MATEMATICA C^3

MATEMATICA DOLCE 1

Testo per il primo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Matematicamente.it

2016 Edizione - 2016

COORDINATORI DEL PROGETTO Daniele Zambelli.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Ubaldo Pernigo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano, Daniele Zambelli, Maria Antonietta Pollini.

HANNO COLLABORATO Laura Todisco, Michela Todeschi, Nicola De Rosa, Paolo Baggiani, Luca Tedesco, Vittorio Patriarca, Francesco Speciale, Alessandro Paolino, Luciano Sarra, Maria Rosaria Agrello, Alberto Giuseppe Brudaglio, Lucia Rapella, Francesca Lorenzoni, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Anna Maria Cavallo, Elena Stante, Giuseppe Pipino, Silvia Monatti, Andrea Celia, Gemma Fiorito, Dorotea Jacona, Simone Rea, Nicoletta Passera, Pierluigi Cunti, Francesco Camia, Anna Rita Lorenzo, Alessandro Castelli, Piero Sbardellati, Luca Frangella, Raffaele Santoro, Alessandra Marrata, Mario Bochicchio, Angela Iaciofano, Luca Pieressa, Giovanni Quagnano, Elisabetta Campana, Luciana Formenti.

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Daniele Zambelli.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: `3.0.1` del 27 giugno 2016.
Stampa 2016: giugno 2016.
ISBN

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Matematica dolce 1 - 2016.
Codice ISBN:
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2016.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,
lui apprezza molto il progetto Matematica C^3
e penso che la tua versione gli possa far comodo
soprattutto per i primi anni del nostro serale.
Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C^3 *normale,*
ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,
promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane
(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.
In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C^3*,*
"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?
Buon lavoro,
Alice

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

Matematica C^3 Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica* C^3. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica* C^3.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica* C^3 in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica* C^3 ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli

Prefazione alla seconda edizione

Un anno di lavoro ha messo in luce alcuni errori che sono stati corretti, la nuova versione è scaricabile da:

bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce_2ed

e

bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce_2ed.

Ma, soprattutto, in questo anno è sorta una interessante opportunità: è stato finanziato un progetto per tradurre il testo in braille. Il lavoro sta procedendo e alcuni capitoli sono già stati tradotti. Quanto fatto lo si può trovare in:

oer.veia.it

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Elementi di informatica I

“WIcker Composition”
Foto di cobalt123
http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

1 Foglio di calcolo

1.1 Avviamo "Calc"

Perché un foglio di calcolo

In molti ambiti gli umani sono costretti ad effettuare molti calcoli, pensiamo solo all'economia, alla ricerca scientifica o statistica, alla progettazione, ... I matematici spesso hanno realizzato strumenti per semplificare i calcoli, inventando i computer hanno trovato il modo di far fare *completamente* i calcoli a qualcun altro: al computer.

Se dobbiamo eseguire molte operazioni è più sicuro (e meno noioso), farle fare ad un elaboratore elettronico. Ma come convincere un calcolatore a fare i calcoli per noi? Il modo più semplice è quello di avviare un apposito programma che si chiama genericamente "foglio di calcolo".

Ne esistono molti in commercio, noi ci riferiremo a "Calc" che è il foglio di calcolo del programma di ufficio: "Libre Office" (o "Open Office"). Se non avete "Libre Office" nel vostro computer, fatevi aiutare da qualcuno esperto e installatelo, è facile. Il programma si scarica gratuitamente da Internet ed è un *software libero*.

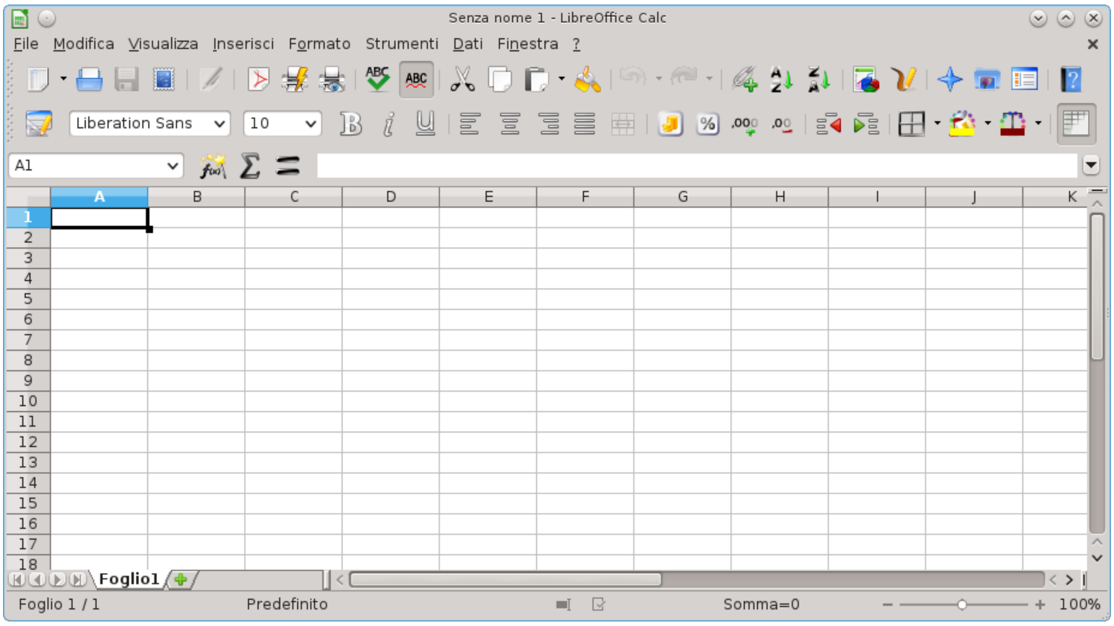


FIGURA 1.1: Come si presenta una finestra di Calc.

Una volta trovato (o installato) *Libre Office* avviate il programma "Calc". Vi troverete davanti un foglio di calcolo e tutta una cornice che contiene gli strumenti per gestirlo, dall'alto in basso possiamo riconoscere:

- il menu;
- la barra delle icone (individuate l'icona per salvare il lavoro, per stampare il foglio, per le operazioni di taglia-copia-incolla, ...);
- la barra di formattazione;
- la barra di immissione;
- i bordi del foglio;
- il foglio vero e proprio;
- la barra di stato.

Nei seguenti paragrafi vedremo cosa è e come si usa un *foglio di calcolo*.

1.2 Celle, colonne, righe... il foglio di calcolo

Cos'è, e come usare le funzioni di base di un foglio di calcolo.

Un Foglio di Calcolo è un'immensa tabella composta da alcune migliaia di righe e alcune centinaia di colonne che generano una grande quantità di celle nei loro incroci. L'elemento base di un Foglio di Calcolo, è dunque la cella. Ogni cella ha: un indirizzo, un contenuto e un formato:

1.2.1 Indirizzo

Come nella battaglia navale l'indirizzo di ogni cella è composto da una lettera seguita da un numero, ad es. B3 è la cella che si trova all'incrocio della seconda colonna con la terza riga. Poiché le lettere sono solo 26 e noi, a volte, abbiamo bisogno di più colonne, arrivati alla lettera "Z" proseguiamo con "AA", "AB"... e così via. Nella *barra di immissione*, in alto a sinistra viene visualizzato l'indirizzo della cella in cui ci troviamo. Cliccando in diverse celle si può osservare l'indirizzo che cambia.

1.2.2 Contenuto

Ogni cella può avere un contenuto che è uno di questi 3 oggetti:

- Parole, una stringa qualunque.
- Numeri che possono rappresentare anche percentuali, ore o date.
- Formule, espressioni che iniziano con un uguale. Quando si termina di inserire una formula, nella cella viene mostrato il risultato del calcolo, mentre il testo della formula appare nella parte alta dello schermo nella barra di immissione.

Gli operandi delle formule, possono essere numeri o indirizzi di celle. Quando viene modificato il contenuto di una cella, tutte le formule che contengono il suo indirizzo vengono ricalcolate.

1.2.3 Formato

Ogni cella ha diversi attributi che riguardano il suo formato o quello del suo contenuto. Ci sono decine di aspetti che possono essere modificati con il formato della cella:

- colore di sfondo;
- bordo;
- dimensioni;
- font, colore, dimensione dei caratteri;
- formato dei numeri;
- allineamento del contenuto;
- ...

Possiamo applicare queste prime informazioni per realizzare un formulario di geometria che calcoli perimetri e aree di vari poligoni. Apriamo un nuovo foglio di calcolo. Prima ancora di incominciare a riempirlo lo salviamo con nome:

Menu-File-Salva Come.

Conviene salvarle il documento in una nostra cartella e darle per nome "quadrilateri". Per salvare un file basta anche cliccare sull'icona con un dischetto, di solito terza da sinistra o più rapidamente ancora premere il tasto:

<Ctrl-s>.

L'obiettivo è avere un foglio nel quale inserire alcuni dati relativi ai quadrilateri notevoli e calcolare altre informazioni relative alla figura. Possiamo distinguere con un colore di sfondo le celle nelle quali inserire dati e con un altro colore quelle che conterranno i risultati. Dovremo adattare la larghezza delle colonne a seconda dello spazio occupato dal contenuto. Potrebbe anche essere utile graficamente separare i vari problemi riquadrando con un bordo le relative celle. Di seguito riporto dei suggerimenti per l'inizio del lavoro:

- `A1: Formulario di geometria: i quadrilateri` (dimensione e colore a fantasia)
- `A3: Problemi sul Quadrato` (grassetto, colorato)
- `A5: Dato il lato, trovo: perimetro, area e diagonale` (grassetto, corsivo)
- `A6: Lato:` (allineamento a destra)
- `B6:` (colore di sfondo: verde)
- `A7: Perimetro` (allineamento a destra)
- `B7: =B6 * 4` (colore di sfondo: azzurro)
- `A8: Area`
- `B8: =B6^2` (colore di sfondo: azzurro)
- `A9: Diagonale`
- `B9: =B6*sqrt(2)` (colore di sfondo: azzurro)
- `A1:B9` (Menu-Formato-Cella-Bordo: contorno)

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Prima di procedere con il formulario conviene provare inserendo nella cella `B6` diversi valori numerici prima semplici per controllare che il foglio esegua calcoli corretti, poi più strani, con la virgola, molto grandi o molto piccoli e osservare i corrispondenti risultati. Una volta risolti eventuali problemi riscontrati, possiamo salvare il lavoro fatto e passare ai problemi inversi del quadrato oppure affrontare i problemi relativi ad altre figure geometriche.

Riassumendo

- Un foglio di calcolo è composto da un gran numero di "celle" organizzate in "righe" e "colonne"
- Ogni cella è caratterizzata da:
    - un indirizzo, composto da una lettera o gruppo di lettere e un numero;
    - un contenuto, che può essere:
        - un testo,
        - un numero,
        - una formula;
    - un formato.

1.3 Formati e ordinamenti

Come selezionare un blocco di celle, sommare i dati di un intero blocco, modificare la larghezza di una colonna, disegnare griglie, ordinare i dati.

Spesso nei fogli di calcolo si devono inserire formule con molti operandi o molte formule che si assomigliano, i fogli di calcolo forniscono degli strumenti per realizzare ciò in modo efficiente e veloce. Come primo esempio partiamo dai dati relativi alla superficie dei continenti e alla loro popolazione. Per ora lavoreremo su pochi dati, ma cerchiamo di ragionare pensando di avere a che fare con centinaia di righe di dati invece che con solo queste sei.

	A	B	C	D
1	Dati relativi alla popolazione e alla superficie dei continenti			
2				
3	continente	superficie (km^2)	popolazione (migliaia)	
4	Europa	10832312	805974	
5	Africa	30221000	1020201	
6	America	42549000	914463	
7	Asia	44579000	4140336	
8	Oceania	7687000	36102	
9	Antartide	14000000	4	
10				

FIGURA 1.2: Dati relativi alla superficie e alla popolazione dei 6 continenti.

Avviamo un nuovo foglio e salviamolo con il nome "continenti". Poi eseguiamo le seguenti istruzioni:

- `A1: Dati relativi alla popolazione e alla superficie dei continenti` (dimensione e colore a fantasia)
- `A3:C10`: Ricopiamo i dati della tabella riportata sopra.

Non è difficile ricopiare la tabella, si incontra qualche difficoltà solo nelle celle `B3` e `C3`.

- La cella `B3` contiene un carattere posto a indice, come ottenerlo? Innanzitutto si scrivono tutti i caratteri che vogliamo appaiano: "Area (km2)", poi con il mouse selezioniamo nella riga di immissione il solo carattere "2" e da `Menu-Formato-Carattere-Posizione` scegliamo "apice". Confermando con invio otteniamo il risultato desiderato.

- La cella C3 contiene una scritta troppo lunga che esce dai bordi della cella stessa, vorremmo che fosse spezzata su due righe. Poniamoci in C3 e modifichiamo il formato della cella: `Menu-Formato-Celle-Allineamento-Scorrimento testo automatico`.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora vogliamo che il contenuto di queste celle sia visualizzato in grassetto e sia centrato: dopo aver selezionato le celle, tra le icone che si trovano nella *barra di formattazione* troviamo i pulsanti giusti da cliccare per ottenere questi effetti. Possiamo ripetere queste operazioni per ognuna delle celle oppure... [Gli informatici sono estremamente pigri (addirittura più dei matematici), poiché odiano ripetere le stesse operazioni e gli stessi gesti hanno inventato delle macchine bravissime a ripetere stupide operazioni.] Invece che modificare per tre volte il formato di una cella è possibile selezionare le tre celle e aggiustarne il formato assieme.

