è un numero infinito?</p> | <p>3.24. Come si confrontano due infinitesimi non nulli?</p> |
| <p>3.10. Che cos'è un numero finito?</p> | <p>3.25. Come si confrontano due infiniti?</p> |
| <p>3.11. Che cos'è un numero non infinitesimo?</p> | <p>3.26. Che cos'è la parte standard di un numero finito?</p> |
| <p>3.12. Che cos'è un numero finito non infinitesimo?</p> | <p>3.27. Elencare le proprietà salienti della parte standard.</p> |
| <p>3.13. Cosa sono i numeri iperreali?</p> | <p>3.28. Quando due numeri non nulli si dicono indistinguibili (\sim)?</p> |
| <p>3.14. Che cos'è la retta iperreale?</p> | <p>3.29. Di quali proprietà gode la relazione $x \sim y$?</p> |
| <p>3.15. Come vengono classificati in tipi i numeri iperreali?</p> | <p>3.30. Quando sostituiamo il simbolo \sim con quello di uguaglianza?</p> |
| <p>3.16. Come si comportano i tipi di numeri iperreali con le operazioni aritmetiche?</p> <p><i>Addizione/sottrazione:</i>
<i>Moltiplicazione:</i></p> | |

¹Queste domande e le rispettive risposte sono state messe a disposizione dal prof. Giorgio Goldoni

- 3.31. Che cosa si intende per microscopio standard?
- 3.32. Che cosa si intende per telescopio standard?
- 3.33. Che cosa si intende per zoom standard?
- 3.34. Che cosa si intende per microscopio non-standard?
- 3.35. Che cosa si intende per telescopio non-standard?
- 3.36. Che cosa si intende per zoom non-standard?
- 3.37. Cosa intendiamo per scala naturale di ingrandimento?
- 3.38. Come possiamo visualizzare un numero infinitesimo non nullo sulla retta iperreale?
- 3.39. Come possiamo visualizzare un numero infinito sulla retta iperreale?
- 3.40. Come possiamo visualizzare un numero finito non infinitesimo sulla retta iperreale?
- 3.41. Come possiamo visualizzare il fatto che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ ?
- 3.42. Come possiamo visualizzare il fatto che ε e δ sono due infinitesimo dello stesso ordine?
- 3.43. Come possiamo visualizzare il fatto che M è un infinito di ordine superiore a N ?
- 3.44. Come possiamo visualizzare il fatto che M e N sono due infiniti dello stesso ordine?

Risposte

3.1 *Enunciare l'assioma di Eudosso-Archimede per i segmenti e discutere in quale senso esso esclude l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.*

Assioma di Eudosso-Archimede: Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore o, equivalentemente, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. L'assioma nega l'esistenza di segmenti infiniti poiché afferma che, fissato un segmento arbitrario come unità di misura, ogni segmento, per quanto grande, risulta superato da un opportuno multiplo finito dell'unità di misura. Equivalentemente, esso nega l'esistenza di segmenti infinitesimi in quanto afferma che ogni segmento, per quanto piccolo, risulta maggiore di un opportuno sottomultiplo finito dell'unità di misura.

3.2 *Cosa intendiamo per numeri standard e per segmenti standard?*

I numeri standard sono i numeri reali \mathbb{R} e i segmenti standard sono i segmenti la cui misura può essere espressa mediante un numero reale positivo.

3.3 *Che cos'è un segmento infinitesimo?*

Un segmento infinitesimo è un segmento minore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinitesimo.

3.4 *Che cos'è un segmento infinito?*

Un segmento infinito è un segmento maggiore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinito.

3.5 *Che cos'è un segmento finito?*

Un segmento finito è un segmento non infinito e quindi un segmento minore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi segmenti finiti.

3.6 *Che cos'è un segmento non infinitesimo?*

Un segmento non infinitesimo è un segmento maggiore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi non infinitesimi.

3.7 *Che cos'è un segmento finito non infinitesimo?*

Un segmento finito non infinitesimo è un segmento compreso tra due segmenti standard. Tutti i segmenti standard sono quindi finiti non infinitesimi.

3.8 *Che cos'è un numero infinitesimo?*

Un numero infinitesimo è un numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo. L'unico numero standard infinitesimo è lo zero.

3.9 *Che cos'è un numero infinito?*

Un numero infinito è un numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard. Nessun numero standard è quindi infinito.

3.10 *Che cos'è un numero finito?*

Un numero finito è un numero non infinito e quindi un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard. Tutti i numeri standard sono quindi numeri finiti.

3.11 *Che cos'è un numero non infinitesimo?*

Un numero non infinitesimo è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi non infinitesimi.

3.12 *Che cos'è un numero finito non infinitesimo?*

Un numero finito non infinitesimo è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi finiti non infinitesimi.

3.13 *Cosa sono i numeri iperreali?*

Negando l'Assioma di Eudosso/Archimede, accettiamo l'esistenza di segmenti maggiori di ogni multiplo dell'unità di misura e minori di ogni suo sottomultiplo e accettiamo quindi l'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi. Analogamente, accettiamo l'esistenza di numeri infiniti e infinitesimi. I numeri che si ottengono combinando i numeri standard con i numeri infiniti e infinitesimi mediante le operazioni aritmetiche sono chiamati numeri iperreali e il loro insieme si indica con ${}^*\mathbb{R}$.

3.14 *Che cos'è la retta iperreale?*

La retta iperreale è una retta i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i numeri iperreali.

3.15 *Come vengono classificati in tipi i numeri iperreali?*

I numeri iperreali si dividono in *finiti* (f) e *infiniti* (I). I finiti a loro volta si dividono in *finiti non infinitesimi* (fni) e in *infinitesimi* (i) e questi ultimi in *infinitesimi non nulli* (inn) e lo zero. Si distinguono quindi quattro tipi di iperreali:

- infiniti,
- finiti non infinitesimi,
- infinitesimi non nulli,
- zero.

3.16 *Come si comportano i tipi di numeri iperreali con le operazioni aritmetiche?*

Addizione/sottrazione:	Moltiplicazione:	Reciproco:	Divisione:
$\text{inn} \mp \text{inn} = \text{i}$	$\text{inn} \times \text{inn} = \text{inn}$	$\frac{1}{\text{inn}} = \text{I}$	$\text{inn} : \text{fni} = \text{inn}$
$\text{inn} \mp \text{fni} = \text{fni}$	$\text{inn} \times \text{fni} = \text{inn}$	$\frac{1}{\text{fni}} = \text{fni}$	$\text{inn} : \text{I} = \text{inn}$
$\text{inn} \mp \text{I} = \text{I}$	$\text{fni} \times \text{fni} = \text{fni}$	$\frac{1}{\text{I}} = \text{inn}$	$\text{fni} : \text{inn} = \text{I}$
$\text{fni} \mp \text{fni} = \text{f}$	$\text{fni} \times \text{I} = \text{I}$		$\text{fni} : \text{fni} = \text{fni}$
$\text{fni} \mp \text{I} = \text{I}$	$\text{I} \times \text{I} = \text{I}$		$\text{fni} : \text{I} = \text{inn}$
			$\text{I} : \text{inn} = \text{I}$
			$\text{I} : \text{fni} = \text{I}$

3.17 *Che cosa si intendono per forme indeterminate?*

Si chiamano forme indeterminate le operazioni per le quali la sola conoscenza dei tipi degli operandi non consente di determinare il tipo del risultato. Le forme indeterminate relative alle operazioni aritmetiche sono: $\text{I} \mp \text{I}$; $\text{inn} \times \text{I}$; $\text{inn} : \text{inn}$; $\text{I} : \text{I}$.

3.18 *Quando due numeri si dicono infinitamente vicini?*

Due numeri si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo. Indichiamo il fatto che x è infinitamente vicino a y con $x \approx y$. In particolare un numero x è infinitesimo se e solo se $x \approx 0$.

3.19 Di quali proprietà gode la relazione $x \approx x$?

La relazione $x \approx x$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ed è dunque una relazione di equivalenza. In simboli:

$$x \approx x; \quad x \approx y \Rightarrow y \approx x; \quad x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$$

Inoltre, se due numeri sono infinitamente vicini allora sono dello stesso tipo.

3.20 Che cos'è una monade e che cosa si intende per monade principale?

La monade di un numero è l'insieme di tutti i numeri infinitamente vicini ad esso ed è quindi una classe di equivalenza della relazione $x \approx y$. Ne segue che due monadi sono sempre disgiunte o coincidenti e che le monadi formano una partizione dei numeri iperreali. In particolare la monade di un numero standard x consiste, oltre che del numero stesso, di tutti i numeri non standard ad esso infinitamente vicini, cioè dei numeri del tipo $x + \varepsilon$. La monade principale è la monade dello zero, che è costituita esattamente da tutti gli infinitesimi. Indichiamo la monade di x con $\text{mon}(x)$.

3.21 Quando due numeri si dicono a distanza finita?

Due numeri si dicono a distanza finita quando la loro differenza è un numero finito. Per indicare che due numeri x e y sono a distanza finita scriviamo $x \approx y$.

3.22 Di quali proprietà gode la relazione $x \approx y$?

La relazione gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza. In simboli:

$$x \approx x;$$

$$x \approx y \Rightarrow y \approx x;$$

$$x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z.$$

Se un numero è a distanza finita da un finito è finito, se è a distanza finita da un infinito è un infinito.

3.23 Che cos'è una galassia e che cosa si intende per galassia principale?

Due numeri si dicono appartenere a una stessa galassia se sono a distanza finita tra loro. Una galassia è dunque una classe di equivalenza rispetto alla relazione di essere a distanza finita. In particolare, tutti i numeri standard appartengono a una stessa galassia, detta galassia principale. Indichiamo la galassia del numero x con $\text{Gal}(x)$.

3.24 Come si confrontano due infinitesimi non nulli?

Per confrontare due infinitesimi non nulli ε e δ si considera il loro quoziente $\frac{\varepsilon}{\delta}$.

Se è:

infinitesimo diciamo che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine inferiore a ε e scriviamo $\varepsilon = o(\delta)$.

finito non infinitesimo diciamo che ε e δ sono infinitesimi dello stesso ordine e scriviamo $\varepsilon = O(\delta)$ o $\delta = O(\varepsilon)$.

infinito allora diciamo ε è un infinitesimo di ordine inferiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine superiore a ε e scriviamo $\delta = o(\varepsilon)$.

3.25 Come si confrontano due infiniti?

Dati due infiniti M e N si considera il loro quoziente $\frac{M}{N}$.

Se è:

infinito diciamo che M è un infinito di ordine superiore a N o che N è un infinito di ordine inferiore a M e scriviamo $M \gg N$ o $N \ll M$.

finito non infinitesimo diciamo che M e N sono infiniti dello stesso ordine e scriviamo

$$M = O(N) \text{ o } N = O(M).$$

infinitesimo diciamo M è un infinito di ordine inferiore a N o che N è un infinito di ordine superiore a M e scriviamo $M \ll N$ o $N \gg M$.

3.26 *Che cos'è la parte standard di un numero finito?*

Ogni numero finito risulta infinitamente vicino a un numero standard, detto appunto sua parte standard. In altre parole, ogni numero finito x può essere scritto in modo unico nella forma $x = s + \varepsilon$, dove s è standard e ε è un infinitesimo eventualmente nullo. La parte standard di x si indica con $\text{st}(x)$.

3.27 *Elencare le proprietà salienti della parte standard.*

Indicando con a e b due numeri finiti (eventualmente infinitesimi o nulli):

$$\begin{array}{ll} \text{st}(a) = a \Leftrightarrow a \text{ è standard} & \text{st}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\text{st}(a)}{\text{st}(b)} \\ \text{st}(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ è infinitesimo} & \text{st}(a) > 0 \Rightarrow a > 0 \\ \text{st}(a \pm b) = \text{st}(a) \pm \text{st}(b) & a > 0 \Rightarrow \text{st}(a) \geq 0 \\ \text{st}(ab) = \text{st}(a) \text{st}(b) & \end{array}$$

3.28 *Quando due numeri non nulli si dicono indistinguibili?*

Due numeri non nulli si dicono indistinguibili se il loro rapporto è infinitamente vicino all'unità o, equivalentemente, se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi. Indichiamo il fatto che x è indistinguibile da y con $x \sim y$. In simboli $x \sim y$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

$$\bullet \frac{x}{y} \approx 1 \quad \bullet \text{st}\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \quad \bullet \frac{x-y}{x} \approx 0 \quad \bullet \frac{x-y}{y} \approx 0$$

3.29 *Di quali proprietà gode la relazione $x \sim y$?*

Si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva e quindi di una relazione di equivalenza sugli iperreali non nulli. In simboli:

$$\bullet x \sim x \quad \bullet x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \bullet x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

Inoltre, se due numeri sono indistinguibili allora sono dello stesso tipo, cioè entrambi infinitesimi, finiti non infinitesimi o infiniti.

3.30 *Quando sostituiamo il simbolo \sim con quello di uguaglianza?*

Quando siamo portati a identificare due numeri indistinguibili e, in questo caso, sostituiamo un numero con uno da esso indistinguibile e il più possibile semplice.

3.31 *Che cosa si intende per microscopio standard?*

Per microscopio standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere una porzione di retta ingrandita di un fattore n . Il microscopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

3.32 *Che cosa si intende per telescopio standard?*

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte remota di retta nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

3.33 *Che cosa si intende per zoom standard?*

Per zoom standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita di un fattore n .

Lo zoom standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

3.34 *Che cosa si intende per microscopio non-standard?*

Per microscopio non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere un'opportuna porzione della monade di quel numero. Il microscopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

3.35 *Che cosa si intende per telescopio non-standard?*

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte di retta a distanza infinita nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

3.36 *Che cosa si intende per zoom non-standard?*

Per zoom non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita in modo tale da far entrare nel campo visivo numeri infiniti. Lo zoom non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

3.37 *Cosa intendiamo per scala naturale di ingrandimento?*

Una scala di rappresentazione della retta in cui il punto di coordinata 1 sia visibile e ben distinguibile dallo zero.

3.38 *Come possiamo visualizzare un numero infinitesimo non nullo sulla retta iperreale?*

Un numero infinitesimo non nullo può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero e che non può essere separato dallo zero con nessun microscopio standard. Occorre invece un microscopio non-standard per separarlo dallo zero.

3.39 *Come possiamo visualizzare un numero infinito sulla retta iperreale?*

Un numero infinito può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta esterno al campo visivo e che non può essere fatto entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Occorre invece uno zoom non-standard per farlo entrare nel campo visivo.

3.40 *Come possiamo visualizzare un numero finito non infinitesimo sulla retta iperreali?*

Un numero finito non infinitesimo può essere visualizzato come un numero che già nella scala naturale rientra nel campo visivo e ben separato dallo zero; oppure come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero, ma che è separabile con un microscopio standard; infine, come un numero che nella scala naturale non rientra nel campo visivo, ma che possiamo far rientrare nel campo visivo di uno zoom standard.

3.41 *Come possiamo visualizzare il fatto che ϵ è un infinitesimo di ordine superiore a δ ?*

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero in numero δ , mentre il numero ϵ risulta non separato dallo zero e non si riesce a separarlo con nessun microscopio standard. In altri termini, nella scala in cui δ risulta visibile e separato dallo zero, ϵ risulta infinitesimo.

3.42 *Come possiamo visualizzare il fatto che ϵ e δ sono due infinitesimo dello stesso ordine?*

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a separare solo uno, mentre l'altro risulta ancora non separato dallo zero, ma basta un microscopio standard per separare anche il secondo.

3.43 Come possiamo visualizzare il fatto che M è un infinito di ordine superiore a N ?

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli rientrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non standard possiamo far rientrare nel campo visivo in numero N , mentre il numero M continua a rimanere esterno al campo visivo e non si riesce a far rientrare con nessuno zoom standard. In altri termini, nella scala in cui N risulta visibile e separato dallo zero, M risulta infinito.

3.44 Come possiamo visualizzare il fatto che M e N sono due infiniti dello stesso ordine?

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non-standard riusciamo a far rientrare nel campo visivo e separati dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a farne entrare solo uno, separato dallo zero, mentre l'altro risulta ancora esterno al campo visivo, ma basta uno zoom standard per far rientrare anche il secondo.

3.2.6 Operazioni

Nei problemi di questa sezione si assuma che: $\varepsilon, \delta \dots$ siano *inn* positivi, H, K, \dots siano *I* positivi.

3.45. Determina se le seguenti espressioni sono equivalenti a un numero *inn*, *fni*, *I*.

a) $7,3 \cdot 10^2 3 \cdot \varepsilon$

b) $8 + \frac{1}{\varepsilon}$

c) $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$

d) $\frac{H}{99^9}$

e) $\frac{5\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4}{7\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon}$

f) $(3 + \varepsilon)(3 - \varepsilon) - 6$

g) $\frac{4\varepsilon - 5\varepsilon^2}{2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3}$

h) $\frac{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}{4 \cdot 2\varepsilon}$

i) $\frac{5\varepsilon \cdot 6}{H + K}$

j) $\frac{HK}{H^2 - H}$

k) $H^2 - H$

l) $\frac{5H^4 - 4H + 7}{7H^3 - 4}$

m) $\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{4 + \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$

n) $7\varepsilon + 5\delta$

o) $3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 4$

p) $(5 - \varepsilon)^2 - 25$

q) $\frac{5\varepsilon^3 + 7\varepsilon^4}{2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4}$

r) $\frac{\sqrt{\varepsilon} - 4\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + 3}$

s) $\frac{H - 7 + \varepsilon}{H^2 + 3\varepsilon}$

3.3.2 Espressioni con gli Iperreali

3.46. Esegui i seguenti calcoli nell'insieme degli ${}^*\mathbb{R}$ sapendo che x è un infinitesimo non nullo.

a) $\text{st}(9 - 3x)$

b) $\text{st}(5 + 2x - x^2)$

c) $\text{st}(7 + 2x^3)$

d) $\text{st}(2 + 8x + x^2)$

e) $\text{st}\left(\frac{2 - 5x}{6 + 7x}\right)$

f) $\text{st}(\sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x})$

g) $\text{st}\left(\frac{x^4 - x^2 + 4x}{3x^2 - 2x - 3}\right)$

h) $\text{st}\left(\frac{x^4 - x^3 + x^2}{2x^2}\right)$

i) $\text{st}\left(\frac{4x^4 - 3x^3 + 2x^2}{3x^4 - 2x^3 + x^2}\right)$

j) $\text{st}((2 + x)(3 - x^2))$

k) $\text{st}\left(\frac{2x + 4}{3x - 6}\right)$

l) $\text{st}\left(\frac{6x - 7}{x^2 + 2}\right)$

m) $\text{st}\left(\frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}\right)$

n) $\text{st}\left(\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{4x^4 + 2x^2 - 1}\right)$

o) $\text{st}\left(\frac{x^4 - x^2 + 4x}{-3x^2 - 2x - 3}\right)$

p) $\text{st}\left(\frac{x^4 - x^3 + x^2}{2x^2}\right)$

q) $\text{st}\left(\frac{-4x^4 - 3x^3 + 2x^2}{3x^4 - 2x^3 + x^2}\right)$

r) $\text{st}((2 + x)(3 - x^2))$

Derivate 4

4.1 Introduzione

¹ Il problema di determinare la velocità istantanea ci ha portati a conoscere i numeri infinitesimi e, attraverso questi, l'insieme dei numeri iperreali. Ora siamo in grado di cercare la risposta alla domanda rimasta in sospeso: come si determina la velocità istantanea?

La risposta, che conosciamo nelle forme moderne, da più di 400 anni, propone al nostro studio un nuovo potentissimo strumento di calcolo, adatto a risolvere problemi in ogni ambito scientifico: la derivata.

4.2 Velocità di caduta

Nel Settecento fiorirono alcune leggende su Galileo Galilei. Una di queste racconta che per dimostrare che i gravi cadono con la stessa velocità, gettò dalla Torre di Pisa due sfere di peso diverso, ma di uguali dimensioni. I due oggetti, come oggi possiamo immaginare, raggiunsero il suolo contemporaneamente.

La Torre di Pisa è alta circa 56m e immaginiamo, per semplificare, che la distanza percorsa dai due oggetti sia di 56m (ti lascio calcolare il percorso effettivo: tieni presente che al giorno d'oggi l'inclinazione della Torre è di $4,8^\circ$).

Oggi sappiamo che un oggetto in caduta libera ha la seguente legge del moto: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Come al solito, s è lo spazio in metri, t è il tempo in secondi, $g = 9,81\text{m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, costante nei pressi della superficie terrestre.

Se cerchiamo la velocità media, basta dividere lo spazio percorso per il tempo impiegato:

$$\begin{aligned} s_{\text{tot}} &= 56\text{m} \\ s &= \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t_{\text{tot}} = \sqrt{\frac{2s_{\text{tot}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 56}{9,81}} = 3,36\text{s}. \\ v_m &= \frac{s_{\text{tot}}}{t_{\text{tot}}} = \frac{56\text{m}}{3,36\text{s}} = 16,67\text{m/s}, \end{aligned}$$

che corrispondono a circa 60km/h di media.

Ma gli oggetti partono fermi e arrivano velocissimi: è possibile sapere quale è loro velocità in ogni istante? È il momento di usare le quantità infinitesime.

Chiamiamo dt un intervallo di tempo infinitesimo, fra due istanti successivi t e $t + dt$. Lo spazio percorso nella caduta, in quell'intervallo di tempo, applicando la legge del moto, sarà:

$$ds = \frac{1}{2}g(t + dt)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t^2 + 2tdt + (dt)^2) - \frac{1}{2}gt^2 = gtdt + \frac{1}{2}(dt)^2.$$

¹Per scrivere questo capitolo mi sono ispirato ai lavori di Giorgio Goldoni "Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale". Chi volesse approfondire l'argomento può acquistare il testo all'indirizzo: www.unilibro.it/libri/f/autore/goldoni_giorgio

Dividendo il tutto per dt si ottiene la velocità istantanea, quella che cambia in ogni istante t :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{gt dt + \frac{1}{2} dt^2}{dt} = gt + \frac{1}{2} dt.$$

L'espressione $gt + \frac{1}{2} dt = 9,81t + \frac{1}{2} dt$ diventa un numero ben preciso per ogni valore di t , un iperreale finito che è la somma di un numero standard e di un numero infinitesimo. Per averne il valore reale, applichiamo la parte standard:

$$\text{st} \left(9,81t + \frac{1}{2} dt \right) = 9,81t$$

Questa è la velocità istantanea che cerchiamo: dipende dal tempo t , cioè cresce con il passare dei secondi.

t (in s)	$v = 9,81 \times t$ (in m/s)
0	0
1	$9,81 \times 1 = 9,81$
2	$9,81 \times 2 = 19,62$
...	...
3,6	$9,81 \times 3,6 = \dots$

La formula $v = 9,81 \times t$ ci permette il calcolo della velocità per ogni valore di t . Per quale valore di t la velocità sarà uguale a quella media?

4.3 Continuità

La semplicità dei calcoli precedenti lascia intuire la ragione del successo del calcolo con gli infinitesimi. Questo tipo di calcolo fiorì per 150 anni a partire dall'epoca di Newton e Leibniz. Ma suscitava vivaci polemiche fra gli specialisti, perché non si era in grado di spiegare come mai i risultati, espressi attraverso numeri infinitesimi, alla fine diventano numeri "di uso comune". Oggi i matematici conoscono meglio la materia e queste difficoltà sono superate. Siamo quindi in grado di procedere nello studio di questa nuova branca della matematica, che si chiama *Analisi infinitesimale*.

Continuità, intervalli, differenze

C'è un punto critico nei ragionamenti svolti a proposito della caduta dei gravi, un punto che si dà sempre per scontato in fisica, ma non lo è per i matematici e per i logici. Tutto il ragionamento vale perché si presuppone che il tempo scorra in modo uniforme. Se il tempo scorresse a scatti, anche minuscoli, quei calcoli non sarebbero possibili. Si dice infatti che il tempo t è una variabile continua, cioè assume tutti i valori, dal minimo al massimo, con regolarità, senza salti.

Definizione 4.1. Una variabile è una grandezza che può assumere valori diversi. L'insieme dei valori possibili costituisce il suo insieme di definizione.

Definizione 4.2. Una variabile continua è definita in un intervallo di valori continuo. Le variazioni dei suoi valori possono essere arbitrariamente piccole.

Il più semplice esempio di una variabile continua in matematica è la posizione x sull'asse reale dei numeri. Infatti sappiamo che la retta reale non ha buchi. A maggior ragione, è una variabile continua anche la posizione sull'asse degli Iperreali: x , con $x \in {}^*\mathbb{R}$. Viceversa una variabile che pesca i suoi valori in un insieme formato da numeri isolati, cioè con differenze finite fra l'uno e l'altro, si dice *variabile discreta*.

Definizione 4.3. Una variabile discreta assume valori che variano per quantità finite.

Un semplice esempio di variabile discreta è n , $n \in \mathbb{N}$. Nel calcolo precedente, t varia con continuità da 0 a 3,6, assumendone tutti i valori, dal minimo al massimo. In matematica si scrive così: $t \in [0; 3,6]$. Le parentesi quadre sono importanti, indicano che gli estremi dell'intervallo sono valori possibili, sono inclusi. I tipi possibili di intervallo sono:

intervallo	sigla	significato
chiuso	$[a; b]$	estremi compresi
aperto/chiuso	$]a; b]$	a escluso, b compreso
chiuso/aperto	$[a; b[$	a compreso, b escluso
aperto	$]a; b[$	estremi esclusi

Tutti i tipi di intervallo precedenti, nella retta reale o iperreale, sono continui, a meno di indicazioni diverse. Se un intervallo $[a; b]$ contiene un punto (o più punti) di discontinuità, per esempio d , allora occorre usare indicazioni diverse: $[a; d[\cup]d; b]$

La differenza $a - b$ fra due numeri della retta iperreale $a, b \in {}^*\mathbb{R}$, può essere positiva, negativa o nulla. Indicheremo con Δ la differenza fra due numeri standard, cioè una differenza finita, mentre, se la differenza è infinitesima, sarà indicata con δ oppure ε o altra lettera minuscola dell'alfabeto greco.

In analisi infinitesimale, le differenze infinitesime sono protagoniste.

4.4 Differenziale

Parte principale

I risultati dei calcoli che seguono in molti casi hanno la forma di una somma fra infinitesimi di ordine diverso, come avviene nel prossimo esempio sul differenziale della funzione quadratica e più avanti con le funzioni potenza.

In una somma di infinitesimi, gli infinitesimi di grado superiore (che sono quelli più vicini allo zero) pesano sul risultato infinitamente meno degli altri: sono più trascurabili. Quando in una somma di infinitesimi si trascurano quelli di minor peso, si dice che si prende la *parte principale della somma*. Lo si può fare perché la somma esatta e quella approssimata sono numeri indistinguibili.

Definizione 4.4. Il differenziale è la differenza infinitesimale.

Dato un numero iperreale $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$, finito oppure infinitesimo, si può scrivere il valore del numero a lui infinitamente vicino: si tratta di $x_0 + \varepsilon$. La differenza fra i due valori infinitamente vicini è $dx|_{x=x_0} = (x_0 + \varepsilon) - x_0 = \varepsilon$. È calcolata a partire dal punto x_0 e si chiama *differenziale di x nel punto x_0* .

La sigla dx (che si legge *de x*) indica la differenza infinitesimale. La sigla $dx|_{x=x_0}$ si legge: *de x , per x uguale a x_0* .

Esempio 4.1. Calcola il differenziale della variabile x nel punto $x = -7$. Ripeti poi il calcolo in altri punti.

$$dx|_{x=-7} = (-7 + \varepsilon) - (-7) = \varepsilon$$

$$dx|_{x=7} = (7 + \varepsilon) - 7 = \varepsilon$$

$$dx|_{x=3} = (3 + \varepsilon) - 3 = \varepsilon$$

$$dx|_{x=\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) - \frac{1}{4} = \varepsilon$$

$$\dots = \dots$$

$$dx|_{x=a} = (a + \varepsilon) - a = \varepsilon$$

$$dx|_{x=x_0} = \dots = \varepsilon$$

Se il risultato del differenziale è indifferente da x_0 , allora si evita di indicare $|_{x=x_0}$: $dx = \varepsilon, \forall x$.

Esempio 4.2. Calcola il differenziale della variabile $\frac{10}{13}x$ nei punti $x = 9$ e $x = -\frac{1}{5}$.

$$d\left(\frac{10}{13}x\right)\Big|_{x=9} = \left[\frac{10}{13} \cdot (9 + \varepsilon)\right] - \frac{10}{13} \cdot 9 = \frac{10}{13}\varepsilon.$$

$$d\left(\frac{10}{13}x\right)\Big|_{x=-\frac{1}{5}} = \left[\frac{10}{13} \cdot \left(-\frac{1}{5} + \varepsilon\right)\right] - \frac{10}{13} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{13}\varepsilon.$$

$$d\left(\frac{10}{13}x\right) = \frac{10}{13}\varepsilon, \forall x.$$

Anche se due risultati uguali non bastano per fare una prova, e nemmeno i sei del primo esempio, si può essere sicuri che mille altri tentativi non sortirebbero un esito diverso. La prova si ottiene utilizzando x_0 (oppure una costante analoga) al posto di un valore numerico.

□ **Osservazione** L'infinitesimo ε potrebbe anche essere negativo. Questo non cambierebbe il calcolo.

L'uso di un valore numerico al posto di x_0 è essenziale per precisare il punto a partire dal quale si vuole svolgere il calcolo. Negli esempi precedenti tale indicazione è risultata indifferente, ma nella maggior parte dei casi, invece, ha un diretto influsso sul risultato.

Esempio 4.3. Calcola $df(x)|_{x=5}$, con $f(x) = x^2$. Calcola poi $df(x)|_{x=-5}$ e infine $df(x)|_{x=2}$.

$$d(x^2)|_{x=5} = (5 + \varepsilon)^2 - 5^2 = 25 + 10\varepsilon + \varepsilon^2 - 25 = 10\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$d(x^2)|_{x=-5} = (-5 + \varepsilon)^2 - (-5)^2 = 25 - 10\varepsilon + \varepsilon^2 - 25 = -10\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$d(x^2)|_{x=2} = (2 + \varepsilon)^2 - 2^2 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4 = 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

□ **Osservazione** Non abbiamo fatto alcuna ipotesi su ε . Potrebbe essere un infinitesimo positivo o negativo, potrebbe essere il triplo o il quadrato di un altro infinitesimo. Il risultato non cambia e ha valore per qualsiasi ε .

4.4.1 Differenziale e funzioni

Iniziamo a differenziare le funzioni più semplici, in un generico punto x_0 . Se ci accorgeremo che il risultato non dipende da x_0 , ne trarremo regole di carattere generale. Ma prima di tutto, una precisazione essenziale:

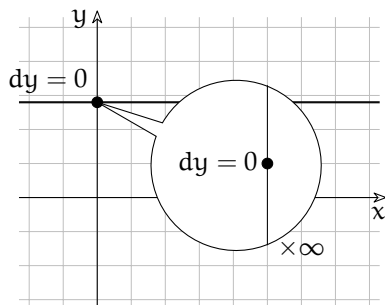
□ **Osservazione** Il differenziale di una funzione è calcolabile solo negli intervalli in cui la funzione è continua.

Funzione costante

Se $f(x) = k$, si ha:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = k - k = 0$$

Se la funzione è costante il suo differenziale è nullo, perché, essendo una funzione costante, i suoi valori non possono cambiare.



Resta così dimostrato il seguente

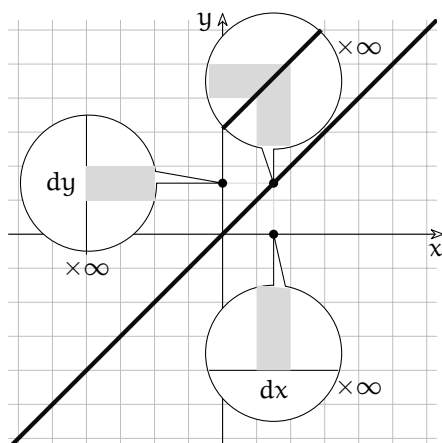
Teorema 4.1. *Il differenziale di una costante è nullo.*

Nel piano cartesiano, la funzione $y = k$ è una retta orizzontale e, come tutte le rette, è una funzione continua. Quindi il risultato non dipende da x_0 e vale su tutto l'asse iperreale.

Funzione identica

Se $f(x) = x$, allora, banalmente: $df(x) = dx = \varepsilon$. Il risultato è generale, cioè non dipende da x_0 . Infatti:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = (x_0 + \varepsilon) - x_0 = \varepsilon.$$



È dimostrato così il seguente

Teorema 4.2. *Il differenziale della funzione identica è $dx = \varepsilon$.*

D'ora in poi useremo indifferentemente dx oppure ε , dato che sono equivalenti.

Il grafico di $f(x) = x$ nel piano cartesiano è dato dalla retta $y = x$. Che significato dobbiamo attribuire a $dy = dx$? L'uguaglianza dei due differenziali indica che due punti infinitamente vicini sulla retta individuano sugli assi due differenze infinitesime uguali.

Succederebbe la stessa cosa con altre rette, più o meno inclinate passanti o non passanti dall'origine?

Funzione lineare

Esempio 4.4. Proviamo a differenziare in x_0 la funzione $f(x) = \frac{2}{3}x$.

$$df(x)|_{x=x_0} = \frac{2}{3}(x_0 + dx) - \frac{2}{3}x_0 = \frac{2}{3}dx.$$

Questa volta il grafico della funzione $y = \frac{2}{3}x$ mostra che l'incremento infinitesimo dei valori x provoca un incremento corrispondente a $\frac{2}{3}$ sui valori y . Il risultato è generale, cioè vale $\forall x_0$.