Per selezionare un gruppo di celle contiguo e rettangolare basta cliccare sulla cella in alto a sinistra e, tenendo premuto il tasto sinistro del mouse, trascinare il cursore fino alla cella in basso a destra. Quando si rilascia il tasto del mouse il colore delle celle selezionate apparirà invertito.

Ora vogliamo aggiungere una riga che contenga i totali della superficie e della popolazione:

- `B11: =somma(B4:B9)` (grassetto)
- `C11: =somma(C4:C9)` (grassetto)

Se ora effettuiamo un doppio clic nella cella B10 ci viene evidenziata la formula e la zona di celle su cui lavora.

Dato che la somma di un gruppo contiguo di celle è molto frequente, ci sono molti modi per immettere queste formule. Proviamo a vederli, poi, a seconda dei casi useremo quello più comodo. Per prima cosa cancelliamo il contenuto delle celle B10:C10. Ci riportiamo nella cella B10 e: iniziamo a scrivere la formula:

`=somma(`

selezioniamo con il mouse le celle B4:B10, chiudiamo la parentesi tonda e confermiamo con il tasto `<Invio>`

Per la cella C11 proviamo ad usare un altro metodo. Una volta portati nella cella C11, clicchiamo l'icona della *sommatoria* che si trova in alto a sinistra della casella di inserimento se le scelte di Calc ci vanno bene, confermiamo la formula con il tasto `<Invio>`.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

I numeri con troppe cifre sono difficili da leggere e valutare, per facilitare questo compito, di solito, si separano le cifre a gruppi di 3 con dei puntini, i separatori delle migliaia (delle virgole per gli anglosassoni che usano invece il punto per separare la parte intera da quella decimale). Selezioniamo le celle da B4 a C10 e da `Menu-Formato-Celle-Numeri` scegliamo il numero con il separatore delle migliaia e senza cifre decimali.

I caratteri con cui stiamo lavorando sono piuttosto piccoli, vogliamo aumentare la dimensione della font dei caratteri per tutte le celle del foglio. Per selezionarle tutte in un solo colpo possiamo cliccare nell'angolo della cornice con le intestazioni delle righe e delle colonne, il rettangolino che si trova sopra a "1" e a sinistra di "A". Una volta selezionato tutto il foglio di lavoro, nella barra di formattazione cambiamo la dimensione del font da 10 a 12.

A questo punto può succedere un effetto spiacevole: alcune celle dove prima c'era un numerone ora appaiono tre *cancelletti*: "###". Cosa è successo? Se una cella non è abbastanza grande per contenere un numero questo non viene tagliato. Poiché non è accettabile che un numero venga visualizzato solo in parte, quando non può essere contenuto in una cella, viene sostituito da un simbolo convenzionale: “###”. Per vedere di nuovo il nostro numero possiamo seguire una delle seguenti strade:

1. togliere i puntini delle migliaia;
2. diminuire le dimensioni del carattere;
3. allargare la cella.

La soluzione più adatta nel nostro caso è la terza. Clicchiamo con il tasto destro del mouse sull’intestazione della colonna da allargare e dal menu a tendina che appare scegliamo la voce: “Larghezza colonna”. Nel campo di inserimento al posto di 2,62 scriviamo 3 e confermiamo. La colonna si sarà allargata un pochino e i numeri verranno di nuovo visualizzati.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

A volte può essere utile avere i dati ordinati rispetto ad un certo criterio. Se i continenti fossero decine o centinaia, per trovare i dati relativi ad uno di questi sarebbe comodo averli scritti in ordine alfabetico. Possiamo dire *Calc* di ordinare le righe in base al contenuto di una colonna. Se vogliamo ottenere i continenti in ordine alfabetico selezioniamo il blocco di celle da `A4:C9` e attraverso il `Menu-Dati-Ordina` scegliamo come primo criterio la colonna “A”. Confermando, otteniamo le righe ordinate in ordine alfabetico dall’Africa all’Oceania.

Se vogliamo i continenti ordinati dal più popolato al meno popolato, sempre dopo aver selezionato tutte le celle che contengono i dati da ordinare, scegliamo dal `Menu-Dati-Ordina` come primo criterio la colonna `C` e come ordine quello discendente. In un batter d’occhio ritroveremo i nostri dati ordinati per popolazione.

Riassumendo

- È possibile selezionare un blocco di celle con il mouse o con la tastiera.
- È possibile assegnare un formato a tutte le celle di un blocco.
- È possibile calcolare la soma dei numeri contenuti in blocchi di celle.
- È possibile disegnare i contorni delle celle.
- Si può ordinare un blocco di celle in base a diversi criteri.
- Spesso ci sono molti modi diversi per eseguire la stessa operazione. È importante saper usarne uno, poi gli altri si imparano con il tempo e con l’uso.

1.4 Copiare in modo intelligente

Come ricopiare formule usando indirizzi relativi e assoluti.

Riprendiamo i dati già usati nel capitolo precedente, con delle semplici formule possiamo ottenere delle informazioni nuove. Possiamo, ad esempio, far calcolare la densità di popolazione per mezzo della formula popolazione/superficie.

- `D3: Densità ab/km2` (centrato, grassetto)
- `D3:` Selezionare nella riga di input il solo 2 (formato-carattere-posizione-apice)
- `D3:` (formato cella-allineamento-acapo automatico)
- `D4: =C4*1000000/B4` (formato-celle-numeri- zero decimali)
- `D5: =C5*1000000/B5` (formato-celle-numeri-zero decimali)
- `D6:` ...(...)

Dato che i continenti sono solo 6 non è un grande problema scrivere le 6 formule diverse una sotto l'altra, ma in un foglio di calcolo spesso si devono scrivere centinaia o migliaia di formule simili a queste! Chi ha progettato il foglio di calcolo ha previsto degli strumenti che permettono di ricopiare velocemente le formule. Ponendoci nella cella `D4`, appare nell'angolo in basso a destra, della cella stessa, un quadratino nero; con il mouse trasciniamo questo quadratino verso il basso fino a coprire tutte le celle in cui vogliamo ricopiare la formula.

Non solo il programma ha ricopiato la formula ma ha anche aggiustato gli indici, proprio come ci serviva. Da notare che quando viene ricopiata una formula vengono anche ricopiati i formati della celle in cui la formula è stata scritta.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Un'altra informazione interessante che possiamo ricavare dai pochi dati in nostro possesso è la percentuale rappresentata dalla superficie di un continente rispetto alla superficie totale delle terre emerse. La percentuale non è altro che un rapporto, il quoziente tra la superficie di un continente e il totale. Procediamo con il lavoro:

- ➡ `E3:  Perc. Sup.` (centrato, grassetto)
- ➡ `E4:  =B4/B10`

Il risultato di questo calcolo è un numero compreso tra zero e uno, non è certo la percentuale cercata, se lavoriamo sulla carta, per trasformare questo numero nella percentuale basta moltiplicarlo per `100`. Nei fogli di calcolo basta indicare nel formato della cella che quel numero deve essere inteso come una percentuale:

- ➡ `E4:  =B4/B10` (formato-celle-numeri-percentuale)
- ➡ `E5:  =B5/B10` (formato-celle-numeri-percentuale)
- ➡ `...`

Anche qui, invece di riscrivere tutte le formule possiamo sfruttare le capacità del foglio di calcolo e farle ricopiare verso il basso. Dopo esserci posizionati nella cella `E4`, prendiamo il quadratino che appare in basso a destra e trasciniamolo verso il basso in modo da coprire le celle di tutti i continenti. Questa volta l'effetto non è quello desiderato: otteniamo una serie di errori! Come mai?

Osserviamo una delle celle in cui è comparso l'errore, la cella `E5` contiene la formula `=B5/B12`. Per capire meglio la formula selezioniamo la cella con un doppio clic. Vengono evidenziate in rosso e blu le celle che sono utilizzate nella formula stessa. Appare evidente che `B5` va bene, ma `B11` doveva essere `B10`! Nella cella `B12` non c'è niente e il foglio di calcolo la interpreta come se contenesse il valore `0`. Giustamente produce un errore di divisione per `0`.

Noi vogliamo che, nel ricopiare le formule, l'indice numerico di `B4` venga modificato ma quello di `B10` rimanga costante. Nei termini dei fogli di calcolo si dice che `B4` deve essere un **indirizzo relativo**, `B10` un **indirizzo assoluto**. Per essere pignoli a noi non occorre che tutto `B10` sia assoluto, siccome vogliamo ricopiare la formula verso il basso ci basta che sia assoluta la parte numerica dell'indirizzo: l'`10`.

Per comunicare questi desideri al foglio di calcolo si mette davanti al riferimento che vogliamo sia assoluto il carattere dollaro: "$". Questo fa si che il programma quando ricopia le formule non ne modifichi il riferimento. Aggiustiamo le nostre formule:

- ➡ `E4:  =B4/B$11` (formato-celle-numeri-percentuale)

Ora ricopiare la cella verso il basso produce l'effetto desiderato! Nella cella `E5` ci sarà la formula `=B5/B$10`, nella cella `E6` la formula `=B6/B$10`, e così via.

L'elaborazione numerica dei nostri dati è completa, disegniamo un bordo anche attorno alle nuove celle che abbiamo riempito ottenendo così un foglio presentabile.

E salviamo il lavoro fatto.

Riassumendo

- ➡ Si possono "ricopiare" formule trascinando il quadratino che appare in basso a destra di una cella selezionata.
- ➡ Quando ricopiamo una formula verticalmente gli indici relativi alla riga, i numeri, vengono modificati.
- ➡ Quando ricopiamo una formula orizzontalmente gli indici relativi alla colonna, le lettere, vengono modificati.
- ➡ Se vogliamo che, nel ricopiare una formula, un indice non venga modificato, basta che lo facciamo precedere dal carattere: "$".

1.5 Diagrammi

Come rappresentare graficamente i dati.

Spesso un grafico dà una più immediata comprensione di un fenomeno rispetto ad una lista di numeri. I fogli di calcolo permettono di disegnare grafici di diversa forma.

Riprendendo il foglio dei continenti vogliamo aggiungere due grafici per rappresentare la superficie e la popolazione.

Apriamo il foglio su cui abbiamo lavorato finora selezioniamo le celle che contengono i dati che vogliamo rappresentare. Iniziamo costruendo un grafico a torta che riporti la superficie dei diversi continenti.

1. Selezioniamo le celle `A4:B9`.
2. Da menu scegliamo Inserisci-Diagramma, viene così aperta una finestra di dialogo che ci guida nella definizione del diagramma.
3. Controlliamo che sia selezionata la casella "Prima colonna come didascalia" e premiamo "Avanti".
4. Nella seconda pagina di questo dialogo selezioniamo: "Rappresenta oggetti nell'anteprima", e scegliamo il grafico a torta e "Serie di dati in Colonne".
5. Nella terza pagina, scegliamo "normale".
6. Nell'ultima pagina scriviamo il titolo (ad es. "Superficie") e confermiamo cliccando sul bottone "Crea".

A questo punto viene creato un diagramma. Un clic sul diagramma lo seleziona e fa apparire le maniglie di dimensionamento che permettono di modificarne le dimensioni. Quando è selezionato possiamo anche spostarlo dove vogliamo che appaia nella nostra pagina. Posizioniamolo subito sotto ai dati.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

È possibile modificare i dati rappresentati nel diagramma cliccando con il tasto sinistro sul diagramma stesso e scegliendo, dal menu contestuale, la voce "Modifica area dati".

Se vogliamo che il diagramma sia riquadrato da un bordo, dopo aver dato un doppio clic sul diagramma, scegliamo dal menu contestuale la voce "Area del diagramma".

Se vogliamo modificare più profondamente il diagramma appena creato possiamo effettuare un doppio clic sul diagramma stesso. Il menu principale del foglio di calcolo cambia e cambiano anche i menu contestuali (quelli legati al tasto destro) a seconda di cosa viene puntato dal mouse. Dal menu "Inserisci" scegliamo "Legenda" e togliamo il segno di spunta su "Visualizza".

La Legenda scompare, ma adesso il diagramma è di difficile interpretazione, operiamo dunque un'altra modifica: sempre dal menu Inserisci scegliamo "Etichette" e chiediamo che ci vengano mostrati i valori come percentuale e anche le etichette di testo. Se le etichette sono troppo lunghe e sbilanciano la rappresentazione conviene abbreviarle. Ora se il diagramma risulta troppo piccolo e non riempie bene lo spazio a sua disposizione possiamo cliccare vicino alla *torta* e allargarlo agendo sulle maniglie verdi che appaiono.

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora se vogliamo un diagramma che contenga i dati relativi al numero di abitanti dobbiamo selezionare i nomi dei continenti e i valori della popolazione. Purtroppo questi valori non sono contigui, per selezionarli dobbiamo usare un trucco:

1. selezioniamo con il mouse le celle `A4:A9` e
2. selezioniamo le celle `C4:C9` tenendo premuto contemporaneamente il tasto `<Ctrl>`.

Il tasto `<Ctrl>` permette di effettuare selezioni multiple su blocchi rettangolari non contigui. Dopo aver selezionato le aree contenenti i dati, dal `menu-Inserisci` scegliamo la voce "Diagramma". Questa volta invece che un diagramma a torta vogliamo un istogramma. Come prima assicuriamoci che sia selezionata la voce "Prima colonna come didascalia", nella pagina seguente selezioniamo "Rappresenta oggetti nell'anteprima". Possiamo così accorgerci che la legenda, in questo caso non ha senso. Nell'ultima pagina scriviamo il titolo del diagramma: "Popolazione" e deselezioniamo la voce "Legenda".

A questo punto creiamo il diagramma e lo posizioniamo in fianco al precedente.

Vogliamo ora disegnargli un riquadro attorno: doppio clic nel diagramma, poi: `menu-Formato-Area del Diagramma`, ...

Vogliamo anche che le etichette dell'asse x vengano scritte in verticale in modo da non essere spezzate: `menu-Formato-Assi-AsseX` e lì modifichiamo le etichette mettendo la rotazione a 90^{O} selezionando "Sovrapponi" e deselezionando "A capo".

Questo è un buon momento per salvare il lavoro fatto.

Ora i diagrammi sono come li volevamo. Prima di considerare finito il lavoro dobbiamo però controllare di poterlo stampare in un'unica pagina. Clicchiamo fuori dai diagrammi, in una cella qualunque, poi da `Menu-Visualizza` scegliamo "Interruzioni di pagina". Una linea blu delimiterà i contorni delle varie pagine, modifichiamo le dimensioni dei diagrammi o spostiamoli in modo da farli rientrare tutti in un'unica pagina, assieme ai dati.

Se la scala della visualizzazione si è troppo ridotta possiamo cliccare con il destro sulla percentuale presente nella barra di stato (in basso) e scegliere il valore "100%". Possiamo anche agire sul formato della pagina: `Menu-Formato-Pagina` dove possiamo agire sull'orientamento della pagina (verticale o orizzontale), sui margini (possiamo ridurli per lasciare più posto ai contenuti) sull'intestazione o sul piè di pagina: togliamo l'intestazione e modifichiamo il piè di pagina scrivendo a sinistra la data e a destra il nostro nome.

Un'occhiata al lavoro svolto con l'anteprima di stampa può rassicurarci che è tutto disposto per bene nella pagina. Se siamo soddisfatti possiamo considerare finito il lavoro, altrimenti chiudiamo l'anteprima e modifichiamo gli aspetti che non ci piacciono.

Salviamo ancora una volta il lavoro ed eventualmente stampiamolo.
Riassumendo

- Il modo più semplice per realizzare un diagramma è quello di selezionare i dati che vogliamo rappresentare e poi scegliere Menu-Inserisci-Diagramma.
- Nel dialogo di costruzione di un diagramma possiamo scegliere diverse caratteristiche: etichette, tipo e sottotipo, assi, legenda, titoli, ...
- Una volta costruito un diagramma è possibile modificarlo usando il menu che appare dopo aver effettuato un doppio clic sul diagramma stesso.
- È Importante salvare spesso il proprio lavoro.
- La vista con interruzioni di pagina permette di impaginare in modo efficace il nostro lavoro.
- Il menu-Formato-Pagina permette di intervenire sull'orientamento, le dimensioni, i margini, le intestazioni, i piè di pagina, ...

1.6 Esercizi

1.1. Riporta in un foglio di calcolo il numero di pagine dei diversi testi scolastici. Calcola la media di pagine per libro e la somma delle pagine. Trova quante pagine devi leggere ogni giorno di scuola per "consumare" tutti i libri.

1.2. Realizza un formulario dinamico che permetta di calcolare volume, superficie, diagonale di un parallelepipedo rettangolo dati i suoi tre spigoli.

1.3. Realizza un formulario dinamico che permetta di calcolare volume, superficie laterale, superficie totale di un prisma retto a base triangolare dati lo spigolo di base e l'altezza.

1.4. Ricerca la superficie e le popolazione delle regioni italiane e realizza un foglio di calcolo simile a quello relativo ai continenti.

1.5. Procurati l'altezza dei i tuoi compagni di classe. Realizza un foglio di calcolo in cui venga calcolata la media la moda e la mediana dei valori.

1.6. Annota tutto quello che mangi in una giornata segnando anche le quantità approssimative. Cerca il valore energetico dei diversi cibi da te consumati. Costruisci una tabella che calcoli l'energia introdotta durante la giornata.

1.7. Annota l'ora di inizio e di fine di ogni volta che ti metti davanti ad uno schermo: (cellulare, televisione, computer). Crea un foglio di calcolo che calcoli il tempo dedicato agli schermi in ogni singolo intervallo, li sommi, trovi la percentuale della giornata relativa ad ogni singolo schermo e a tutti assieme.

1.8. Ricerca i dati relativi al consumo di carburante in Italia negli ultimi anni. Rappresenta questi dati con un grafico.

1.9. Annota i mezzi di trasporto utilizzati dalla vostra classe per venire a scuola. Organizza questi dati in un foglio di calcolo, ricavane la distribuzione percentuale e rappresentali con un grafico.

1.10. In classe scegliete un testo di almeno una pagina. Distribuendovi una lettera dell'alfabeto a testa, ognuno conti le occorrenze della sua lettera nel testo scelto. Riportate tutti i numeri in un foglio di calcolo calcolate la percentuale di occorrenze di ogni singola lettera. Ordinate le righe dalla lettera più frequente a quella meno frequente.

1.11. Ripetete l'esercizio precedente con un altro testo di italiano e con un testo scritto in un'altra lingua. Scrivi una congettura che puoi fare già con questi pochi esperimenti.

Geometria interattiva 1 2

2.1 Introduzione

Cos'è la geometria interattiva, i primi oggetti.

La geometria interattiva è un programma che permette di creare gli oggetti della geometria euclidea in un computer. Questa geometria viene detta interattiva perché gli elementi di base possono essere mossi con il mouse e quindi le figure create possono venir deformate.

La geometria interattiva permette di visualizzare facilmente elementi varianti e invarianti di una certa costruzione geometrica.

La geometria interattiva ci mette a disposizione alcuni elementi primitivi tra cui: punti, rette, semirette, segmenti, circonferenze, angoli, testi . . . (i testi non sono oggetti geometrici, ma ci possono essere utili per aggiungere delle informazioni al disegno che stiamo realizzando).

Esistono molti programmi che permettono di operare con la geometria interattiva, a questo indirizzo se ne possono trovare molti:

`en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software`

Un altro progetto interessante che contiene anche la geometria interattiva è:

`www.kogics.net/sf:kojo`

In questo testo propongo l'uso del linguaggio Python con la libreria `pyig`.

È comunque possibile seguire il percorso proposto anche con un programma *punta e clicca* invece che con un linguaggio.

Prima di poter usare la geometria interattiva dobbiamo installare i software necessario.

2.1.1 Installiamo un interprete

Cosa installare per lavorare con la geometria interattiva.

Python

Chi usa come sistema operativo Windows può installare `Python` a partire dal sito:

`www.python.org/downloads`

E installare la versione più recente della serie 3.x.x.

Chi utilizza altri sistemi operativi può installarlo partendo dal proprio gestore di pacchetti installando `Python3` e anche `IDLE`.

`pygraph`

Si può scaricare l'intero pacchetto da:

`bitbucket.org/zambu/pygraph/downloads`

A questo punto bisogna fare a mano alcune operazioni che dipendono dal proprio sistema operativo:

Windows

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella cartella `pygraph`.
- Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.
- Copiarli nella cartella `C:\Python3x\Lib\site-package`

Dove "Python3x" potrebbe essere: "Python34", "Python35" ...

MacOSX

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella cartella `pygraph`.
- Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.
- Copiarli nella cartella `HD/libreria/python/3.x/site-package`

Se in "HD/libreria/python/" non è presente la cartella "3.4/site-packages", bisogna crearla.

GNU/Linux

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella directory `pygraph`.
- Aprire un terminale in questa directory.
- Copiare la cartella `pygraph` e il file `pygraph.pth` nella cartella
  `/usr/lib/python3/dist-packages/`
  Dato che in Linux, per modificare le directory di sistema bisogna essere amministratori, il comando da dare assomiglierà a questo:
  `sudo cp -R python* /usr/lib/python3/dist-packages/`

A questo punto se tutto è andato bene dovremmo essere in grado di avviare Python-IDLE e dare il comando:

```
import pyig as ig
```

Se non succede nulla vuol dire che tutto è andato a buon fine, se invece appare una scritta rossa, bisogna leggere almeno l'ultima riga e cercare di capire cosa non è andato bene. Magari ci si può far aiutare da qualcuno esperto nell'installazione di programmi. Se tutto è andato per il verso giusto possiamo procedere.

2.1.2 Riassumendo

- La geometria interattiva permette di creare e di muovere gli oggetti della geometria euclidea.
- Ci sono molti programmi che permettono di giocare con la geometria interattiva, noi utilizzeremo il linguaggio Python con la libreria `pyig`.

2.2 Elementi fondamentali

Ogni disegno che realizzeremo parte dalla creazione di alcuni punti liberi che sono punti che possono essere trascinati con il mouse. La Geometria interattiva mette in evidenza quali sono le caratteristiche invarianti e quali quelle variabili di una certa costruzione geometrica.

Un metodo per imparare, non solo l'informatica o la geometria, consiste nei seguenti tre passi: **copiare**, **capire**, **modificare**. Lo utilizzeremo per imparare la geometria e l'informatica. Studieremo la geometria interattiva ponendoci alcuni problemi di costruzione grafica e descrivendo la loro soluzione. Per ogni problema viene data una possibile soluzione. Riportala sul computer e verifica che funzioni. Non preoccuparti se non ti è chiara immediatamente, ogni programma viene spiegato in dettaglio.

2.2.1 Un piano vuoto

problema

Il primo problema che ci poniamo è quello di disegnare un piano vuoto. Il risultato ha poco di geometrico (anzi niente), ma ci permette di chiarire come è fatto un programma minimale.

copiare

Procedura 2.1. *Scrivi il programma.*

1. *Avvia IDLE (da Windows: menu-programmi-Python-IDLE);*
2. *Crea una nuova finestra di editor (menu-File-New File);*
3. *Ricopia il seguente programma;*
4. *Esegui il programma (menu-Run-Run Module o più semplicemente <F5>)*
5. *Correggi gli errori finché il programma non produce una finestra con un riferimento cartesiano vuoto.*

```
1  # 17/08/2016
2  # Daniele Zambelli
3  # Un piano vuoto
4
5  """
6  Disegna solo un piano.
7  """
8
9  # lettura delle librerie
10 import pyig
11
12 # programma principale
13 ip = pyig.InteractivePlane()
14 ## attivazione della finestra grafica
15 ip.mainloop()
```

capire

Spiegazione del programma:

linee 1-3 tutto quello che segue il carattere cancelletto ('#') viene ignorato dall'interprete Python perciò queste righe non vengono eseguite. Ma ogni programma che scriveremo deve iniziare con alcune informazioni: la data di creazione, l'autore o gli autori, un titolo.

linea 4 Una riga vuota può aiutare a rendere più leggibile il codice (vedi anche le linee: 8, 11).

linee 5-7 Questa è una stringa che si estende su più righe; inizia e termina con tre caratteri di virgolette doppie. In questa stringa mettiamo una descrizione di cosa fa il programma, nel nostro caso, scriviamo qui il problema che vogliamo risolvere con questo programma.

linee 9, 12, 14 Sono dei commenti che servono da *titolo* alle righe seguenti.

linea 10 Questa è la prima istruzione che viene effettivamente eseguita dall'interprete Python: Legge la libreria pyig cioè estende ciò che sa fare Python con tutto ciò che è contenuto in questa libreria.

linea 13 Questa è la prima istruzione del programma principale, serve per creare un piano interattivo. Il piano creato viene associato all'*identificatore* ip. La *classe* InteractivePlane è definita all'interno della libreria pyig è per questo che per creare un piano interattivo devo devo scrivere il nome della libreria seguito da un punto seguito dal nome della classe di cui voglio creare un oggetto. Se questa linea dà un errore bisogna controllare di aver rispettato le maiuscole e minuscole e di aver messo le parentesi tonde.

linea 15 Questa istruzione rende attiva (e interattiva) la finestra grafica. È importante che resti sempre l'ultima istruzione del programma.

osservazioni

- È normale ottenere degli errori quando si crea un programma. Gli errori che si ottengono sono di due tipi:

  Sintattici Il compilatore non riesce a capire quello che avete scritto. Potrebbero mancare dei simboli, una parentesi che è stata aperta non è stata chiusa, ... Questi errori vengono individuati prima ancora di incominciare ad eseguire il programma e vengono segnalati da una finestra *pop-up* aperta dall'editor dove è stato scritto il programma.

  Semantici Certe istruzioni, se pur formalmente corrette, non possono essere eseguite. Questi errori vengono riportati nella finestra della *Shell* di IDLE, in rosso. L'ultima riga dà un'indicazione del motivo dell'errore, quelle subito precedenti indicano l'istruzione che ha creato l'errore e la sua posizione nel programma.