Esempio 4.5. Proviamo con un'altra funzione che ha per grafico la retta: $f(x) = -5x + 2$:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = [-5(x_0 + dx) + 2] - (-5x_0 + 2) = -5x_0 - 5dx + 2 + 5x_0 - 2 = -5dx$$

Quindi $dy = -5dx, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.3. *Il differenziale di una funzione lineare $f(x) = mx + q$ è $mdx, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Ipotesi: $f(x) = mx + q$.

Tesi: $df(x) = mdx$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = [(mx_0 + dx) + q] - (mx_0 + q) = mx_0 + mdx + q - mx_0 - q = mdx$$

Poiché nel risultato non compare x_0 , $df(x)$ non dipende dal punto x_0 . \square

Funzione quadratica

Teorema 4.4. *Il differenziale della funzione quadratica $f(x) = x^2$ è $2xdx + (dx)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Ipotesi: $f(x) = x^2$.

Tesi: $df(x) = 2xdx + (dx)^2$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 = x_0^2 + x_0dx + (dx)^2 - x_0^2 = 2x_0dx + (dx)^2$$

Questa volta nel risultato compare x_0 . Quindi il valore del differenziale della funzione cambia al cambiare del punto x_0 che viene incrementato. \square

Funzioni potenza

Ricaviamo per gradi il differenziale della funzione potenza $f(x) = x^n$, con un procedimento per induzione.

Iniziamo dai casi già noti $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ e esaminiamo i successivi aumentando progressivamente l'esponente.

$$\begin{aligned}d(x) &= x + dx - x = dx \\d(x^2) &= (x + dx)^2 - x^2 \sim 2x dx \\d(x^3) &= (x + dx)^3 - x^3 = [x^3 + 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3] - x^3 = 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 = \\&= 3x^2 dx + \delta(x) \sim 3x^2 dx \\d(x^4) &= (x + dx)^4 - x^4 = [x^4 + 4x^3 dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4] - x^4 = \\&= 4x^3 dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 = 4x^3 dx + \delta(x) \sim 4x^3 dx \\&\dots\dots \\d(x^7) &= (x + dx)^7 - x^7 = x^7 + 7x^6(dx) + 21x^5(dx)^2 \dots + 21x^2(dx)^5 + 7x(dx)^6 + (dx)^7 - x^7 = \\&= x^7 + \delta(x) \sim 7x^6 dx \\&\dots\dots \\d(x^{10}) &= (x + dx)^{10} - x^{10} = x^{10} + 10x^9 dx + \dots - x^{10} = \dots = x^{10} + \delta(x) \sim 10x^9 dx\end{aligned}$$

L'unico risultato esatto è il primo; gli altri si sintetizzano scrivendo $\delta(x)$ che rappresenta gli infinitesimi di ordine superiore. $\delta(x)$ aggiunge delle quantità infinitamente meno importanti del primo addendo. A sinistra e a destra dell'ultimo segno di uguale si trovano quindi numeri indistinguibili, cioè le loro differenze non si possono cogliere perché sono "più infinitesime" di quanto lo sono questi numeri.

Ora che il meccanismo è chiaro e possiamo ritenere sufficientemente dimostrato il teorema seguente.

Teorema 4.5. *Il differenziale della funzione potenza $f(x) = x^n$ è $df(x) \sim nx^{n-1} dx$*

□ **Osservazione** Anche se abbiamo usato solo esponenti interi, si dimostra che la regola vale per qualsiasi esponente reale. Lo puoi verificare nei due casi che seguono, riscrivendo le funzioni come potenze.

Funzione radice quadrata

Teorema 4.6. *Il differenziale della funzione radice quadrata $f(x) = \sqrt{x}$ è $\sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}}$, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}, x \neq 0$.*

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$.

Tesi: $df(x) \sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}}$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0 + dx) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + dx} - \sqrt{x_0} = \\ &= \left(\sqrt{x_0 + dx} - \sqrt{x_0} \right) \times \frac{\sqrt{x_0 + dx} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + dx} + \sqrt{x_0}} = \\ &= \frac{x_0 + dx - x_0}{\sqrt{x_0 + dx} + \sqrt{x_0}} \sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Anche questa volta il risultato dipende da x_0 . Si tratta di un risultato indistinguibile dal risultato esatto. L'approssimazione si ottiene con le tecniche del capitolo 3. \square

Funzione reciproca

Teorema 4.7. Il differenziale della funzione reciproca $f(x) = \frac{1}{x}$ è $-\frac{dx}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, con $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Tesi: $df(x) \sim -\frac{dx}{x^2}$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + dx} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - dx}{x_0(x_0 + dx)} = \frac{-dx}{x_0^2 + x_0 dx} \sim -\frac{dx}{x_0^2}$$

Anche questa volta il valore del differenziale dipende da x_0 . Per semplicità, teniamo il risultato indistinguibile. \square

Differenziali problematici

Quest'ultimo calcolo ci porta un punto importante: dato che nel risultato x_0 si trova al denominatore, abbiamo un problema. Che succede se $x_0 = 0$?

Esempio 4.6. Calcola $df(x)|_{x=0}$, con $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$d\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=0} = \frac{1}{0+dx} - \frac{1}{0} = ?$$

La funzione è differenziabile $\forall x$, ma non per $x = 0$. Se $x \approx 0$ il differenziale diventa la differenza fra due infiniti, una forma di indecisione che non siamo in grado di risolvere. Il problema viene dal fatto che in $x = 0$, $f(x)$ non è definita.

Esempio 4.7. Differenzia la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$.

$$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} = ?$$

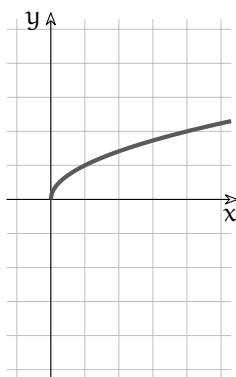
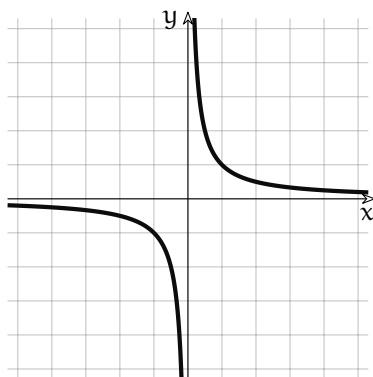
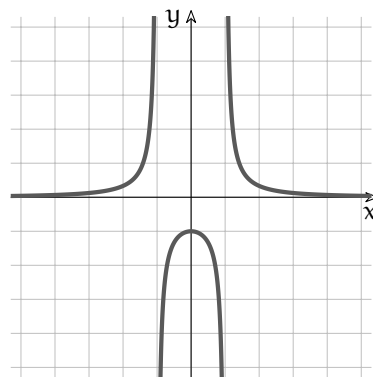
$$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=-1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{-2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} = ?$$

Questa volta i punti critici sono due. Poiché la funzione non è calcolabile per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$, non è calcolabile nemmeno il suo differenziale.

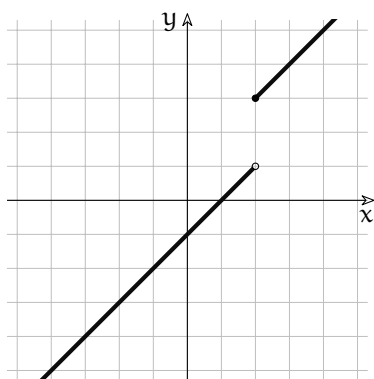
Nel piano cartesiano tracciamo il grafico delle funzioni degli ultimi tre esempi: $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2-1}$.

Si può osservare che $y = \sqrt{x}$, essendo definita per i valori $x \geq 0$, non può essere calcolata per esempio, se $x = -2$ e quindi nemmeno il suo differenziale ha senso in questo punto.

Gli altri due grafici mettono in evidenza questo problema: dove la funzione non è calcolabile, non esiste il punto che rappresenta la funzione nel piano cartesiano reale. Nel piano iperreale,

FIGURA 4.1: $y = \sqrt{x}$ FIGURA 4.2: $y = \frac{1}{x}$ FIGURA 4.3: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

puntando l'infinito con un telescopio, non riusciamo a focalizzare la differenza infinitesima fra due valori infiniti della funzione.



Consideriamo un tipo diverso di problema.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x < 2 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x)$ ha due rami e il grafico compie un salto per $x = 2$. Le differenze infinitesime calcolate a destra di tale punto saranno diverse da quelle calcolate a sinistra: i differenziali sono calcolabili ma non hanno uguali valori. Anche in questo caso $f(x)$ non è differenziabile per $x = 2$

Continuità e funzioni

Il tema della continuità è vasto e importante e viene trattato nei dettagli nel prossimo capitolo. Per ora ci limitiamo a considerazioni di carattere intuitivo.

Se una funzione è continua, ne puoi tracciare il grafico nel piano cartesiano senza staccare la matita dal foglio. Se ci fosse un punto (o più punti) di discontinuità, saresti obbligato a interrompere il disegno e riprenderlo da punti vicini.

Esempio 4.8. La funzione $f(x) = x$, che ha per grafico la retta $y = x$ è evidentemente una funzione continua: puoi tracciarne il grafico senza interruzioni nell'intervallo $(-M, M)$. Sono anche continue tutte le funzioni che hanno per grafico una retta, come per esempio $f(x) = -\frac{4}{5}x + 9$.

Quindi anche la funzione costante $f(x) = k$, che ha per grafico una retta orizzontale, è una funzione continua.

Esempio 4.9. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua ovunque in \mathbb{R} , tranne che per $x = 0$. Infatti se $x = 0$, $f(x)$ non è calcolabile, quindi nel piano cartesiano non puoi disegnare un punto che rappresenta il valore standard $(0; \frac{1}{0})$. Il punto è comunque visibile nel piano iperreale, con un telescopio.

Esempio 4.10. Per ragioni simili, sono discontinue in uno o più punti le funzioni (algebriche o trascendenti), per le quali occorra specificare condizioni di esistenza relative a questi punti. Così $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ è discontinua per $x = \pm 1$, mentre $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ è continua.

Dagli esempi si capisce che *la continuità delle funzioni è una condizione di carattere locale*, cioè per punti. Infatti si possono riconoscere dei punti di discontinuità di una funzione, non degli insiemi di discontinuità. Se ci si accorge che un punto $(x_0; f(x_0))$ è di discontinuità per $f(x)$, allora si dice: $f(x)$ è discontinua per $x = x_0$, cioè si indica solo la coordinata x che pone questo problema (non si usa dire: $f(x_0)$ è discontinua).

Esempio 4.11. La funzione $f(x) = \tan x$ è discontinua per $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$.

Definizione 4.5. Se una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo $[a; b]$, allora si dice continua in $[a; b]$.

□ **Osservazione** Ovviamente la definizione non cambia se l'intervallo è di tipo diverso.

Esempio 4.12. $f(x) = \ln x$ è definita per $x \in (0; M)$ ed è ivi continua.

4.4.2 Combinare differenziali

Nella sezione ?? e in altre ci siamo avvalsi di proprietà così naturali che non è stato necessario sottolinearle. Ma è meglio non lasciarcele sfuggire.

Differenziale del prodotto per una costante

Teorema 4.8. Se una funzione è moltiplicata per una costante, anche il suo differenziale risulta moltiplicato per la stessa costante.

Ipotesi: $f(x) = a \cdot g(x)$.

Tesi: $df(x) = a \cdot dg(x)$.

Dimostrazione.

$$df(x) = d[a \cdot g(x)] = a \cdot g(x + dx) - a \cdot g(x) = a \cdot [g(x + dx) - g(x)] = a \cdot dg(x).$$

□

Differenziale di una somma di funzioni

Teorema 4.9. Se una funzione è la somma (la differenza) di due funzioni, anche il suo differenziale sarà la somma (la differenza) dei due differenziali.

Ipotesi: $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$.

Tesi: $df(x) = df_1(x) \pm df_2(x)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x) &= d[f_1(x) \pm f_2(x)] = [f_1(x + dx) \pm f_2(x + dx)] - [f_1(x) \pm f_2(x)] = \\ &= [f_1(x + dx) - f_1(x)] \pm [f_2(x + dx) - f_2(x)] = df_1(x) \pm df_2(x) \end{aligned}$$

□

Esempio 4.13. Un generico polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una funzione quadratica composta di tre termini. Con le regole precedenti abbiamo: $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ e $df(x) = df_1 + df_2 + df_3$.

- ⇒ $f_1 = ax^2 \Rightarrow df_1 \sim 2axdx$;
- ⇒ $f_2 = bx \Rightarrow df_2 = bdx$
- ⇒ $f_3 = c \Rightarrow df_3 = 0$

Quindi $df(x) \sim 2axdx + bdx$. Il grafico della funzione è una parabola generica e il differenziale ci dice che l'incremento infinitesimo dx provoca un incremento (o un decremento) variabile sull'asse Y , che dipende dal punto x a partire dal quale si calcola dx .

Completiamo il quadro delle regole di calcolo con l'esame dei differenziali del prodotto e del rapporto di funzioni. Lo studente smart, che si fida un po' troppo delle analogie, potrebbe pensare: "siccome il differenziale di una somma è la somma dei differenziali e lo stesso avviene per la differenza, succederà una cosa simile anche per il prodotto e per il rapporto". Per (s)fortuna le cose a volte sono un po' meno smart.

Differenziale del prodotto di due funzioni

Questa volta, al posto della immarcescibile dimostrazione algebrica, ricorriamo alla geometria. Immaginiamo che le due funzioni, calcolate in un generico punto x , esprimano la base e l'altezza di un rettangolo: $b(x) = b$ sarà la base e $h(x) = h$ sarà l'altezza. L'area ovviamente si ottiene da $b(x) \cdot h(x) = A(x)$. Differenziare il prodotto $d[A(x)]$ vuol dire calcolare di quanto aumenta l'area del rettangolo, se i lati subiscono un incremento infinitesimo.

□ **Osservazione** Gli incrementi della base e dell'altezza possono essere diversi, perché $b(x)$ e $h(x)$ sono funzioni diverse, le quali possono reagire in modo diverso all'incremento dx .

Teorema 4.10. *Se una funzione è il prodotto di due funzioni, il suo differenziale sarà dato da una somma fra tre prodotti: il differenziale della prima funzione per la seconda più la prima funzione per il differenziale della seconda più il prodotto dei due differenziali.*

Ipotesi: $A(x) = b(x) \cdot h(x)$. Tesi: $dA(x) = db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x) + db(x) \cdot dh(x)$.

Dimostrazione. L'incremento infinitesimo di area è la zona colorata del disegno. È formato da tre parti:

- ⇒ un rettangolo sottile, verticale e sulla destra, di base infinitesima $db(x)$ e altezza $h(x)$;
- ⇒ un rettangolo orizzontale, in alto, di base $b(x)$ e altezza infinitesima $dh(x)$;
- ⇒ un rettangolino in alto a destra, di area $db(x)dh(x)$.

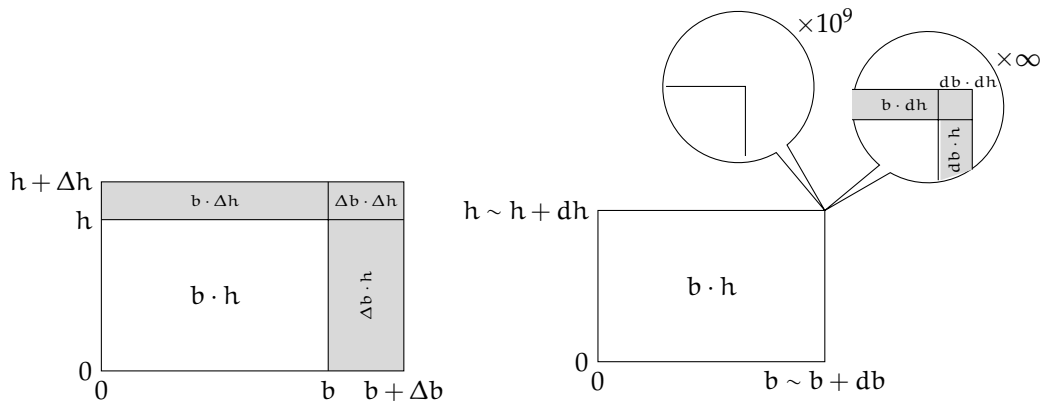


FIGURA 4.4: Incrementi finito e infinitesimo dell'area di un rettangolo

La descrizione geometrica rappresenta bene la tesi e per i nostri scopi è una prova sufficiente. \square

Dato che l'ultimo termine è un infinitesimo di ordine superiore, il risultato può essere approssimato alla sua parte principale, senza gravi danni: $dA(x) \sim db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x)$.

Differenziale del rapporto fra due funzioni

Teorema 4.11. *Se una funzione è data dal rapporto fra due funzioni, con il denominatore non nullo, il suo differenziale si ottiene calcolando la differenza fra due prodotti (il differenziale del numeratore per il denominatore meno il numeratore per il differenziale del denominatore) e dividendo il risultato per il quadrato del denominatore.*

Ipotesi: $h(x) = \frac{A(x)}{b(x)}$, con $b(x) \neq 0$.

Tesi: $dh(x) = \frac{dA(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot db(x)}{(b(x))^2}$

Dimostrazione. Ricorriamo alla geometria anche in questo caso.

la quale corrisponde allo gnomone infinitesimo dA , escluso il rettangolo destro infinitesimo, di area $h \cdot db$. Dunque:

$$dh(x) = d \left[\frac{A(x)}{b(x)} \right] = \frac{\left[dA(x) - \frac{A(x)}{b(x)} db(x) \right]}{b(x)} = \frac{dA(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot db(x)}{(b(x))^2}$$

\square

\square **Osservazione** Si chiama gnomone la figura, a forma di L rovesciata, che rappresenta la crescita dell'area di un rettangolo.

Questa volta, data $A(x) = b(x) \times h(x)$, $\frac{A(x)}{b(x)} = h(x)$ fornisce l'altezza h , fissato x . Ovviamente si spera che sia $b(x) \neq 0$.

Se cerchiamo $dh(x) = dh$, incremento infinitesimo di altezza, siamo costretti a calcolare $d\left[\frac{A(x)}{b(x)}\right]$, differenziale di un rapporto. Guardando il disegno, si tratta dell'altezza della fascia superiore colorata,

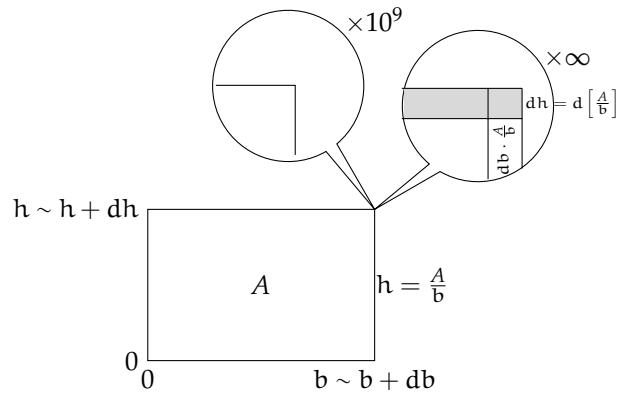


FIGURA 4.5: Incremento infinitesimo dell'altezza

Sintesi della sezione

Ci siamo limitati a calcolare solo alcuni differenziali elementari, attraverso esempi e dimostrazioni. Manca del tutto la trattazione dei differenziali delle funzioni trascendenti. Avremo modo di vedere anche questi nel corso della prossima sezione, dove quanto ottenuto fin qui viene utilmente ripreso e ampliato.

I risultati che abbiamo visto valgono sotto le ovvie ipotesi che si parli di funzioni continue e che i differenziali siano calcolabili per tutti i possibili x del dominio di tali funzioni. Unificando i simboli e restando all'essenziale, abbiamo:

1. $f = k \rightarrow df = 0$;
2. $f = x \rightarrow df = dx$;
3. $f = x^\alpha \rightarrow df \sim \alpha x^{\alpha-1} dx$;

4. $d(a \cdot f) = a df$

differenziale del prodotto per una costante;

5. $d(f \pm g) = df \pm dg$

differenziale di una somma o differenza;

6. $d(f \cdot g) \sim f \cdot dg + g \cdot df$

differenziale del prodotto;

7. $d\left(\frac{f}{g}\right) \sim \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$

differenziale del rapporto ($g \neq 0$).

dove k, a, α rappresentano delle costanti, mentre f e g sono funzioni continue.

Sulla scia delle applicazioni illustrate al termine del Cap.2, esaminiamo alcuni problemi facilmente risolvibili con l'aiuto dei differenziali.

4.4.3 Problemi con i differenziali

Esempio 4.14. Un triangolo equilatero ha l'altezza di 8 cm. Di quanto aumenta il suo perimetro, man mano che aumenta l'altezza? L'aumento è legato alla misura iniziale di h ?

Il perimetro è $2p = 3l$ e con il Teorema di Pitagora si ha: $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Quindi $l = \frac{2}{\sqrt{3}}h$ e $2p = 2\sqrt{3}h$. Incrementiamo l'altezza a partire da $h_0 = 8$ e ricaviamo il perimetro corrispondente.

$$d(2p)|_{h_0=8} = d(2\sqrt{3}h)|_{h_0=8} = 2\sqrt{3} \cdot (8 + dh) - 2\sqrt{3} \cdot 8 = 2\sqrt{3} \cdot dh.$$

Per ogni incremento infinitesimo dell'altezza, il perimetro aumenta di $2\sqrt{3}$. Si tratta di un incremento costante, che non dipende dalla misura iniziale dell'altezza. Infatti, se si ripete il calcolo scrivendo il simbolo h_0 al posto della sua misura 8, h_0 non compare nel risultato.

La soluzione può essere ricavata in modo più diretto, applicando le regole 4 e 2 della sintesi a pag.79.

Esempio 4.15. Di quanto aumenta il lato di un triangolo equilatero, man mano che aumenta la sua area? L'aumento è legato al valore iniziale del lato?

Dalla formula dell'area $A = \frac{b^2 h}{2}$ e dall'esempio precedente ($h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$), ricaviamo: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.

Differenziando, con l'aiuto delle regole 4 e 3 della sintesi a pag. 79, abbiamo:

$$d(A) = d\left(\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}d(l^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l \cdot dl + (dl)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l + dl) dl.$$

Questa volta la relazione con l'incremento del lato non è elementare: per ogni incremento infinitesimo del lato si ha un incremento di area pari a $\frac{\sqrt{3}}{4}(2l + dl)$, che dipende dalla misura iniziale del lato e dallo stesso incremento. Per gestire il risultato, occorre approssimare questo numero all'indistinguibile più vicino:

$$d(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l + dl) dl \sim \frac{\sqrt{3}}{2}l dl.$$

Da qui, applicando la formula inversa, si ottengono le risposte: $dl \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d(A)}{l}$.

□ **Osservazione** Una via più diretta per giungere alla soluzione potrebbe essere:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}A} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{A} \rightarrow dl = d\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{A}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}d(\sqrt{A})$$

A questo punto dobbiamo fermare il calcolo, perché sappiamo calcolare $d(\sqrt{x})$, ma non sappiamo ancora come calcolare $d(\sqrt{f(x)})$. Per farlo, occorre una conoscenza più approfondita della derivate.

4.5 Introduzione alla derivata

La derivata è un ente matematico conosciuto dalla metà del 1700, che da allora si applica utilmente allo studio di fenomeni naturali di ogni tipo.

Studieremo l'argomento puntando lo sguardo sulle funzioni e sui loro grafici nel piano cartesiano. Iniziamo dai grafici più semplici.

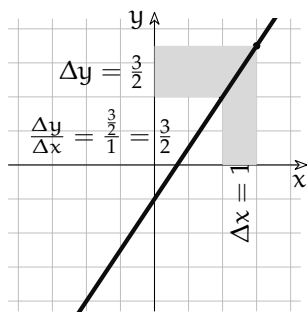
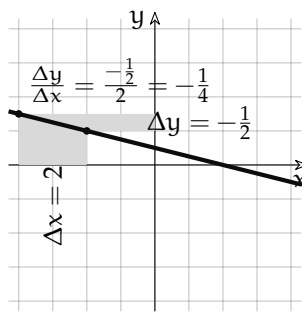
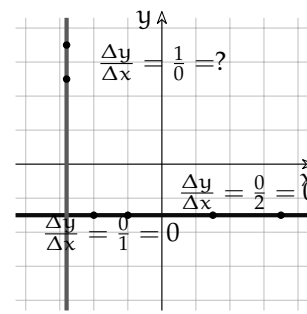
4.5.1 Pendenza di una retta

Sappiamo già calcolare la pendenza di una retta dalla semplice osservazione del suo grafico: si fissano sulla retta due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e si calcola il rapporto $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

È come se si volesse misurare la distanza verticale fra i due punti usando la loro distanza orizzontale come unità di misura. Nel caso della retta r , $m = \frac{3}{2}$ e si potrebbe dire: "un punto che si muove sulla retta, se si sposta di due quadretti in orizzontale ne guadagna (o perde) tre in verticale.

Un punto che scorre sulla retta orizzontale, non subisce alcuna variazione lungo l'asse y e per questo $m = 0$; al contrario per la retta verticale le variazioni sono solo verticali e la pendenza è infinita.

Sintetizziamo la formula come rapporto fra differenze: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il simbolo m ci

FIGURA 4.6: $y = \frac{3}{2}x - 1$ FIGURA 4.7: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ FIGURA 4.8: $y = -\frac{3}{2}x - 2,8$

riporta all'equazione di una retta generica in forma esplicita $y = mx + q$, dove m rappresenta appunto il coefficiente angolare, cioè l'inclinazione o pendenza.

□ **Osservazione** Secondo l'uso del capitolo precedente, le indicazioni con la lettera maiuscola Δ (Δx , Δy) si riferiscono a *quantità finite*, cioè a numeri standard.

Rapporto incrementale

C'è un fatto importante: per calcolare la pendenza di una retta, la scelta dei due punti è indifferente. Possono essere molto vicini o molto lontani, scambiati l'uno con l'altro o presso l'origine, oppure no: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è sempre lo stesso, come è giusto che sia per una retta. Da $x_B - x_A = \Delta x$ ricaviamo banalmente $x_B = x_A + \Delta x$, cioè nel piano cartesiano B si colloca a destra (se $\Delta x \geq 0$) di A di una quantità finita, grande o piccola che sia. Δx , Δy sono anche chiamati *incrementi* e quindi...

Definizione 4.6. Si dice *Rapporto Incrementale* (R.I.) il rapporto degli incrementi, cioè la quantità R.I. = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si tratta di una quantità finita, calcolabile se $\Delta x \neq 0$.

Il Rapporto Incrementale, calcolato su una retta fornisce la sua pendenza ed è un valore costante, come abbiamo visto.

Ma il calcolo si può applicare a qualsiasi funzione, anche a quelle che nel piano cartesiano sono rappresentate da curve. Allora le cose cambiano.

Esempio 4.16. I prossimi grafici appartengono alla stessa funzione.

Scegliamo alcuni punti sulla curva e mettiamo in evidenza gli intervalli che consentono il calcolo del rapporto incrementale, in un caso, e la pendenza delle secanti nell'altro.

Rapporti Incrementali:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 5}{-2 - (-3.5)} = \frac{-3}{1.5} = -2 & \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{BC} &= \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3 - 2}{0 - (-2)} = \frac{1}{2} \\ \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{CD} &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3.8 - 3}{2.4 - 0} = \frac{0.8}{2.4} = \frac{1}{3} & \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{DE} &= \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{1 - 3.8}{3.5 - 2.3} = \frac{-2.8}{1.2} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

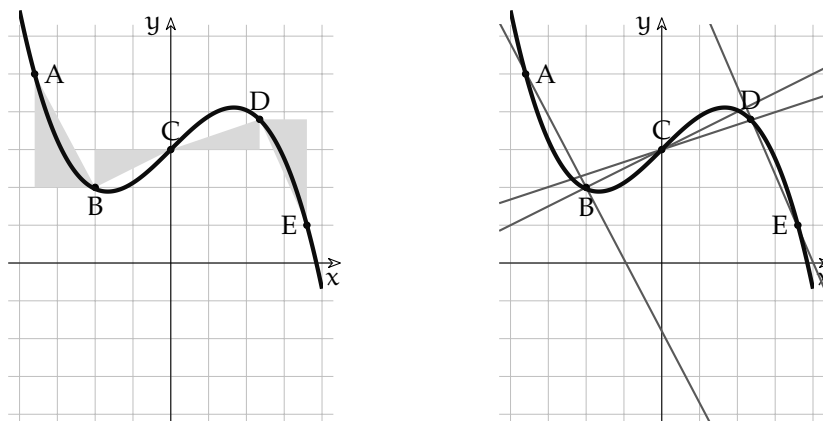


FIGURA 4.9: Rapporti incrementali in una curva e secanti.

Pendenze.

$$m_{AB} = -2 \quad m_{BC} = \frac{1}{2} \quad m_{CD} = \frac{1}{3} \quad m_{DE} = -\frac{7}{3}$$

I calcoli confermano che se il grafico è una curva, il Rapporto Incrementale, calcolato fra varie coppie di punti, ha valori diversi. Il R.I. cambia a seconda della coppia di punti fissati sulla curva.

Se si traccia la retta che unisce la coppia di punti, ne risulta una secante alla curva.

In conclusione, si hanno le seguenti proprietà:

1. Il R.I. è un numero finito e esiste solo se $\Delta x \neq 0$.
2. Il R.I. fra le coppie di valori di una funzione è a sua volta una funzione, che dipende dalla coppia scelta.
3. La funzione è costante se applicata al grafico di una retta. In questo caso il R.I. calcola la sua pendenza.
4. In generale, R.I. calcola la pendenza della retta secante che unisce due punti del grafico.

Rapporto differenziale

Esempio 4.17. Fissiamo su una curva due punti: uno fisso (A) e l'altro mobile P , cioè in grado di spostarsi lungo la curva dalla posizione più lontana P_1 , alla più prossima ad A , cioè oltre P_7 , fin quasi a sovrapporsi con A .

Tracciamo le secanti che uniscono A con le varie posizioni di P_n . Man mano che P si avvicina ad A , la secante che li unisce tende ad allinearsi alla tangente ideale.

Quando P è così vicino ad A che la loro distanza è $\overline{AP} < \frac{1}{n}$, $\forall n$, siamo nel campo degli infinitesimi: cambia la natura del Rapporto Incrementale che avevamo imparato a calcolare. Il R.I. si trasforma da un rapporto fra quantità finite a un rapporto fra infinitesimi, quindi non possiamo essere certi su quale sia il tipo del risultato che fornisce.

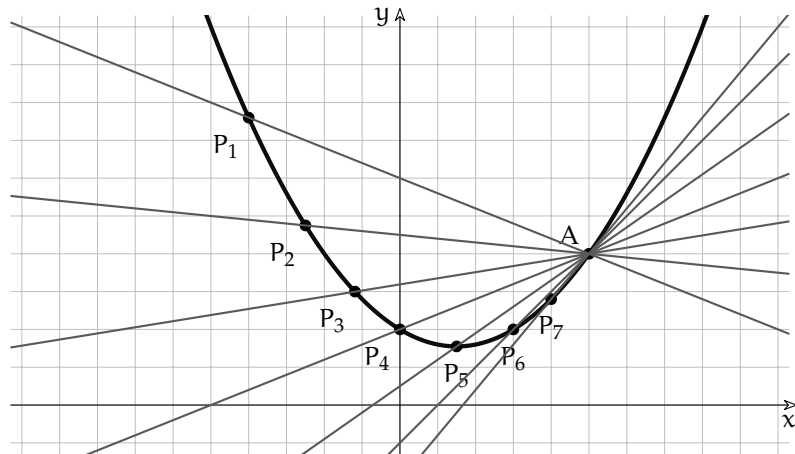


FIGURA 4.10: Dalle secanti alla tangente.

Se escludiamo il caso $dx = 0$ (P_n coinciderebbe con A) e se il rapporto dà un risultato finito, otterremo la pendenza della secante fra i due punti infinitamente vicini $A(x_A; y_A)$ e $P_n(x_A + dx; f(x_A + dx))$, quindi di una retta infinitamente vicina alla tangente, cioè distinta da essa solo se guardata con il microscopio a ingrandimento infinito.

Definizione 4.7. Si dice Rapporto Differenziale della funzione $f(x)$, relativo a x_0 il rapporto $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$ fra il differenziale della funzione e quello della variabile, calcolati nel punto x_0 .
 $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$, con $dx \neq 0$.

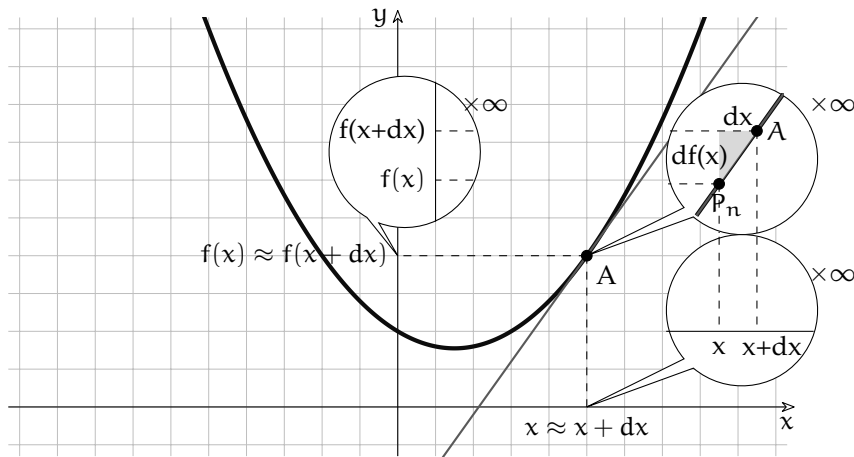


FIGURA 4.11: Secante per due punti infinitamente vicini.

Esempio 4.18. La curva della Fig.12 rappresenta la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2$. Calcoliamo la pendenza della secante che passa per A (5; 4) e per un altro punto infinitamente vicino.