- Per semplificare la correzione degli errori, organizzate il vostro desktop in modo da avere sempre in vista contemporaneamente sia il programma sia la finestra della *shell* dove appaiono gli errori.

modificare

1. Commenta, ponendo un cancelletto ('#') a inizio riga, una alla volta le tre istruzioni del programma e osserva cosa succede.
2. Nella shell di Idle scrivi le seguenti istruzioni:

```
>>> import pyig
>>> help(pyig.InteractivePlane.__init__)
```

Quello che ottieni è la descrizione dei parametri che possono essere passati al costruttore del piano interattivo. Prova a modificare la finestra grafica cambiando la riga 13 del programma in questo modo:

```
13 ip = pyig.InteractivePlane(name='il MIO piano')
```

3. Personalizza il piano cartesiano modificando altri parametri.

2.2.2 Oggetti di base

Disegniamo alcuni elementi di base: un punto, un segmento, una retta, una circonferenza.

copiare

Con lo stesso procedimento utilizzato sopra, scrivi il seguente programma e correggilo finché non funziona.

```
1  # 17/08/2016
2  # Daniele Zambelli
3  # Elementi di base della geometria interattiva
4  
5  """
6  Disegna: un punto nel primo quadrante, un segmento nel secondo,
7  una retta nel terzo, una circonferenza nel quarto.
8  """
9  
10 # lettura delle librerie
11 import pyig
12 
13 # programma principale
14 ip = pyig.InteractivePlane()
15 ## punto
16 pyig.Point(3, 5, color="pink", width=6, name="A")
17 ## segmento
18 p_1 = pyig.Point(-9, 6, width=6, name="B")
19 p_2 = pyig.Point(-2, 4, width=6, name="C")
20 pyig.Segment(p_1, p_2, color="red", width=4)
21 ## retta
22 pyig.Line(pyig.Point(-3, -8, width=6, name="D"),
23           pyig.Point(-8, -5, width=6, name="E"))
24 ## circonferenza
25 pyig.Circle(pyig.Point(6, -5, width=6, name="Centro"),
26             pyig.Point(7, -1, width=6, name="P"))
27 ## attivazione della finestra grafica
28 ip.mainloop()
```

capire

Struttura Il programma ha la stessa struttura del precedente:

- un'intestazione con alcune informazioni (linee 1-3);

- la descrizione del problema che risolve (linee 5-8);
- la lettura delle librerie (linea 11);
- il programma principale (linee 14-28);
- notare sempre l'ultima istruzione del programma principale che rende attiva la finestra grafica.

linea 16 Viene creato un oggetto Point della libreria pyig. In questa istruzione vengono anche precisati: un colore e uno spessore e un'etichetta. Queste due informazioni non sono strettamente necessarie si può creare un punto anche fornendo solo le coordinate che indicano dove disegnarlo: pyig.Point(3,5)

linee 18-20 Per disegnare un segmento (pyig.Segment) ho bisogno di indicare i suoi due estremi che sono due punti quindi devo prima creare i due punti, associarli a due identificatori e poi passare questa informazione al costruttore del segmento.

- la linea 18 crea un punto e lo associa all'identificatore p_1
- la linea 19 crea un punto e lo associa all'identificatore p_2
- la linea 20 crea un segmento che va da p_1 a p_1

linee 22-23 Per disegnare una retta (pyig.Line) ho bisogno di indicare due suoi punti quindi posso seguire lo stesso meccanismo usato per il segmento:

```
p_3 = pyig.Point(-3, -8, width=6, name="D")
p_4 = pyig.Point(-8, -5, width=6, name="E")
pyig.Line(p_3, p_4)
```

ma il metodo proposto nell'esempio è equivalente e un po' più rapido. Da notare che queste due righe descrivono un'unica istruzione e che alla fine ci sono due parentesi tonde: la prima per chiudere la costruzione del secondo punto, la seconda per chiudere la costruzione della retta. Se avete dei dubbi provate a cancellare le due parentesi e a riscriverle prestando ben attenzione a cosa avviene nell'editor.

linee 25-26 Per disegnare una circonferenza (pyig.Circle) ci sono diversi modi quello usato qui richiede che siano passati al costruttore il centro e un punto della circonferenza. Lo si può fare con il metodo usato per il segmento, ma dato che richiede una riga di codice in meno, io preferisco il metodo usato per la retta.

osservazioni

- Può sembrare una banalità preferire il metodo utilizzato per disegnare la retta al metodo usato per il segmento, si risparmia solo una riga di codice. Ma una riga su tre equivale al 33% che non è poco, e inoltre è preferibile non introdurre degli identificatori se non servono. Una regola generale recita: "Quello che non c'è non si può rompere", meno istruzioni ci sono in un programma e meno errori avrò.

- Muovi i punti base del disegno e osserva come si comportano gli oggetti grafici.

modificare

1. Cambia a tuo piacere i colori dei vari elementi grafici. Quali colori possono assumere?
2. Aggiungi al programma una circonferenza con centro nell'origine.

2.2.3 Intersezioni

Disegniamo:

- la retta passante per $(-2; 7)$ e $(5; 7)$;
- la circonferenza c, di centro $(2; -5)$ e passante per $(4; 0)$;
- la retta s, passante per $(-3; 2)$ e $(4; 2)$;
- l'intersezione tra le due rette s e r;
- le intersezioni tra la retta s e la circonferenza c.

copiare

```
# 18/08/2016
# Daniele Zambelli
# Intersezioni

"""
Disegna:
- la retta r, passante per (-2; 7) e (5; 7);
- la circonferenza c, di centro (2; -5) e passante per (4; 0);
- la retta s, passante per (-3; 2) e (4; 2);
- l'intersezione tra le due rette s e r;
- l'intersezione tra la retta s e la circonferenza c.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## retta r
retta_r = pyig.Line(pyig.Point(-2, 7, visible=False),
                    pyig.Point(5, 7, visible=False), name="r")
## circonferenza c
circ_c = pyig.Circle(pyig.Point(2, -5, visible=False),
                     pyig.Point(4, 0, visible=False), name="c")
## retta s
retta_s = pyig.Line(pyig.Point(-3, 2, width=6, name="A"),
                    pyig.Point(4, 2, width=6, name="B"), name="r")
## intersezione retta_s-retta_r
pyig.Intersection(retta_s, retta_r, color="green")
## intersezioni retta_s-circ_c
pyig.Intersection(retta_s, circ_c, -1, color="red")
pyig.Intersection(retta_s, circ_c, +1, color="yellow")
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

capire

Struttura Il programma ha sempre la stessa struttura;

linee 20-27 Vengono create le due rette e la circonferenza, da notare che viene data un'etichetta a questi oggetti, non ai punti.

linea 29 Viene creata l'intersezione tra le due rette assegnando a questo punto il colore verde.

linee 31-32 Vengono create le due intersezione della retta con la circonferenza. pyig permette di creare un'intersezione alla volta quindi per distinguere le due intersezioni è obbligatorio aggiungere un argomento che può valere solo -1 o $+1$, se ci dimentichiamo di precisare quale intersezione vogliamo, Python ci segnala un errore

linee

osservazioni

- Provate a muovere la retta s, quando questa incontra l'altra retta o la circonferenza, appaiono i punti di intersezione.
- Provate a muovere gli altri due oggetti... non c'è modo di farlo perché i punti su cui si basano sono stati creati con il parametro visible posto a False.

modificare

1. Rendi modificabili anche la retta r e la circonferenza.
2. Rendi un po' più visibili i punti di intersezione.

2.2.4 Altri oggetti primitivi

Disegniamo, nei diversi quadranti: una semiretta, un angolo, un angolo con un solo lato visibile, un angolo con entrambi i lati visibili.

copiare

```
# 18/08/2016
# Daniele Zambelli
# altri oggetti

"""
Disegna: una semiretta, un angolo, un angolo con un solo lato visibile,
un angolo con entrambi i lati visibili.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## semiretta r
pyig.Ray(pyig.Point(2, 1, width=6, name="A"),
         pyig.Point(5, 7, width=6, name="B"))
## primo angolo
pyig.Angle(pyig.Point(-2, 3, width=6, name="C"),
```

```
20              pyig.Point(-8, 3, width=6, name="V_1"),
21              pyig.Point(-4, 7, width=6, name="D"))
22 ## secondo angolo
23 pyig.Angle(pyig.Point(-4, -7, width=6, name="E"),
24              pyig.Point(-10, -3, width=6, name="V_2"),
25              pyig.Point(-5, -3, width=6, name="F"), [0])
26 ## terzo angolo
27 pyig.Angle(pyig.Point(9, -2, width=6, name="G"),
28              pyig.Point(4, -2, width=6, name="V_3"),
29              pyig.Point(8, -5, width=6, name="H"), [0, 1])
30 ## attivazione della finestra grafica
31 ip.mainloop()
```

capire

linee 16-17 La costruzione di una semiretta avviene in modo molto simile a quella di una retta.

linee 19-21 Un modo per costruire un angolo è quello di dare un punto dl primo lato, il vertice e un punto del secondo lato. Se non viene specificato altro i lati non vengono disegnati ma appare solo l'archetto che indica l'angolo.

linee 23-25 Per far disegnare il primo lato faccio seguire ai tre punti, necessari per la costruzione, una lista che contiene il numero zero: [0].

linee 27-29 Per far disegnare entrambi i lati faccio seguire ai tre punti, una lista che contiene i numeri zero e uno: [0, 1].

osservazioni

- L'ultimo dei tre angoli può un po' stupire. Osservate bene qual è il primo lato e quale il secondo e ricordatevi che l'angolo procede sempre in verso antiorario dal primo al secondo. Provate a muovere il punto C più a sinistra del punto D.

modificare

1. Cambia il colore e lo spessore della semiretta.
2. Cambia il colore e lo spessore dell'angolo.
3. Cambia la costruzione del secondo angolo in modo che venga visualizzato il secondo lato.

2.2.5 Poligoni

Disegniamo un triangolo nel primo quadrante, un quadrilatero nel secondo, un pentagono nel terzo e un esagono nel quarto.

copiare

```
# 19/08/2016
# Daniele Zambelli
# Poligoni
```

```
4
5 """
6 Disegna: un triangolo nel primo quadrante, un quadrilatero nel secondo,
7 un pentagono nel terzo, un esagono nel quarto.
8 """
9
10 # lettura delle librerie
11 import pyig
12
13 # programma principale
14 ip = pyig.InteractivePlane()
15 ## triangolo
16 p_0 = pyig.Point(2, 3, width=6, color="pale turquoise")
17 p_1 = pyig.Point(5, 1, width=6, color="cornflower blue")
18 p_2 = pyig.Point(7, 9, width=6, color="royal blue")
19 s_0 = pyig.Segment(p_0, p_1, color="indian red", width=6)
20 s_1 = pyig.Segment(p_1, p_2, color="salmon", width=6)
21 s_2 = pyig.Segment(p_2, p_0, color="rosy brown", width=6)
22 ## quadrilatero
23 p_0 = pyig.Point(-2, 2, width=6)
24 p_1 = pyig.Point(-2, 8, width=6)
25 p_2 = pyig.Point(-8, 8, width=6)
26 p_3 = pyig.Point(-8, 2, width=6)
27 pyig.Polygon([p_0, p_1, p_2, p_3],
28              width=6, color="dark green", intcolor="light steel blue")
29 ## pentagono
30 vertici_p = [pyig.Point(-1, -2, width=6), pyig.Point(-6, -3, width=6),
31              pyig.Point(-8, -5, width=6), pyig.Point(-7, -9, width=6),
32              pyig.Point(-4, -5, width=6)]
33 pyig.Polygon(vertici_p, width=6, color="chocolate", intcolor="gold")
34 ## esagono
35 coord = [(1, -3), (2, -5), (5, -7), (7, -8), (4, -4), (8, -2)]
36 vertici_e = [pyig.Point(x, y, width=6, color="pink") for x, y in coord]
37 pyig.Polygon(vertici_e, width=6, color="navy", intcolor="azure2")
38 ## attivazione della finestra grafica
39 ip.mainloop()
```

capire

In questo programma vengono usati metodi diversi per fare la stessa cosa; dato che tutti funzionano, non è essenziale capirli tutti.

linee 16-21 Vengono disegnati, prima tre punti, poi i tre segmenti che li congiungono formando un triangolo.

linee 23-26 Vengono disegnati 4 punti.

linee 27-28 Viene disegnato il poligono che ha questi 4 punti come vertici. Il primo argomento passato a pyig.Polygon è una lista che contiene tutti i vertici. Gli altri argomenti sono: lo spessore del bordo, il suo colore e il colore dell'interno.

linee 30-32 Viene creata una lista di cinque punti e viene associata all'identificatore `vertici_p`.

linea 33 Viene creato un poligono a cui viene passato come primo argomento la lista di punti associata a `vertici_p`.

linea 35 Viene creata una lista di coordinate (coppie di numeri).

linea 36 Con un metodo che si chiama "list comprehension" viene creata una lista di punti partendo dalla lista di coordinate.

linea 37 Viene creato il poligono passando come primo argomento: la lista di vertici.

osservazioni

- Il metodo usato per disegnare il triangolo permette di scegliere colori diversi per i diversi lati, ma non di colorare la superficie del poligono.
- Il quadrilatero potrebbe sembrare un quadrato, e in effetti inizialmente lo è, ma non è una proprietà della figura infatti con il mouse è facile deformarla.
- Il primo argomento di un poligono deve essere una sequenza di punti, se l'istruzione delle righe 27-27 l'avessi scritta così:

```
27 pyig.Polygon(p_0, p_1, p_2, p_3,
28              width=6, color="dark green", intcolor="light steel blue")
```

  cioè senza le parentesi che raggruppano i punti, non avremmo ottenuto un quadrilatero, ma un errore.
- La "list comprehension" è un potente strumento, presente in alcuni linguaggi di programmazione, che permette di costruire delle liste di oggetti a partire da altre liste di oggetti. Nel nostro esempio trasforma una lista di coppie di numeri in una lista di punti.

modificare

1. Muovi, con il mouse, i poligoni in modo che siano contenuti uno nell'altro.
2. Cambia il colore dei vertici del pentagono, cambia il colore dei vertici dell'esagono. Quali differenze puoi notare nei due casi?
3. Disegna, sempre nel primo quadrante un altro triangolo ma utilizzando, questa volta, l'oggetto `pyig.Polygon`.
4. Disegna un poligono con la superficie colorata e con i lati di colori diversi.

2.2.6 Riassumendo

- Per usare la geometria interattiva di Python, per prima cosa dobbiamo caricare la libreria `pyig`;
- Il programma principale inizia creando un piano interattivo, gli altri oggetti geometrici che verranno creati vengono inseriti in quel piano.
- Gli oggetti di base sono:

- punti:
  - liberi,
  - vincolati,
  - intersezioni;
- rette:
  - rette,
  - semirette,
  - segmenti;
- circonferenze;
- angoli;

2.3 Altri problemi

1. Installa Python.
2. Installa la libreria pygraph.
3. Crea un nuovo programma che disegni un segmento di colore viola, con due estremi rosa, grandi a piacere.
4. Crea un programma che disegni un rettangolo. Muovendo i punti base continua a rimanere un rettangolo?
5. Crea un programma che disegni un triangolo. Muovendo i punti base continua a rimanere un triangolo?
6. Crea un programma che disegni un quadrilatero delimitato da semirette.
7. Crea un programma che disegni tre punti `A`, `B` e `C`, disegna poi le tre circonferenze:
   - di centro `A` e passante per `B`;
   - di centro `B` e passante per `C`;
   - di centro `C` e passante per `A`;
8. Disegna due circonferenze concentriche. Muovendo i punti base, si mantiene la proprietà "essere concentriche"?
9. Disegna una circonferenza `c_0` con il centro nell'origine, una retta `r_0` e un'altra circonferenza `c_1`. Disegna in modo evidente le intersezioni tra la retta `r_0` e la circonferenza `c_0` e tra la circonferenza `c_1` e la circonferenza `c_0`.
10. Disegna una circonferenza e una retta. Poi disegna un'intersezione tra la retta e la circonferenza e assegna a questa intersezione il nome: "Ciao". Poi disegna una circonferenza che ha centro nell'intersezione e passa per il punto $(3; 1)$.
11. Disegna le intersezioni tra due circonferenze che hanno centro in un estremo di un segmento e passano per l'altro estremo del segmento.
12. Crea un piano e disegna:
    - nel primo quadrante: due punti e il triangolo equilatero costruito su quei due punti;
    - nel secondo quadrante: un segmento e l'asse di quel segmento;
    - nel terzo quadrante: un angolo e la bisettrice di quell'angolo;
    - nel quarto quadrante: due punti e il quadrato costruito su quei due punti.
13. Disegna un quadrato dati due vertici opposti.
14. Disegna un esagono regolare dati due vertici consecutivi.
15. Disegna un esagono regolare dato il centro e un vertice.
16. Disegna un pentagono regolare dati due vertici consecutivi.
17. Disegna un parallelogramma dati tre vertici consecutivi.

Geometria II

"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

3 Nozioni fondamentali

"Geometry lesson"
Foto di kevindooley
http://www.flickr.com/photos/pagedooley/2575606606/

3.1 Introduzione alla geometria razionale

3.1.1 Breve nota storica

La parola geometria deriva dal greco antico: γεωμετρία, composta da γεω (geo) che significa "terra" e da μετρία (metria) che significa "misura", tradotto alla lettera significa "misura della terra". Secondo una tradizione storica, durante il VI secolo a.C. alcuni matematici e pensatori greci (principalmente Talete e Pitagora) cominciarono a organizzare in maniera razionale (secondo il susseguirsi di ragionamenti logici) le conoscenze geometriche che egiziani e babilonesi avevano raggiunto nei secoli precedenti. Lo storico greco Erodoto, vissuto tra il 484 a.C. e il 425 a.C., racconta che a causa delle periodiche inondazioni del fiume Nilo gli egiziani erano costretti a ricostruire ogni anno i confini dei singoli possedimenti terrieri e in questo modo avevano sviluppato delle modalità tecniche per la misura della terra (γεωμετρία appunto).

Ritrovamenti più recenti di tavolette di creta del periodo babilonese incise con caratteri cuneiformi ci fanno ritenere che la cultura babilonese possedesse già delle sofisticate conoscenze geometriche. Di certo sappiamo che nel III secolo a.C. il matematico ellenico Euclide[1], direttore della grande biblioteca di Alessandria in Egitto, diede una struttura razionale alle conoscenze geometriche note sino ad allora scrivendo una delle più grandi opere della cultura occidentale, gli *Elementi* (in greco Στοιχεια). Questa grande opera è organizzata in 13 libri, di cui i primi sei riguardano la Geometria Piana, i successivi quattro trattano i rapporti tra grandezze e gli ultimi tre riguardano la Geometria Solida. Essa prese il posto di tutti i libri precedenti sulla geometria e servì come testo fondamentale nell'antichità e nel medioevo; è stata usata come libro scolastico di geometria fino ai nostri giorni. La sua considerazione presso i Romani fu modesta, ma fu grandissima presso i Bizantini e gli Arabi. Proprio questi ultimi la reintrodussero in Europa dopo la perdita medievale, grazie alla traduzione di Adelardo di Bath[2] (secolo XII).

Dal punto di vista della struttura logica, gli *Elementi* di Euclide sono organizzati a partire da cinque assiomi (nozioni comuni evidenti), cinque postulati (proposizioni che si richiede siano assunte come vere, senza dimostrazione) e 23 definizioni. L'opera di Euclide è rimasta nella nostra cultura l'unico punto di riferimento per lo studio della geometria, fino a quando, contestualmente allo studio dei fondamenti delle altre branche della matematica, i matematici cercarono di dare una base più rigorosa alla geometria di Euclide. Un'impostazione assiomatica più moderna venne data dal matematico tedesco David Hilbert[3] nel libro *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria) pubblicato nel 1899, nel quale la geometria veniva fondata su ben 21 assiomi.

3.1.2 Lo spazio fisico e la geometria

La geometria nasce come studio sistematico dello spazio fisico e delle forme che in esso si muovono. Lo spazio in cui ci muoviamo è per tutti una delle prime esperienze che facciamo fin dai primi mesi di vita. I nostri sensi determinano le sensazioni che ci permettono di riconoscere le forme degli oggetti e i loro movimenti. Tuttavia, le nozioni geometriche come quelle di punto, retta, rettangolo, cubo, sfera … non trovano un perfetto riscontro nella realtà fisica. Nello spazio fisico non esistono, infatti, punti e rette come li descrive la geometria,

[1] vissuto molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.).
[2] traduttore, filosofo e matematico britannico (1080 - 1152).
[3] (1862 - 1943).

né figure a due sole dimensioni, né cubi o sfere perfette. La geometria si propone quindi di fornire un "modello" ideale della realtà fisica, sia per le forme degli oggetti sia per le proprietà dello spazio.

Fino alla seconda metà dell'Ottocento, matematici e filosofi sono stati sostanzialmente d'accordo nel considerare la geometria come la scienza che descriveva razionalmente le proprietà dello spazio fisico. Galileo Galilei[4] ne *Il saggiatore* (1623) scriveva:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, i matematici si sono invece convinti che la geometria non descrive esattamente lo spazio fisico, che sono possibili più geometrie ugualmente vere dal punto di vista logico e matematico. Lo studio matematico della geometria si è allora differenziato dallo studio dello spazio fisico e da quello dello spazio psicologico percepito dall'uomo con i suoi sensi. I matematici hanno accettato l'esistenza di diverse geometrie matematicamente possibili, si sono accontentati di costruire dei modelli astratti e hanno lasciato ai fisici la "scelta" del modello che meglio si adatta a descrivere i fenomeni fisici dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. La geometria allora è diventata una branca della matematica alla quale i matematici hanno cercato di dare un fondamento esclusivamente logico, indipendente dalle esperienze fisiche.

Il legame tra fisica e matematica non si è mai rotto. Con il passare dei secoli, ci si è resi sempre più conto di quanto la "geometria" del mondo fisico sia molto complessa e di come alcune nuove geometrie riescono a descrivere meglio fenomeni che con la vecchia geometria di Euclide non si riusciva a spiegare.

3.2 Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

La geometria, sin dai tempi di Euclide, è stata organizzata assiomaticamente, partendo cioè dalle fondamenta. Nella matematica queste fondamenta sono costituite dai concetti primitivi e dagli assiomi. Gli *enti primitivi* sono le nozioni che si decide di non definire. Ci si può rendere facilmente conto, infatti, che non tutto può essere definito, poiché in ogni nozione che si definisce si deve fare ricorso ad altre nozioni, le quali a loro volta devono essere definite per mezzo di altre nozioni e così via all'indietro senza che teoricamente questo processo abbia mai una fine, arrivando necessariamente ad alcune nozioni così primitive da non poter essere definite con altre nozioni più elementari. A queste nozioni non è né necessario né possibile associare alcun significato esplicito; è invece fondamentale esprimere le loro proprietà esclusivamente attraverso *assiomi*, cioè attraverso proprietà non dimostrabili che indicano però come gli enti primitivi devono e possono essere usati. Il matematico Hilbert utilizza tre enti primitivi – punto, linea e piano – e 21 assiomi. A partire dagli enti primitivi si fanno derivare tutte le *definizioni* degli enti geometrici.

La definizione è un'affermazione mediante la quale si spiega la natura di un certo ente, al quale si attribuisce anche un nome. Gli enti primitivi non necessitano di definizione; gli

[4]fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano (1564 - 1642).

assiomi e i postulati, che danno una descrizione delle proprietà degli enti fondamentali, risultano una sorta di definizione implicita di questi stessi enti.

Oltre ai tre enti primitivi, il *punto*, la *retta* e il *piano*, occorre poi assumere l'esistenza di tre relazioni primitive tra gli enti geometrici: *giacere su*, *stare fra*, *essere congruente a*. Queste relazioni permettono di stabilire dei legami tra gli enti geometrici, per esempio: «un punto giace su una retta», «un punto sta fra altri due punti», «un segmento è congruente a un altro segmento», ...

Esiste una simbologia convenzionale, condivisa dagli studiosi, per indicare questi enti:

- per indicare un punto usiamo una lettera maiuscola: A, B, C, ...;
- per indicare una retta usiamo una lettera minuscola: a, b, c, ...;
- per indicare un piano usiamo una lettera greca: α, β, γ, ...

Ricordiamo l'alfabeto greco:

- lettere greche minuscole: α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), ζ (zeta), η (eta), ϑ (theta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mi), ν (ni), ξ (xi), o (omicron), π (pi o pi greca), ρ (rho), σ (sigma), τ (tau), υ (ipsilon), φ (fi), χ (chi), ψ (psi), ω (omega);
- lettere greche maiuscole: A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ, M, N, Ξ, O, Π, Σ, T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.

Dal punto di vista della rappresentazione grafica si usano le convenzioni come nella figura 3.1:

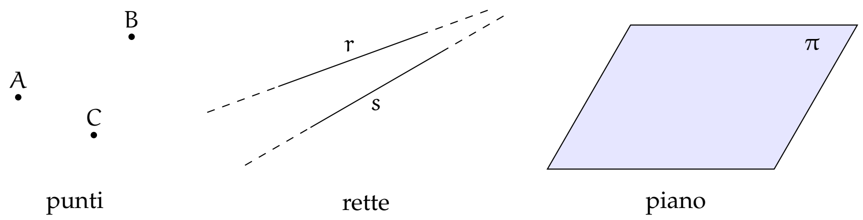


FIGURA 3.1: Rappresentazione grafica degli enti fondamentali della geometria

3.2.1 I teoremi

Un *teorema* è una proposizione composta del tipo SE ... ALLORA..., in simboli $I \Rightarrow T$, cioè una implicazione tra due proposizioni, dette *ipotesi* (I) e *tesi* (T).

Dimostrare un teorema significa fare un ragionamento logico che permetta di concludere che la tesi è vera avendo supposto che l'ipotesi sia vera. Nel caso in cui un teorema sia dimostrabile all'interno di una teoria, si dice che è un teorema valido.

In riferimento alla terminologia usata quando abbiamo parlato dell'implicazione, chiamiamo $I \Rightarrow T$ *teorema diretto*, $T \Rightarrow I$ *teorema inverso*, $\neg I \Rightarrow \neg T$ *teorema contrario* e $\neg T \Rightarrow \neg I$ *teorema controinverso*. Ribadiamo l'equivalenza tra il teorema diretto ed il teorema controinverso, nonché l'equivalenza tra il teorema contrario ed il teorema inverso, mentre in generale la validità del teorema diretto non implica la validità del teorema inverso, e viceversa.

Nel caso particolare in cui vale sia $I \Rightarrow T$ che $T \Rightarrow I$, si scrive $I \Leftrightarrow T$ e si dice che ipotesi e tesi sono *logicamente equivalenti*. Più precisamente, nel linguaggio specifico delle scienze che fanno uso della logica, e quindi anche nel linguaggio della Geometria Razionale, se vale $I \Rightarrow T$, si dice che «I è condizione sufficiente per T» e anche che «T è condizione necessaria per I»; se in particolare vale $I \Leftrightarrow T$, si usa dire che «I è condizione necessaria e sufficiente per T».