La funzione è visibilmente continua nel punto A e il differenziale per $x = x_A$, secondo le regole della sezione precedente, è:

$$\begin{aligned} d(f(x))\big|_{x=5} &= d\left(\frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2\right)\bigg|_{x=5} = d\left(\frac{x^2}{5}\right)\bigg|_{x=5} - d\left(\frac{3}{5}x\right)\bigg|_{x=5} + d(2)\bigg|_{x=5} = \\ &= \frac{1}{5}(2x dx + (dx)^2)\bigg|_{x=5} - \frac{3}{5}dx\bigg|_{x=5} + 0 = \frac{2}{5}x\bigg|_{x=5} dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \\ &= \frac{2}{5}5dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 2dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{7}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 \end{aligned}$$

Raccogliendo dx nel differenziale della funzione, il rapporto differenziale è:

$$\frac{d(f(x))}{dx}\bigg|_{x=5} = \frac{\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx\right) dx}{dx} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx.$$

Come si vede, la pendenza di questa secante è un numero finito del tipo $a + \varepsilon$, che dipende sia dal valore $x_A = 5$, sia dall'infinitesimo dx che compare nel risultato. Si tratta dunque di una pendenza infinitamente vicina al valore $m = \frac{7}{5}$.

Esempio 4.19. Ripetiamo il calcolo precedente, con riferimento all'ascissa del vertice $x_V = \frac{3}{2}$ (per il valore dell'ascissa può essere di aiuto la lettura del grafico, se per caso nel tempo si fosse attenuato il ricordo della regola: $x_V = -b/2a$).

$$\begin{aligned} d(f(x))\big|_{x=3/2} &= \frac{2}{5}x\bigg|_{x=3/2} dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 2} dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \\ &= \frac{3}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 0 + \frac{1}{5}(dx)^2. \end{aligned}$$

Quindi il rapporto differenziale:

$$\frac{d(f(x))}{dx}\bigg|_{x=3/2} = \frac{\frac{1}{5}(dx)^2}{dx} = \frac{1}{5}dx.$$

La secante per punti infinitamente vicini al vertice della parabola differisce dalla retta orizzontale per un infinitesimo, cioè è infinitamente vicina alla retta orizzontale.

□ **Osservazione** La pendenza calcolata nell'esempio 4.18 è $m \approx \frac{7}{5}$, mentre in quest'ultimo esempio 4.19 è $m \approx 0$. Questo conferma che m cambia a seconda del punto della curva: $m = m(x)$.

Esempio 4.20. In quale punto del piano cartesiano la parabola precedente è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale?

Risposta: poiché solo la retta $y = x$ ha in qualsiasi suo punto l'inclinazione richiesta dal problema, occorre cercare in quale punto la parabola risulta inclinata come la retta, cioè ha lo stesso coefficiente angolare. È chiaro che non si può calcolare il coefficiente angolare di una parabola, ma si può immaginare che nel punto desiderato esista una retta tangente che risponde alle nostre esigenze. Cerchiamo quindi in quale punto, almeno approssimativamente, si possa disegnare una retta che ha $m = 1$ e che quasi coincida con la parabola.

Utilizziamo i calcoli precedenti e teniamo incognita x , dato che conosciamo già la pendenza

desiderata:

$$\frac{d(f(x))}{dx} \Big|_{x=?} = 1 \rightarrow \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}dx - \frac{3}{5} = 1 \rightarrow \frac{2}{5}x = 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}dx \rightarrow x = \frac{8 - dx}{5} = \frac{8 - dx}{5}.$$

Il punto in questione ha coordinata $x = 4 - \frac{1}{2}dx \approx 4$.

4.6 Derivata: definizione

Gli esercizi precedenti sono stati risolti con esattezza. Purtroppo, però, il rapporto differenziale ci dà le soluzioni più semplici solo in pochi casi, praticamente inutili, cioè quando si applica alle funzioni polinomiali di primo grado (le rette nel piano cartesiano). In tutti gli altri casi il risultato iperreale contiene infinitesimi che possono essere scomodi da gestire negli sviluppi successivi.

Esempio 4.21. Proseguendo con l'esempio 4.18, calcoliamo in due modi, esatto e approssimato, la coordinata y del punto in questione:

$$\begin{aligned} \text{Calcolo esatto: } x = 4 - \frac{1}{2}dx &\rightarrow y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2 = \frac{(4 - \frac{1}{2}dx)^2}{5} - \frac{3}{5}(4 - \frac{1}{2}dx) + 2 = \\ &= \frac{1}{5} \left(16 - dx + \frac{1}{4}(dx)^2 \right) - \frac{12}{5} + \frac{3}{10}dx + 2 = \dots = \frac{14}{5} + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{20}(dx)^2 \approx \frac{14}{5} = 2,8 \end{aligned}$$

$$\text{Calcolo approssimato: } x \approx 4 \rightarrow y \approx \frac{4^2}{5} - \frac{3}{5}4 + 2 = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} + 2 = \frac{14}{5} = 2,8.$$

È chiaro che la seconda linea di calcoli è molto più gestibile della prima e vorremmo poter avere sempre la comodità di una gestione facilitata.

Esiste una tecnica da applicare al risultato esatto iperreale per trasformarlo nel numero reale più vicino? Se esiste, possiamo guadagnare in agilità di calcolo, senza perdere troppo in precisione.

Definizione 4.8. La *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$ è, se esiste, la parte standard del rapporto differenziale della funzione, calcolato nello stesso punto. La derivata si indica con $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \text{st} \left(\frac{d(f(x))}{dx} \Big|_{x=x_0} \right).$$

La derivata, cioè l'applicazione della funzione $\text{st}()$ al rapporto differenziale, soddisfa le nostre esigenze: fornisce la migliore approssimazione reale del risultato ottenuto con il rapporto differenziale. La differenza fra questo e la derivata vale uno o più infinitesimi di ordine superiore, che nella maggior parte dei casi sono trascurabili.

$$\frac{d(f(x))}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0) \rightarrow f'(x_0) \approx \frac{d(f(x))}{dx} \Big|_{x=x_0}.$$

Significato della derivata

L'operazione di derivazione ha uno scopo molto più importante dell'indubbia comodità di fornire un risultato privo di infinitesimi: essa consente di calcolare il tasso di variazione di una funzione in un dato punto. Per tasso di variazione non si intende semplicemente la differenza

fra due valori prossimi della funzione $df(x)$, ma la misura di tale differenza, ottenuta usando come unità di misura dx , cioè confrontandola con la variazione della variabile.

Dal punto di vista geometrico, se si considera il grafico della funzione nel piano cartesiano iperreale, la derivata in un punto misura il tasso di crescita della funzione lungo l'asse Y rispetto alla variazione infinitesima lungo l'asse X , quindi misura la pendenza della tangente al grafico in quel punto. Queste osservazioni sono la conseguenza del fatto che la derivata di una funzione in un punto è un numero standard.

□ **Osservazione** L'operazione di derivazione è conosciuta dai tempi di Leibniz e di Newton, più o meno nei termini che qui sono stati esposti. Il problema attorno al quale i matematici di quell'epoca concentravano i loro sforzi era relativo alle variazioni: le variabili erano chiamate *quantità fluenti* e le variazioni di queste erano dette *flussioni*. Calcolare una velocità, per esempio, era calcolare il rapporto fra la flussione dello spazio rispetto alla flussione del tempo.

Nomi per la derivata

Il nome *derivata* per indicare il calcolo che abbiamo descritto ha origini storiche. Si è diffuso ovunque (derivative, derivada, dérivée, ...) anche se non rende pienamente il significato di ciò che rappresenta. Se ne potrà intuire la ragione in un capitolo successivo, quando parleremo anche di funzioni primitive.

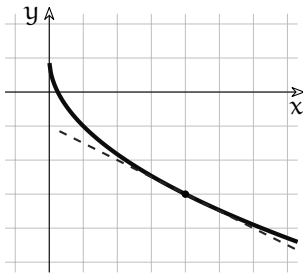
Sempre per ragioni storiche, si sono diffusi vari simboli che rappresentano l'operazione di derivazione:

1. $f'(x_0)$ è il simbolo per il risultato della derivazione di f per $x = x_0$: semplice e sintetico;
2. $D[f(x)]$ indica la formula della derivazione di f , per es. $D[5x\sqrt[3]{x^2}] = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{10x}{3\sqrt[3]{x}}$;
3. \dot{f} equivale a f' ; si usa in alcuni corsi universitari;
4. $\frac{d}{dx}f(x)$ è come $f'(x)$: si pone in evidenza che si tratta di una rapporto con dx ;
5. $\frac{df(x)}{dx}$ si trova spesso nei libri come se fosse esattamente uguale a $f'(x)$. Sottolineamo che sono due cose diverse. Nella maggior parte dei casi quest'uguaglianza si può accettare, trattandosi di quantità infinitamente vicine, anzi indistinguibili. Per praticità, potremo anche noi seguire quest'uso, specificando la distinzione solo quando sarà necessario.

Derivate facili e meno facili

Nella definizione di derivata troviamo un inciso essenziale: *se esiste*. Significa che la derivata potrebbe anche non esistere, cioè non essere calcolabile? Vediamo alcuni esempi di calcoli che si portano a termine facilmente ed altri più problematici.

Esempio 4.22. Calcola $f'(4)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.



Si richiede la derivata di $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ nel punto $(4; f(4))$, che corrisponde, nel grafico, alla pendenza della retta tangente alla curva, per $x = 4$. Cioè dobbiamo calcolare:

1. il differenziale della funzione;
2. il rapporto fra questo e dx per $x = 4$;
3. la parte standard del risultato precedente.

Lo svolgimento dei calcoli:

1. calcolare il differenziale della funzione: dalle regole apprese sui differenziali (pag.73) sappiamo che

a) il differenziale di una differenza è la differenza dei differenziali:

$$d(1 - \sqrt{x}) = d(1) - d(\sqrt{x});$$

b) il differenziale di una costante è nullo: $d(1) = 0$;

c) il differenziale del prodotto fra una costante e una funzione è $d(kf(x)) = kdf(x)$,

$$\text{quindi: } d(2\sqrt{x}) = 2 \frac{dx}{(\sqrt{x} + dx + \sqrt{x})} \sim \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Per cui: } d(1 - 2\sqrt{x}) \sim \left(0 - \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

2. calcolare il rapporto fra questo e dx nel punto richiesto:

$$\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=4} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=4} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2};$$

3. calcolare la parte standard del risultato: la parte standard di un numero indistinguibile da $-\frac{1}{2}$ è semplicemente: $\text{st}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

La retta tangente in $(4; f(4))$ ha pendenza pari a $-\frac{1}{2}$.

Con le regole già date sui differenziali il calcolo è privo di difficoltà, non sembra che la derivata per questa funzione possa creare problemi.

Esempio 4.23. Calcola $f'(0)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.

Riutilizziamo i calcoli precedenti.

$$1. d(1 - 2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$2. \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=0} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{0}} = \dots?$$

3. ?

Una frazione nulla al denominatore non ha senso, il rapporto differenziale non è calcolabile e la derivata non esiste.

Cerchiamo allora di capire cosa succede se il radicando è un infinitesimo non nullo $\varepsilon > 0$, quindi infinitamente vicino a 0.

Esempio 4.24. Calcolare $f'(\varepsilon)$, sempre per $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.

$$1. d(1 - 2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

2. $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} = \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} \sim -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = -M$ (con $\varepsilon, M > 0$);
3. $\text{st}\left(\frac{d(f(x))}{dx}\Big|_{x=\varepsilon}\right) = \text{st}(-M) = ?$

□ **Osservazione** $-M$ è un infinito negativo perché ε si suppone positivo. Non avrebbe senso, comunque, fare un tentativo con ε negativo, perché la radice quadrata di numeri negativi (reali e iperreali) non è definita.

La parte standard di un numero infinito non esiste. La derivata non esiste, quindi la pendenza della tangente per $x = 0$ non può essere calcolata.

Esiste però la pendenza della retta secante fra i due punti infinitamente vicini $(0; f(0) = 1)$ e $(\varepsilon; f(\varepsilon))$. Infatti il rapporto differenziale appena calcolato approssima questa pendenza.

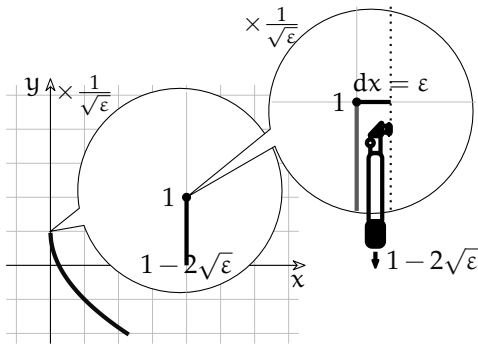
Vediamo nel dettaglio l'equazione di questa retta, con la formula della retta passante per i due punti: $A(0; 1)$ e $B(\varepsilon; f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon})$.

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \rightarrow \frac{x - 0}{\varepsilon - 0} = \frac{y - 1}{1 - 2\sqrt{\varepsilon} - 1} \rightarrow \frac{x}{\varepsilon} = \frac{y - 1}{-2\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow y = \frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}x + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

La pendenza di questa secante è $m = \frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

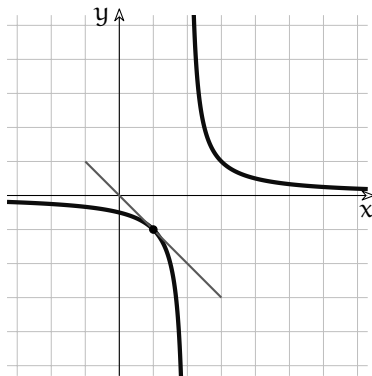
La frazione ha senso per qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi si deve pensare che se x è un infinitesimo sempre più prossimo a 0, m diventa sempre più negativa: la retta accentua sempre più la sua inclinazione verso il basso fino ad assumere una direzione verticale, quando diventerà tangente in $(0; 1)$.

Come possiamo visualizzare la pendenza della secante per $x \approx 0$?



In realtà non possiamo. Infatti se $dx = \varepsilon$ abbiamo $f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$. Realizziamo un primo microscopio con ingrandimento infinito, pari a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, così $df(x)$ può essere visualizzata con un tratto verticale verso il basso, a partire dal punto $(0; 1)$. Ma l'ingrandimento non è sufficiente per cogliere $dx = \varepsilon$, infinitesimo di ordine superiore, quindi troppo piccolo. Se poi applichiamo un secondo microscopio che visualizza dx , allora $df(x)$ assume lunghezza infinita e non può essere valutato. Nel punto $(0; 1)$ la tangente (linea tratteggiata) è verticale.

Esempio 4.25. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{x-2}$ calcola le derivate $f'(1)$ e $f'(2)$.



Per le regole che presto approfondiremo, $d[(x-2)^{-1}] = d(x^{-1})$ perciò possiamo fare riferimento al teorema pag.74.

$$\begin{aligned} 1. \quad d(f(x)) &= d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\frac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx}; \\ 2. \quad \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right) \Big|_{x=1} &= \left(\frac{-\frac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx}}{dx}\right) \Big|_{x=1} = \\ &= -\frac{1}{1-dx}; \\ 3. \quad \text{st}\left(-\frac{1}{1-dx}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Per $x = 1$, la tangente ha pendenza $m = -1$.

Vediamo ora la seconda risposta.

$$\begin{aligned} 1. \quad d(f(x)) &= d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\frac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx}; \\ 2. \quad \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right) \Big|_{x=2} &= \left(\frac{-\frac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx}}{dx}\right) \Big|_{x=2} = -\frac{1}{0-0dx} = ?; \\ 3. \quad &\text{è inutile calcolare la parte standard di un numero privo di senso.} \end{aligned}$$

Cosa è successo nel secondo caso? Che la funzione è discontinua per $x = 2$. Lo rende evidente il grafico, ma sarebbe stato meglio, prima ancora di disegnarlo, studiare l'insieme di definizione e evitare calcoli inutili. Infatti dobbiamo ricordarci che il differenziale è calcolabile solo nei punti di continuità, di conseguenza il discorso vale anche per la derivata.

Esempio 4.26. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{2}|x-2| + 2$ calcola le derivate $f'(0)$, $f'(4)$ e $f'(2)$.

La funzione contiene un valore assoluto e può essere più semplice pensarla come se fosse divisa in due rami:

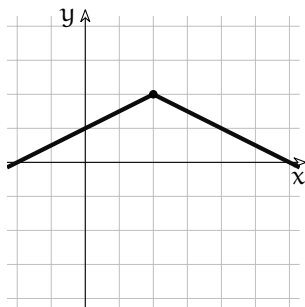


FIGURA 4.12:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}|x-2| + 2 = \\ &= \begin{cases} \frac{x-2}{2} + 2 & \text{per } x-2 < 0 \\ -\frac{(x-2)}{2} + 2 & \text{per } x-2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{per } x < 2 \\ -\frac{x}{2} + 3 & \text{per } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si tratta di due semirette che si uniscono in $(2; 2)$. L'equazione di ciascuna di loro è una funzione lineare e calcolare le derivate $f'(0)$ e $f'(4)$ è inutile: ne ricaveremmo comunque la pendenze delle semirette, cioè $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $f'(4) = -\frac{1}{2}$.

Il calcolo di $f'(2)$ invece è più interessante:

Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } x < 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{per } x > 2 \end{cases}$. Quale è la pendenza giusta della tangente per $x = 2$, nel

punto cioè dove il grafico cambia pendenza all'improvviso?

Tutto dipende dal differenziale e dal rapporto differenziale. La funzione è continua, perciò $df(x)$ è sempre calcolabile.

Immagina $\frac{f(2+dx) - f(2)}{dx}$. Se dx è un qualsiasi infinitesimo positivo, siamo nel ramo destro del grafico e il rapporto risulta negativo. Al contrario, se $dx < 0$ siamo nel ramo sinistro e il rapporto è positivo: la parte standard del rapporto differenziale relativa al punto in cui $x = 2$ non è unica, quindi non esiste. Di conseguenza la derivata non esiste.

Da tutti questi esempi impariamo che per poter calcolare la derivata:

1. $f(x)$ deve essere continua nel punto desiderato ed è una condizione necessaria per poter derivare (ma non sufficiente);
2. il rapporto differenziale deve essere un numero finito;
3. il risultato deve essere indipendente dalla scelta di dx , cioè deve valere $\forall dx$;

□ **Osservazione** Inoltre abbiamo visto un altro fatto importante: la derivata ha un risultato in genere diverso a seconda del valore x_0 per il quale viene calcolata, cioè varia al variare di x_0 . Poiché se si fissa x_0 il risultato, se esiste, è unico allora la derivata di una funzione è a sua volta una funzione.

Definizione 4.9. Una funzione per la quale la derivata è calcolabile $\forall x_0$ del suo dominio si dice funzione derivabile.

□ **Osservazione** Una funzione derivabile è sicuramente continua, mentre il contrario non vale.

4.7 Derivare funzioni algebriche

Sistemate le questioni preliminari, passiamo al calcolo: impariamo a derivare. Nei casi semplici ci avvarremo di quanto visto a proposito dei differenziali, ma, per le funzioni non trattate allora, dovremo calcolare anche questi. Al termine, raccoglieremo i risultati utili in un prospetto riassuntivo.

Immaginiamo che le funzioni da derivare siano derivabili $\forall x$ dell'insieme di definizione, per cui la derivata di f nel generico punto $(x; f(x))$ sarà $f'(x)$.

Grazie al capitolo 4.4.2, sappiamo già come differenziare alcune funzioni algebriche: da quelle regole e dalla definizione di derivata ...deriva direttamente quanto segue.

Teorema 4.12. La derivata di una funzione costante è 0: $D[k] = 0$.

Ipotesi: $f(x) = k$.

Tesi: $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 0$

□

Teorema 4.13. La derivata della funzione identica è 1: $D[x] = 1$.

Ipotesi: $f(x) = x$.

Tesi: $f'(x) = 1$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = \varepsilon = dx$, quindi il rapporto differenziale è 1 e così anche la sua parte standard. \square

\square **Osservazione** $m = 1$ è quindi anche la pendenza della bisettrice $y = x$, cosa ormai risaputa.

Teorema 4.14. La derivata della funzione quadratica è: $D[x^2] = 2x$.

Ipotesi: $f(x) = x^2$.

Tesi: $f'(x) = 2x$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 2x dx + (dx)^2$ e il rapporto differenziale è $2x + dx$ da cui, applicando la definizione di derivata, ... \square

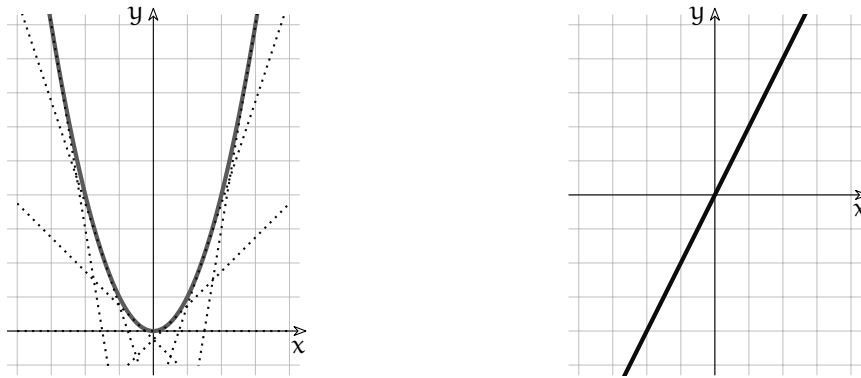


FIGURA 4.13: $y = x^2$ e la pendenza $y = m(x) = 2x$ delle sue tangenti.

Iniziamo dal ramo sinistro del grafico: al crescere di x , la curva e le sue tangenti, indistinguibili da essa nei punti di tangenza, passano da un'inclinazione fortemente verso il basso ($m < 0$) alla direzione orizzontale, nel vertice. Per $x > 0$, poi, l'inclinazione aumenta progressivamente. Il progresso della pendenza delle tangenti è costante: per questo motivo il grafico di $y = m(x)$ è una retta per l'origine.

\square **Osservazione** Nota che la funzione derivata di una funzione quadratica è una funzione lineare. Detto con eccessiva sintesi: la derivata di una parabola è una retta. Con più precisione: la pendenza delle tangenti a una parabola varia come varia la y rispetto alla x in una retta.

Teorema 4.15. La derivata della generica funzione potenza è: $D[x^n] = nx^{n-1}$.

Ipotesi: $f(x) = x^n$.

Tesi: $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = nx^{n-1}dx + \delta(x)$ e, applicando la definizione di derivata, ... \square

\square **Osservazione** Ripetendo l'osservazione a pag.73 relativa a queste funzioni, il teorema 4.15 è del tutto generale: si applica con qualsiasi esponente reale. Vale quindi anche per le funzioni radicali di qualsiasi indice e per le funzioni razionali fratte, come esemplifichiamo nei prossimi due casi, molto comuni.

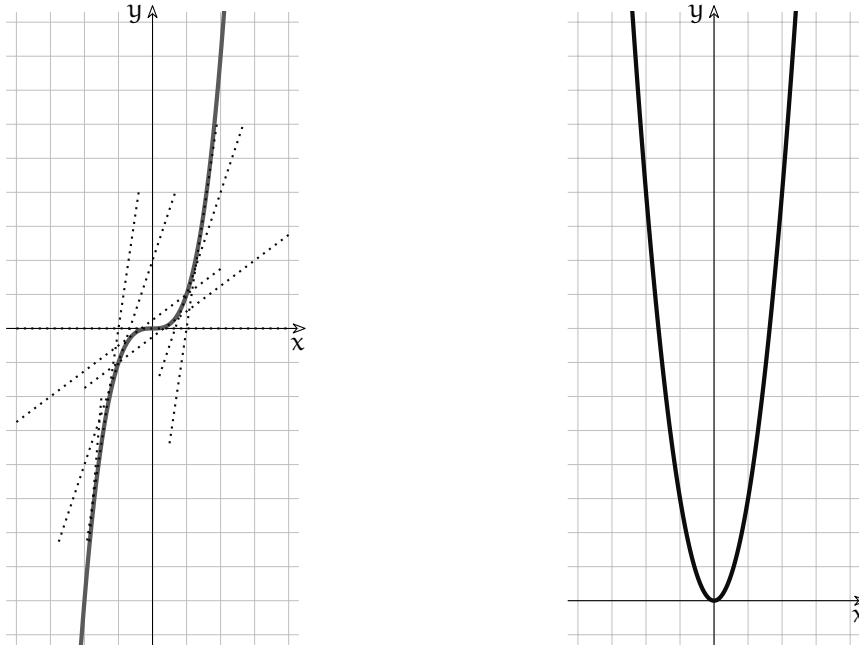


FIGURA 4.14: $y = x^3$ e la pendenza $y = m(x) = 3x^2$ delle sue tangenti.

Come esempio di derivata della funzione potenza, consideriamo $f(x) = x^3$ e il suo grafico nel piano cartesiano. I due rami del grafico sono simmetrici rispetto all'origine e quindi lo sono anche le pendenze delle tangenti. Considerando le x crescenti, quindi da sinistra verso destra, le pendenze delle tangenti sono sempre positive, all'inizio molto accentuate, poi diminuiscono fino a $m = 0$. Oltre l'origine, riprendono a crescere, in maniera sempre più accentuata. Il grafico di $y = m(x) = 3x^2$ ha infatti la forma di una parabola simmetrica rispetto all'asse Y .

Corollario 4.16. La derivata della funzione radice quadrata è: $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, con la restrizione $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \neq 0$.

Tesi: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \frac{dx}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$\begin{aligned} \text{st} \left(\frac{dx}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \right) &= \text{st} \left(\frac{1}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\text{st}(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\text{st}(\sqrt{x+dx}) + \text{st}(\sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \square \end{aligned}$$

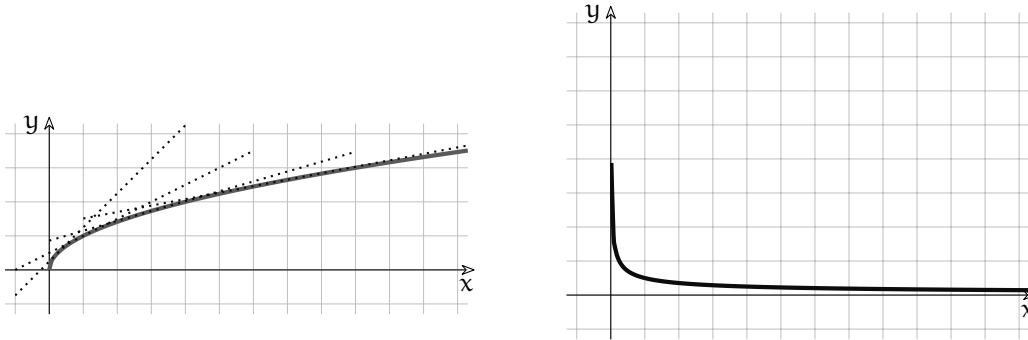


FIGURA 4.15: $y = \sqrt{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ delle sue tangenti.

Le rette tangenti ai punti vicini all'origine hanno una pendenza elevata, che si attenua gradualmente man mano che x aumenta, fino ad assestarsi quasi orizzontalmente.

Corollario 4.17. La derivata della funzione reciproca è: $D \left[\frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{x^2}$.

Ipotesi: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Tesi: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \frac{-dx}{x(x+dx)}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$\text{st} \left(\frac{-dx}{dx(x+dx)} \right) = \frac{-1}{\text{st}(x+dx)} = \frac{-1}{\text{st}(x) \text{st}(x+dx)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}. \quad \square$$

□ **Osservazione** Ovviamente, applicando alla lettera il teorema sulla derivata delle funzioni potenza si ottengono gli stessi risultati esposti in questi due ultimi corollari.

4.8 Regole di derivazione

Possiamo applicare i teoremi precedenti a casi meno elementari, cioè a funzioni algebriche che contengono somme, prodotti e quozienti di funzioni elementari.

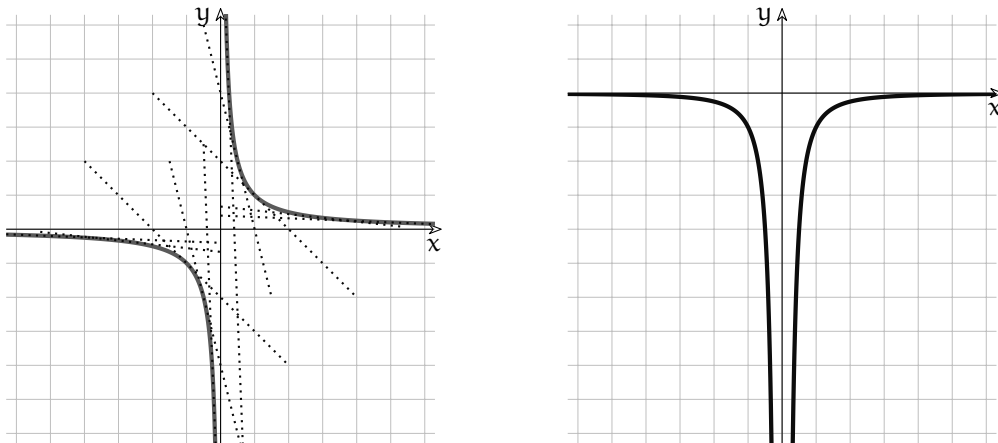


FIGURA 4.16: $y = \frac{1}{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \frac{-1}{x^2}$ delle sue tangenti.

Esempio 4.27. Derivare la funzione $f(x) = 3x - \frac{3}{x}$ in $x_0 = 3$

Si tratta di una funzione nuova, ma è facile riconoscere che è formata dalla somma (algebraica) di due funzioni e ciascuna di queste è data dal prodotto fra la costante 3 e una funzione appena trattata. Perciò:

$$D[3x] = 3 \cdot D[x] = 3 \cdot 1 = 3; \quad D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 \cdot D\left[\frac{1}{x}\right] = 3 \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2};$$

$$f'(x) = D\left[3x - \frac{3}{x}\right] = D[3x] - D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 - \frac{-3}{x^2} = 3 + \frac{3}{x^2};$$

$$f'(3) = 3 + \frac{3}{9} = 10.$$

Senza troppi problemi, abbiamo dato per scontato che

1. La derivata del prodotto tra una costante e una funzione è il prodotto fra la costante e la derivata della funzione:
 $D[kf(x)] = kD[f(x)].$
2. La derivata della somma algebrica fra due funzioni è la somma algebrica delle due derivate:
 $D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)].$

Da dove derivano queste certezze? Basta tornare alle regole di composizione dei differenziali (pag.76) per averne la conferma.

Esempio 4.28. Deriva la funzione che nel piano cartesiano è rappresentata dalla retta $y = x + 9$.
 $D[x + 9] = 1.$

Sempre in riferimento a quanto appreso sui differenziali e vista la definizione di derivata e le proprietà della parte standard, giustifichiamo facilmente anche le regole 3 e 4:

3. La derivata del prodotto fra due funzioni è la somma fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) più la prima funzione (non derivata) per

la derivata della seconda:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

4. La derivata del quoziente fra due funzioni è la frazione che ha per denominatore il quadrato del divisore e per numeratore la differenza fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) meno la prima funzione (non derivata) per la derivata della seconda:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Esempio 4.29. Calcola la derivata del prodotto $f(x) = x\sqrt{x}$.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}.$$

Fin qui l'applicazione della regola. Ma il risultato si può scrivere in forma più compatta, perché $\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

In realtà per fare questo calcolo non avremmo bisogno della regola del prodotto, poiché $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Puoi quindi applicare il teorema 4.15 e controllare il risultato.

Esempio 4.30. Derivare $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Seguendo la regola n.4: } f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ma guarda che combinazione: abbiamo ottenuto la derivata della radice! Allora la funzione di partenza è equivalente a una radice? (Ad essere precisi, non esattamente. Infatti ...)

Esempio 4.31. Sappiamo già che $D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$. Mettiamo alla prova ancora una volta la

$$\text{regola n.4: } f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \dots$$

Esempio 4.32. Ora finalmente un calcolo che si può svolgere solo con la regola n.4. Derivare

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-x+4}.$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^3-x+4) - (x+2)(3x^2-1)}{(x^3-x+4)^2}. \text{ Fin qui l'applicazione della regola.}$$

$$\text{Con ulteriori calcoli: } \dots = \frac{x^3-x+4 - (3x^3-x+6x^2-2)}{(x^3-x+4)^2} = \frac{-2x^3-6x^2+6}{(x^3-x+4)^2}.$$

4.9 Derivare funzioni composte e funzioni inverse

4.9.1 Funzioni composte

Esempio 4.33. $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ è la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato. Anche se nella formula mancano le usuali sigle $f(x)$, y , x , si tratta di una comunissima funzione polinomiale di 2° grado e le si possono applicare le regole che stiamo studiando, senza problemi.

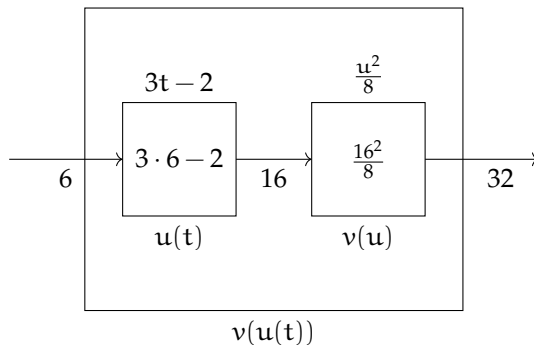
Infatti, derivando si ottiene $s'(t) = 0 + v_0 + \frac{1}{2} \cdot 2at = v_0 + at$ che, essendo la derivata dello spazio rispetto al tempo, esprime la velocità $v(t)$ in questo tipo di moto.

L'esempio serve a ricordare che le funzioni e le variabili si esprimono con sigle qualsiasi, ma questo non cambia le regole dell'analisi o, più in generale, della matematica. La libertà di uso dei simboli può facilitare i calcoli, come si vede nel caso della derivata di una funzione composta.

Esempio 4.34. Deriva la funzione $v(u) = \frac{u^2}{8}$. Soluzione: $v'(u) = \frac{1}{8}2u = \frac{u}{4}$. Infatti il differenziale è $dv(u) = \frac{1}{8}[2udu + (du)^2]$ perché $df(x) = 2xdx + (dx)^2$ e $d(kf(x)) = kdf(x)$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato $\frac{u}{4}$.

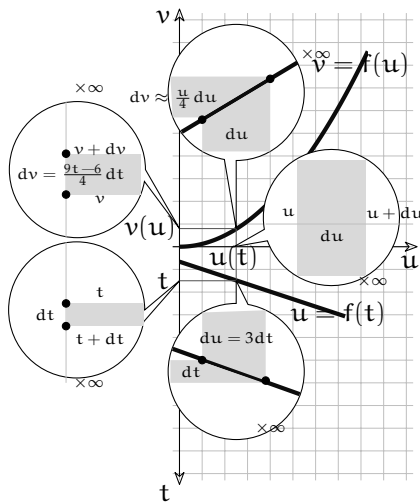
Esempio 4.35. Deriva la funzione $u(t) = 3t - 2$. Soluzione: $u'(t) = 3$. Infatti il differenziale è $du(t) = 3dt + 0$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato 3.

Combiniamo i due esempi: $v = f(u)$ e $u = f(t)$, cioè v è funzione di u , perché i suoi valori dipendono dai quadrati, divisi per 8, dei numeri u , invece u è funzione di t , nel senso che i suoi valori sono i valori t triplicati e poi ridotti di 2. In "matematiche" $v(u(t)) = \frac{[u(t)]^2}{8} = \frac{(3t-2)^2}{8}$.



Si tratta di una specie di catena: se si immette il valore $t = 6$, la macchina sviluppa $u(6) = 3 \cdot 6 - 2 = 16$ in u e infine produce $v(16) = \frac{16^2}{8} = 32$. Una catena del genere si chiama *funzione di funzione* e v , che produce il risultato finale, si dice *funzione composta*: $v(u(t))$.

Come deriviamo v rispetto a t ? Dalla definizione di derivata: $D[v(u(t))] = \text{st} \left(\frac{d(v(u(t)))}{dt} \right)$, quindi il punto è il calcolo dei differenziali.



Dal primo esempio sappiamo che $dv = \frac{u}{4} du + \text{infinitesimi di ordine superiore}$. Poiché $u = 3t - 2$, $du = 3dt$, avremo:

$$dv \approx \frac{u}{4} du. \quad du = 3dt.$$

$$\rightarrow dv = \frac{3t-2}{4} 3dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{st} \left(\frac{d(v(u(t)))}{dt} \right) = \frac{(3t-2)3dt}{4dt} = \frac{9}{4}t - \frac{3}{2}.$$

C'è un modo più semplice? Sì: basta sviluppare il quadrato $(3t - 2)^2$, dividere ogni termine per 8 e poi derivare il polinomio. Ma a volte il modo più semplice non c'è.

Esempio 4.36. Calcolare $f'(x)$, con $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$.

$f(x)$ è composta: si può pensare formata così: $g(x) = 3 - x^2$ e $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{3 - x^2}$.

In questo modo si vedono meglio i differenziali. $df(x) = d(\sqrt{g(x)}) \approx \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x)$ e

$dg(x) = d(3 - x^2) \approx -2x dx$. Per brevità, raccogliamo sotto un'unica sigla ε tutti gli infinitesimi di ordine superiore, che poi la parte standard si incaricherà di far scomparire nel momento di calcolare la derivata.

Il differenziale: $df(x) = df(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x) + \delta = \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x)dx + \varepsilon$.

Da qui la derivata: $f'(x) = \text{st} \left(\frac{\frac{-2x dx}{2\sqrt{3-x^2}} + \varepsilon}{dx} \right) = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$.

Esaminiamo in modo astratto come abbiamo costruito il rapporto differenziale della funzione composta nell'esempio precedente: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$. Sembra un'uguaglianza banale, perché semplificando si ottiene l'identità. In realtà i due differenziali dg hanno un significato diverso. Quello al denominatore differenzia la variabile indipendente per f , quello al numeratore differenzia la variabile che dipende da x .

L'espressione giustifica il teorema seguente.

Teorema 4.18. Se esistono le derivate $g'(x)$ e $f'(g(x))$ per il medesimo valore x , la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile e la sua derivata si calcola così: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g)g'(x)$, cioè la derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate delle funzioni componenti, ciascuna rispetto alla propria variabile.

Ipotesi: $f(x) = f(g(x))$, f, g derivabili.

Tesi: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Dimostrazione. Tralasciando di specificare la scomparsa degli infinitesimi di ordine superiore e grazie alle proprietà della funzione $\text{st}(\cdot)$, abbiamo:

$$f'(g(x)) = \text{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \text{st}\left(\frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}\right) = \text{st}\left(\frac{df(g)}{dg}\right) \text{st}\left(\frac{dg(x)}{dx}\right) = f'(g(x))g'(x). \quad \square$$

Esempio 4.37. Derivare $f(x) = \left(-\frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - 6\right)^5$.

Poniamo $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ e $f(g) = g^5$.

Allora: $f'(g) = 5g^4$ e $g'(x) = -2x^2 + 4x$,

$$\begin{aligned} \text{quindi: } f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4(-2x^2 + 4x) = 5\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4 (-2x^2 + 4x) = \\ &= 10x\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4 (-x + 2). \end{aligned}$$

\square **Osservazione** La regola della funzione composta si estende ai casi in cui le funzioni in gioco sono tre, o più: $D[f(g(h(x)))] = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$.

\square **Osservazione** Lo studente smart si era già accorto che la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate. Ora arriva la conferma: il prodotto delle derivate non è la derivata di un prodotto.

4.9.2 Funzioni inverse

Non è difficile invertire una funzione nota, partendo dalla sua espressione analitica. Con pochi pochi passaggi elementari, si ricava la formula inversa.. Ecco alcuni esempi di semplici funzioni algebriche.

$y = f(x)$	$x = g(y)$	$f'(x)$	$g'(y)$
$y = x + c$	$x = y - c$	1	1
$y = kx$	$x = y/k$	k	$\frac{1}{k}$
$y = x^2, x \geq 0$	$x = \sqrt{y}$	2x	$\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$
$y = \frac{1}{x}$	$x = \frac{1}{y}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{y^2} = -x^2$

\square **Osservazione** La funzione $y = x^2$, nella terza riga della tabella, è definita $\forall x$. Tuttavia qui si restringe il dominio, in modo da considerare un solo ramo della parabola, perché altrimenti la formula inversa non potrebbe essere una funzione. Occorre sempre porre attenzione al dominio di f , quando si vuole definirne l'inversa. Una buona regola pratica per capire se f^{-1} è definibile, è di tagliare il grafico di f con una retta orizzontale: se la retta incrocia il grafico di f in più punti, f^{-1} non esiste.

Le ultime due colonne riportano le derivate rispettive e insinuano in noi qualche sospetto. Considera il caso semplice che segue.

Esempio 4.38. Derivare $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Si dirà: non c'è problema, si calcola la funzione e risulta $f(x) = \sqrt{x^2} = x$, perciò $f'(x) = 1$.

Vero. Ma poniamo $g(x) = x^2$ e $f(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$.

Con la regola delle funzioni composte si ha:

$$f'(x) = f'(g)g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{1}{2x} \cdot 2x = 1.$$

Conclusione: $D[x^2] = \frac{1}{D[\sqrt{x}]}$

Si intuisce che: siccome $f'(g)g'(x) = 1$, allora $g'(x) = \frac{1}{f'(g)}$. Se fosse dimostrato, diventerebbe più facile derivare per esempio le funzioni logaritmiche: basterebbe saper derivare le corrispondenti esponenziali. E così via. Ovviamente occorre qualche cautela: la regola sarebbe applicabile

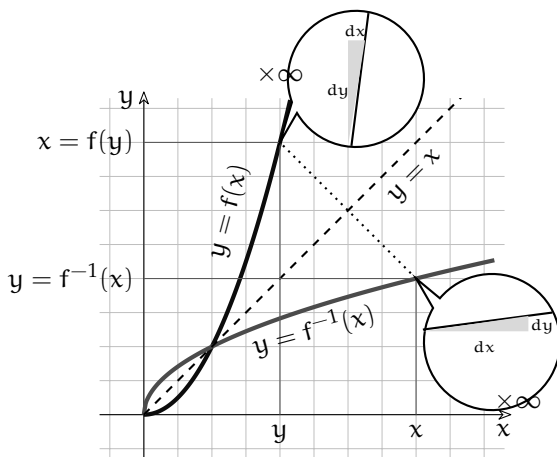
1. se esiste l'inversa della funzione da derivare;
2. se entrambe le funzioni sono derivabili;
3. se $f'(g) \neq 0$.

Infatti, nell'esempio tutto funziona alla perfezione, ma solo se $x \neq 0$ (ricorda anche l'esempio 4.23).

Se valgono tutte le condizioni favorevoli, allora esistono la funzione f e la sua inversa $g = f^{-1}$. $y = f(x)$ e $y = g(x) = f^{-1}(x)$ hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

□ **Osservazione** $y = kx$ e $x = \frac{y}{k}$, per esempio, sono formule inverse l'una dell'altra. Ma non sono funzioni inverse, sono due espressioni della stessa iperbole equilatera e hanno lo stesso grafico, quindi le stesse tangenti al grafico e le stesse derivate rispetto a x .

La funzione inversa di cui parliamo, nel caso dell'iperbole è $y = \frac{x}{k}$, cioè è la formula inversa, ma applicata a x . Se invece consideriamo la formula inversa $x = \frac{y}{k}$ come funzione $x = f(y)$, allora dovremo derivare rispetto a y : $x' = \frac{dx}{dy}$.



Ogni punto $(x; f^{-1}(x))$ sulla curva della funzione inversa ha un corrispondente $(y; f(y))$ sulla curva $y = f(x)$, nella simmetria rispetto alla bisettrice. Guardiamo come si corrispondono i differenziali: dx e dy sono invertiti in una curva rispetto all'altra. Quindi le derivate corrispondenti sono reciproche l'una con l'altra.

Teorema 4.19. *Le derivate di due funzioni f, g , inverse l'una dell'altra, se esistono e sono diverse da zero, sono reciproche l'una rispetto all'altra.*

Ipotesi: $y = f(x)$, $x = g(y)$ f, g derivabili, con $f' \neq 0$, $g' \neq 0$.

$$\text{Tesi: } f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Dimostrazione. Grazie alle proprietà della funzione $st()$, abbiamo:

$$f'(x) \cdot g'(y) = st\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot st\left(\frac{dx}{dy}\right) = st\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}\right) = st(1) = 1$$

$$\text{per cui: } f'(x) = \frac{1}{g'(y)}. \quad \square$$

□ Osservazione La dimostrazione fa leva su una semplificazione che sembra banale. In realtà i due rapporti differenziali sono diversi per significato: nel primo la variabile indipendente è x , nel secondo è y .

Esempio 4.39. Trova la derivata di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$.

1. Usando il teorema 4.18 e le regole precedenti:

$$f'(x) = D\left[\frac{1}{\sqrt{5-x}}\right] = D\left[(5-x)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{3}{2}}(-1) = \frac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}.$$

2. Usando la regola appena appresa:

Costruiamo la formula inversa con pochi passaggi algebrici: riavremo la stessa funzione, in cui y figura come variabile indipendente: $x = f(y)$.

Quindi deriviamo: $D[x] = x' = f'(y) = \frac{dx}{dy}$.

$$f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{5-x}} \rightarrow y^2 = \frac{1}{5-x} \rightarrow y^{-2} = 5-x \rightarrow x = 5 - y^{-2} \text{ (formula inversa)}$$

$$x' = \frac{dx}{dy} = -2y^{-3} \text{ (derivata della funzione inversa)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}.$$

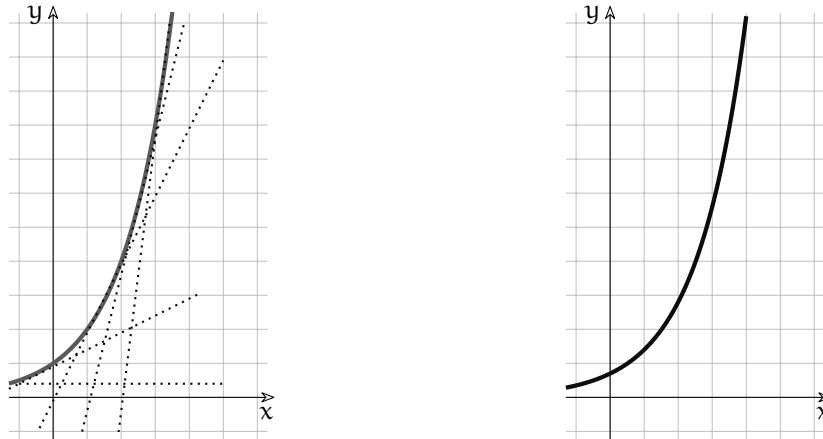
In genere la funzione inversa si costruisce in pochi passaggi semplici, poi la derivazione risulta elementare.

4.10 Derivare funzioni trascendenti

Nel capitolo 4.4 abbiamo imparato a differenziare le funzioni algebriche. In questa parte, quindi, per imparare a derivare le funzioni trascendenti, dovremo calcolare anche i loro differenziali. Si tratta in realtà di un lavoro minimo, perché abbiamo già discusso (pag.51) il comportamento di queste funzioni nell'insieme degli Iperreali e abbiamo ormai un bagaglio di conoscenze sulle derivate che agevola il lavoro.

4.10.1 Derivata di $f(x) = a^x$

Il grafico di una generica funzione esponenziale $y = a^x$, confrontato con quello dell'andamento delle tangenti è una sorpresa rispetto ai confronti che abbiamo fatto per altre funzioni. I due grafici praticamente si accompagnano: rivelano uguali pendenze in coppie di punti di uguale ordinata.



Anche se i due grafici non sono esattamente identici, l'andamento delle pendenze delle tangenti, cioè l'andamento della derivata della funzione, è anch'esso esponenziale. Sviluppiamo matematicamente questa intuizione, ricordando le proprietà delle potenze.

Differenziale di $y = a^x$: $dy = a^{x+dx} - a^x = a^x a^{dx} - a^x = a^x (a^{dx} - 1)$.

Rapporto differenziale: $\frac{dy}{dx} = \frac{(a^{dx} - 1)}{dx} a^x$.

Ora dovremmo applicare la parte standard e se vogliamo seguire le indicazioni del grafico, il risultato dovrà essere un'esponenziale. Quindi dobbiamo concentrarci sul rapporto $\frac{(a^{dx} - 1)}{dx}$, il fattore che potrebbe provocare l'allontanamento del grafico dalla forma esponenziale a cui puntiamo.

Negli esponenziali succede che $f(0) = 1$ e $f(x + dx) = f(x)f(dx)$ e il rapporto differenziale in queste funzioni diventa:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{f(x)f(dx) - f(x)}{dx} = \frac{f(dx) - 1}{dx} f(x) = \frac{f(0 + dx) - f(0)}{dx} f(x) \sim \sim f'(0)f(x) \rightarrow f'(x) = f'(0)f(x).$$

La derivata di una funzione esponenziale generica è proporzionale alla funzione stessa, attraverso un fattore che corrisponde alla derivata calcolata in $x = 0$.

Per capire di più cos'è questo fattore, forziamo la situazione e imponiamo che corrisponda a 1. In questo modo la funzione e la sua derivata saranno proprio identiche e i due grafici saranno sovrapposti: finalmente potremo conoscere quanto vale la base generica a .

$$f'(0) = 1 \rightarrow \frac{(a^{dx} - 1)}{dx} = 1 \rightarrow a^{dx} = dx + 1 \rightarrow a = (dx + 1)^{\frac{1}{dx}}.$$

Abbiamo già incontrato un'espressione analoga in 3.2.11: l'espressione individua il Numero di Nepero e .

Teorema 4.20. *La derivata della funzione esponenziale $D[e^x]$ coincide con la funzione stessa.*

Ipotesi: $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = e^x$$

Dimostrazione. La dimostrazione è già stata costruita gradualmente per via intuitiva. Occorrerebbe dimostrare l'unicità della tesi, ma non è essenziale per i nostri scopi. Resta comunque stabilito che se una funzione coincide con la propria derivata, allora è una funzione esponenziale. \square

A questo punto, l'importanza del numero e risulta ingigantita. Ce ne serviamo subito.

Teorema 4.21. La derivata della generica funzione esponenziale è: $D[a^x] = a^x \ln a$.

Ipotesi: $f(x) = a^x$;

Tesi: $f'(x) = a^x \ln a$.

Dimostrazione. Usiamo una trasformazione appresa con lo studio dei logaritmi e applichiamo il teorema 97: $f(x) = a^x = e^{\ln a^x}$. Se poniamo $g(x) = \ln a^x = x \ln a$, si ottiene:
 $f(g(x)) = e^{g(x)} \rightarrow f'(g(x)) = f'(g)g'(x) = e^{g(x)} \ln a = e^{\ln a^x} \ln a = a^x \ln a$. \square

Esempio 4.40. Calcola la derivata di $f(x) = 3e^{x-1}$.

Poniamo $g(x) = x - 1$. $f(x) = 3e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = 3e^{g(x)} \cdot g'(x) = 3e^{x-1} \cdot 1 = 3e^{x-1}$.

Esempio 4.41. Calcola la derivata di $f(x) = e^{x^2}$.

Poniamo $g(x) = x^2 \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

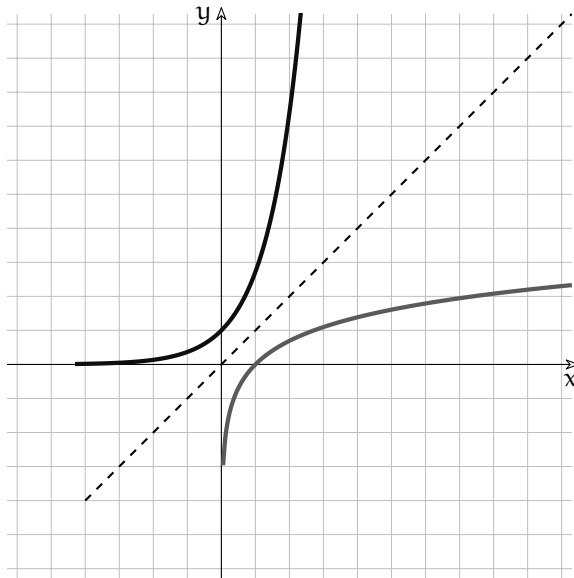
4.10.2 Derivata di $f(x) = \log_a x$

Esempio 4.42. Calcola la derivata di $f(x) = e^{\ln x}$.

Poniamo $g(x) = \ln x \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\ln x} \dots ???$.

Ragioniamo: dalle proprietà dei logaritmi si ha: $e^{\ln x} = x$, che è la funzione identica. Quindi

- $e^{\ln x} = x$ e anche $\ln e^x = x \ln e = x$, così come $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$: le due funzioni sono una inversa dell'altra, il logaritmo naturale $g(x) = \ln x$ è la funzione inversa della funzione esponenziale $f(x) = e^x$;
- $D[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;
- $D[\ln x] = \frac{1}{D[e^{g(x)}]} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.



Teorema 4.22. La derivata della funzione logaritmo naturale è: $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

Ipotesi: $f(x) = \ln x$. b $f'(x) = \frac{1}{x}$

Dimostrazione. La dimostrazione è nei ragionamenti dell'esempio precedente, ai quali bisogna aggiungere le precauzioni perché le due funzioni siano invertibili e derivabili: poiché $\ln x$ esiste per $x > 0$, i ragionamenti valgono solo per $x > 0$. \square

Vediamo ora il caso generale, quando la base del logaritmo è genericamente $a > 0$.

Teorema 4.23. La derivata della funzione logaritmo in base a è: $D[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$.

Ipotesi: $f(x) = \log_a x$. $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

Dimostrazione. Si ottiene direttamente dalla formula del cambiamento di base:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x. \quad \square$$

Esempio 4.43. Derivare la funzione $f(x) = \text{Log}(x^2 + 1)^2$.

$$\begin{aligned} g(x) = (x^2 + 1)^2 \rightarrow f(x) = \text{Log}(g(x)) \rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{g(x)} g'(x) = \\ &= \frac{1}{(\ln 10)(x^2 + 1)^2} 2(x^2 + 1)2x = \frac{4x}{(\ln 10)(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Nota che $g(x) = (x^2 + 1)^2$ è a sua volta una funzione composta del tipo $g(x) = [h(x)]^2$ e quindi è stata applicata la regola della derivata di più funzioni composte.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per convalidare l'osservazione al teorema 4.15, a proposito delle funzioni potenza.

Teorema 4.24. La derivata della funzione potenza $f(x) = x^\alpha$ è: $D[x^\alpha] = (\alpha - 1)x^{\alpha-1}, \forall \alpha$.

Ipotesi: $f(x) = x^\alpha$. $f'(x) = (\alpha - 1)x^{\alpha-1}, \forall \alpha$.

Dimostrazione. Combinando alcune delle regole precedenti, si ha:

$$\begin{aligned} f(x) = x^\alpha &= e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x} \\ f'(x) &= e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Poiché non è stata fatta nessuna particolare ipotesi sull'esponente (intero o razionale positivo o negativo, irrazionale ...), allora vale per qualsiasi esponente. \square

Esempio 4.44. Derivare $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

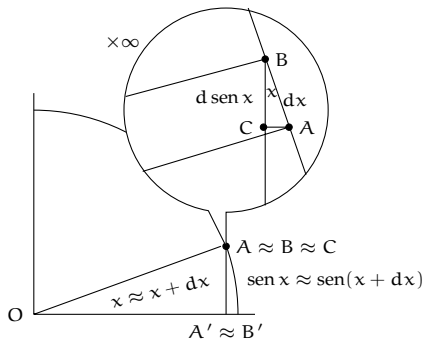
$$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$$

4.10.3 Derivata di funzioni circolari

Anche per queste funzioni dobbiamo dapprima definire il differenziale. Per una migliore comprensione, ci affidiamo soprattutto al piano cartesiano.

Derivata di $f(x) = \sin x$

Nel capitolo sugli Iperreali abbiamo già visto (vedi pag. 55) che per angoli infinitesimi il seno e l'angolo sono indistinguibili: $\text{st}\left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right) = 1$. Dall'analisi del disegno ricaviamo l'espressione del differenziale $df(x) = d(\sin x) = \sin(x + dx) - \sin x$.



Nell'ingrandimento al microscopio nonstandard, l'incremento infinitesimo di arco \widehat{AB} (che corrisponde all'incremento di angolo da x a $x + dx$) è racchiuso fra due raggi indistinguibili da segmenti paralleli nei punti $A \equiv (x; \text{sen } x)$ e $B \equiv (x + dx; \text{sen}(x + dx))$. L'arco, a sua volta, risulta indistinguibile dal segmento rettilineo AB . I segmenti che uniscono A e B con le loro proiezioni sull'asse X sono verticali e paralleli, perciò ABC è un triangolo rettangolo infinitesimo, simile al triangolo BOC . La sua altezza BC corrisponde a $d \text{sen } x$.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC rispetto al lato BC :
 $BC = AB \cdot \cos x \rightarrow d(\text{sen } x) = dx \cdot \cos x$

Teorema 4.25. La derivata della funzione $f(x) = \text{sen } x$ è $D[\text{sen } x] = \cos x$.

Ipotesi: $f(x) = \text{sen } x$. $f'(x) = \cos x$.

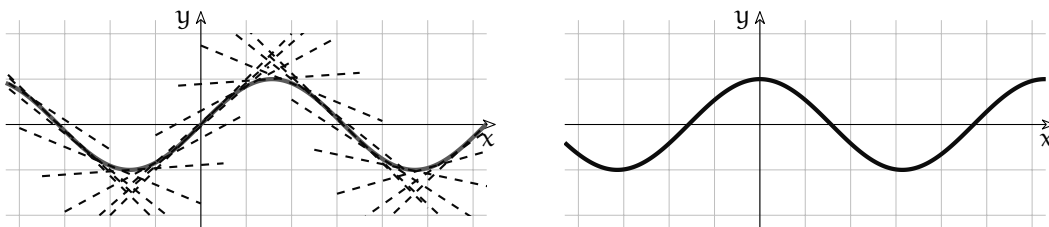
Dimostrazione. Il commento al disegno giustifica la tesi. □

□ **Osservazione** Si potrebbe criticare il metodo per la dimostrazione: chi assicura che negli altri quadranti le relazioni fra le variabili non cambino? Saremo troppo legati al disegno? Ci sono altri modi per dimostrare la tesi, più vincolati al calcolo e meno al disegno. Per esempio, dalle formule di addizione abbiamo: $\text{sen}(x + dx) = \text{sen } x \cos dx + \text{sen } dx \cos x$. Allora:

$$\frac{\text{sen}(x + dx) - \text{sen } x}{dx} = \frac{\text{sen } x \cos dx + \text{sen } dx \cos x - \text{sen } x}{dx} =$$

$$= \text{sen } x \frac{\cos dx - 1}{dx} + \cos x \frac{\text{sen } dx}{dx} = \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,$$
 in cui si fa uso delle forme indeterminate discusse a pag. 55. Alla fine basta applicare la funzione $\text{st}()$.

□ **Osservazione** Anche il grafico dell'andamento delle tangenti conferma la tesi in modo assai espressivo.



Esempio 4.45. Quale pendenza ha il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'origine?

$$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1.$$

La tangente al grafico nell'origine è la retta $y = x$.

Esempio 4.46. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x^2$.

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \text{ e } g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

Esempio 4.47. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$.

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \text{ e } g'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x.$$

Esempio 4.48. Derivare $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.

Si tratta di una funzione di tipo nuovo, un misto fra una funzione potenza e una funzione esponenziale. Si risolve con una trasformazione che abbiamo già visto e con l'uso delle regole della funzione composta e del prodotto.

$$x^{\operatorname{sen} x} = e^{(\ln x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\operatorname{sen} x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln x} \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = x^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right).$$

Derivata di $f(x) = \cos x$

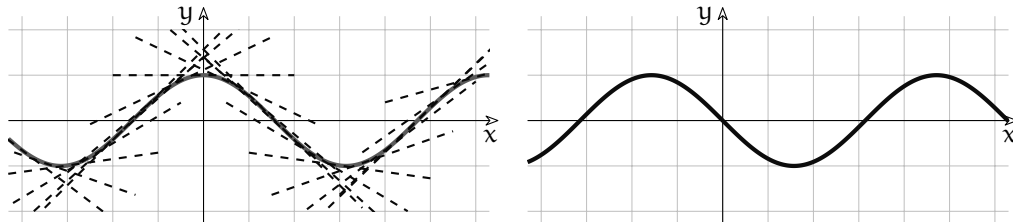
Teorema 4.26. La derivata della funzione $f(x) = \cos x$ è $D[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

Ipotesi: $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Dimostrazione. Il disegno con cui dimostrare la tesi è uguale a quello di pag. 104. Lo puoi riprodurre, tenendo però l'attenzione concentrata sul segmento AC.

L'unica osservazione importante è che nel passare da x a $x + dx$, cioè mentre l'angolo cresce, il valore del coseno decresce. Infatti, al contrario di quanto avviene per il seno, nel primo quadrante si ha: $\cos(x + dx) < \cos x$. Questa è la ragione del segno meno nel risultato. \square



Esempio 4.49. Quale pendenza ha il grafico di $y = \cos x$ nell'origine?

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0.$$

La tangente al grafico nell'origine è orizzontale.

Esempio 4.50. Derivare $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \cos x^2$.

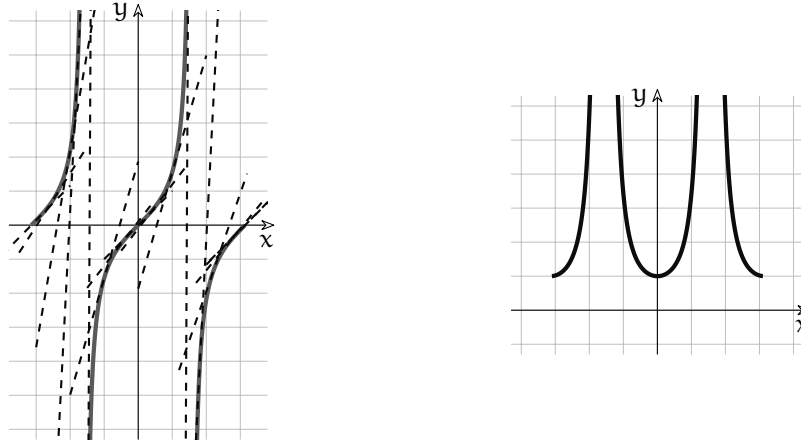
$$f'(x) = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x \text{ e } g'(x) = -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x = -2x \operatorname{sen} x^2.$$

Esempio 4.51. Derivare $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$.

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Derivata di $f(x) = \operatorname{tg} x$

La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è discontinua per $x = \pm \frac{\pi}{2}$. La derivata quindi non può esistere nei punti corrispondenti, come dimostra il grafico.



Teorema 4.27. La derivata della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è $D[\operatorname{tg} x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ per $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \text{ per } x \neq \pm \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Per calcolare la derivata nei punti in cui la funzione è continua, ricorriamo alla seconda relazione fondamentale: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e sfruttiamo la regola della derivata di un quoziente (pag. 93).

$$D[\operatorname{tg} x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{D[\sin x] \cdot \cos x - \sin x \cdot D[\cos x]}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \quad \square$$

Esempio 4.52. Quale è la pendenza del grafico di $y = \operatorname{tg} x$, per $x = \frac{\pi}{4}$? E per $x = \frac{\pi}{2}$?

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 2$$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} = ???$$

Per $x \approx \frac{\pi}{2}$ il grafico della funzione cresce verticalmente, la sua pendenza è un numero infinito e la parte standard di un infinito non esiste. D'altra parte, se x è esattamente uguale a $\frac{\pi}{2}$, la tangente ha un punto di discontinuità.

4.11 Applicazioni

Si è tanto parlato delle tangenti ai grafici di funzione e delle loro pendenze, senza mai arrivare a definire l'effettiva equazione delle tangenti che interessano. Ora cercheremo di colmare questa lacuna.

4.11.1 Derivata e tangente

Hai già incontrato negli anni scorsi dei problemi in cui si chiedeva di calcolare la tangente ad una parabola in un suo punto. Il metodo di calcolo algebrico che usavi è efficace ma macchinoso e, sfortunatamente, vale solo per le coniche. Il metodo delle derivate, invece, si rivela molto più potente e rapido.

Poiché la tangente è una retta, la sua equazione è del tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$, dove $(x_0; y_0)$ è il punto di tangenza e m è la pendenza della retta, sulla quale sappiamo ormai tutto. Si ha $y = m(x - x_0) + y_0$ e poiché $m = f'(x_0)$, relativo alla funzione $f(x)$ di cui si sta studiando il grafico, l'equazione risolvibile è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Esempio 4.53. Trova le equazioni delle tangenti alla parabola $f(x) = x^2$ nei suoi punti $V \equiv (0; f(0)) = 0$ e $B \equiv (-6; f(-6))$.

Soluzione. Nel punto V : $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 = m$. La tangente è orizzontale e coincide con l'asse X : $y = m(x - x_0) + y_0 = 0$.

Nel punto B : $f'(-6) = 2 \cdot (-6) = -12$. $m = -12$, la tangente è inclinata verso il basso: $y = m(x - x_0) + y_0 = -12(x - 6) + 36 \rightarrow y = -12x + 108$.

Esempio 4.54. Trova i punti di intersezione degli assi con la tangente in $(2; f(2))$ alla curva $f(x) = 2x^3 - x$.

Soluzione. Ricerca della tangente per $x = 2$: $f'(x) = 6x^2 - 1$ e $f'(2) = 6 \cdot 4 - 1 = 23$.

$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 = 14$. La tangente: $y = 23(x - 2) + 14 = 23x - 32$. Le intersezioni:

Con l'asse X : $y = 0 \rightarrow x = \frac{32}{23} \rightarrow \left(\frac{32}{23}; 0\right)$.

Con l'asse Y : $x = 0 \rightarrow y = -32 \rightarrow (0; -32)$.

Esempio 4.55. In quale punto del suo grafico la parabola $y = 4x^2 - 3x + 6$ è inclinata di 45° ?

Soluzione. Nel punto che cerchiamo, la parabola avrà un'inclinazione indistinguibile da quella della tangente. Le rette inclinate di 45° hanno pendenza $m = 1$, come la bisettrice del primo-terzo quadrante. Dobbiamo quindi imporre alla derivata il valore 1.

$f(x) = 4x^2 - 3x + 6 \rightarrow f'(x) = 8x - 3$.

$8x - 3 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Il punto è $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Esempio 4.56. È vero che l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$ ha per vertici i punti medi del segmento che gli assi staccano sulle tangenti ai vertici?

Risposta. Consideriamo per comodità solo il ramo destro del grafico. Il vertice sarà un punto V di coordinate uguali, essendo l'iperbole equilatera. Quindi $V = V(4; 4)$.

Poiché la funzione è $y = \frac{16}{x}$, la sua derivata in V è $y'|_{x=4} = -\frac{16}{x^2}\Big|_{x=4} = -1$ e l'equazione della tangente in V è $y = -1(x - 4) + 4 = -x + 8$.

La retta $y = -x + 8$ interseca gli assi in $(8; 0)$ e $(0; 8)$ ed è facile verificare che il punto V è medio fra i due. Per ragioni di simmetria accade lo stesso con il vertice opposto $(-4; -4)$.