In generale incontreremo molti teoremi che vengono denominati genericamente *proposizioni*, perché il nome di "teorema" viene tradizionalmente attribuito solo ai teoremi più importanti. Inoltre si usa chiamare *lemma* una proposizione che non ha una grande importanza di per sé, ma che è particolarmente utile per la dimostrazione di altri teoremi. Si chiama invece *corollario* un teorema importante che è una conseguenza immediata di un altro teorema.

Così come abbiamo visto che non è possibile definire tutto e che quindi bisogna assumere alcune nozioni come primitive, analogamente non è possibile dimostrare tutte le proposizioni di una teoria. Alcune proposizioni devono essere assunte come vere e costituiscono la base della dimostrazione dei teoremi; queste proposizioni si chiamano *postulati* o *assiomi*. Risulta evidente che cambiando sia pure uno solo degli assiomi cambiano anche i teoremi dimostrabili e quindi la teoria.

In generale, come abbiamo detto, dato un teorema (diretto) del tipo $p \Rightarrow q$, la sua validità non garantisce la validità del teorema inverso $q \Rightarrow p$. Questo però può succedere. In ogni caso, se sono vere $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, le due proposizioni sono *logicamente equivalenti*, ossia $p \Leftrightarrow q$.

Esempio 3.1. Teorema: «un triangolo che ha i lati uguali ha anche gli angoli uguali».

- Il teorema si può schematizzare nel seguente modo: $p =$ «un triangolo ha i lati uguali»; $q =$ «un triangolo ha gli angoli uguali». Il teorema enunciato è $p \Rightarrow q$.
- Il teorema inverso è $q \Rightarrow p$, cioè «un triangolo che ha gli angoli uguali ha anche i lati uguali».

In tale esempio sono validi sia il teorema diretto che quello inverso. Il fatto che uno dei due teoremi sia chiamato diretto e l'altro inverso è un fatto soggettivo, che può dipendere semplicemente dall'ordine con cui si enunciano i teoremi. Il teorema precedente si può esporre allora nel seguente modo:

Teorema: «un triangolo ha i lati uguali se e solo se ha gli angoli uguali».

3.2.2 Postulati e assiomi

Un *postulato*, o *assioma*, è una proposizione, spesso intuitiva, evidente ma non dimostrata, ammessa come vera in quanto necessaria per costruire poi le dimostrazioni dei teoremi.

Euclide nei suoi *Elementi* aveva individuato un gruppo di cinque assiomi, che riguardano le nozioni comuni e quindi non fanno riferimento alla geometria, e un gruppo di cinque postulati che riguardano proprietà geometriche.

Assiomi di Euclide

I. Cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro.

II. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

IV. Cose che coincidono fra loro sono uguali.

V. Il tutto è maggiore della parte.

Postulati di Euclide

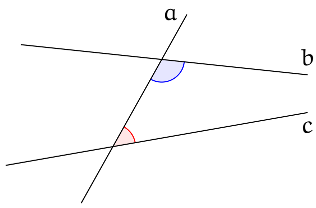
I. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. Un segmento si possa prolungare indefinitamente in linea retta.

III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.

IV. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

V. Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.



Nella figura a lato, la retta a taglia le rette b e c, formando sul lato destro due angoli la cui somma è minore di due angoli retti. Prolungando opportunamente le rette b e c, risulta che esse si incontrano sul lato destro della figura.

Nell'impostazione assiomatica moderna di Hilbert, gli assiomi hanno la funzione di definire implicitamente gli enti primitivi, cioè di fissare le proprietà alle quali questi enti devono soddisfare. Hilbert aggiunge inoltre altri assiomi che Euclide stesso non aveva esplicitato chiaramente.

Assiomi di Hilbert

L'esposizione che segue è una semplificazione degli assiomi del grande matematico tedesco.[5]

Hilbert assume come enti primitivi della geometria piana il *punto* e la *retta*, come relazioni primitive l'appartenenza di un punto ad una retta, il giacere di un punto tra altri due punti, e la congruenza di segmenti.

Assiomi di appartenenza "giacere su"

I. Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta che contiene entrambi i punti.

II. Ogni retta contiene almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta (figura 3.2).

III. Dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano che contiene tutti e tre i punti. Ogni piano contiene almeno un punto (figura 3.3).

IV. Se due punti di una retta giacciono su un piano, allora anche tutti gli altri punti della retta giacciono su questo piano (figura 3.4).

V. Se un punto giace su due piani distinti, allora esiste almeno un altro punto giacente su entrambi questi piani.

VI. Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

---

[5]chi volesse studiare direttamente il testo originale può consultare http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf [ultima consultazione 20.03.2014].

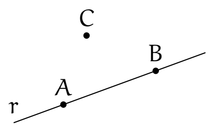


FIGURA 3.2: Assioma II

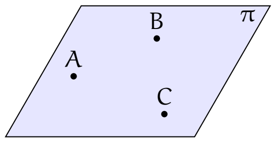


FIGURA 3.3: Assioma III

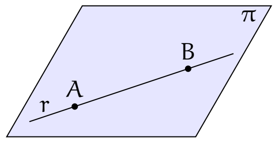


FIGURA 3.4: Assioma IV

Assiomi di ordinamento “stare fra”

VII. Se un punto B giace fra i punti A e C, allora i punti A, B e C sono tre punti distinti sulla stessa retta, e B giace fra C ed A (figura 3.5).

VIII. Dati due punti A e C, esiste almeno un punto B, sulla retta AC, giacente fra di essi.

IX. Dati tre punti qualsiasi di una retta, uno e uno solo di essi giace fra gli altri due.

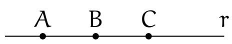
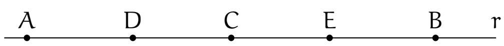


FIGURA 3.5: Assioma VII

Gli ultimi assiomi ci permettono di dedurre il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Tra due punti di una retta esiste sempre una quantità illimitata di altri punti.*

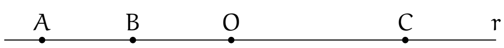
Dimostrazione. Data una retta r e due suoi punti A e B, per l’assioma VIII sappiamo che esiste un terzo punto C sulla retta r che giace tra A e B. Ma allora esiste un punto D su r che giace tra A e C e un punto E che giace tra C e B. Per lo stesso assioma esisterà un punto tra A e D, uno tra D e C, uno tra C e B e così via. □



Definizione 3.1. Si chiama *segmento* AB l’insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno sulla retta tra A e B.

Gli assiomi di ordinamento ci permettono di dare anche la seguente

Definizione 3.2. Presi quattro punti A, B, C, O su una retta, in modo che B stia tra A e O e O stia tra A e C possiamo dire che A e B *stanno dalla medesima parte* rispetto a O, mentre A e C non stanno dalla medesima parte rispetto a O.



❑ **Osservazione** Trascuriamo in questa trattazione elementare l'*assioma di Pasch*[6] (X) e l'*assioma delle parallele*[7] (XI).

Assiomi di congruenza "essere congruente a"

XII. *Assioma del trasporto di un segmento*. Se A, B sono due punti di una retta r e A' è un punto sulla stessa retta (o fissato su un'altra retta r'), si può sempre trovare un punto B' sulla retta r (o su r'), da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$ (figura 3.6).

XIII. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se $A'B'$ è congruente ad AB e $A''B''$ è congruente ad AB allora $A'B'$ è congruente ad $A''B''$.

XIV. Siano AB e BC segmenti su una retta r privi di punti comuni a parte B, e siano $A'B'$ e $B'C'$ segmenti su una retta r' privi di punti comuni a parte B'. Se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, allora $AC \cong A'C'$ (figura 3.7).

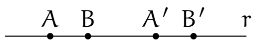


FIGURA 3.6: Assioma XII

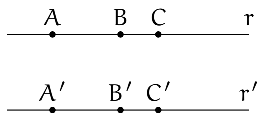
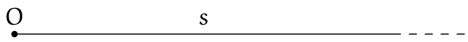


FIGURA 3.7: Assioma XIV

Prima di proseguire con gli altri assiomi premettiamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.3. Chiamiamo *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.



Definizione 3.4. Si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 3.8).

L'angolo individuato da tre punti A, B, C è l'angolo formato dalla semiretta con origine B e passante per A e dalla semiretta con origine B e passante per C. Questo angolo si indica con il simbolo $A\widehat{B}C$. Nei disegni si usa indicare l'angolo con un archetto che indica la parte di piano considerata.

XV. Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che sia l'angolo $D\widehat{B'}C'$ che $E\widehat{B'}C'$ sono congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$ (figura 3.9);

[6] chiamato così in onore del matematico tedesco Moritz Pasch (1843 - 1930) che ne mise in evidenza l'indeducibilità dagli altri assiomi di Euclide, è uno degli assiomi che Hilbert aggiunse ai postulati di Euclide per renderli completi. Il suo enunciato è il seguente: «Dati un triangolo nel piano, una retta che ne attraversi un lato in un punto che non sia un estremo, deve necessariamente intersecare un altro dei due lati o il vertice in comune tra essi.»

[7] si tratta del V postulato di Euclide, anche se nella tradizione didattica moderna esso viene in genere sostituito dall'assioma di Playfair (più restrittivo): «Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.»

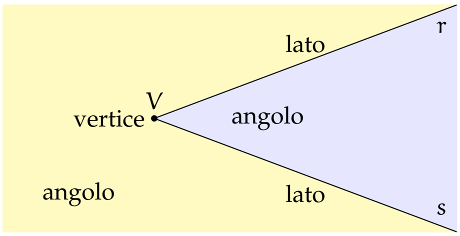


FIGURA 3.8: Le semirette r e s, aventi l'origine V comune, individuano due regioni del piano ognuna delle quali è detta *angolo*.

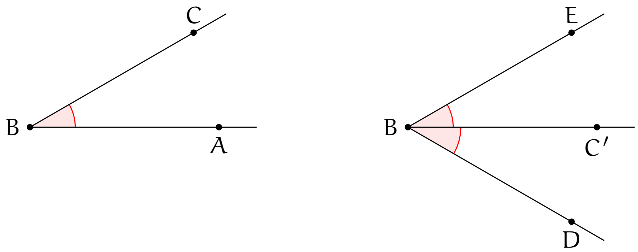


FIGURA 3.9: Assioma XV

XVI. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C' \equiv A''\widehat{B''}C''$.

Assioma di continuità

XVII. *Assioma di Archimede*. Sulla retta che unisce due punti qualsiasi A e B si prende un punto A_1, quindi si prendono i punti $A_2, A_3, A_4, \dots$ in modo che A_1 sia tra A e A_2, A_2 tra A_1 e A_3, A_3 tra A_2 e A_4, ecc. e che $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \equiv \dots$ allora tra tutti questi punti esiste sempre un punto A_n tale che B sta tra A e A_n (figura 3.10).

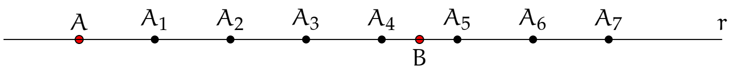


FIGURA 3.10: Assioma di Archimede (XVII)

Assioma di completezza

XVIII. Ad un sistema di punti, linee rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi in modo tale che il sistema, così generalizzato, formi una nuova geometria obbediente a tutti i cinque gruppi di assiomi. In altre parole, gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, nel caso in cui si considerino validi i cinque gruppi di assiomi.

3.3 Prime definizioni

3.3.1 Semirette e segmenti

Nel paragrafo precedente abbiamo già introdotto alcune definizioni di base, necessarie per enunciare tutti i postulati della geometria secondo l'assiomatizzazione di Hilbert. In questo paragrafo costruiamo le prime definizioni. Per comodità del lettore riportiamo anche quelle già date.

Partiamo dalla nozione generica di figura.

Definizione 3.5. Si chiama *figura* un qualsiasi insieme, non vuoto, di punti.

Questa definizione fa riferimento soltanto all'ente primitivo geometrico di punto.

Lo spazio non è considerato un ente primitivo, in quanto può essere ottenuto dalla seguente definizione.

Definizione 3.6. Si chiama *spazio* l'insieme di tutti i punti.

Risulta pertanto che una figura è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio.

In base agli assiomi di ordinamento un qualunque punto P su una retta divide la retta in due parti, una è costituita dai punti che "seguono" P, l'altra è costituita dai punti che "precedono" P.

Definizione 3.7. Si chiama *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

Solitamente una semiretta viene indicata con una lettera latina minuscola.

Prendendo due qualsiasi rette dello spazio esse si possono trovare in diverse posizioni reciproche, cioè una rispetto all'altra.

Definizione 3.8. Due rette che appartengono ad uno stesso piano si dicono *complanari*, altrimenti si dicono *sghembe*.

Definizione 3.9. Due rette complanari r ed s che non hanno nessun punto in comune si dicono *parallele* e si scrive $r \parallel s$.

Definizione 3.10. Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Definizione 3.11. Se due rette hanno almeno due punti in comune sono *coincidenti*.

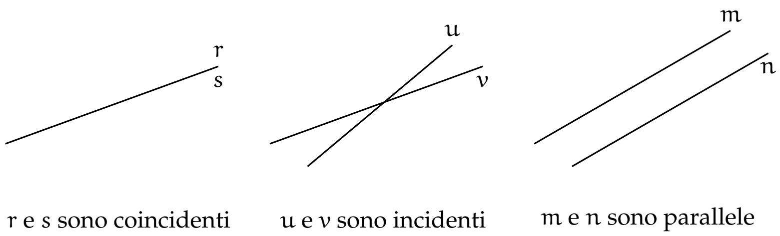


FIGURA 3.11: Relazioni tra rette complanari

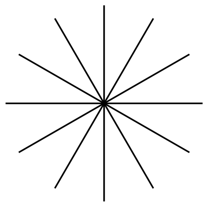


FIGURA 3.12: Fascio proprio di rette

❑ **Osservazione** Due rette non parallele possono appartenere a piani diversi, in questo caso non avranno punti in comune, sono cioè sghembe. Viceversa se due rette hanno un punto in comune allora sono sicuramente complanari. Inoltre, se hanno più di un punto in comune le rette coincidono, in questo caso ci sono infiniti piani che le contengono.

Definizione 3.12. L'insieme di tutte le rette di un piano che passano per uno stesso punto è detto *fascio proprio di rette*, il punto in comune a tutte le rette si dice *centro del fascio* (figura 3.12).

Prendendo su una retta due punti A e B, la retta resta divisa in tre parti: la semiretta di origine A che non contiene B, la parte costituita dai punti compresi tra A e B e la semiretta di origine B che non contiene A.

Definizione 3.13. Si chiama *segmento* AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B. I punti A e B si dicono *estremi* del segmento.

Un segmento viene indicato con le due lettere maiuscole dei suoi estremi.

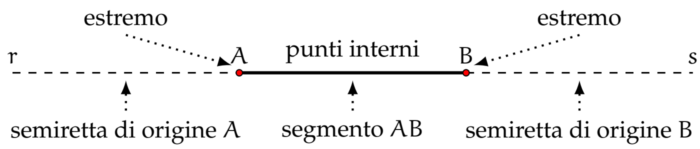


FIGURA 3.13: I punti A e B formano le due semirette r ed s, e il segmento AB

Due segmenti nel piano possono trovarsi in diverse posizioni reciproche. Alcune di esse hanno un interesse per la geometria.

Definizione 3.14. Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno in comune soltanto un estremo (figura 3.14).

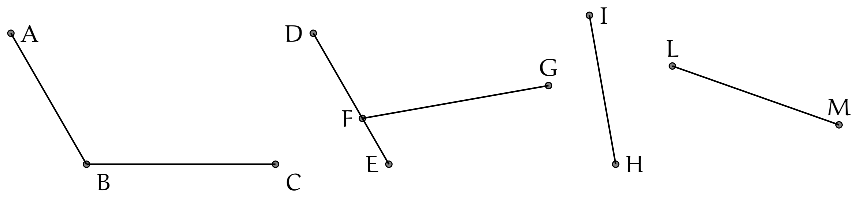


FIGURA 3.14: I segmenti AB e BC sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto B che è un estremo di entrambi; DE e FG non sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto F ma esso non è estremo del segmento DE; HI e LM non sono consecutivi perché non hanno nessun punto in comune.

Definizione 3.15. Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta (figura 3.15).

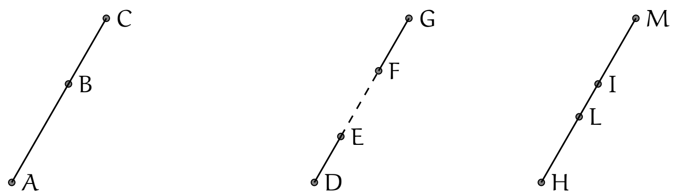


FIGURA 3.15: I segmenti AB e BC sono adiacenti perché hanno in comune solo l'estremo B e giacciono sulla stessa retta; i segmenti DE e FG, pur giacendo sulla stessa retta, non sono adiacenti poiché non hanno alcun punto in comune; i segmenti HI e LM giacciono sulla stessa retta ma non sono adiacenti poiché hanno più di un punto in comune.

3.3.2 Semipiani e angoli

Definizione 3.16. Si dice *semipiano* di origine la retta r la figura formata dalla retta r e da una delle due parti in cui essa divide il piano (figura 3.16).

In un piano π, una qualsiasi retta $r \subset \pi$ dà origine a due semipiani distinti, che si dicono semipiani *opposti*.

Definizione 3.17. Una figura si dice *convessa* se, considerati due suoi qualsiasi punti, il segmento che li unisce è contenuto nella figura. Si dice *concava* se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è interamente contenuto nella figura (figura 3.17).

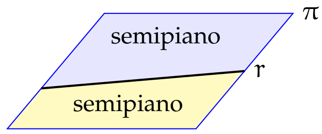


FIGURA 3.16: Semipiani opposti

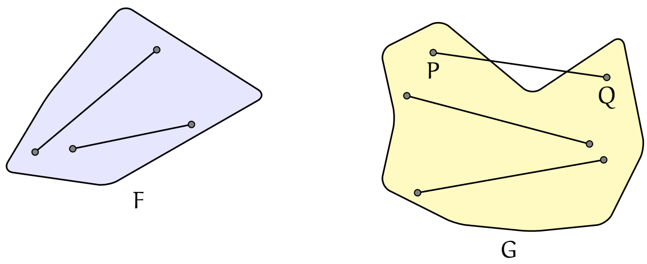


FIGURA 3.17: La figura F è convessa, per qualsiasi coppia di punti interni a F il segmento che li unisce è interamente nella figura; la figura G è concava perché unendo i punti P e Q si ha un segmento che cade in parte esternamente alla figura.

Ricordiamo la definizione di angolo già data: si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 3.8).

Definizione 3.18. Un angolo si dice *piatto* se i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro.

Definizione 3.19. Un angolo si dice *nullo* se è costituito solo da due semirette sovrapposte.

Definizione 3.20. È detto *angolo giro* l'angolo che ha per lati due semirette sovrapposte e che contiene tutti i punti del piano (figura 3.18).

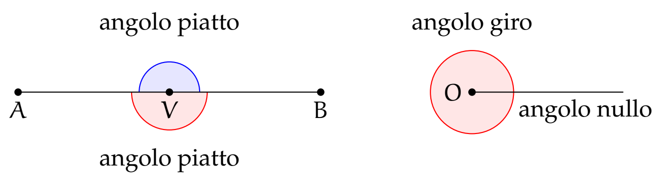


FIGURA 3.18: L'angolo $\widehat{ab}$ a sinistra è piatto (sia quello sopra che quello sotto), gli angoli a destra, individuati dalle semirette coincidenti con origine in O, sono rispettivamente un angolo giro (quello esterno) e un angolo nullo (quello interno).

Definizione 3.21. Un angolo, i cui lati non appartengono alla stessa retta, si dice *concavo* se contiene i prolungamenti dei lati, se non li contiene si dice *convesso*.

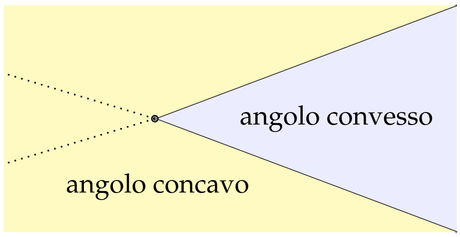


FIGURA 3.19: L'angolo concavo è quello in giallo in quanto contiene i prolungamenti dei lati (punteggiati)

Quando si disegna un angolo è utile, oltre a disegnare le semirette e l'origine, indicare con un archetto quale dei due angoli si intende considerare.

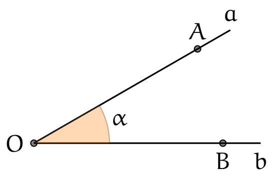


FIGURA 3.20: Per indicare che l'angolo da considerare è quello convesso e non quello concavo si è usato un archetto in prossimità del vertice O

Per indicare gli angoli si usano diverse convenzioni:

- $\widehat{ab}$: se si conoscono i nomi delle semirette che ne costituiscono i lati;
- $A\hat{O}B$: se si conoscono i nomi del vertice e di due punti sui lati;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (una lettera greca): per indicare direttamente l'angolo.

I primi due modi di indicare l'angolo non individuano con chiarezza di quale dei due angoli si tratta. Solitamente si intende l'angolo convesso, quando si vuole indicare l'angolo concavo bisogna dirlo esplicitamente.

Anche per gli angoli si danno le definizioni di angoli consecutivi e angoli adiacenti, in parte simili a quelle date per i segmenti.

Definizione 3.22. Due angoli si dicono *consecutivi* se hanno il vertice e un lato comune e giacciono da parte opposta rispetto al lato comune.

Definizione 3.23. Due angoli si dicono *adiacenti* se sono consecutivi e se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

Definizione 3.24. Due angoli convessi si dicono *opposti al vertice* se i lati del primo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

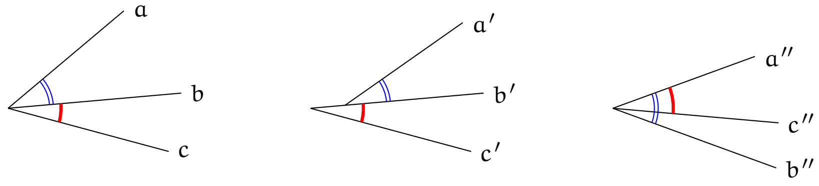


FIGURA 3.21: Nella figura gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono consecutivi perché hanno il vertice e il lato b in comune; $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{b'c'}$ non sono consecutivi perché non hanno il vertice in comune; $\widehat{a''b''}$ e $\widehat{a''c''}$ non sono consecutivi perché non giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune a''

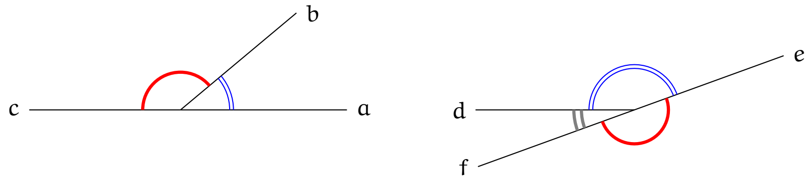


FIGURA 3.22: I due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono adiacenti perché sono consecutivi e i lati a e c sono uno il prolungamento dell'altro; i due angoli $\widehat{de}$ ed $\widehat{ef}$ non sono adiacenti in quanto d non è il prolungamento di f; gli angoli $\widehat{de}$ e $\widehat{df}$ sono adiacenti in quanto f è il prolungamento di e

angoli opposti al vertice | angoli non opposti al vertice

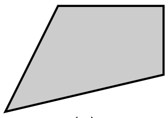
FIGURA 3.23: Gli angoli formati dalle semirette a sinistra sono opposti al vertice; gli angoli formati dalle semirette a destra non lo sono

3.4 Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

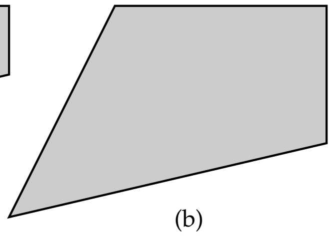
3.4.1 Premessa intuitiva

Nel linguaggio comune usiamo la parola "uguale" con un significato generico, spesso per indicare due oggetti che si assomigliano: due macchine uguali, due orologi uguali, … In aritmetica e in algebra usiamo la parola "uguale" per indicare oggetti matematici perfettamente uguali. Per esempio, $2 = 2$, ogni numero infatti è uguale solo a se stesso. Scriviamo anche $3 + 2 = 5$, per dire che il numero che si ottiene dalla somma di 3 e 2 è proprio il numero 5. Nei polinomi si enuncia il principio di identità dei polinomi, in base al quale due polinomi sono uguali se si possono scrivere formalmente allo stesso modo.

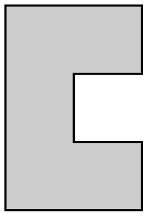
In geometria, usiamo il termine "uguale" per indicare due figure coincidenti nella forma e nella posizione. In altre parole due figure sono *uguali* solo se sono esattamente la stessa figura. Tuttavia, in geometria siamo interessati a studiare soprattutto figure che senza essere del tutto identiche hanno delle caratteristiche in comune. Vediamo prima degli esempi intuitivi e successivamente tratteremo lo stesso tema ma in modo formalmente corretto.



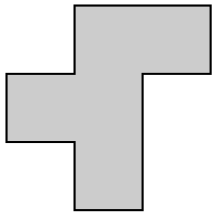
(a)



(b)



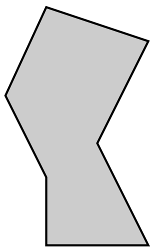
(c)



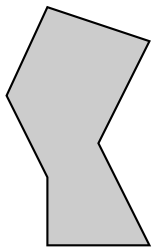
(d)

Le figure (a) e (b), riportate, hanno la stessa forma ma una è più grande dell'altra, la seconda infatti è stata ottenuta dalla prima raddoppiando la lunghezza di ogni lato: in geometria tali figure si dicono *simili*.

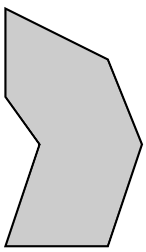
Le figure (c) e (d), invece, non hanno la stessa forma e non si somigliano affatto, però le loro superfici hanno la stessa estensione, in quanto sono costituite dallo stesso numero di quadratini: in geometria tali figure si dicono *equivalenti*.



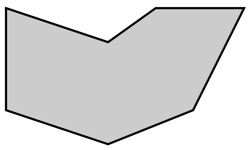
(e)



(f)



(g)

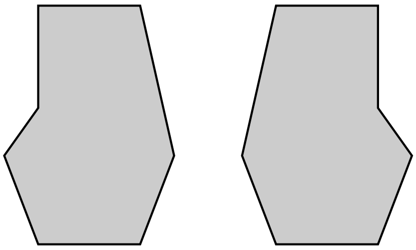


(h)

Le figure (e) ed (f) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni ma sono in posizioni differenti. È comunque possibile spostarle una sull'altra e farle coincidere. Usualmente le chiamiamo figure uguali, ma più precisamente in geometria tali figure si dicono *congruenti*.

Le figure (g) e (h) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni (per rendersene conto basta ruotare, per esempio, la seconda figura in senso antiorario e poi trascinarla sulla prima per sovrapporla). Anche queste figure sono dette uguali nel linguaggio comune, ma in geometria si dicono *congruenti*.

Le figure (i) e (j) hanno stessa forma e stesse dimensioni, tuttavia non si riesce a trasportare l'una sull'altra muovendole nel piano, né trascinandole, né ruotandole. Per farlo è necessario ribaltarne una facendola uscire dal piano, poiché le due figure sono una l'immagine speculare dell'altra. In geometria tali figure sono dette *inversamente congruenti*.



(i) (j)

❑ **Osservazione** Per ribaltare una figura occorre una dimensione in più rispetto a quelle della figura, precisamente se si tratta di due figure piane (che hanno due dimensioni: lunghezza e larghezza) occorre avere la terza dimensione per effettuare un ribaltamento; se siamo su una retta (una sola dimensione: la lunghezza) occorre la seconda dimensione per ribaltare un segmento.

Per renderci conto di quanto accade con le figure solide, possiamo pensare ai palmi delle nostre mani che con buona approssimazione si possono considerare inversamente congruenti: esse possono essere giunte, ma non sovrapposte. Infatti non è possibile vedere le proprie mani sovrapposte, entrambe dal dorso o entrambe dal palmo, con le dita rivolte verso l'alto.

3.4.2 La congruenza

Secondo il punto di vista del matematico tedesco Felix Klein (1848-1925), la geometria è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni. Nello studio della geometria euclidea ci occupiamo delle proprietà delle figure geometriche invarianti rispetto ai movimenti rigidi, cioè rispetto a quei movimenti che conservano forma e dimensioni delle figure. Queste trasformazioni vengono anche dette *isometrie* (si intuisce dalla radice etimologica che si parla di stessa misura): significa che viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di due figure congruenti in modo da "mantenere" le distanze.

Definizione 3.25. Diciamo che due figure F e G sono *congruenti* quando esiste un movimento rigido che le sovrappone perfettamente. In simboli $F \cong G$.

Nella Premessa a questo paragrafo abbiamo dato un'idea intuitiva e sperimentale del concetto di congruenza. Ma per esplicitarlo matematicamente dobbiamo utilizzare gli assiomi di congruenza di Hilbert che abbiamo enunciato nella sezione 3.2.2. Ne riportiamo alcuni per comodità del lettore.

Assiomi di congruenza

III. *Assioma del trasporto di un segmento.* Se A e B sono due punti di una retta a e A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B' sulla retta a o su a', da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$.

Questo assioma afferma che, fissato un punto A' su una retta a', è sempre possibile trasportare un qualunque segmento AB in modo che l'estremo A coincida con A' e il segmento stia sulla retta a'.

IV. La relazione di congruenza tra segmenti è *transitiva*, cioè se $A'B'$ e $A''B''$ sono entrambi congruenti ad AB, allora $A'B'$ è congruente a $A''B''$.

La relazione di congruenza tra segmenti è allora un relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà:

a) *riflessiva*: ogni segmento è congruente a se stesso;
b) *simmetrica*: se AB è congruente a $A'B'$ allora anche $A'B'$ è congruente ad AB;
c) *transitiva*: se AB è congruente ad $A'B'$ e $A'B'$ è congruente ad $A''B''$, allora AB è congruente ad $A''B''$.

Definizione 3.26. Si dice *lunghezza di un segmento* la classe di equivalenza dei segmenti congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti i segmenti che sono congruenti tra di loro.

V. *Assioma del trasporto di un angolo.* Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che l'angolo $D\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\widehat{B}C$ e l'angolo $E\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\widehat{B}C$.

Questo assioma ci garantisce che è sempre possibile trasportare un angolo su una qualsiasi semiretta, facendo coincidere il vertice dell'angolo con l'origine della semiretta e un lato dell'angolo con la semiretta stessa.

VI. La relazione di congruenza tra angoli è *transitiva*, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono entrambi congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C'$ è congruente a $A''\widehat{B''}C''$.

Quindi anche la relazione di congruenza tra gli angoli è una relazione di equivalenza, gode cioè delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Definizione 3.27. Si dice *ampiezza di un angolo* la classe di equivalenza degli angoli congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti gli angoli che sono congruenti tra di loro.

Aggiungiamo che:

- tutte le rette sono fra loro congruenti;
- tutte le semirette sono fra loro congruenti;
- tutti i piani sono fra loro congruenti.

3.4.3 Costruzioni riga e compasso

Il trasporto di un segmento e quello di un angolo si possono realizzare con costruzioni grafiche che utilizzano gli strumenti della riga e del compasso.

Per realizzare una costruzione con riga e compasso si effettua una successione di operazioni scelte tra quattro operazioni fondamentali. Le operazioni sono:

1. congiungere due punti (già costruiti) con una retta;
2. trovare il punto di intersezione di due rette (già costruite);
3. tracciare una circonferenza, dato il centro ed un suo punto;
4. trovare i punti di intersezione di una circonferenza con un'altra circonferenza (già costruita) o con una retta (già costruita).

Con riga e compasso.

Procedura 3.2 (Triangolo equilatero)**.** *Dati due punti A e B, si deve costruire un punto C in modo che ABC sia un triangolo equilatero:*

1. *Traccia i punti A e B.*
2. *Traccia la circonferenza di centro A e passante per B.*
3. *Traccia la circonferenza di centro B e passante per A.*
4. *Individua un punto C di intersezione delle due circonferenze.*
5. *Il poligono ABC è il triangolo richiesto.*

Con la geometria interattiva.

❑ **Osservazione** Negli esempi seguenti, per questioni di spazio, non ho riportato le righe di intestazione che contengono data, titolo e autore del programma.