□ **Osservazione** In realtà si tratta di una proprietà generale dell'iperbole equilatera. Qualsiasi retta tangente al grafico stacca sugli assi coordinati dei segmenti che hanno il punto medio coincidente con il punto di tangenza. Non è difficile dimostrarlo usando l'equazione generica

$yx = k^2$ e per punto di tangenza le coordinate $\left(a; \frac{k^2}{a}\right)$.

Esempio 4.57. È vero che è inclinata di 30° la retta che contiene il raggio della circonferenza $x^2 + y^2 = 20$ per il punto di ascissa 4?

Risposta. No, non è vero.

Il modo più elementare per verificarlo è calcolare l'ordinata del punto e considerare che il centro si trova nell'origine, poi cercare l'angolo di inclinazione dell'ipotenusa coincidente con il raggio.

L'alternativa è calcolare la derivata: $x^2 + y^2 = 20 \rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$ (data la posizione del punto, consideriamo solo la semicirconferenza per $y > 0$).

$$f'(4) = \frac{-2x}{2\sqrt{20-x^2}} \Big|_{x=4} = \frac{-4}{\sqrt{20-16}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Dunque la tangente ha una pendenza pari a -2 . Poiché il raggio e la tangente sono perpendicolari, la retta che contiene questo raggio avrà pendenza $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

La pendenza è la tangente dell'angolo al centro. Possiamo controllare la tesi con la calcolatrice.

4.11.2 Derivata e normale

Come si vede dall'ultimo esempio, una volta che si sappia come calcolare la tangente ad una curva, il calcolo della normale risulta molto facile. Poiché la tangente e la normale, se passano per lo stesso punto, sono rette perpendicolari e quindi hanno i coefficienti angolari antireciproci, l'equazione di una normale ad una curva $y = f(x)$ in un punto $(x_0; y_0)$ sarà:

$$y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0,$$

dove la pendenza della normale $m_n = \frac{-1}{m_t}$ è appunto l'antireciproco della pendenza della tangente.

Esempio 4.58. Scrivi l'equazione della tangente e della normale alla curva di equazione

$$y = \frac{x^2 + 1}{\ln x - 1} \text{ nel suo punto di ascissa } 1.$$

$$\text{Soluzione. } y'|_{x=1} = \frac{2x(\ln x + 1) - (x^2 + 1)\frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} \Big|_{x=1} = \frac{2 \cdot 1(0 + 1) - (1 + 1) \cdot 1}{(0 + 1)^2} = 0.$$

La tangente è quindi una retta orizzontale. Di conseguenza la normale è verticale e il calcolo lo mostra immediatamente.

4.11.3 Derivata della derivata

Abbiamo già notato che la derivata di una funzione dipende dal punto in cui si calcola e che, una volta stabilito questo punto, ha un unico risultato. Quindi la derivata di una funzione è a sua volta una funzione e, se ci sono le condizioni, può essere derivata a sua volta.

Definizione 4.10. Se una funzione $f(x)$ è derivabile, la sua derivata è la funzione $f'(x)$. Se anche $f'(x)$ è derivabile, allora esiste la funzione $f''(x)$ ed è chiamata *derivata seconda* di $f(x)$.

Le regole di calcolo della derivata seconda sono le stesse regole che abbiamo già visto, quindi la seconda derivazione, se è possibile, non comporta problemi diversi da quelli conosciuti.

Riferendoci a un generico grafico di funzione $y = f(x)$, la derivata prima $f'(x)$ ci consente di trovare le pendenze delle tangenti al grafico. La derivata seconda $f''(x)$ descrive con quanta rapidità (o lentezza) variano queste pendenze, perciò ci indica quanto siano aperte o chiuse le

concavità che $y = f(x)$ disegna nel piano cartesiano.

Se le condizioni sono favorevoli, esistono e sono calcolabili anche le derivate terze, quarte, ecc. di una funzione, anche se non sono essenziali per i nostri scopi. Il loro calcolo segue i metodi già visti.

Esempio 4.59. Calcola $f''(1)$ di $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 9$.

Derivata prima: $f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 10x - 6$

Derivata seconda per $x = 1$: $(40x^3 - 36x^2 + 6x + 10)|_{x=1} = 40 - 36 + 6 + 10 = 20$

Esempio 4.60. Calcola $f''(x)$ di $f(x) = \ln x$.

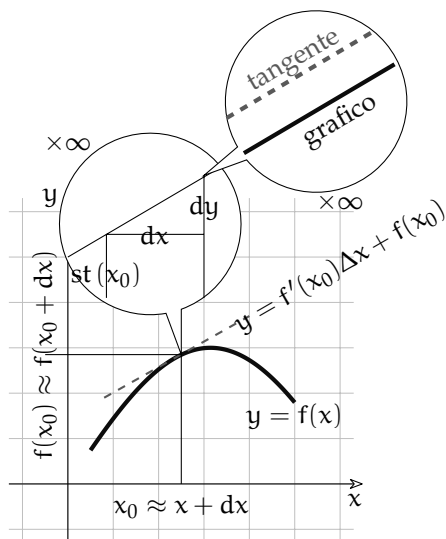
$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ e } f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

□ **Osservazione** La funzione $\ln x$ esiste per $x > 0$. Le derivate prima e seconda esistono per $x \neq 0$. In generale, l'esistenza di una derivata (prima, seconda, terza, ...) è indipendente dall'esistenza della funzione da derivare (funzione primitiva).

Esempio 4.61. Calca le derivate successive di $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{IV}(x) = \sin x \dots$$

4.11.4 Derivata, differenza e differenziale



Nel punto $(x_0; f(x_0))$ il grafico della funzione e la tangente sono indistinguibili. Il campo visivo del primo microscopio mostra x_0 e dx , uno fra gli infiniti infinitesimi nella monade di x_0 . A livello microscopico, la curvatura del grafico non esiste, per cui il grafico e la tangente sono sovrapposti. Per cogliere la distinzione fra i due, occorre un secondo microscopio non standard, centrato a distanza infinitesima dal punto. Nel suo campo visivo la tangente e il grafico della funzione appaiono come rette parallele. Nella rappresentazione doppiamente ingrandita, il punto di coordinate reali più vicino a quello raffigurato si trova a distanza infinita (∞^2).

La figura mostra che la tangente e la secante per due punti infinitamente vicini sono distinguibili solo al dettaglio degli infinitesimi. Lo stesso avviene per la derivata e il rapporto differenziale.

Dalla definizione di derivata $f'(x) = \text{st} \left(\frac{df(x)}{dx} \right)$ ricaviamo che $f'(x) \sim \frac{df(x)}{dx}$: la derivata e il rapporto differenziale sono quantità quasi, ma non esattamente, uguali. Possiamo esprimere meglio questo concetto:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon(x) \text{ e quindi } df(x) = f'(x)dx + \varepsilon(x)dx.$$

$\varepsilon(x)$ è l'infinitesimo, o l'insieme di infinitesimi, che fa la differenza fra la derivata e il rapporto differenziale. $\varepsilon(x)dx$, un prodotto fra infinitesimi, forma un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f'(x)dx$. Nella maggior parte dei casi pratici si tratta di una differenza trascurabile e si può accettare l'espressione $f'(x)dx$ al posto dell'espressione $df(x)$, che può essere meno comoda da calcolare.

Nella storia del calcolo infinitesimale l'uso di una formula al posto dell'altra è diventato normale e molti testi definiscono differenziale della funzione il prodotto $f'(x)dx$, invece della differenza infinitesimale $df(x)$.

Il problema diventa più critico nelle applicazioni pratiche, quando si devono usare le differenze finite al posto dei differenziali. Si usa allora, per analogia,:

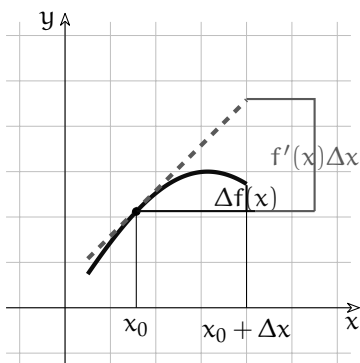
$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x.$$

Dato che l'ultimo termine è il meno rilevante, si ha:

$$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x \rightarrow f(x) - f(x_0) \cong f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si tratta dell'usuale equazione della tangente per $x = x_0$.

La formula è esatta solo per le funzioni rappresentate da rette. Per le altre funzioni la differenza $\Delta f(x)$ fra due valori della funzione può essere anche molto diversa da $f'(x_0)\Delta x$, che è in realtà la differenza fra due valori y , calcolati lungo la tangente.



Allontanandosi da x_0 di una quantità finita Δx , le differenze della funzione $\Delta f(x)$, calcolate a partire da x_0 , possono essere anche molto diverse dalle differenze $f'(x_0)\Delta x$, calcolate lungo la tangente.

Nei testi in cui si scrive che $\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x$, $f'(x_0)\Delta x$ viene chiamato differenziale, anche se si tratta di una differenza, una quantità finita, non infinitesima. In tali testi la differenza $\Delta f(x)$ è detta incremento e l'equazione

$$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x \quad (\text{Equazione alle differenze})$$

esprime il cosiddetto *teorema dell'incremento*.

Ai fini pratici l'Equazione alle differenze è un'equazione utile, soprattutto quando si studiano i fenomeni naturali, perché le variazioni che si misurano in questi ambiti sono differenze finite. Ovviamente i risultati che si ottengono utilizzando il teorema dell'incremento saranno tanto più precisi quanto più piccola è la variazione Δx , in rapporto ai valori x .

Esempio 4.62. Fare una stima ragionevole della quantità $\sqrt{25,162}$.

Si sta usando la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, la cui derivata è: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Utilizziamo il teorema dell'incremento, fissando $x_0 = 25$ e $\Delta x = 0,162$.

$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x \cong f'(x_0)\Delta x \rightarrow f(x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

$$f(25,162) \cong f'(25) \cdot 0,162 + f(25) \rightarrow \sqrt{25,162} \cong \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0,162 + \sqrt{25} = \frac{0,162}{10} + 5 \cong 5,0162.$$

Confronta il risultato con quanto propone la calcolatrice.

Poiché l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è Δx , ripeti l'esercizio con $x_0 = 25,1001$ (la cui radice è 5,01) e quindi $\Delta x = 0,06199$.

4.11.5 Sintesi

Derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$
x	1	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	e^x	e^x

Regole di derivazione

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D[kf(x)] = kf'(x)$$

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

4.11.6 Applicazioni non solo matematiche

Il calcolo della derivata è entrato da protagonista nella descrizione matematica dei fenomeni naturali da almeno 300 anni e più recentemente anche nello studio delle scienze umane e sociali.

Gli esempi che seguono si servono di questo calcolo in due modi:

1. per trovare il tasso di variazione: data una funzione, si deve cercare quanto rapidamente essa varia rispetto alla sua variabile;

2. attraverso l'equazione alle differenze, nella forma diretta $\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x$, o nella forma inversa $\Delta x \cong \frac{\Delta f(x)}{f'(x_0)}$.

L' utilità dell'equazione alle differenze viene dal fatto che si tratta di un'equazione di primo grado in Δx , perché i termini infinitesimi di grado superiore sono trascurati. Le soluzioni che così si ottengono sono approssimate, ma in genere il grado di imprecisione è sopportabile.

Esempio 4.63. Se lanci verso l'alto una palla alla velocità iniziale $v = 20$ m/s, questa viene frenata dalla forza di gravità e la sua legge del moto risulta all'incirca $h(t) = 20t - 5t^2$. Trova a quale altezza h la palla si ferma.

Risposta. Se la palla si ferma, la sua velocità è nulla, quindi:

$$v(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 20 - 10t = 0 \rightarrow t = 2s \rightarrow h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20m.$$

Dopo quanto tempo dal lancio la palla si trova a metà altezza?

Risposta. $\Delta t \cong \frac{\Delta h(t)}{v(0)} = \frac{10}{20} = 0,5$ s. Considera l'imprecisione dell'ultima risposta, visto che puoi avere il risultato esatto direttamente dall'equazione del moto, con $h(t) = 10$.

Esempio 4.64. L'aereo A parte da Milano a mezzogiorno e vola in direzione Ovest mediamente a 800 km/h, mentre l'aereo B parte due ore dopo e si dirige a Sud a 800 km/h. Se volano alla stessa quota, con quale velocità si allontanano l'uno dall'altro dopo 4 ore?

Soluzione. Le due equazioni del moto sono $s_A = 800t$ e $s_B = 800(t - 2)$. Calcoliamo prima la distanza fra i due, poi la loro velocità relativa. Si tratta di direzioni perpendicolari e possiamo applicare il teorema di Pitagora.

$$s_{AB} = \sqrt{s_A^2 + s_B^2} = \sqrt{(800t)^2 + [(800(t-2))]^2} = 800\sqrt{t^2 + t^2 - 2t + 4} = 800\sqrt{2t^2 - 2t + 4}.$$

$$v_{AB}|_{t=4} = \frac{ds_{AB}}{dt} = \frac{800(2t-4)}{2\sqrt{2t^2-2t+4}} \Big|_{t=4} \cong 358 \text{ km/h.}$$

Esempio 4.65. Un circuito è percorso da corrente variabile. Infatti la carica che attraversa il conduttore ad un certo istante t è data da $q(t) = t^3 - 24t$. È possibile che in qualche istante le cariche siano ferme?

Risposta. Se le cariche sono ferme, la corrente è nulla.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 3t^2 - 24 = 0 \rightarrow t = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \text{ s.}$$

Esempio 4.66. Il biologo Jacques Monod mostrò che lo sviluppo di una colonia di batteri di Escherichia Coli segue una crescita esponenziale, se sufficientemente nutrita. Ogni microrganismo si scinde in due dopo circa 20 minuti, per cui la popolazione al tempo t , misurato in ore, conta $N(t) = N_0 e^{\frac{t}{3}}$ individui. Dopo quante ore il numero di batteri passa da 10^6 a 10^9 ?

$$\text{Soluzione: } \Delta N = N'(t)\Delta t = \frac{N_0}{3} e^{\frac{t}{3}} \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{3\Delta N}{N_0 e^{\frac{t}{3}}} = \frac{3\Delta N}{N(t)}.$$

Il numero iniziale di batteri è $10^6 = N(0) = N_0 e^0$. Perciò: $\Delta t = \frac{3(10^9 - 10^6)}{10^9}$, che, calcolato in ore, corrisponde a 3 ore meno 11 secondi circa.

□ **Osservazione** Si tratta di un problema tipico sulla crescita esponenziale, di quelli già risolti quando ancora non conoscevi l'esistenza delle derivate, riguardanti per esempio l'interesse composto o il decadimento radiattivo.

□ **Osservazione** Come mai in un caso del genere l'uso delle derivate non è indispensabile? Perché la funzione esponenziale è l'unica funzione che ha per derivata...

□ **Osservazione** Dunque, la risposta è che in quasi 3 ore il numero di batteri passa da un milione a un miliardo, che è 1000 volte tanto. Possiamo pensare che occorra lo stesso tempo per passare da 1 individuo a 1000, oppure da 1000 individui a 1 milione?

Esempio 4.67. Il costo marginale è l'aumento di costo che si ha quando si vuole produrre un'unità in più di un certo bene.

Supponi che per produrre un certo numero n di aghi il costo in euro sia $y = \sqrt{n}$. Calcola il costo marginale per produrne più di 10.000.

Soluzione: $y = \sqrt{n} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Se $n = 10000$, $\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{10000}}\Delta n = \frac{\Delta n}{200}$. Il costo marginale, cioè per unità in più, è quindi dello 0,5%.

□ **Osservazione** Anche in questo caso concreto, non è possibile pensare che Δn sia un infinitesimo, dato che non ha senso calcolare il costo per frazioni infinitesime di un ago.

Esempio 4.68. Una barra metallica è lunga 10 m a $T = 0^\circ\text{C}$ e al crescere della temperatura si dilata secondo la legge $l(T) = 10(1 + 0,000024T)$. Di quanti gradi occorre aumentare la temperatura perché aumenti la sua lunghezza di 5 cm?

La risposta è la stessa in ogni caso, oppure dipende dal valore iniziale di T ?

Risposta. $\Delta T \cong \frac{\Delta l(T)}{l'(T)} = \frac{0,05}{10 \cdot 0,000024} = 208,3^\circ\text{C}$.

Nella formula risolutiva non compare il simbolo T , quindi la risposta non dipende dalla temperatura iniziale. Ovviamente tutto questo deve avvenire nei limiti del fenomeno, cioè finché non si raggiunge la temperatura di fusione.

□ **Osservazione** Si tratta di un semplice esercizio di fisica: la legge coinvolta si chiama legge della dilatazione lineare, perché il suo grafico nel piano cartesiano è una retta. Poiché la legge è espressa da un polinomio di primo grado, la soluzione non contiene la variabile T e l'equazione alle differenze è esatta: non ci sono infinitesimi da trascurare.

Non è indispensabile coinvolgere il calcolo infinitesimale per un problema di primo grado, come questo: avresti potuto risolverlo anche in terza media.

4.12 Esercizi

4.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.4 Differenziale

4.1. Calcola il differenziale della variabile x nel punto $x = 2$. Ripeti poi il calcolo per $x = \frac{1}{5}$ e per $x = -\frac{2}{3}$.

a) $dx|_{x=2}$

e) $dy|_{y=a}$

b) $dx|_{x=\frac{1}{5}}$

f) $dz|_{z=k}$

c) $dx|_{x=-\frac{2}{3}}$

g) $dx|_{x=\varepsilon}$

d) $dx|_{x=a}$

h) $dx|_{x=M}$

4.2. Calcola il differenziale della funzione identica $y = x$ per i valori elencati.

a) $dy|_{x=0}$

b) $dy|_{x=\frac{1}{2k}}$

c) $dy|_{x=-\frac{2}{3}}$

d) $dy|_{x=a}$

e) $dy|_{x=2\varepsilon}$

4.3. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $y = \frac{3}{2}x$, per $x = 1$ e per $x = 0$; $[\frac{3}{2}dx]$

b) $y = ax$, per $x = 9$ e per $x = -\frac{3}{2}$; $[adx]$

c) $y = (6 - k)x$, per $x = -1$ e per $x = \frac{22}{5}$; $[(6 - k)dx]$

d) $y = \frac{k^2+2}{5}x$, per $x = 3$ e per $x = k$; $[\frac{k^2+2}{5}dx]$

e) $y = 5x$, per $x = 0$ e per $x = -10$; $[5dx]$

4.4. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $f(x) = -5 + 2x$; $df(x)|_{x=0} = \dots$, $df(x)|_{x=-1} = \dots$

b) $f(x) = (a + 3)x$; $df(x)|_{x=a} = \dots$; $df(x)|_{x=-a} = \dots$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 9$; $df(x)|_{x=\frac{2}{7}} = \dots$; $df(x)|_{x=0} = \dots$

d) $f(x) = \frac{x}{n}$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots$; $df(x)|_{x=\varepsilon} = \dots$

e) $f(x) = x + k$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots$; $df(x)|_{x=k} = \dots$

4.5. Calcola i differenziali per le funzioni date

a) Data $y = x^2$, calcola: $dy|_{x=5}$; $[10dx + d^2x \sim 10dx]$

$dy|_{x=-5}$; $[-10dx + d^2x \sim -10dx]$

$dy|_{x=2}$; $[4dx + d^2x \sim 4dx]$

b) Data $y = -x^2$, calcola: $dy|_{x=0}$; $dy|_{x=\frac{1}{2}}$; $dy|_{x=a}$; $[\sim 0; \sim -dx, \sim -2adx]$

c) Data $f(x) = 3x^2$, calcola: $df(x)|_{x=-2}$; $f(x)|_{x=\sqrt{2}}$; $[\sim -12dx; 6\sqrt{2}dx]$

$df(x)|_{x=b^2}$; $[\sim 6b^2dx]$

$$\begin{aligned} \text{d) Data } f(x) = \frac{x^2}{4}, \text{ calcola: } df(x)|_{x=-4}; & \quad f(x)|_{x=\sqrt{2}} & [\sim -2dx; \sim \frac{\sqrt{2}}{2} dx] \\ df(x)|_{x=b}; & & [\sim \frac{b}{2} dx] \end{aligned}$$

4.6. Differenzia:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = \frac{3}{x} \text{ per i valori: } x=0; \quad x = \frac{1}{2} \quad x = a; & \quad [\text{imp.}; \sim -12dx; \sim -\frac{3dx}{a^2}] \\ \text{b) } y = \frac{1}{3-x} \text{ per: } x=0; \quad x = \frac{1}{2} \quad x = 3; & \quad [\sim \frac{dx}{9}; \sim -\frac{4dx}{25}; \text{imp.}] \\ \text{c) } f(x) = \frac{2}{x} - 2 \text{ per: } x=2; \quad x = \frac{a}{3}; x = \frac{1}{2} & \quad [\sim -\frac{dx}{2}; \sim -\frac{18dx}{a^2}; \sim -8dx.] \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ per: } x=0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\sqrt{2}; & \quad [\text{imp.}; \sim -16dx; \sim -\frac{\sqrt{2}dx}{2}] \\ \text{e) } y = \frac{1}{2-x^2} \text{ per: } x=0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\sqrt{2}; & \quad [\sim 0; \sim \frac{4dx}{9}; \text{imp.}] \end{aligned}$$

4.7. Scrivi la funzione che esprime il differenziale delle funzioni date, secondo l'esempio:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 9 \rightarrow df(x) = 3(2xdx + d^2x) - 2dx \sim 6xdx - 2dx = (6x - 2)dx.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = 2x^2 - 5x + 1; & \quad [\sim (4x - 5) dx] \\ \text{b) } f(x) = (2x + 3)^2; & \quad [\sim (8x + 12) dx] \\ \text{c) } \frac{(1-5x)^2}{2}; & \quad [\sim (-5 + 25x) dx] \\ \text{d) } f(x) = x^3 - 1; & \quad [\sim 3x^2 dx] \\ \text{e) } f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 6x + 8; & \quad [\sim (3x^2 + 18x - 6) dx] \\ \text{f) } f(x) = 5\sqrt{x} & \quad [\sim \frac{5}{2\sqrt{x}} dx] \end{aligned}$$

4.8. Applica le regole di pag.79 per trovare l'espressione del differenziale.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = x(1-x^2); & \quad [\sim (1-3x^2) dx] \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{x} + 3x^2; & \quad [\sim (-\frac{1}{x^2} + 6x) dx] \\ \text{c) } f(x) = \frac{6-3x}{2x^2} + \sqrt{x}; & \quad [\sim (\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx] \\ \text{d) } f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{x}}; & \quad [\sim (9x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x}}) dx] \\ \text{e) } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{1-x}; & \quad [\sim (\frac{-2x^3 + 4x^2 - 2x}{(1-x)^2}) dx] \\ \text{f) } f(x) = 5x^2\sqrt{x}; & \quad [\sim (10x\sqrt{x} + \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}) dx] \end{aligned}$$

4.12.2 Esercizi sulle derivate

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto c.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = -5x^5 - 5x^2 + 2x, \quad c = -1 & \quad [-13] \\ \text{b) } f(x) = 3x^5 + 3x^4 + 5x, \quad c = -5 & \quad [7880] \\ \text{c) } f(x) = -5x^3 - 2x, \quad c = -2 & \quad [-62] \\ \text{d) } f(x) = 3x^5 - 3x^4, \quad c = 1 & \quad [3] \\ \text{e) } f(x) = -4x^4 - 2x^3, \quad c = -4 & \quad [928] \\ \text{f) } f(x) = -3x^3 - x, \quad c = -1 & \quad [-10] \end{aligned}$$

- g) $f(x) = 2x$, $c = 2$ [2]
 h) $f(x) = x^4 + 4x + 2$, $c = -4$ [-252]
 i) $f(x) = -4x^5 - 2x^4 - x^2$, $c = -1$ [-10]
 j) $f(x) = -x^2$, $c = -2$ [4]
 k) $f(x) = x^5 + x$, $c = -4$ [1281]
 l) $f(x) = 8x^3 + 2x$, $c = 1$ [26]
 m) $f(x) = 2x^5 + x^3$, $c = 0$ [0]
 n) $f(x) = -x^5 + x^4$, $c = -2$ [-112]
 o) $f(x) = -3x^5 + x^4 - x^2$, $c = -1$ [-17]

2. Calcola la retta tangente alla funzione nel punto P.

- a) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 4x - 8$, $P(2; -4)$ [y = 28x - 60]
 b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 7$, $P(1; -7)$ [y = 3x - 10]
 c) $f(x) = -9x^3 + 12x^2 + 12x - 10$, $P(-3; 305)$ [y = -303x - 604]
 d) $f(x) = -5$, $P(2; -5)$ [y = -5]
 e) $f(x) = 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 10x + 7$, $P(0; 7)$ [y = -10x + 7]
 f) $f(x) = 11x^3 - 12x^2 - x + 7$, $P(-4; -885)$ [y = 623x + 1607]
 g) $f(x) = 11x^3 - 11x^2 - 9x - 6$, $P(-5; -1611)$ [y = 926x + 3019]
 h) $f(x) = -7x - 5$, $P(-3; 16)$ [y = -7x - 5]
 i) $f(x) = -8$, $P(2; -8)$ [y = -8]
 j) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x + 5$, $P(3; 347)$ [y = 450x - 1003]
 k) $f(x) = 11$, $P(0; 11)$ [y = 11]
 l) $f(x) = -3x^3 - 7x^2 + 3x - 10$, $P(1; -17)$ [y = -20x + 3]
 m) $f(x) = 4x + 4$, $P(-3; -8)$ [y = 4x + 4]
 n) $f(x) = 5$, $P(-3; 5)$ [y = 5]
 o) $f(x) = 10x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x - 7$, $P(4; 3021)$ [y = 2869x - 8455]

3. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y=f(x)+g(x)$.

- a) $f(x) = -4x^5 + 5x^2 + 4x$ [-20x⁴ + 10x + 4]
 b) $f(x) = 5x^5 - 4x^2 + x$ [25x⁴ - 8x + 1]
 c) $f(x) = -x^4 + x + 4$ [-4x³ + 1]
 d) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ [8x³ + 9x²]
 e) $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1$ [8x³ + 6x²]
 f) $f(x) = -5x^4 + 3$ [-20x³]
 g) $f(x) = -x^4 + x^2 + 1$ [-4x³ + 2x]
 h) $f(x) = -2x^3 - 3x^2$ [-6x² - 6x]
 i) $f(x) = 4x^4 - x^2 - 3x$ [16x³ - 2x - 3]

j) $f(x) = -x^5 + 3x^2$	$[-5x^4 + 6x]$
k) $f(x) = 2$	$[0]$
l) $f(x) = 11x^3$	$[33x^2]$
m) $f(x) = 5x^3$	$[15x^2]$
n) $f(x) = x^4 - 3x$	$[4x^3 - 3]$
o) $f(x) = 3x^4 - x^2$	$[12x^3 - 2x]$

4. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

a) $f(x) = (9 + \frac{5}{x})(-2x^3 + 5)$	$[-6x^2(9 + \frac{5}{x}) - \frac{5}{x^2}(-2x^3 + 5)]$
b) $f(x) = (1 + \frac{4}{x^2})(5x - 3)$	$[5 + \frac{20}{x^2} - \frac{8}{x^3}(5x - 3)]$
c) $f(x) = (-9 + \frac{2}{x^4})(-6 + \frac{2}{x^2})$	$[-\frac{4}{x^3}(-9 + \frac{2}{x^4}) - \frac{8}{x^5}(-6 + \frac{2}{x^2})]$
d) $f(x) = (-2 + \frac{3}{x})(-x - 1)$	$[2 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}(-x - 1)]$
e) $f(x) = (3x - 10)(2x^2 - 10)$	$[6x^2 + 4x(3x - 10) - 30]$
f) $f(x) = -\frac{3}{x}(1 + \frac{4}{x^3})$	$[\frac{3}{x^2}(1 + \frac{4}{x^3}) + \frac{36}{x^5}]$
g) $f(x) = (-7 - \frac{5}{x^4})(x^4 - 6)$	$[4x^3(-7 - \frac{5}{x^4}) + \frac{20}{x^5}(x^4 - 6)]$
h) $f(x) = (-2 - \frac{1}{x})(-x^4 - 2)$	$[-4x^3(-2 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}(-x^4 - 2)]$
i) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})(3x^4 + 9)$	$[12x^3(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}(3x^4 + 9)]$
j) $f(x) = (10 - \frac{5}{x^2})(-4x^4 - 9)$	$[-16x^3(10 - \frac{5}{x^2}) + \frac{10}{x^3}(-4x^4 - 9)]$
k) $f(x) = (-3 + \frac{5}{x})(-5x - 5)$	$[15 - \frac{25}{x} - \frac{5}{x^2}(-5x - 5)]$
l) $f(x) = -3x^3(8 + \frac{2}{x})$	$[-9x^2(8 + \frac{2}{x}) + 6x]$
m) $f(x) = (5x^2 + 5)(x^3 - 4)$	$[3x^2(5x^2 + 5) + 10x(x^3 - 4)]$
n) $f(x) = (5 + \frac{1}{x})(-x^4 - 8)$	$[-4x^3(5 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}(-x^4 - 8)]$
o) $f(x) = (5 - \frac{3}{x^4})(2x^4 + 1)$	$[8x^3(5 - \frac{3}{x^4}) + \frac{12}{x^5}(2x^4 + 1)]$

5. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) $y = \frac{10x-8}{9x+6}$	$[y' = 10(9x+6)^{-1} - 9\frac{10x-8}{(9x+6)^2}]$
b) $y = \frac{-5x-9}{4x+6}$	$[y' = -5(4x+6)^{-1} - 4\frac{-5x-9}{(4x+6)^2}]$
c) $y = \frac{-6x-8}{-7x-9}$	$[y' = -6(-7x-9)^{-1} + 7\frac{-6x-8}{(-7x-9)^2}]$
d) $y = \frac{x-6}{3x+4}$	$[y' = (3x+4)^{-1} - 3\frac{x-6}{(3x+4)^2}]$
e) $y = (3x+4)^{-1} - 3\frac{x-6}{(3x+4)^2}$	$[y' = -6(3x+4)^{-2} + 18\frac{x-6}{(3x+4)^3}]$
f) $y = \frac{4x-3}{-7x+3}$	$[y' = 4(-7x+3)^{-1} + 7\frac{4x-3}{(-7x+3)^2}]$

$$\begin{array}{ll}
 \text{g) } y = \frac{-6x+6}{2x-2} & [y' = -6(2x-2)^{-1} - 2 \frac{-6x+6}{(2x-2)^2}] \\
 \text{h) } y = \frac{-3x-9}{-3x-2} & [y' = -3(-3x-2)^{-1} + 3 \frac{-3x-9}{(-3x-2)^2}] \\
 \text{i) } y = \frac{5x+3}{4x+5} & [y' = 5(4x+5)^{-1} - 4 \frac{5x+3}{(4x+5)^2}] \\
 \text{j) } y = \frac{-3x-8}{-3x-3} & [y' = -3(-3x-3)^{-1} + 3 \frac{-3x-8}{(-3x-3)^2}] \\
 \text{k) } y = \frac{-9x-1}{-5x-10} & [y' = -9(-5x-10)^{-1} + 5 \frac{-9x-1}{(-5x-10)^2}] \\
 \text{l) } y = -\frac{x+8}{9x} & [y' = -\frac{1}{9x} + \frac{x+8}{9x^2}] \\
 \text{m) } y = \frac{-4x+3}{-9x+7} & [y' = -4(-9x+7)^{-1} + 9 \frac{-4x+3}{(-9x+7)^2}]
 \end{array}$$

6. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = -x^3 \cos(x) & [x^3 \sin(x) - 3x^2 \cos(x)] \\
 \text{b) } f(x) = -5x^4 \sin(x) & [-5x^4 \cos(x) - 20x^3 \sin(x)] \\
 \text{c) } f(x) = -3x^3 \tan(x) & [-3x^3 (\tan^2(x) + 1) - 9x^2 \tan(x)] \\
 \text{d) } f(x) = -2x^3 \sin(x) & [-2x^3 \cos(x) - 6x^2 \sin(x)] \\
 \text{e) } f(x) = 2x^2 \sin(x) & [2x^2 \cos(x) + 4x \sin(x)] \\
 \text{f) } f(x) = -4x \cos(x) & [4x \sin(x) - 4 \cos(x)] \\
 \text{g) } f(x) = x \cos(x) & [-x \sin(x) + \cos(x)] \\
 \text{h) } f(x) = 5x \cos(x) & [-5x \sin(x) + 5 \cos(x)] \\
 \text{i) } f(x) = x^3 \tan(x) & [x^3 (\tan^2(x) + 1) + 3x^2 \tan(x)] \\
 \text{j) } f(x) = x^2 \tan(x) & [x^2 (\tan^2(x) + 1) + 2x \tan(x)] \\
 \text{k) } f(x) = -4x^4 \sin(x) & [-4x^4 \cos(x) - 16x^3 \sin(x)] \\
 \text{l) } f(x) = 5x^4 \sin(x) & [5x^4 \cos(x) + 20x^3 \sin(x)] \\
 \text{m) } f(x) = 2x^3 \cos(x) & [-2x^3 \sin(x) + 6x^2 \cos(x)] \\
 \text{n) } f(x) = -4x^3 \sin(x) & [-4x^3 \cos(x) - 12x^2 \sin(x)] \\
 \text{o) } f(x) = 2x \sin(x) & [2x \cos(x) + 2 \sin(x)]
 \end{array}$$

7. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: $y=f[g(x)]$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = -3 \cos(5x) & [15 \sin(5x)] \\
 \text{b) } f(x) = 5 \cos(4x^4) & [-80x^3 \sin(4x^4)] \\
 \text{c) } f(x) = -3 \cos(2x^4) & [24x^3 \sin(2x^4)] \\
 \text{d) } f(x) = -5 \tan(3x^2) & [-30x (\tan^2(3x^2) + 1)] \\
 \text{e) } f(x) = 5 \tan(5x) & [25 \tan^2(5x) + 25] \\
 \text{f) } f(x) = 4 \sin(2x^2) & [16x \cos(2x^2)] \\
 \text{g) } f(x) = -3 \cos(x^2) & [6x \sin(x^2)] \\
 \text{h) } f(x) = 5 \cos(5x) & [-25 \sin(5x)] \\
 \text{i) } f(x) = \sin(4x^3) & [12x^2 \cos(4x^3)]
 \end{array}$$

j) $f(x) = -\sin(3x^2)$	$[-6x \cos(3x^2)]$
k) $f(x) = 5 \sin(5x)$	$[25 \cos(5x)]$
l) $f(x) = 5 \sin(2x)$	$[10 \cos(2x)]$
m) $f(x) = 3 \sin(5x^4)$	$[60x^3 \cos(5x^4)]$
n) $f(x) = 5 \cos(2x^3)$	$[-30x^2 \sin(2x^3)]$
o) $f(x) = -4 \tan(4x^4)$	$[-64x^3 (\tan^2(4x^4) + 1)]$

8. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: $y = f[g(x)]$.

a) $f(x) = -3e^{\sqrt{x^2+3}}$	$[-\frac{3xe^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}}]$
b) $f(x) = 3e^{\sqrt{3x^2+3}}$	$[\frac{9xe^{\sqrt{3x^2+3}}}{\sqrt{3x^2+3}}]$
c) $f(x) = e^{\sqrt{3x^3-5}}$	$[\frac{9x^2e^{\sqrt{3x^3-5}}}{2\sqrt{3x^3-5}}]$
d) $f(x) = -e^{\sqrt{5x^3-3}}$	$[-\frac{15x^2e^{\sqrt{5x^3-3}}}{2\sqrt{5x^3-3}}]$
e) $f(x) = -e^{\sqrt{-5x^3+1}}$	$[\frac{15x^2e^{\sqrt{-5x^3+1}}}{2\sqrt{-5x^3+1}}]$
f) $f(x) = 5e^{\sqrt{2x^4-5}}$	$[\frac{20x^3e^{\sqrt{2x^4-5}}}{\sqrt{2x^4-5}}]$
g) $f(x) = -e^{\sqrt{-x+1}}$	$[\frac{e^{\sqrt{-x+1}}}{2\sqrt{-x+1}}]$
h) $f(x) = -5e^{\sqrt{3x^3+1}}$	$[-\frac{45x^2e^{\sqrt{3x^3+1}}}{2\sqrt{3x^3+1}}]$
i) $f(x) = 2e^{\sqrt{-x^3-5}}$	$[-\frac{3x^2e^{\sqrt{-x^3-5}}}{\sqrt{-x^3-5}}]$
j) $f(x) = 2e^{\sqrt{-2x^4+5}}$	$[-\frac{8x^3e^{\sqrt{-2x^4+5}}}{\sqrt{-2x^4+5}}]$
k) $f(x) = 2e^{\sqrt{2x^3-4}}$	$[\frac{6x^2e^{\sqrt{2x^3-4}}}{\sqrt{2x^3-4}}]$
l) $f(x) = -4e^{\sqrt{-5x^3-3}}$	$[\frac{30x^2e^{\sqrt{-5x^3-3}}}{\sqrt{-5x^3-3}}]$
m) $f(x) = 2e^{\sqrt{-4x^4-4}}$	$[-\frac{16x^3e^{\sqrt{-4x^4-4}}}{\sqrt{-4x^4-4}}]$
n) $f(x) = 2e^{\sqrt{-3x^2-4}}$	$[-\frac{6xe^{\sqrt{-3x^2-4}}}{\sqrt{-3x^2-4}}]$
o) $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+1}}$	$[\frac{3x^2e^{\sqrt{2x^3+1}}}{\sqrt{2x^3+1}}]$

9. Deriva le seguenti funzioni contenenti funzioni esponenziali e logaritmiche.

a) $f(x) = 4(\log x - 1)$	$[\frac{4}{x}]$
b) $f(x) = \log 4x$	$[\frac{1}{x}]$

c) $f(x) = x(\ln x - 1)$	$[\ln x]$
d) $f(x) = e^x(\ln x)$	$[e^x(\ln x + \frac{1}{x})]$
e) $f(x) = x^3(\log x)$	$[x^2(3 \log x + 1)]$
f) $f(x) = e^{3x} - \ln x^2$	$[3e^{3x} \frac{2}{x}]$
g) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	$[\frac{1}{x^2}(1 - \ln x)]$
h) $f(x) = e^x(\ln x)$	$[e^x(\ln x + \frac{1}{x})]$
i) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$	$[-\frac{1}{x \ln^2 x}]$
j) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$	$[\frac{2}{x^2} e^{\frac{x-2}{x}}]$
k) $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$	$[\frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}]$
l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + 3$	$[2xe^{x^2} + e^x]$
m) $f(x) = e^{2x} \ln(1+x)$	$[e^{2x} [2 \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]]$
n) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\sqrt{x}}$	$[\cos x \cdot e^{\sin x} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}]$

10. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

a) $f(x) = (x^2 - 6)(2x^2 + 6)$	$[4x(x^2 - 6) + 2x(2x^2 + 6)]$
b) $f(x) = -5 \tan(x^2)$	$[-10x(\tan^2(x^2) + 1)]$
c) $f(x) = 4e^{\sqrt{4x^2-2}}$	$[\frac{16xe^{\sqrt{4x^2-2}}}{\sqrt{4x^2-2}}]$
d) $f(x) = 4e^{\sqrt{-5x^2-1}}$	$[-\frac{20xe^{\sqrt{-5x^2-1}}}{\sqrt{-5x^2-1}}]$
e) $f(x) = -8x^3 + 2x, \quad c = -1$	$[-22]$
f) $f(x) = -x^2, \quad c = 1$	$[-2]$
g) $f(x) = -2 \sin(5x^3)$	$[-30x^2 \cos(5x^3)]$
h) $f(x) = -5x^4 \sin(x)$	$[-5x^4 \cos(x) - 20x^3 \sin(x)]$
i) $f(x) = -5x^4 - 5x^3 + 5$	$[-20x^3 - 15x^2]$
j) $f(x) = -4 \tan(2x^2)$	$[-16x(\tan^2(2x^2) + 1)]$
k) $f(x) = -2 \tan(5x^2)$	$[-20x(\tan^2(5x^2) + 1)]$
l) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 12, \quad P(-3; -57)$	$[y = 47x + 84]$
m) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + x^2$	$[-4x^3 + 6x^2 + 2x]$
n) $f(x) = -x^3 \tan(x)$	$[-x^3(\tan^2(x) + 1) - 3x^2 \tan(x)]$
o) $f(x) = -4x^4$	$[-16x^3]$
p) $f(x) = -7x + 1, \quad P(0; 1)$	$[y = -7x + 1]$
q) $f(x) = 2e^{\sqrt{x^4+1}}$	$[\frac{4x^3 e^{\sqrt{x^4+1}}}{\sqrt{x^4+1}}]$

$$r) f(x) = -3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x - 12, \quad P(-1; -15) \quad [y = 10x - 5]$$

11. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

$$a) f(x) = 3x^5 - 3x^4, \quad c = -5 \quad [10875]$$

$$b) f(x) = -2x^4, \quad c = 4 \quad [-512]$$

$$c) y = \frac{-5x+6}{9x-6} \quad [y' = -5(9x-6)^{-1} - 9 \frac{-5x+6}{(9x-6)^2}]$$

$$d) y = \frac{8x-9}{-9x+3} \quad [y' = 8(-9x+3)^{-1} + 9 \frac{8x-9}{(-9x+3)^2}]$$

$$e) y = \frac{-7x+6}{-5x+3} \quad [y' = -7(-5x+3)^{-1} + 5 \frac{-7x+6}{(-5x+3)^2}]$$

$$f) f(x) = -8x^4 \quad [-32x^3]$$

$$g) f(x) = 2x^5 - 2x^3 - 5x \quad [10x^4 - 6x^2 - 5]$$

$$h) y = \frac{-4x+4}{5x+6} \quad [y' = -4(5x+6)^{-1} - 5 \frac{-4x+4}{(5x+6)^2}]$$

$$i) y = \frac{-10x+10}{-5x-8} \quad [y' = -10(-5x-8)^{-1} + 5 \frac{-10x+10}{(-5x-8)^2}]$$

$$j) y = \frac{6x-10}{2x-9} \quad [y' = 6(2x-9)^{-1} - 2 \frac{6x-10}{(2x-9)^2}]$$

$$k) y = \frac{4x+6}{-2x+10} \quad [y' = 4(-2x+10)^{-1} + 2 \frac{4x+6}{(-2x+10)^2}]$$

$$l) y = \frac{10x-6}{-x+2} \quad [y' = 10(-x+2)^{-1} + \frac{10x-6}{(-x+2)^2}]$$

$$m) f(x) = -4x^5 - 4x^4, \quad c = 0 \quad [0]$$

$$n) f(x) = -3x \tan(x) \quad [-3x(\tan^2(x) + 1) - 3 \tan(x)]$$

$$o) f(x) = \sin(3x^4) \quad [12x^3 \cos(3x^4)]$$

$$p) f(x) = (-5x^2 + 9)(4x^2 - 5) \quad [8x(-5x^2 + 9) - 10x(4x^2 - 5)]$$

$$q) y = \frac{8x-9}{-x-8} \quad [y' = 8(-x-8)^{-1} + \frac{8x-9}{(-x-8)^2}]$$

$$r) y = \frac{-2x-9}{3x+10} \quad [y' = -2(3x+10)^{-1} - 3 \frac{-2x-9}{(3x+10)^2}]$$

$$s) y = \frac{4x+10}{-8x+1} \quad [y' = 4(-8x+1)^{-1} + 8 \frac{4x+10}{(-8x+1)^2}]$$

$$t) y = \frac{-7x+6}{-2x+3} \quad [y' = -7(-2x+3)^{-1} + 2 \frac{-7x+6}{(-2x+3)^2}]$$

4.12.3 Problemi che coinvolgono l'uso della derivata

1. Quale è l'equazione delle rette tangenti al grafico di $y = \sin x$, nell'intervallo $[0; 2\pi]$, nei punti comuni con l'asse delle x ?
2. Data la curva $y = \frac{x+3}{x}$, trovare il punto in cui la tangente ha la pendenza $m = -2$.
3. Trova le equazioni delle tangenti al grafico della parabola $y = -x^2 + 7x - 6$ nei punti in cui esse formano un angolo di $\pm 45^\circ$ rispetto all'orizzontale e trova la loro intersezione.
4. Se la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore segue la legge $q = e^{-2t+3}$, dove t è il tempo in secondi, determina l'intensità di corrente dopo 5 s.

5. Un triangolo rettangolo ha per base un cateto di 10 cm. Il secondo cateto all'inizio misura 0 cm, ma cresce al ritmo di 1 cm ogni secondo. Con quale ritmo cresce l'ipotenusa? Si tratta di un ritmo costante o variabile? Controlla le risposte calcolando la velocità di crescita dell'ipotenusa quando il secondo cateto misura 10 cm, 20 cm, 30 cm ...
6. È noto che il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato è uguale a $\sqrt{2}$. Prolungando la diagonale di un infinitesimo, anche il lato subisce un allungamento infinitesimo. Che rapporto c'è fra i due allungamenti? Puoi giustificare la risposta alla luce delle tue conoscenze del calcolo infinitesimale?
7. Un recipiente ha la cavità interna a forma di cono equilatero, con il diametro di base di 30 cm. Il rubinetto che lo riempie eroga 4 l al minuto. In quanto tempo il recipiente sarà pieno a metà? Il livello dell'acqua all'interno cresce in modo costante? Con quale velocità cresce il livello dell'acqua, quando il recipiente è riempito per metà? E quando è quasi pieno?
8. Una lastra di policarbonato spessa 1 cm è trasparente per l'85%, cioè trattiene il 15% della radiazione luminosa che l'attraversa. Due lastre uguali non trattengono il doppio, perché la seconda trattiene il 15% di quanto le perviene dalla prima lastra: il 15% dell'85%. La diminuzione di intensità luminosa $dI(s)$ è quindi proporzionale alla radiazione in arrivo I e allo spessore ds della lastra: $dI = -0,15 \cdot I \cdot ds$. Riscrivi la legge come derivata: quali funzioni hanno la derivata proporzionale alla funzione stessa? Scrivi la legge dell'attenuazione luminosa $I = f(s)$. Quale spessore di policarbonato è sufficiente ad attenuare l'intensità luminosa del 40%?

Funzioni continue 5

5.1 Limiti

¹ In alcuni problemi non siamo interessati a sapere come si comporta una funzione per un valore ben preciso, dove magari non è definita, ci interessa di più sapere come si comporta quando si *avvicina* a quel valore.

Per trattare queste situazioni i matematici si sono inventati il concetto di *limite*.

Definizione 5.1. l è il **limite** di una funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c , se, quando x è infinitamente vicino a c , ma diverso da c , allora $f(x)$ è infinitamente vicino a l . E si scrive:

$$l = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \Leftrightarrow \forall x ((x \approx c \wedge x \neq c) \Rightarrow (f(x) \approx l))$$

5.2 Continuità

5.2.1 Definizione di continuità in un punto

Definizione 5.2. Diremo che una funzione è **continua** in un punto c , se è definita in c e, quando x è infinitamente vicino a c , allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$. E si scrive::

$$f \text{ è continua in } c \Leftrightarrow \forall x ((x \approx c) \Rightarrow (f(x) \approx f(c)))$$

Esempio 5.1. Data la funzione $f(x) = x^2 - 3x$ dimostrare che $f(x)$ è continua in 4.

La funzione è continua in 4 se per ogni x infinitamente vicino a 4 $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(4)$. Cioè se $x - 4 = \varepsilon$ allora $f(x) - f(4) = \delta$ dove ε e δ sono due infinitesimi.

dimostrazione

Da $x - 4 = \varepsilon$ si ricava che $x = 4 + \varepsilon$, quindi:

$$\begin{aligned} f(x) - f(4) &= f(4 + \varepsilon) - f(4) = (4 + \varepsilon)^2 - 3(4 + \varepsilon) - (4^2 - 3 \cdot 4) = \\ &= \cancel{16} + 8\varepsilon + \varepsilon^2 - \cancel{12} - 3\varepsilon - \cancel{16} + \cancel{12} = +8\varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon = \varepsilon(5 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Ora, il prodotto tra un infinitesimo e un finito è un infinitesimo, quindi, se la distanza tra x e 4 è infinitesima, anche la distanza tra $f(x)$ e $f(4)$ è infinitesima. qed

¹Per scrivere questo capitolo mi sono ispirato al testo di H. Jerome Keisler "Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach". Chi volesse approfondire l'argomento può acquistare il testo all'indirizzo: www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

Esempio 5.2. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{x}$ non è continua in 0.
dimostrazione TODO

Esempio 5.3. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{3}$ è continua in 0.
dimostrazione TODO

Esempio 5.4. Studiare la continuità di una funzione definita a tratti nel punto di giunzione.
 TODO

Per riassumere, data una funzione $y = f(x)$ definita in c , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua in c ;
2. se $x \approx c$ allora $f(x) \approx f(c)$;
3. se $st(x) = c$ allora $st(f(x)) = f(c)$;
4. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$;
5. se x si allontana da c di un infinitesimo allora $f(x)$ si allontana da $f(c)$ di un infinitesimo.

Teorema 5.1 (Derivabilità e continuità). *Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua in quel punto.*

Ipotesi: $f(x)$ è derivabile in c

Tesi: $f(x)$ è continua in c .

Dimostrazione. TODO

□

5.2.2 Definizione di continuità in un intervallo

Dimostrare che una funzione è continua in un punto è piuttosto laborioso, pur non essendo complicato, ma presenta un problema quando sono interessato a studiare la continuità di una funzione in un intervallo. Infatti in un intervallo, anche piccolo, i punti sono infiniti e dimostrare la continuità per ognuno di essi risulta piuttosto lungo. . . .

Per superare questo scoglio, i matematici hanno pensato un approccio diverso:

- ⇒ dimostrare che alcune funzioni elementari sono continue;
- ⇒ dimostrare che la somma, il prodotto, il quoziente e la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

In questo modo si può riconoscere la continuità di un gran numero di funzioni senza fare noiosi calcoli. Di seguito vediamo qualcuno di questi teoremi.

Funzioni elementari

Dimostriamo la continuità di alcune funzioni elementari.

Teorema 5.2 (Continuità delle costanti). *Le funzioni costanti sono continue.*

Ipotesi: $f(x) = k$.

Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

$$\forall x \text{ se } x_0 \approx x \text{ allora } f(x_0) \approx f(x)$$

Poniamo $x_0 = x + \varepsilon$, essendo la funzione costante, anche

$$f(x + \varepsilon) = k$$

che, ovviamente, è infinitamente vicino a k . In simboli:

$$f(x_0) = f(x + \varepsilon) = k \approx k = f(x)$$

□

Teorema 5.3 (Continuità della funzione identica). *La funzione identica ($y = x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = x$.

Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

$$\forall x \text{ se } x_0 \approx x \text{ allora } f(x_0) \approx f(x)$$

Poniamo $x_0 = x + \varepsilon$, $f(x_0) = f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon$. Dato che la differenza:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = x + \varepsilon - x = \varepsilon$$

è un infinitesimo, allora i due valori sono infinitamente vicini. In simboli:

$$f(x + \varepsilon) = x + \varepsilon \approx x = f(x)$$

□

Teorema 5.4 (Continuità della funzione seno). *La funzione seno ($y = \sin x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = \sin x$.

Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Usando la prima proprietà delle potenze:

$$f(x + \varepsilon) = \sin(x + \varepsilon) = \sin x \cos \varepsilon - \cos x \sin \varepsilon$$

Se un angolo è infinitamente vicino a zero avrà il coseno infinitamente vicino a uno e il seno infinitamente vicino a zero. Quindi:

$$\sin(x + \varepsilon) = \sin x + \delta$$

Perciò:

$$f(x + \varepsilon) = \sin(x + \varepsilon) = \sin(x + \varepsilon) = \sin x + \delta \approx \sin x = f(x)$$

□

Teorema 5.5 (Continuità della funzione esponenziale). *La funzione esponenziale ($y = a^x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = a^x$.

Tesi: $f(x)$ è continua.

Dimostrazione. Usando la prima proprietà delle potenze:

$$f(x + \varepsilon) = a^{x+\varepsilon} = a^x \cdot a^\varepsilon \approx a^x \cdot 1 = a^x = f(x)$$

□

Oltre alle funzioni precedenti, anche altre funzioni elementari sono continue, il seguente elenco riporta le principali funzioni continue:

- ⇒ $y = k$
- ⇒ $y = x$
- ⇒ $y = \frac{1}{x}$ *
- ⇒ $y = \sqrt[n]{x}$ *
- ⇒ $y = |x|$
- ⇒ $y = a^x$
- ⇒ $y = \log_a x$ *
- ⇒ $y = \sin x$
- ⇒ $y = \cos x$
- ⇒ $y = \operatorname{tg} x$ *

□ **Osservazione** Le funzioni segnate da *sono continue non su tutto \mathbb{R} , ma solo **all'interno del loro campo di esistenza**.

Composizione di funzioni

Vediamo ora che anche componendo in alcuni modi funzioni continue otteniamo ancora funzioni continue.

Teorema 5.6 (Somma di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f + g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue

Tesi: $f(x) + g(x)$ è continua.

Dimostrazione. Dato che sono continue:

$$f(x + \varepsilon) + g(x + \varepsilon) = f(x) + \alpha + g(x) + \beta$$

Ma la somma di due infinitesimi è ancora un infinitesimo quindi:

$$f(x) + g(x) + (\alpha + \beta) \approx f(x) + g(x)$$

□

Teorema 5.7 (Prodotto di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f \cdot g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue

Tesi: $f(x) \cdot g(x)$ è continua.

Dimostrazione. Dato che sono continue:

$$f(x + \varepsilon) \cdot g(x + \varepsilon) = (f(x) + \alpha) \cdot (g(x) + \beta) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \beta + g(x) \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta \approx f(x) \cdot g(x)$$

Dato che sia il prodotto tra un numero finito e un infinitesimo, sia il prodotto tra due infinitesimi sono infinitesimi e lo è anche la loro somma. \square

Corollario 5.8. *Ogni funzione polinomiale è continua.*

Dimostrazione. Dato che una funzione polinomiale si può ottenere partendo da funzioni costanti e da funzioni identiche attraverso moltiplicazioni e addizioni, la tesi consegue dai teoremi precedenti. \square

Esempio 5.5. Dimostrare che $f(x) = 2x^2 + 3$ è una funzione continua.

Dimostrazione. $f(x) = 2x^2 + 3$ è continua perché è somma di due funzioni continue:

- ⇒ $y = 2x^2$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
 - ⇒ $y = 2$ è continua perché è una costante;
 - ⇒ $y = x^2$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
 - ⇒ $y = x$ è continua perché è una funzione identica;
 - ⇒ $y = x$ è continua perché è una funzione identica;
- ⇒ $y = 3$ è continua perché è una costante;

\square

Teorema 5.9 (Funzioni di funzioni). *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, anche $f(g(x))$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue

Tesi: $f(x) \circ g(x) = f(g(x))$ è continua.

Dimostrazione. Dato che g è continua:

$$f(g(x + \varepsilon)) = f(g(x) + \alpha)$$

e dato che f è continua:

$$f(g(x) + \alpha) = f(g(x)) + \beta$$

quindi:

$$f(g(x + \varepsilon)) = f(g(x) + \alpha) = f(g(x)) + \beta \approx f(g(x))$$

\square

5.3 Massimi e minimi

Data una funzione definita in un certo intervallo, può darsi che questa funzione abbia un massimo un minimo in questo intervallo.

Definizione 5.3. Chiamiamo **massimo** di una funzione in un intervallo I un punto $(c; f(c))$ tale che, per ogni x appartenente all'intervallo, $f(c)$ sia maggiore o uguale a $f(x)$:

$$(c; f(c)) \text{ è un massimo se } \forall x \in I \quad f(c) \geq f(x)$$

La definizione di **minimo** in un intervallo si ottiene facilmente modificando quella di massimo (scrivila tu e poi confrontala con quella scritta dagli altri tuoi compagni).

In un intervallo, una funzione potrebbe avere *più* minimi o massimi. Oppure potrebbe *non* avere minimi o massimi.

Esempio 5.6. $y = 3$ TODO

Esempio 5.7. $y = \sin x$ TODO

Esempio 5.8. $y = \frac{1}{x}$ TODO

Un importante teorema che riguarda i massimi e i minimi delle funzioni continue dice che se una funzione è continua e ha in punto di massimo (o di minimo), allora questo può trovarsi:

- i) o in un estremo;
- ii) o in un punto non derivabile;
- iii) o in un punto la cui derivata vale zero.

Noi dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 5.10 (Teorema di Fermat). *Se una funzione è definita in un intervallo chiuso, ha un massimo (minimo) in un punto interno all'intervallo e in quel punto è derivabile, allora in quel punto ha derivata nulla.*

Ipotesi:

1. f è una funzione definita nell'intervallo chiuso $[a; b]$
2. c appartiene all'intervallo aperto $]a; b[$
3. $f(c)$ è un massimo (minimo);
4. f è derivabile in c

Tesi:

la derivata $f'(c) = 0$

Dimostrazione. Consideriamo un valore Δ positivo abbastanza piccolo in modo che $c + \Delta$ appartenga ancora all'intervallo $[a; b]$. Poiché $f(c)$ è un massimo:

$$f(c + \Delta) \leq f(c) \Rightarrow f(c + \Delta) - f(c) \leq 0$$

Dividendo entrambi i membri per Δ otteniamo:

$$\frac{f(c + \Delta) - f(c)}{\Delta} \leq 0$$

Questa disuguaglianza continua a valere anche se Δ è un infinitesimo:

$$\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \leq 0$$

e prendendo la parte standard dell'espressione otteniamo:

$$f'_+(c) = \text{st} \left(\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \right) \leq 0$$

Ora possiamo ripetere le stesse considerazioni prendendo un valore Δ negativo. Poiché $f(c)$ è un massimo:

$$f(c + \Delta) \leq f(c) \Rightarrow f(c + \Delta) - f(c) \leq 0$$

Questa volta dividendo entrambi i membri per Δ dobbiamo tener conto che Δ è negativo quindi dobbiamo invertire il verso del predicato:

$$\frac{f(c + \Delta) - f(c)}{\Delta} \geq 0$$

Questa disuguaglianza continua a valere anche se Δ è un infinitesimo:

$$\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \geq 0$$

e prendendo la parte standard dell'espressione otteniamo:

$$f'_-(c) = \text{st} \left(\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \right) \geq 0$$

Ma poiché per ipotesi la funzione è derivabile in c , il valore dell'espressione: $\text{st} \left(\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \right)$ non dipende dal valore dell'infinitesimo δ perciò: $f'_-(c) = f'_+(c)$. Quindi:

$$0 \leq f'_-(c) = f'_+(c) \leq 0$$

Da cui si ricava la tesi:

$$f(c) = 0$$

□

Metodo per trovare i massimi e minimi

5.4 Massimi e minimi: applicazioni

5.5 Derivate e grafico di funzioni

5.6 Proprietà delle funzioni continue

5.6.1 Numeri iperinteri

Per affrontare alcuni dei prossimi argomenti, abbiamo bisogno di un altro strumento matematico: l'insieme dei numeri *Iperinteri*. Non è difficile visualizzare sulla retta dei numeri questo insieme.

Per dare una definizione rigorosa dei numeri Iperinteri abbiamo bisogno di usare la funzione *parte intera* di un numero: che si indica con il simbolo: $[x]$.

x	-3	-2,4	-2,01	-1,2	-1,03	-0,3	0,2	1	1,6	1,99	2	2,03	2,9	3,42
$y = [x]$	-3	-3	-3	-2	-2	-1	0	1	1	1	2	2	2	3

La parte intera di un numero x è il più grande numero intero n minore o uguale a x . Attenzione che mentre per i numeri positivi il concetto è abbastanza naturale, per quelli negativi il concetto non è altrettanto immediato, vedi la tabella precedente.

Applicando la funzione parte intera ai numeri Iperreali otteniamo gli Iperinteri.

Definizione 5.4. I numeri **Iperinteri** sono quei numeri Iperreali per cui vale l'uguaglianza:

$$x = [x]$$

Possiamo fare alcune osservazioni sugli Iperinteri:

1. La somma algebrica di due numeri Iperinteri è un numero Iperintero.
2. Ogni numero Iperreale si trova tra due numeri Iperinteri:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

Possiamo usare gli Interi per dividere un intervallo Reale $[a; b]$ in n parti uguali. Ciascuna di queste n parti uguali è lunga $l = \frac{b-a}{n}$.

Gli n sotto intervalli che si ottengono sono:

$$[a; a+l[, [a+l; a+2l[, \dots, [a+jl; a+(j+1)l[, \dots, [a+(n-1)l; a+nl = b]$$

Gli estremi di questi intervalli sono chiamati punti di partizione dell'intervallo:

$$a; a+l; a+2l; a+3l; \dots; a+(n-1)l; a+nl = b$$

Possiamo ora estendere questo procedimento ai numeri Iperreali. Scegliamo un numero infinito iperintero H e dividiamo in parti uguali l'intervallo di numeri Iperreali $[a; b]$. Ogni sotto intervallo avrà la stessa lunghezza infinitesima $\delta = \frac{b-a}{H}$.

Gli H sotto intervalli che si ottengono sono:

$$[a; a+\delta[, [a+\delta; a+2\delta[, [a+j\delta; a+(j+1)\delta[, \dots, [a+(H-1)\delta; a+H\delta = b]$$

e i punti di partizione sono:

$$a; a+\delta; a+2\delta; \dots; a+j\delta; \dots; a+H\delta = b$$

cioè i punti $a+j\delta$ con j che varia da 0 a H .

Ogni numero iperreale x appartenente all'intervallo $[a; b[$ apparterrà a uno dei sotto intervalli infinitesimi:

$$x \in [a+j\delta; a+(j+1)\delta[\Rightarrow a+j\delta \leq x < a+(j+1)\delta$$

Possiamo ora affrontare alcuni teoremi riguardanti le funzioni continue.

5.6.2 Alcuni teoremi delle funzioni continue

Il prossimo teorema riguarda gli zeri di una funzione. Con zero di una funzione si intende un valore della x che rende la funzione uguale a zero:

Definizione 5.5. c è uno **zero** della funzione $f(x)$ se $f(c) = 0$

Teorema 5.11 (Teorema degli zeri). *Supponiamo che una funzione $f(x)$ sia continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$ e agli estremi dell'intervallo assuma valori di segno opposto allora la funzione ha uno zero nell'intervallo aperto $]a; b[$.*

Ipotesi:

1. f è una funzione continua;
2. f è definita nell'intervallo chiuso $[a; b]$;
3. $f(a) \cdot f(b) < 0$ (equivale a dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno valori discordi).

Tesi:

$$\exists c \in]a; b[\text{ tale che } f(c) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, posto H un Iperintero infinito, dividiamo l'intervallo iperreale $[a; b]$ in H parti uguali

$$a; a + \delta; a + 2\delta; \dots; a + j\delta; \dots; a + H\delta = b$$

Chiamiamo k l'indice per il quale:

$$f(a + k\delta) \leq 0 < f(a + (k + 1)\delta)$$

Dato che f è continua:

$$a + k\delta \approx a + (k + 1)\delta \Rightarrow f(a + k\delta) \approx f(a + (k + 1)\delta)$$

Ma l'unico numero standard che è infinitamente vicino ad un numero minore di zero e anche ad un numero maggiore di zero è zero. Quindi chiamando $c = st(a + k\delta) = st(a + (k + 1)\delta)$

$$f(c) = f(st(a + k\delta)) = st(f(a + k\delta)) = 0$$

In modo analogo si dimostra il caso in cui $f(a) > 0 > f(b)$. □

Il teorema dimostra che in $]a; b[$ c'è almeno uno zero della funzione, ma non dice nulla sul numero degli zeri.

La dimostrazione di questo teorema permette di dimostrarne facilmente degli altri:

Corollario 5.12. *Il teorema dei valori intermedi dice che se una funzione è continua in un intervallo $[a; b]$ allora tra a e b assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Suggerimento: supponiamo che $f(a) \leq h < f(b)$, costruiamo una nuova funzione: $g(x) = f(x) - h$. La funzione g soddisfa tutte le ipotesi del teorema precedente per cui:

$$\exists c \in]a; b[\text{ tale che } g(c) = 0$$

e sostituendo la funzione g otteniamo:

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - h = 0 \Rightarrow f(c) = h$$

□

Corollario 5.13. *Se una funzione è continua in un intervallo $[a; b]$ e $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ allora:*

1. se $f(c) < 0$ per un qualunque $c \in [a; b]$ allora $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a; b]$;
2. se $f(c) > 0$ per un qualunque $c \in [a; b]$ allora $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Dimostrazione. Suggerimento: consideriamo il primo caso: $f(c) > 0$ se esistesse un valore $d \in [a; b]$ per cui $f(d) < 0$ allora nell'intervallo $[c; d]$ esiste un punto $e \Rightarrow f(e) = 0$ essendo $[c; d] \subseteq [a; b]$ ciò contraddirebbe l'ipotesi. In modo analogo si dimostra il secondo caso. □

Un altro importante teorema è il seguente.

Teorema 5.14 (Teorema di Weierstrass). *Supponiamo che una funzione $f(x)$ sia continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$ allora, in questo intervallo assume un valore massimo e un valore minimo.*

Ipotesi:

1. f è una funzione continua;
2. f è definita nell'intervallo chiuso $[a; b]$

Tesi:

1. $\exists c \in [a; b]$ tale che $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b]$;
2. $\exists c \in [a; b]$ tale che $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima tesi.

Operiamo una divisione infinita dell'intervallo $[a; b]$ ottenendo i punti di partizione:

$$a; a + \delta; a + 2\delta; \dots; a + j\delta; \dots; a + H\delta = b$$

Per il principio di transfer posso confrontare tra di loro tutti i valori della funzione in questi punti e troverò che uno di questi è maggiore o uguale a tutti gli altri, supponiamo che questo punto sia: $a + (k + 1)\delta$:

$$f(a + k\delta) \geq f(a + j\delta) \text{ per ogni } j \text{ Iperintero}$$

Considerando la parte standard se $c = st(a + k\delta)$ e $d = st(a + j\delta)$ ne deriva che:

$$f(c) \geq f(d)$$

In modo analogo si dimostra la seconda tesi. □

Teorema 5.15 (Teorema di Rolle). *Supponiamo che una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$, sia derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ e, agli estremi, assuma lo stesso valore: $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto c dell'intervallo $]a; b[$ nel quale la derivata è nulla: $f'(c) = 0$.*

Ipotesi:

1. f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$
2. f è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$
3. $f(a) = f(b)$

Tesi:

$$\exists c \in]a; b[\text{ tale che } f'(c) = 0;$$

Dimostrazione. Dato che valgono le ipotesi del teorema di Weierstrass, nell'intervallo $[a; b]$ esisterà un massimo M e un minimo m . Si possono distinguere 3 casi:

1. Se $M = m = f(a) = f(b)$, la funzione è costante. In questo caso la dimostrazione è banale poiché $f'(c) = 0 \forall c \in]a; b[$
2. Se $M > f(a)$ vuol dire che la funzione ha un massimo in c ovvero $f(c) = M$. La funzione f nel punto c soddisfa tutte le ipotesi del teorema del punto critico,
 - a) f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$;
 - b) c appartiene all'intervallo aperto $]a; b[$;
 - c) $f(c)$ è un massimo;
 - d) f è derivabile in c .

quindi in c la funzione ha derivata nulla: $f'(c) = 0$.

3. Se $m < f(a)$ vuol dire che la funzione ha un minimo in c ovvero $f(c) = m$. Si dimostra in modo analogo al punto 2.

□

Teorema 5.16 (Teorema di Lagrange o della pendenza media). *La pendenza media di una funzione f in un intervallo $[a; b]$ è data da:*

$$\text{pendenza media} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se una funzione f è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$ e è derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ allora esiste un punto c dell'intervallo $]a; b[$ nel quale la derivata è ha lo stesso valore della pendenza media: $f'(c) = \text{pendenza media}$.

Ipotesi:

1. f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$
2. f è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$

Tesi:

$$\exists c \in]a; b[\text{ tale che } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

Dimostrazione. Chiamiamo m la pendenza media: $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. La funzione lineare che congiunge i due punti $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$ è:

$$l(x) = f(a) + m(x - a)$$

Costruiamo una nuova funzione uguale alla distanza in verticale tra $f(x)$ e $l(x)$:

$$h(x) = f(x) - l(x)$$

Questa nuova funzione soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle:

1. h è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$ poiché è somma di due funzioni continue;
2. h è una funzione derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ poiché è somma di due funzioni derivabili;
3. $h(a) = h(b)$ poiché:

$$h(a) = f(a) - (f(a) + m(a - a)) = f(a) - f(a) - 0 = 0$$

e

$$h(b) = f(b) - (f(a) + m(b - a)) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = \\ = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Quindi esiste un punto c dell'intervallo $]a; b[$ tale che:

$$h'(c) = 0$$

Sostituendo la funzione h con la sua definizione otteniamo:

$$h'(c) = f'(c) - l'(c) = f'(c) - m = 0 \Rightarrow f'(c) = m$$

E sostituendo m otteniamo la tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 5.17. *Derivata e andamento di una funzione. Se in una funzione $f'(x) > 0$ per ogni punto di un certo intervallo I , allora la funzione è crescente in tutto l'intervallo.*

Dimostrazione. Consideriamo due punti $x_0 < x_1 \in I$, per il teorema della pendenza media:

$$\exists c \in I \text{ tale che } f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Dato che

$$\forall c \in I \Rightarrow f'(c) > 0$$

si ha:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$$

E poiché il denominatore è positivo, $x_1 - x_0 > 0$

$$f(x_1) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$$

□

Studio di funzioni 6

In generale rappresentiamo una funzione con un'espressione simile a: $f : x \mapsto f(x)$ o $y = f(x)$ dove:

- $f(x)$ è un'espressione che contiene la variabile x ;
- y è il risultato di quell'espressione quando assegniamo un particolare valore a x .

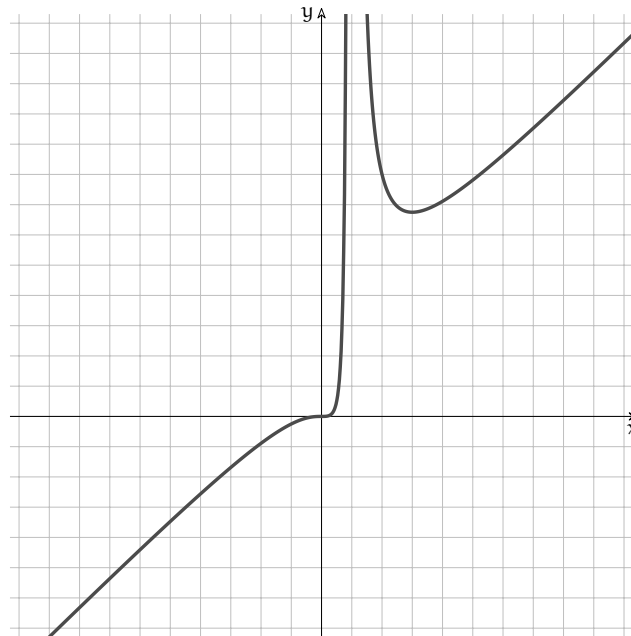
y viene anche detta *variabile dipendente* e x *variabile indipendente*.

Una funzione può anche essere rappresentata su un piano cartesiano da un grafico. Il grafico di una funzione avrà la particolarità di intersecare ogni retta parallela all'asse y al massimo in un punto. Scopo di questo capitolo è descrivere il comportamento di una funzione.

6.1 Descrizione del grafico

Iniziamo da un esempio non troppo banale. Consideriamo la seguente funzione che è rappresentata sia come espressione matematica che come grafico.

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$



Per ora ci fidiamo che quello di destra è proprio il grafico corrispondente all'espressione scritta a sinistra. La descrizione:

“Sono due linee che vanno su e giù nel piano cartesiano.”

è un po' troppo generica e potrebbe descrivere una grande quantità di grafici. Di seguito vedremo quante informazioni possiamo ricavare dal grafico.

6.1.1 Descrizione a parole

Ogni volta che dovrai descrivere una funzione tieni conto dei seguenti punti:

1. *Prime caratteristiche*
 - a) *Campo di esistenza*
È definita per ogni valore di x tranne che nella zona attorno a $+1$.
 - b) *Continuità*
È continua su tutto \mathbb{R} tranne che attorno a $+1$.
 - c) *Intersezioni con gli assi*
Interseca l'asse y nel punto zero e l'asse x solo nel punto zero.
 - d) *Segno*
È negativa quando $x < 0$ e positiva quando $x > 0$.
 - e) *Simmetrie*
Non è simmetrica né rispetto all'asse y né rispetto all'origine.
2. *Comportamento agli estremi del campo di esistenza*
 - a) Quando x è un infinito negativo anche y è un infinito negativo.
 - b) Quando x è infinitamente vicino a 1 , da entrambi i lati, y è un infinito positivo.
 - c) Quando x è un infinito positivo anche y è un infinito positivo.
3. *Asintoti*
 - a) *Asintoti verticali*
Vicino a 1 c'è un asintoto verticale.
 - b) *Asintoti orizzontali*
Non ci sono asintoti orizzontali.
 - c) *Asintoti obliqui*
Potrebbe esserci un asintoto obliquo.
4. *Punti stazionari*
 - a) In $(0; 0)$ c'è un flesso orizzontale.
 - b) Quando x vale circa 3 c'è un punto di minimo.
5. *Andamento*
 - a) È crescente fino a 1 .
 - b) È decrescente da 1 a 3 .
 - c) È crescente da 3 in poi.
6. *Concavità*
 - a) Fino a 0 ha la concavità verso il basso.
 - b) Da 0 a 1 ha la concavità verso l'alto.
 - c) Da 1 in poi ha la concavità verso l'alto.
7. *Insieme immagine*
L'insieme immagine è tutto \mathbb{R} perché ogni valore di y è immagine di almeno un valore di x .

□ **Osservazione** Abbiamo tratto una serie di informazioni da un grafico limitato lavorando molto di fantasia:

- ⇒ chi ci dice che allontanandoci molto a sinistra o a destra il comportamento della funzione non sia completamente diverso da quello che appare nel piccolo spazio visualizzato? Potrebbero esserci degli intervalli in cui non è definita, oppure in cui inverte la pendenza, ...

- Cosa possiamo dire della funzione nell'intervallo attorno a $x = 1$ dove il grafico non è visibile? Potrebbe non essere definita in un intero intervallo o solo in un punto o avere dei valori molto distanti da quelli visualizzati nel nostro piccolo disegno.
- Siamo sicuri che un ingrandimento in un punto qualsiasi non potrebbe rivelare un comportamento imprevedibile? Potrebbero avere dei buchi, delle oscillazioni, o altre anomalie così piccole da non poter essere vista a questa scala.

6.2 Analisi della funzione

L'analisi dell'espressione matematica della funzione può darci informazioni più precise e più sicure di quelle ricavate osservando il grafico. Riprendiamo quindi l'espressione matematica della funzione e andiamo a studiarne le sue proprietà:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

□ **Osservazione** Man mano che procederemo con l'analisi, riporteremo su un grafico le informazioni ottenute. In questo modo potremo effettuare un controllo di coerenza dei risultati e, alla fine, avremo la possibilità di disegnare il grafico con una buona precisione.

6.2.1 Le prime caratteristiche

Campo di esistenza

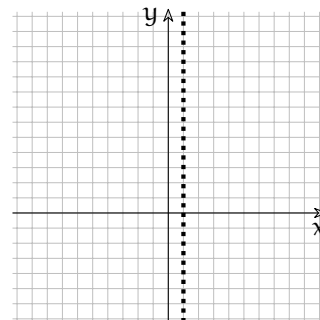
Nella funzione è presente una sola operazione critica: la divisione. La divisione non dà risultato se il divisore è uguale a zero quindi questa funzione non è definita se:

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Questo significa che il campo di esistenza della funzione è:

$$CE = \mathbb{R} - \{1\}$$

Cioè la funzione è definita per qualunque valore di x tranne che per $x = 1$.



Continuità

La funzione sarà continua in tutto il suo campo di esistenza poiché è ottenuta da funzioni continue combinate tra loro con le 4 operazioni aritmetiche.

Intersezioni con gli assi

Intersezione con l'asse y Dato che l'asse y ha equazione $x = 0$ l'intersezione può essere trovata risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{(x-1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0^3}{(0-1)^2} \Rightarrow y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$$

Quando x vale zero, anche y vale zero: la funzione passa per l'origine degli assi.

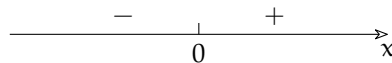
Intersezione con l'asse x Dato che l'asse x ha equazione $y = 0$ l'intersezione può essere trovata risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

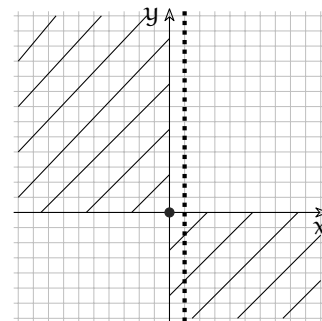
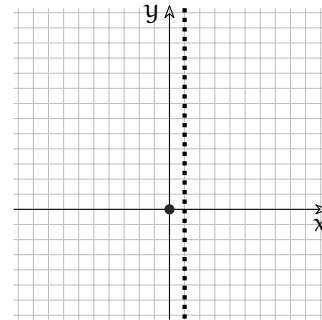
Ci ricordiamo infatti che una frazione vale zero solo quando è nullo il suo numeratore. Quindi y vale zero solo quando anche x vale zero.

Segno

Per studiare il segno di una frazione dobbiamo studiare il segno del numeratore del denominatore e calcolare poi il segno della funzione usando la regola dei segni della divisione. Nel nostro caso, però, possiamo osservare che il denominatore non è mai negativo, essendo il quadrato di una funzione, quindi il segno della frazione è uguale al segno del numeratore:



Quindi l'intera funzione è negativa quando x è negativo e positiva quando x è positivo. Nel piano cartesiano cancelliamo le superfici in cui non è presente la funzione.



Simmetrie

Il campo di esistenza non è simmetrico rispetto all'origine questo basta per dire che anche la funzione non potrà avere alcuna simmetria rispetto all'origine, non sarà né pari né dispari.

Viceversa, se il campo di esistenza fosse simmetrico, questo non basta per dire che la funzione sia simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari) o rispetto all'origine (funzione dispari).

Per stabilire questo, bisogna sostituire nell'espressione x con $-x$ e verificare quale di queste tre situazioni si ottiene:

1. $f(-x) = f(x)$: funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y ;
2. $f(-x) = -f(x)$: funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine);
3. *altrimenti*: nessuna simmetria.

Nel nostro caso:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{((-x)-1)^2} = -\frac{x^3}{(-x-1)^2}$$

Che è diverso sia da $\frac{x^3}{(x-1)^2}$ sia da $-\frac{x^3}{(x-1)^2}$

6.3 Comportamento asintotico

In questa parte della ricerca vogliamo scoprire come si comporta la funzione quando si avvicina ai punti dove non è definita.

6.3.1 Comportamento agli estremi del campo di esistenza

Nel primo punto abbiamo visto che il campo di esistenza è composto da due intervalli: $]-\infty; 1[$ e $]1; +\infty[$ (quindi dobbiamo studiare come si comporta la funzione quando:

1. x è un infinito, $x = M$:

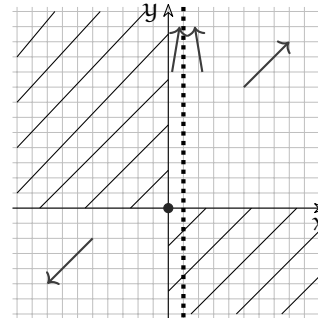
$$y = \frac{M^3}{(M-1)^2} \sim \frac{M^3}{M^2} = M$$

quindi se $x = M$ anche $y = M$ questo significa che quando x è un infinito negativo anche y lo è e quando x è un infinito positivo, anche y lo è.

2. x è infinitamente vicino a 1, $x = 1 + \varepsilon$:

$$y = \frac{(1 + \varepsilon)^3}{((1 + \varepsilon) - 1)^2} = \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} = M > 0$$

Quindi se $x \approx 1$ allora $y = M > 0$ indipendentemente dal segno di ε .



6.3.2 Asintoti

Possiamo concludere che la nostra funzione:

1. ha come asintoto verticale la retta di equazione: $x = 1$;
2. non ha asintoti orizzontali;
3. potrebbe avere asintoti obliqui.

6.3.3 Asintoti obliqui

Una funzione ha asintoto obliquo se $\frac{f(M)}{M}$ è un numero finito. In questo caso il precedente rapporto è proprio il coefficiente angolare dell'asintoto. Calcoliamo il rapporto nel caso della nostra funzione:

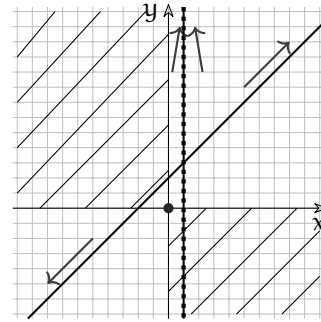
$$m = \frac{M^3}{M(M-1)^2} = \frac{M^3}{M^3 - 2M^2 + M} \sim \frac{M^3}{M^3} = 1$$

Scopriamo così che la funzione ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare 1. Calcolato il coefficiente angolare dobbiamo trovare l'intercetta.

Dall'equazione generica della retta, $y = mx + q$ esplicitiamo il valore dell'intercetta: $q = y - mx$. Ma y è il valore della nostra funzione, quindi: $q = f(x) - mx$. E con quale valore di x dobbiamo eseguire questo calcolo? Trattandosi di asintoti ci serve un valore infinito:

$$\begin{aligned}
 q &= f(M) - mM = \\
 &= \frac{M^3}{(M-1)^2} - M = \\
 &= \frac{M^3 - M^3 + 2M^2 - M}{M^2 - 2M + 1} \sim \frac{+2M^2}{M^2} = 2
 \end{aligned}$$

Il nostro asintoto è dunque: $y = x + 2$. Disegnamolo nel piano cartesiano.



6.4 Andamento

Ora vogliamo sapere dove la funzione è crescente, dove è decrescente e dove non è né crescente né decrescente. Partiamo da quest'ultimo punto.

6.4.1 Punti stazionari

Un punto stazionario è un punto in cui la tangente alla funzione è orizzontale, cioè dove la derivata è nulla: $f'(x) = 0$.

Quindi per prima cosa calcoliamo la funzione derivata:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3(2(x-1) \cdot 1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x^2 - 2x + 1) - x^3(2x - 2)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x^4 + 2x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{x^2(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

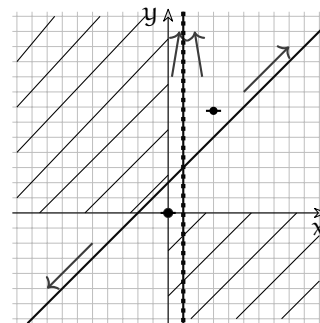
Come è immediato osservare questa funzione ha tre zeri:

$$\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = 3$$

Uno zero doppio in 0 e uno in 3. Quindi abbiamo due punti stazionari:

$$(0; 0) \text{ e } \left(3; \frac{27}{4}\right)$$

Riportiamo anche questi nel grafico.

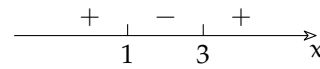


6.4.2 Intervalli di monotonia

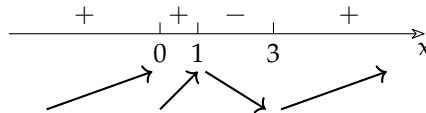
Il segno della derivata ci permette di trovare quando la funzione è crescente e quando decrescente. Lo studio del segno risulta più semplice se partiamo dalla derivata scritta in

questo modo: $f'(x) = \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$ perché abbiamo alcuni fattori di grado pari che non potranno essere negativi.

Il segno di questa espressione è uguale al segno del trinomio: $x^2 - 4x + 3$



E, riportando anche gli altri zeri del numeratore e del denominatore della derivata, si possono ottenere i seguenti intervalli in cui la funzione cresce o decresce:



Osservando l'andamento della funzione possiamo osservare che:

- ➔ Prima di 0 la funzione cresce, in 0 è stazionaria, poi riprende a crescere fino a 1 : nel punto $(0; 0)$ presenta quindi un flesso orizzontale.
- ➔ Da 1 a 3 la funzione decresce, in 3 è stazionaria poi cresce: nel punto $\left(3; \frac{27}{4}\right)$ presenta quindi un minimo locale.

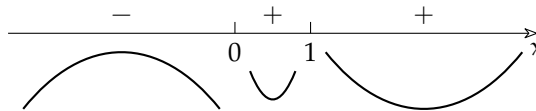
6.5 Concavità

Il calcolo della derivata seconda ci permette di ricavare gli intervalli della funzione in cui la concavità è rivolta verso l'alto e quelli in cui è rivolta verso il basso. Vogliamo derivare la

funzione derivata: $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$

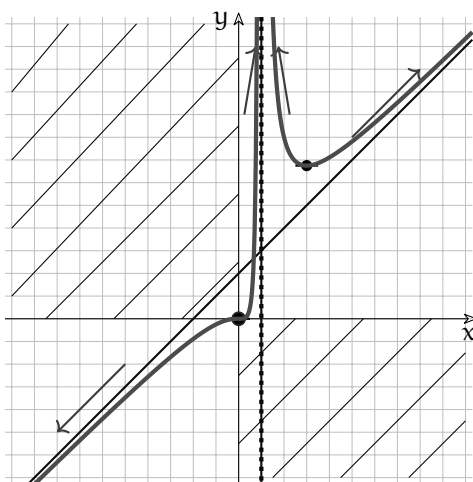
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 3x^2)(3(x-1)^2)}{(x-1)^6} = \\ &= \frac{3x((x-2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^2 - 3x)(x^2 - 2x + 1))}{(x-1)^6} = \\ &= \frac{3x(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x^3 - 6x^2 + 3x)}{(x-1)^6} = \\ &= \frac{3x(2x^2 - 4x + 2)}{(x-1)^6} = \frac{6x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^6} = \frac{6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Lo studio del segno della derivata seconda risulta molto semplice dato che il denominatore sicuramente non è negativo. Dal segno della derivata seconda possiamo ricavare la concavità:



- ➔ Fino a 0 la concavità è rivolta verso il basso.
- ➔ Da 0 a 1 la concavità è rivolta verso l'alto, quindi in 0 ha un flesso.
- ➔ Da 1 in poi la concavità è rivolta ancora verso l'alto.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per disegnare il grafico della funzione con una buona approssimazione.



6.6 Altre caratteristiche

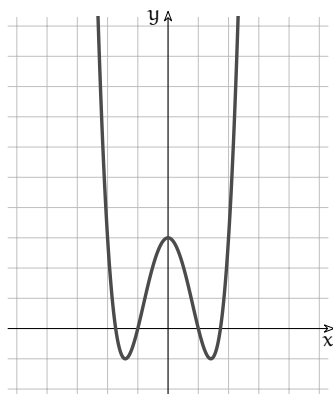
Osservando il grafico possiamo ricavare alcune altre caratteristiche della funzione.

- ➔ *Suriettiva*: l'insieme immagine è tutto \mathbb{R} infatti ogni valore di y è immagine di almeno un valore di x .
- ➔ *Non iniettiva*: infatti alcuni valori di y sono immagini di più valori x .

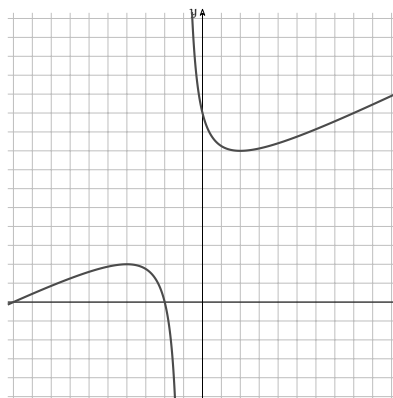
6.7 Esercizi

6.1. Descrivi a parole il grafico poi analizza la seguente funzione.

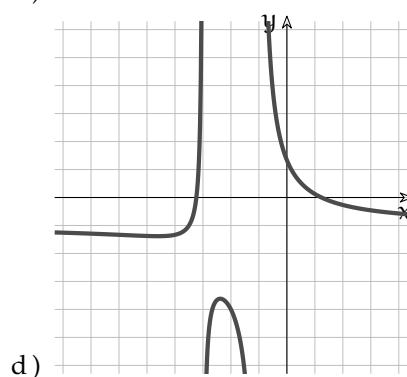
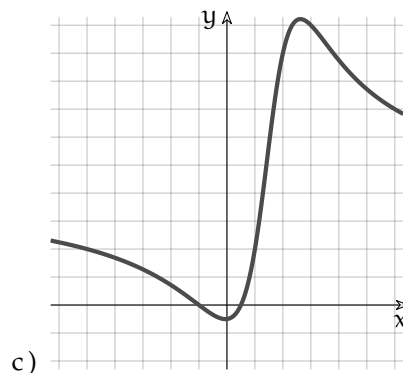
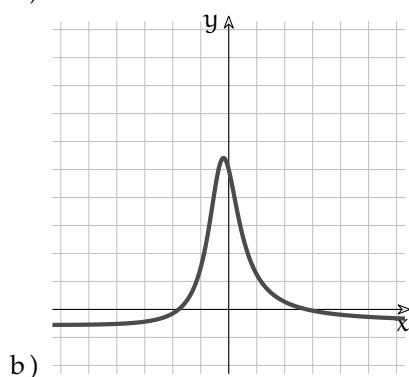
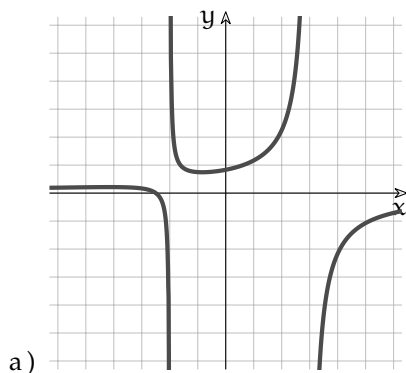
a) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

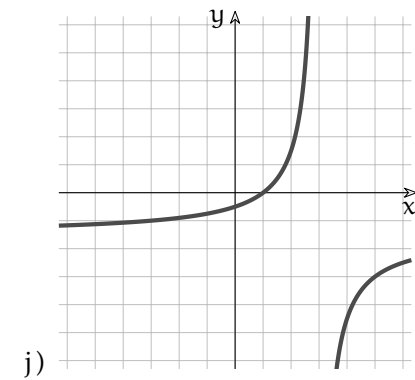
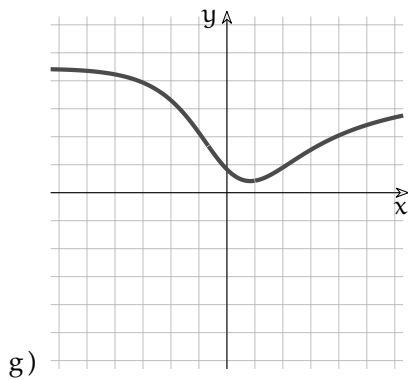
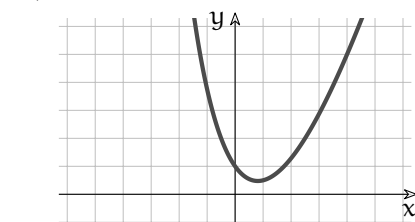
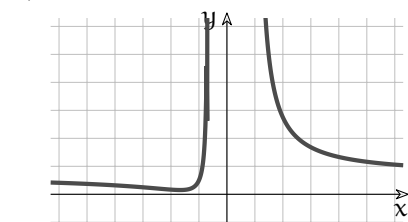
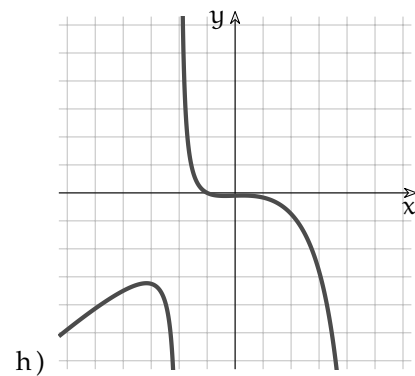
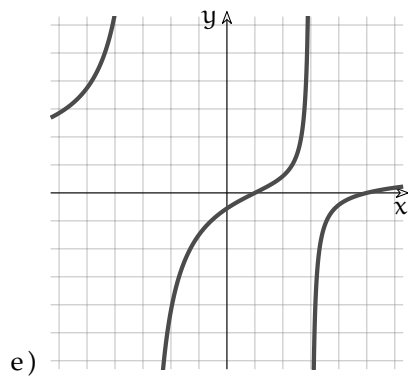


b) $y = \frac{x^2 + 12x + 20}{2x + 2}$



6.2. Descrivi i seguenti grafici:





6.3. Analizza le seguenti funzioni:

a) $\frac{-2x - 5}{x^2 - x - 6}$
 b) $\frac{2x^2 + 5x + 4}{3x^2 - x - 2}$
 c) $\frac{-2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3}$
 d) $\frac{-2x^2 + 4x + 6}{4x^2 - 6x + 5}$
 e) $\frac{4x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6}$

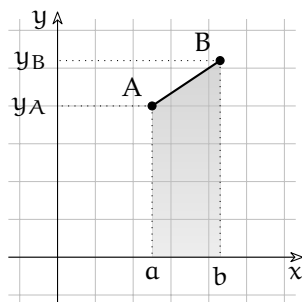
f) $\frac{-4x^2 - 2x + 2}{-x^2 + 3x - 4}$
 g) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 10}$
 h) $\frac{4x^2 - 6x + 5}{x + 5}$
 i) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 9}$
 j) $\frac{x^2 + 2x - 4}{-x^2 - 4x - 3}$

7.1 Un problema di area

¹ Uno dei primi problemi affrontati usando il piano cartesiano è stato quello di determinare l'area sottesa ad un segmento. In questo capitolo vogliamo riprendere quel tipo di problemi e generalizzarlo alla ricerca dell'area sottesa ad una funzione qualsiasi.

Quando diciamo area sottesa ad un segmento intendiamo la parte di piano delimitata dal segmento, dalle rette parallele all'asse y passanti per i suoi estremi e dall'asse x .

Esempio 7.1. Dati i punti $A(2,5; 6)$ e $B(4,3; 7,2)$, calcola l'area sottesa al segmento AB .

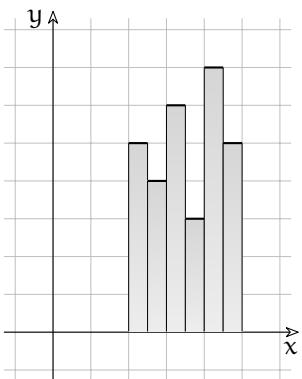


Possiamo riconoscere che la superficie sottesa al segmento ha la forma di un trapezio rettangolo con le due basi lunghe y_A e y_B e l'altezza lunga $b - a = x_B - x_A$. L'area è quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \cdot (y_B + y_A) \cdot (x_b - x_a) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (7,2 + 6) \cdot (4,3 - 2,5) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (13,2) \cdot (1,8) = 11,88 \end{aligned}$$

Abbiamo anche calcolato l'area della superficie sottesa ad una sequenza di segmenti consecutivi sommando le varie aree sottese. Ma non è necessario che i segmenti siano consecutivi possono anche essere staccati uno dall'altro.

Esempio 7.2. Calcola l'area sottesa ai segmenti paralleli all'asse x , di lunghezza 0,5 e di ordinata rispettivamente: 5; 4; 6; 3; 7; 5



Prima di affrontare i calcoli possiamo fare alcune osservazioni:

1. i vari segmenti non sono in continuità uno con l'altro;
2. formano delle colonne rettangolari;
3. le colonne sono appoggiate le une alle altre e non si sovrappongono;
4. l'area complessiva si può calcolare sommando le aree di tutte le colonne;
5. la larghezza complessiva delle colonne è 3;
6. la colonna più bassa ha altezza 3;
7. la colonna più alta ha altezza 7;
8. di sicuro l'area è maggiore di $3 \cdot 3$;
9. di sicuro l'area è minore di $3 \cdot 7$;

¹Per scrivere questo capitolo mi sono ispirato all'articolo "Elementi di Analisi Non Standard, l'integrale" apparso sul periodico *Matematicamente* della *Mathesis* di Verona. Chi volesse approfondire l'argomento può trovare l'articolo all'indirizzo: mathesisverona.it/Numeri/Nume210.pdf

La soluzione consiste nel calcolare l'area di ogni rettangolo e sommarli tutti. Chiamiamo:
 \mathcal{A}_0 l'area sottesa al segmento S_0 ,
 \mathcal{A}_1 l'area sottesa al segmento S_1 ,
 \dots
 \mathcal{A}_i l'area sottesa al segmento S_i ,
 \dots
 \mathcal{A}_n l'area sottesa al segmento S_n (dove con n intendiamo l'ultimo segmento).

Possiamo calcolare allora l'area con la seguente formula:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_i + \dots + \mathcal{A}_n = \\ &= y_0 \cdot \Delta_x + y_1 \cdot \Delta_x + y_2 \cdot \Delta_x + y_3 \cdot \Delta_x + y_4 \cdot \Delta_x + y_5 \cdot \Delta_x = \\ &= 5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = \\ &= 2,5 + 2 + 3 + 1,5 + 3,5 + 2,5 = 15 \end{aligned}$$

Le scritte usate per le formule scritte sopra non piacciono ai matematici perché risultano lunghe da scrivere e nascondono, in mezzo a molti simboli che si ripetono, la sostanza delle operazioni che vengono fatte. È stato così inventato un altro simbolo detto *Sommatoria* che indica la somma di un certo numero di espressioni che si assomigliano. Il simbolo usato è la *Sigma* (la esse greca) maiuscola:

$$\Sigma$$

Intorno a questo simbolo vengono aggiunte tutte le informazioni che servono per precisare il calcolo:

- ⇒ *sotto*: il nome dell'indice e il suo primo valore, nel nostro caso: $i = 0$;
- ⇒ *sopra*: l'ultimo valore dell'indice, nel nostro caso: 6;
- ⇒ *dopo*: cosa si somma, nel nostro caso: la formula per calcolare l'area di ogni rettangolo da sommare: $y_i \cdot \Delta_x$.

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^6 \mathcal{A}_i = \sum_{i=0}^6 y_i \cdot \Delta_x = 15$$

Con il linguaggio di programmazione Python:

```
def areasottesa_segmenti(delta_x, ordinate):
    """Restituisce l'area sottesa a sementi:
    - paralleli all'asse x;
    - lunghi delta_x;
    - con le ordinate contenute in ordinate."""
    return sum(y_i * delta_x for y_i in ordinate)

print(areasottesa_segmenti(delta_x=0.5, ordinate=[5, 4, 6, 3, 7, 5]))
```

Che può essere tradotto: somma ($y_i \cdot \text{delta}_x$) con y_i che va dal primo all'ultimo valore contenuto in ordinate.

7.2 L'area sottesa ad una funzione

Calcolare l'area sottesa ad un segmento è un problema piuttosto banale, l'avevamo già risolto diversi anni fa, ma nel mondo reale ci sono poche linee rette, la vita è tutta una curva! Se vogliamo risolvere teoricamente un problema che abbia utilità pratica dobbiamo cercare di calcolare l'area sottesa ad una funzione qualunque.

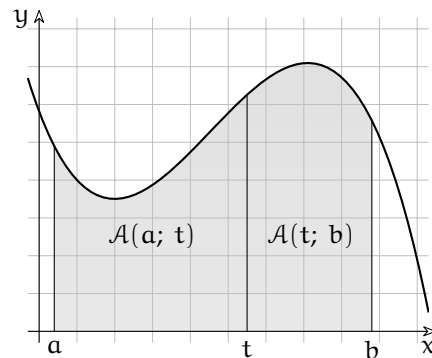
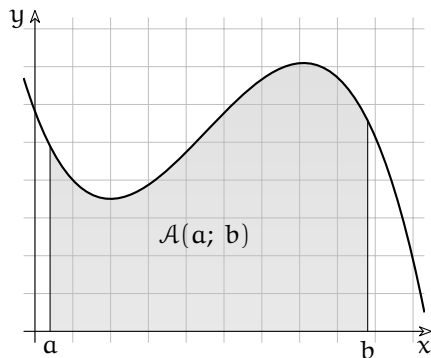
Ed è quello che intende fare lo studio degli *integrali definiti*. L'integrale definito di una funzione f è proprio l'area compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e due rette verticali per gli estremi a e b di un intervallo chiuso in cui la funzione è definita.

Fissata la funzione f , tale area dipenderà dalla scelta degli estremi a e b dell'intervallo, ed è possibile indicarla come:

$$\mathcal{A}(a, b)$$

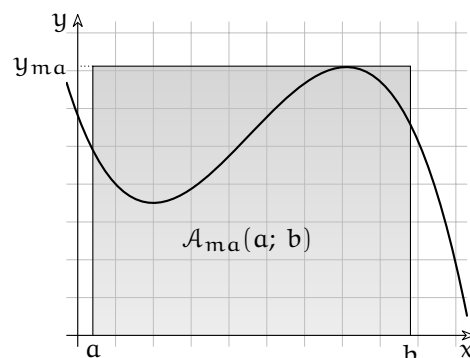
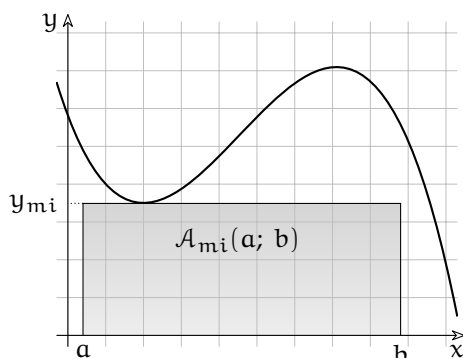
La funzione binaria \mathcal{A} , area sottesa ad una funzione in un intervallo, ha due tipiche proprietà che potranno essere usate per determinarla. Esse sono:

1. La *proprietà additiva*, dice che se a , b e t sono tre valori che appartengono all'intervallo in cui è definita f e $a < t < b$ allora $\mathcal{A}(a, b) = \mathcal{A}(a, t) + \mathcal{A}(t, b)$.



Questa proprietà afferma che se una superficie viene divisa in due parti da una linea, allora l'area totale è la somma delle aree delle due parti. Nel nostro caso la linea è la retta di equazione: $x = t$.

2. La *proprietà rettangolare* rispetto alla funzione f , dice che se m è il minimo e M massimo della funzione f nell'intervallo $[a; b]$ allora $m \cdot (b - a) = \mathcal{A}_{mi}(a, b) \leq \mathcal{A}(a, b) \leq \mathcal{A}_{ma}(a, b) = M \cdot (b - a)$,



Questa proprietà afferma che l'area sottesa ad una funzione è maggiore dell'area di un rettangolo di ugual base che ha per altezza il minimo della funzione f nell'intervallo $[a; b]$ e minore di un rettangolo con la stessa base che ha per altezza il massimo della funzione f nell'intervallo $[a; b]$.

7.3 Definizione

Consideriamo una funzione continua f su un intervallo I cui appartengono i punti a e b , e una partizione dell'intervallo chiuso $[a; b]$ in sotto intervalli di uguale ampiezza Δ separati dai punti: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_h \leq b$ dove $t_i = t_0 + i\Delta$ e $t_{i+1} - t_i = \Delta$ e dove h è il massimo numero naturale tale che:

$t_0 + h\Delta \leq b$, e dunque $b - t_h \leq \Delta$. Il segmento ab è dunque uguale alla somma di h segmenti di lunghezza Δ più il segmento che va da t_h a b : $ab = h \cdot \delta + (b - t_h)$

Si può considerare la sommatoria:

$$\left(\sum_{i=0}^{h-1} f(t_i) \cdot \Delta \right) + f(t_h) \cdot (b - t_h)$$

che è l'area dell'unione dei rettangoli che hanno per altezza $f(t_i)$ e per base i segmenti di lunghezza Δ e un segmento di lunghezza $b - t_h$.

Chiamiamo questa area *somma di Riemann finita*.

Abbiamo già dimostrato che una funzione f continua in $[a; b]$ in un intervallo chiuso ha massimo e minimo. Chiamiamo M il massimo e m il minimo di f nell'intervallo $[a; b]$.

Allora anche per la somma di Riemann finita vale la proprietà rettangolare:

$$m \cdot (b - a) \leq \sum_a^b f \cdot \Delta \leq M \cdot (b - a)$$

Quindi una somma di Riemann finita è senz'altro un numero finito.

Questa sommatoria dipende:

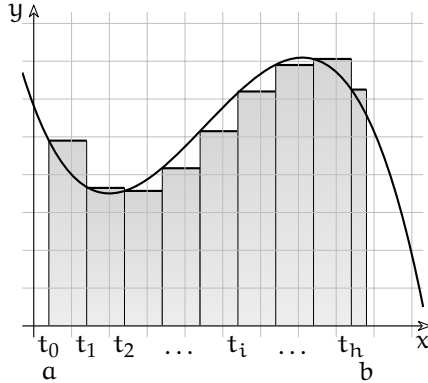
- dalla funzione f ,
- dagli estremi a e b ,
- dall'intervallo δ .

Poiché h e la successione dei numeri t_i determinati dalle quantità indicate, sicché la denoteremo come

$$\sum_a^b f \cdot \Delta$$

Se fissiamo la funzione f , e gli estremi a e b allora la somma di Riemann è una funzione reale unaria che dipende solo dall'intervallo Δ .

Possiamo osservare che al diminuire della distanza Δ tra i punti di partizione l'area coperta da questa unione di rettangoli sarà sempre più vicina all'area sottesa alla funzione.



Usando i numeri iperreali possiamo dare a Δ un valore infinitesimo e per distinguerlo lo chiameremo: dt .

Chiamiamo H il numero infinito di partizioni dell'intervallo $[a; b]$ tale che $x_H = t_0 + H \cdot dt$ e $t_H \leq b$.

Chiamiamo *somma di Riemann infinita* questa nuova sommatoria:

$$\sum_a^b f \cdot dt$$

Per il principio di transfer, anche per la somma di Riemann infinita vale che

$$m \cdot (b - a) \leq \sum_a^b f \cdot dt \leq M \cdot (b - a)$$

e pertanto anche la somma di Riemann infinita sarà un iperreale finito. Possiamo quindi calcolare la sua parte standard.

A questa parte standard diamo il nome di *integrale definito*

Definizione 7.1. Data una funzione standard f continua su $[a; b]$, chiamiamo *integrale definito* la parte standard della somma di Riemann infinita:

$$\text{st} \left(\sum_a^b f \cdot dt \right)$$

Per semplificare un po' la notazione useremo per indicare questa quantità un nuovo simbolo, una specie di esse stirata che è il simbolo di integrale:

$$\int_a^b f \cdot dt = \text{st} \left(\sum_a^b f \cdot dt \right)$$

7.4 Somme di Riemann inferiore e superiore

Mentre le somme di Riemann finite dipendono dal valore di Δ , i matematici hanno dimostrato che le somme di Riemann infinite non dipendono dall'infinitesimo scelto come base dei rettangolini.

Ma, anche accettando la precedente affermazione, il lettore attento e pignolo può avere il dubbio che definendo somme di Riemann in modo diverso si ottengano integrali definiti diversi. Noi abbiamo calcolato l'area dei rettangolini prendendo come altezza il valore di f nell'estremo sinistro dell'intervallo, ma cosa succede se consideriamo l'estremo destro o se consideriamo un punto a caso dell'intervallo?

Vediamo qualche esempio:

Se in ogni sottointervallo chiamiamo $_m f(t_i)$ il minimo valore assunto dalla funzione e $_M f(t_i)$ il suo massimo valore, allora possiamo definire le somme di Riemann finite superiore e inferiore.

La somma di Riemann finita inferiore è:

$$\sum_{i=0}^h {}_m f(t_i) \cdot \Delta = \sum_a^b {}_m f \cdot \Delta$$

e quella superiore è:

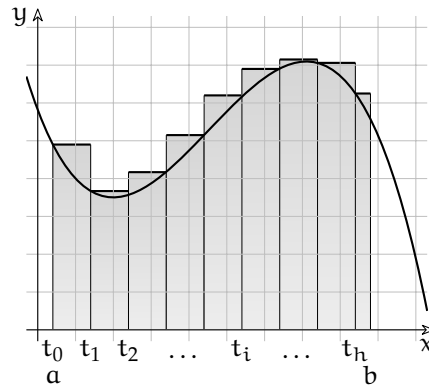
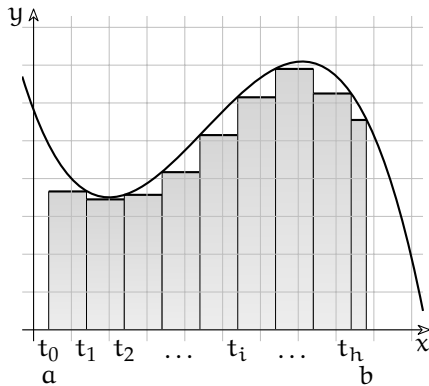
$$\sum_{i=0}^h -f(t_i) \cdot \Delta = \sum_a^b -f \cdot \Delta$$

Evidentemente

$$\sum_a^b -f \cdot \Delta \leq \sum_a^b f \cdot \Delta \leq \sum_a^b -f \cdot \Delta$$

poiché ogni rettangolino della prima somma ha un'altezza non maggiore dell'altezza del corrispondente rettangolino della seconda somma e:

- per la proprietà rettangolare, l'area sottesa alla funzione in ogni sottointervallo, sarà compresa tra il rettangolino inferiore e quello superiore.
- per la proprietà additiva, l'area sottesa alla funzione sarà maggiore della somma di tutti i rettangolini inferiori e minore della somma di tutti i rettangolini superiori.



Passando alle loro estensioni naturali non standard, cioè riducendo la base di ogni rettangolino a un infinitesimo risulta ancora

$$\sum_a^b -f \cdot dt \leq \sum_a^b f \cdot dt \leq \sum_a^b -f \cdot dt$$

e si mantengono le proprietà rettangolare e additiva. Ma se dt è un infinitesimo e la funzione è continua, allora anche la differenza tra $-f(t_0)$ e $-f(t_0)$ è un infinitesimo (per la definizione di funzione continua) e il prodotto tra questa differenza e l'intervallo dt è un infinitesimo di ordine superiore all'area di un rettangolino perciò anche la somma, pur infinita, di questi prodotti è un infinitesimo. Quindi la differenza tra la somma di Riemann infinita superiore e inferiore è un infinitesimo mentre il valore di una di queste somme è un valore finito perciò le due somme sono indistinguibili e la loro parte standard è la stessa.

$$\sum_a^b -f \cdot dt \sim \sum_a^b -f \cdot dt \Rightarrow \int_a^b -f \cdot dt = \int_a^b -f \cdot dt$$

Possiamo perciò chiamare integrale la parte standard di una qualsiasi somma di Riemann infinita:

$$\int_b^a f \cdot dt = \text{st} \left(\sum_a^b -f \cdot dt \right) = \text{st} \left(\sum_a^b -f \cdot dt \right)$$

7.5 Proprietà degli integrali

7.5.1 Proprietà rettangolare

Partendo dalle disuguaglianze relative alla somma di Riemann infinita:

$$m \cdot (b - a) \leq \sum_a^b f \cdot dt \leq M \cdot (b - a)$$

e passando alle parti standard, che preservano le disuguaglianze, poiché il primo e l'ultimo termine sono parti standard di se stessi in quanto reali, si ha:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \cdot dt \leq M \cdot (b - a)$$

e quindi anche per l'integrale vale la proprietà rettangolare.

7.5.2 Altre proprietà

Dalla definizione di integrale seguono le seguenti proprietà:

1. se l'intervallo è nullo, sarà nullo anche l'integrale:

$$\int_a^a f \cdot dt = 0$$

2. l'integrale di una costante k è uguale all'area del rettangolo:

$$\int_a^b k \cdot dt = k \cdot (b - a)$$

3. l'integrale di una costante k per una funzione f è uguale alla costante per l'integrale della funzione:

$$\int_a^b k \cdot f \cdot dt = k \cdot \int_a^b f \cdot dt$$

4. l'integrale della somma di due funzioni è uguale alla somma degli integrali:

$$\int_a^b (f + g) \cdot dt = \int_a^b f \cdot dt + \int_a^b g \cdot dt$$

5. se, in un certo intervallo, la funzione f è sempre inferiore alla funzione g allora, in quell'intervallo, anche l'integrale di f è minore dell'integrale di g :

$$f \leq g \quad \forall t \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f \cdot dt \leq \int_a^b g \cdot dt$$

7.5.3 Definizione di opposto

Definiamo poi che, se scambiamo gli estremi di integrazione, otteniamo l'opposto dell'integrale definito:

$$\int_b^a f \cdot dt = - \int_a^b f \cdot dt$$

7.5.4 Proprietà additiva

Poiché la scelta del sottointervallo infinitesimo non cambia il valore dell'integrale definito, nell'integrale vale anche la proprietà additiva, infatti:

$$\int_a^b f \cdot dt + \int_b^c f \cdot dt = \int_a^c f \cdot dt$$

Passando poi alle sommatorie infinite:

$$\sum_a^b f \cdot dt, \quad \sum_b^c f \cdot dt \quad \text{e} \quad \sum_a^c f \cdot dt$$

e prendendo $dt = (b - a)/H$ con H ipernaturale infinito, i punti di ripartizione degli intervalli $[a; b]$ e $[b; c]$ coincidono con quelli dell'intervallo $[a; c]$ sicché la terza sommatoria è evidentemente la somma delle altre due. Passando alle loro parti standard, operazione che preserva l'addizione, si ottiene il risultato voluto.

7.6 Funzione integrale

Il valore di un integrale definito può essere calcolato con una certa approssimazione attraverso le somme di Riemann finite, ma questo, a volte, risulta piuttosto scomodo. I matematici hanno trovato un modo per poter calcolare il valore di un integrale lavorando più con i simboli che con i numeri. Il trucco consiste nel generalizzare il problema, cioè cercare una funzione $S(x)$ che abbia come valore l'area della superficie sottesa ad una funzione f fino ad un punto x variabile. La soluzione di questo problema generale permette anche di risolvere altri problemi che non troverebbero soluzione nei casi particolari.

Il problema consiste nel calcolare l'area sottesa ad una funzione continua in funzione del solo secondo estremo:

$$S(x) = \int_{\dots}^x f \, dx$$

Con $\int_{\dots}^x f \, dx$ intendiamo l'area sottesa fino a x .

Noi sappiamo che per la proprietà additiva degli integrali l'area sottesa fino a x è uguale alla somma dell'area sottesa fino ad a più l'area sottesa alla funzione tra a e x :

$$\int_{\dots}^x f \, dx = \int_{\dots}^a f \, dx + \int_a^x f \, dx \Rightarrow S(\dots; x) = S(\dots; a) + S(a; x)$$

D'ora in poi, la *superficie fino a x* verrà indicata in modo un po' più semplice:

$$S(x) = \int_{\dots}^x f \, dx = \int f \, dx$$

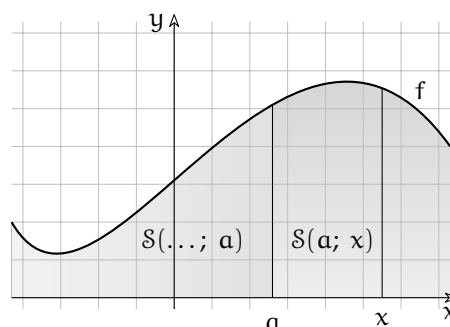
Apparentemente questo passaggio non ha migliorato la situazione, perché abbiamo trasformato la quantità incognita "integrale fino a x " nella somma di una quantità definita: "integrale da a a x " più "integrale fino ad a " che è ancora una quantità incognita.

Ora, non sappiamo quanto sia $S(\dots; a)$ cioè la superficie sottesa alla funzione fino ad a , ma di sicuro non dipende da x , cioè, al variare di x , rimane costante.

Possiamo perciò concentrarci sul calcolo di $\int_a^x f dx$ sapendo che a seconda della scelta di a il risultato ottenuto potrà differire, da quello atteso, solo per una costante C_a che dipende dalla scelta di a .

Quindi:

$$\int f dx = \int_a^x f dx + C_a$$



Esempio 7.3. Calcola il valore dell'integrale: $\int_3^x 2 dx$

Diamo alcuni valori alla x e osservando la figura possiamo calcolare l'area sottesa:

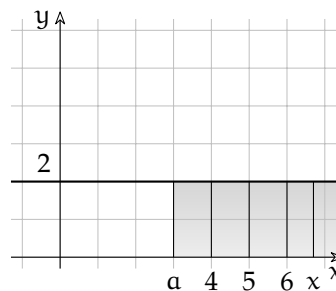
$$S(3; 4) = \int_3^4 2 dx = 2$$

$$S(3; 5) = \int_3^5 2 dx = 4$$

$$S(3; 6) = \int_3^6 2 dx = 6$$

In generale avremo:

$$S(3; x) = \int_3^x 2 dx = 2x - 6$$



Esempio 7.4. Calcola il valore dell'integrale: $\int_1^x 2 dx$

Diamo alcuni valori alla x e osservando la figura possiamo calcolare l'area sottesa:

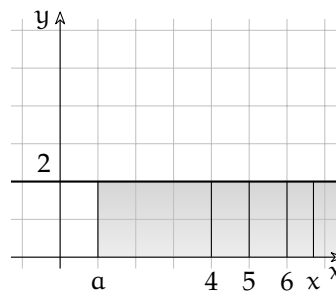
$$S(1; 4) = \int_1^4 2 dx = 6$$

$$S(1; 5) = \int_1^5 2 dx = 8$$

$$S(1; 6) = \int_1^6 2 dx = 10$$

In generale avremo:

$$S(1; x) = \int_1^x 2 dx = 2x - 2$$



Le due soluzioni degli esempi precedenti differiscono, come ci aspettavamo, solo per una costante che dipende dall'estremo inferiore dell'integrale. Tenendo conto di questa osservazione possiamo scrivere:

$$\int 2 dx = 2x + C$$

Possiamo generalizzare i precedenti esempi con il seguente:

Esempio 7.5. Studia l'integrale della funzione costante: $f : x \mapsto k$

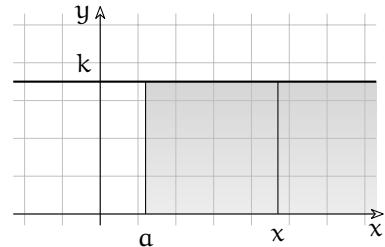
$$\begin{aligned} \int k \, dx &= \int_a^x k \, dx + \mathcal{C}_a = \int_a^x k \, dx + S(a, x) + \mathcal{C}_a = \\ &= k \cdot (x - a) + \mathcal{C}_a = kx - ka + \mathcal{C}_a \end{aligned}$$

Osservando che $-ka$ non dipende dalla x ed è quindi una costante, possiamo riunire le due costanti in una unica:

$$-ka + \mathcal{C}_a = \mathcal{C}$$

In generale avremo:

$$\int k \, dx = kx + \mathcal{C}$$



Esempio 7.6. Studia l'integrale della funzione: $f : x \mapsto x$

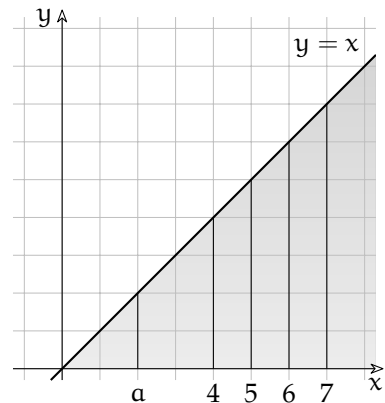
Osservando il disegno vediamo che la superficie ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, quindi se la base è x anche l'altezza vale x . scegliamo come estremo inferiore il valore 0.

$$S(0; 4) = \int_0^4 x \, dx = 8 \quad S(0; 5) = \int_0^5 x \, dx = 12,5 = \frac{1}{2}25$$

$$S(0; 6) = \int_0^6 x \, dx = 18 \quad S(0; 7) = \int_0^7 x \, dx = 24,5 = \frac{1}{2}49$$

E in generale:

$$S(0; x) = \int_0^x x \, dx = \frac{1}{2}x^2$$



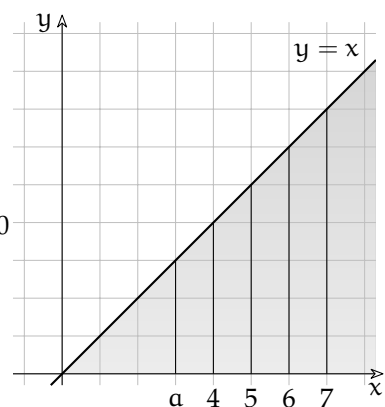
Se invece di prendere come estremo inferiore 0 scegliamo il valore 3, otteniamo:

$$S(3; 4) = \int_3^4 x \, dx = 3,5 = \frac{1}{2}7 \quad S(3; 5) = \int_3^5 x \, dx = 8$$

$$S(3; 6) = \int_3^6 x \, dx = 13,5 = \frac{1}{2}27 \quad S(3; 7) = \int_3^7 x \, dx = 20$$

E in generale:

$$S(3; x) = \int_3^x x \, dx = \frac{1}{2}x^2 - 4,5$$



Possiamo osservare che le due soluzioni precedenti $S(3; x)$ e $S(0; x)$ differiscono solo per una costante quindi:

$$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{C}$$

7.7 Teorema fondamentale dell'analisi

Osservando i risultati degli esempi precedenti, potrebbe sorgerci un qualche sospetto ... se ci ricordiamo qualcosa sulle derivate.

Ma procediamo cercando di risolvere il problema precedente per una funzione qualsiasi:

$$S(x) = \int f \cdot dx$$

7.7.1 Dimostrazione grafica

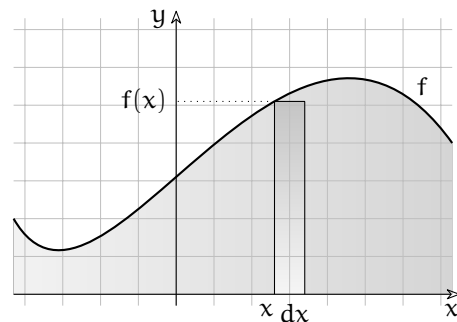
Consideriamo un rettangolino infinitesimo in cui è divisa l'area sottesa alla funzione f . chiamiamo:

$$dS(x)$$

la sua area.

Questo rettangolino infinitesimo avrà base lunga dx e altezza indistinguibile da $f(x)$ quindi la sua area vale:

$$f(x) \cdot dx$$



Ne deriva:

$$f(x) \cdot dx = dS(x) \Rightarrow f(x) = \frac{dS(x)}{dx} \sim S'(x) = D \left[\int f dx \right]$$

A parole:

- la funzione integranda è uguale alla derivata dell'integrale;
- l'integrale è l'operatore inverso della derivata.

Per trovare l'integrale della funzione f devo trovare una funzione F primitiva di f cioè una funzione la cui derivata sia f .

7.7.2 Dimostrazione algebrica

Utilizzando la definizione di derivata possiamo dimostrare che la derivata della funzione integrale è proprio la funzione integranda cioè che

$$D \left[\int f dx \right] = D [F(x)] = F'(x) = f(x)$$

Applichiamo alla funzione F la regola del calcolo della derivata:

$$F'(x) = \text{st} \left(\frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \right) = \text{st} \left(\frac{\int_a^{x+dx} f \cdot dx - \int_a^x f \cdot dx}{dx} \right) =$$

per l'additività degli integrali consideriamo che

$$\text{st} \left(\frac{\int_x^{x+dx} f \cdot dx}{dx} \right) = \text{st} \left(\frac{f(x) \cdot dx}{dx} \right) = \text{st} (f(x)) = f(x)$$

La prima uguaglianza della riga precedente è giustificata dal fatto che, per definizione

$$\int_x^{x+dx} f \cdot dx \approx \sum_x^{x+dx} f \cdot dx = f(x) \cdot dx$$

mentre l'ultima è vera poiché $f(x)$ un numero reale quindi la sua parte standard è uguale al numero stesso.

7.8 Integrali indefiniti

Il teorema fondamentale dell'analisi dice che la funzione integrale è una primitiva della funzione integranda quindi se ho imparato a derivare una funzione posso, con il procedimento inverso trovare una funzione integrale della funzione integranda:

$$\text{se } D[F] = f \text{ allora } \int f dx = F$$

Ma dalle regole delle derivate sappiamo che tutte le funzioni che differiscono per una costante hanno la stessa derivata quindi se $D[F] = f$ allora anche $D[F + 5] = f$, e anche $D[F + 4,57] = f$, e, in generale, anche $D[F + C] = f$ con C costante. Quindi se F è una primitiva della funzione f e C è una costante, allora tutte le funzioni del tipo: $F + C$ sono primitive di f .

Di seguito vediamo una tabella con le primitive di alcune funzioni.

primitiva	f	derivata
$kx + C$	k	0
$\frac{1}{2}x^2 + C$	x	1
$\frac{k}{2}x^2 + C$	kx	k
$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	x^n	nx^{n-1}
$e^x + C$	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln a} + C$	a^x	$(\ln a) a^x$
$\ln x + C$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x}$

7.9 Calcolo dell'integrale definito

Avere un modo per calcolare l'integrale indefinito permette di affrontare il problema dell'integrale definito in un modo più semplice. Supponiamo di avere una funzione f e di conoscere una sua primitiva F , cioè: $F' = f$. Dato che $F(a)$ è il valore dell'area fino ad a e $F(b)$

è il valore dell'area fino ad b , per trovare l'area sottesa alla funzione tra a e b , basta togliere dall'area fino ad a l'area fino a b .

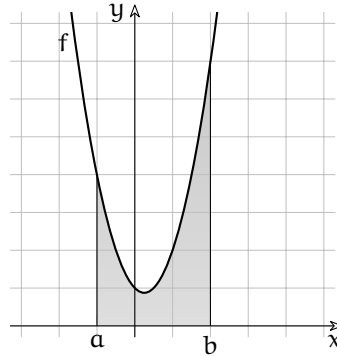
$$\text{se } F(x) = \int f(x) \, dx \quad \text{allora} \quad \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Esempio 7.7. Calcola l'area sottesa alla funzione $f : x \mapsto 2x^2 - x + 3$ tra -1 e $+2$.

Calcoliamo un integrale indefinito della funzione f :

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - x + 1) \, dx &= 2 \int x^2 \, dx - \int x \, dx + \int 1 \, dx = \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c \end{aligned}$$

Adesso che abbiamo l'integrale indefinito della funzione, possiamo calcolare l'area cercata con una semplice sottrazione: basta togliere dall'area sottesa fino a b l'area sottesa fino ad a :



$$\begin{aligned} S_{ab} &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2 + 2 \right) - \left(\frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) \right) = \\ &= \left(\frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{32 - 12 + 12 + 4 + 3 + 1}{6} = \frac{40}{6} = 6,\bar{6} \end{aligned}$$

7.10 Esercizi

7.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1. Calcola l'integrale delle seguenti funzioni polinomiali.

a) $\int -1 \, dx$	$[-x]$	g) $\int 8x^2 \, dx$	$[\frac{8x^3}{3}]$
b) $\int 6x^5 + 3x^3 \, dx$	$[x^6 + \frac{3x^4}{4}]$	h) $\int 5x^3 + 4x^2 + 2 \, dx$	$[\frac{5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x]$
c) $\int x^2 - 3x + 3 \, dx$	$[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x]$	i) $\int -x^3 - 4x^2 \, dx$	$[-\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3}]$
d) $\int -5x^3 + 2x + 1 \, dx$	$[-\frac{5x^4}{4} + x^2 + x]$	j) $\int x^4 - 5 \, dx$	$[\frac{x^5}{5} - 5x]$
e) $\int x^5 - 4x^2 - 3 \, dx$	$[\frac{x^6}{6} - \frac{4x^3}{3} - 3x]$	k) $\int -2x^3 - 4x + 5 \, dx$	$[-\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 5x]$
f) $\int 2x^5 + 2x + 2 \, dx$	$[\frac{x^6}{3} + x^2 + 2x]$	l) $\int x^4 + 2x + 1 \, dx$	$[\frac{x^5}{5} + x^2 + x]$

7.2. Calcola l'integrale delle seguenti funzioni polinomiali (fratte, con radici ed esponenti negativi).

a) $\int x^{\frac{5}{3}} \, dx$	$[\frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8}]$	g) $\int -\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} \, dx$	$[-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5}]$
b) $\int \frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}} \, dx$	$[-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}]$	h) $\int \frac{3}{2} \, dx$	$[\frac{3x}{2}]$
c) $\int -\frac{1}{x} \, dx$	$[-\log(x)]$	i) $\int \frac{2}{3x} \, dx$	$[\frac{2}{3} \log(x)]$
d) $\int \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} \, dx$	$[6\sqrt[6]{x}]$	j) $\int -\frac{2x^5}{3} \, dx$	$[-\frac{x^6}{9}]$
e) $\int -\frac{2}{x^{\frac{13}{6}}} \, dx$	$[\frac{12}{7x^{\frac{7}{6}}}]$	k) $\int -\frac{1}{2x^{\frac{11}{3}}} \, dx$	$[\frac{3}{16x^{\frac{8}{3}}}]$
f) $\int -x^2 \, dx$	$[-\frac{x^3}{3}]$	l) $\int -\frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}} \, dx$	$[\frac{2}{\sqrt[3]{x}}]$

7.3.

a) $\int 0 \, dx$	$[0 + C]$
b) $\int 2 e^x \, dx$	$[2 e^x + C]$
c) $\int 2 e^x - 2 \, dx$	$[2 e^x - 2x + C]$
d) $\int -e^x + 2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$	$[-e^x + 4 \sqrt{x+1} + C]$
e) $\int e^x - \cos(x) \, dx$	$[e^x - \sin(x) + C]$
f) $\int -2 e^x - (x-1)^{-2} \, dx$	$[-2 e^x + (x-1)^{-1} + C]$
g) $\int -\sin(x) + \cos(x) \, dx$	$[\cos(x) + \sin(x) + C]$
h) $\int -\cos(x) - (x+1)^2 \, dx$	$[-\sin(x) - \frac{1}{3}(x+1)^3 + C]$
i) $\int -2 \sin(x) - \cos(x) + 1 \, dx$	$[2 \cos(x) - \sin(x) + x + C]$
j) $\int -2 \sin(x) + 2 \cos(x) \, dx$	$[2 \cos(x) + 2 \sin(x) + C]$
k) $\int -e^x + 2 \sin(x) - \cos(x) \, dx$	$[-e^x - 2 \cos(x) - \sin(x) + C]$
l) $\int -e^x - \sin(x) - \cos(x) \, dx$	$[-e^x + \cos(x) - \sin(x) + C]$

7.10.2 Esercizi riepilogativi

7.4. Calcola i seguenti integrali indefiniti.

a) $\int -\frac{3}{2\sqrt{x}} dx$	$[-3\sqrt{x}]$	l) $\int \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} dx$	$[6\sqrt[6]{x}]$
b) $\int 4x^5 - 5x^4 - 4x dx$	$[\frac{2x^6}{3} - x^5 - 2x^2]$	m) $\int 4x^5 - 2x^3 + 5 dx$	$[\frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + 5x]$
c) $\int 4x^2 + x dx$	$[\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]$	n) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x} dx$	$[\log(x^2-3x)]$
d) $\int \frac{-6x^2-4}{-2x^3-4x} dx$	$[\log(x^3+2x)]$	o) $\int 3x^3 + 3x^2 dx$	$[\frac{3x^4}{4} + x^3]$
e) $\int \frac{20x^4-5}{4x^5-5x} dx$	$[\log(4x^5-5x)]$	p) $\int -8x^2 - 1 dx$	$[-\frac{8x^3}{3} - x]$
f) $\int 2x^{\frac{11}{6}} dx$	$[\frac{12x^{\frac{17}{6}}}{17}]$	q) $\int x^5 + 3x^2 - 4x dx$	$[\frac{x^6}{6} + x^3 - 2x^2]$
g) $\int -x^5 - 5x^4 dx$	$[-\frac{x^6}{6} - x^5]$	r) $\int \frac{4}{x} dx$	$[4 \log(x)]$
h) $\int \frac{1}{2\sqrt[6]{x}} dx$	$[\frac{3x^{\frac{5}{6}}}{5}]$	s) $\int \frac{4x^3+5}{x^4+5x} dx$	$[\log(x^4+5x)]$
i) $\int -2x^5 + 4x^4 + 4 dx$	$[-\frac{x^6}{3} + \frac{4x^5}{5} + 4x]$	t) $\int \frac{3}{2\sqrt[3]{x}} dx$	$[\frac{9x^{\frac{2}{3}}}{4}]$
j) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	$[\sqrt{x}]$	u) $\int x^3 + 3x^2 + 1 dx$	$[\frac{x^4}{4} + x^3 + x]$
k) $\int -\frac{x^2}{3} dx$	$[-\frac{x^3}{9}]$	v) $\int \frac{2}{x} dx$	$[2 \log(x)]$

7.5. Calcola i seguenti integrali indefiniti.

a) $\int 2e^x dx$	$[2e^x + C]$
b) $\int 1 dx$	$[x + C]$
c) $\int 2x dx$	$[x^2 + C]$
d) $\int -x - 1 dx$	$[-1/2x^2 - x + C]$
e) $\int 2 dx$	$[2x + C]$
f) $\int 2 dx$	$[2x + C]$
g) $\int e^x - 1 dx$	$[e^x - x + C]$
h) $\int -2e^x dx$	$[-2e^x + C]$
i) $\int \cos(x) dx$	$[\sin(x) + C]$
j) $\int 2e^x - x + 2 dx$	$[2e^x - 1/2x^2 + 2x + C]$
k) $\int 2e^x + x - 2 dx$	$[2e^x + 1/2x^2 - 2x + C]$
l) $\int -\sqrt{x+1} dx$	$[-2/3(x+1)^{3/2} + C]$
m) $\int -2 \sin(x) - 2 \cos(x) - x^{-2} dx$	$[2 \cos(x) - 2 \sin(x) + x^{-1} + C]$
n) $\int -2 \cos(x) + \sin(x) dx$	$[-2 \sin(x) - \cos(x) + C]$
o) $\int -\cos(x) + (x-1)^{-1} dx$	$[-\sin(x) + \ln(x-1) + C]$
p) $\int \cos(x) - 2 \sin(x) dx$	$[\sin(x) + 2 \cos(x) + C]$
q) $\int -\sin(x) + \cos(x) dx$	$[\cos(x) + \sin(x) + C]$