```
"""
Disegna: due punti liberi
poi costruisci il punto medio tra i due.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: punti A e B
p_a = pyig.Point(-1, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(7, 1, width=6, name="B")
## Costruzione del triangolo equilatero
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)   # circ di centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)   # circ di centro B passante per A
p_c = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1, width=6, name="C")   # intersezione
pyig.Polygon((p_a, p_b, p_c), color="chocolate", intcolor="gold") # tri. eq.
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Un'operazione non elementare ma utile nelle costruzioni riga e compasso è quella di utilizzare lo strumento compasso con raggio prefissato in modo da poter costruire una circonferenza dati centro e raggio invece che centro e un suo punto.

Procedura 3.3 (Compasso rigido)**.** *Dati un punto A ed un segmento BC, si deve costruire la circonferenza con centro A e raggio BC:*

1. *Traccia il punto A e il segmento BC.*
2. *Costruisci il punto D in modo che ABD sia equilatero.*
3. *Traccia la semiretta DB: denominala r.*
4. *Traccia la semiretta DA: denominala s.*
5. *Traccia la circonferenza di centro B e passante per C.*
6. *Individua un punto E di intersezione di questa circonferenza e r.*
7. *Traccia la circonferenza di centro D e passante per E.*
8. *Individua il punto F di intersezione di questa circonferenza e s.*
9. *La circonferenza di centro A e passante per F: è la circonferenza richiesta.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: un punto A e un segmento BC
Costruisci la circonferenza di centro A e di raggio BC.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: punto A e segmento BC
p_a = pyig.Point(-1, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(4, 2, width=6, name="B")
p_c = pyig.Point(6, 1, width=6, name="C")
pyig.Segment(p_b, p_c, color="dark green")
## Costruzione della circoferenza di centro A e di raggio BC
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)      # circ di centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)      # circ di centro B passante per A
p_d = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1, name="D")   # intersezione
r_b = pyig.Ray(p_d, p_b, width=1)          # semiretta DB
r_a = pyig.Ray(p_d, p_a, width=1)          # semiretta DA
c_bc = pyig.Circle(p_b, p_c, width=1)      # circ di centro B passante per C
p_e = pyig.Intersection(r_b, c_bc, +1, name="E")   # intersezione E
c_de = pyig.Circle(p_d, p_e, width=1)      # circ di centro D passante per E
p_f = pyig.Intersection(r_a, c_de, +1, name="F")   # intersezione F
pyig.Circle(p_a, p_f, color="chocolate")  # Circonferenza richiesta
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

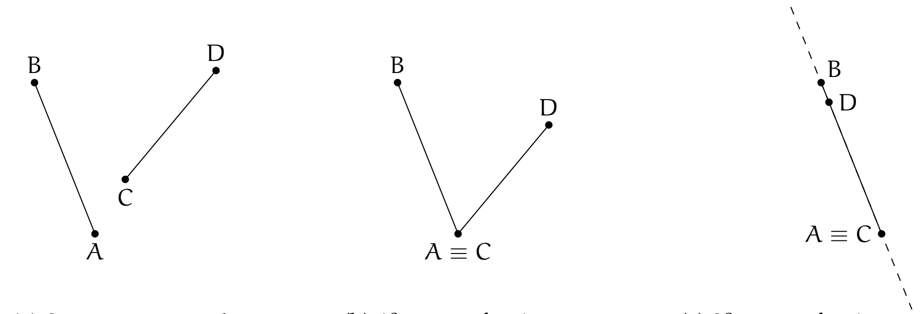
Con l'uso della riga e del compasso è quindi possibile simulare un compasso rigido. Perciò nel tracciare una circonferenza potremmo individuare il centro ed un suo punto oppure, indifferentemente, il centro ed un segmento che determini il raggio.

Con il compasso rigido, non "collassabile", si è in grado di effettuare un "movimento rigido" e quindi di rilevare la congruenza di segmenti. Affrontiamo nei prossimi paragrafi il concetto teorico di "movimento rigido", che sta alla base del confronto di segmenti e di angoli. Riprenderemo solo in seguito la modalità di costruzione con riga e compasso.

3.4.4 Confronto di segmenti

Per confrontare l'altezza di due persone e vedere chi è più alto, le facciamo mettere affiancate in modo che i piedi stiano allo stesso livello, dopodiché confrontiamo l'estremità della testa: è più alto chi ha l'estremità della testa più in alto. Un procedimento analogo si fa per confrontare due segmenti.

Per confrontare due segmenti AB e CD, facciamo in modo che con un movimento rigido gli estremi A e C coincidano, con una rotazione intorno al punto A facciamo in modo che coincidano anche le rette AB e CD e che gli estremi B e D stiano dalla stessa parte rispetto ad A e C.



(a) Situazione iniziale

(b) 1° passo: facciamo coincidere A con C

(c) 2° passo: facciamo coincidere la retta CD con AB. I punti B e D devono stare dalla stessa parte

FIGURA 3.24: Confronto di due segmenti

A questo punto sono possibili tre situazioni:

- B cade dopo l'estremo D, allora diciamo che AB è *maggiore* di CD e scriviamo $AB > CD$;
- B cade esattamente su D, allora i due segmenti sono *congruenti* e scriviamo $AB \cong CD$;
- B cade tra C e D, allora diciamo che AB è *minore* di CD e scriviamo $AB < CD$.

3.4.5 Confronto di angoli

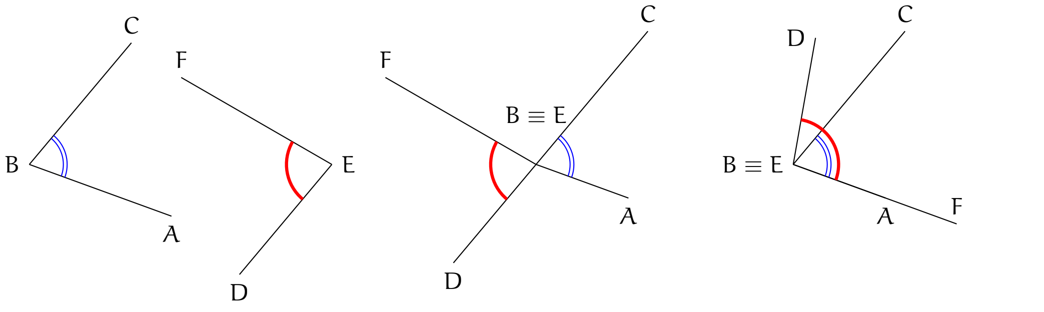
Per confrontare due angoli $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$, portiamo con un movimento rigido il vertice B sul vertice E, con una rotazione portiamo a coincidere la semiretta BA con la semiretta EF, in modo che le altre due semirette, BC e ED, stiano dalla stessa parte rispetto a BA.

A questo punto si possono avere tre situazioni distinte:

- il lato EF cade internamente all'angolo $A\widehat{B}C$ e quindi diciamo che $A\widehat{B}C$ è *maggiore* di $D\widehat{E}F$: $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$;
- il lato EF cade esattamente su BC e quindi i due angoli sono *congruenti*: $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$;
- il lato EF cade esternamente all'angolo $A\widehat{B}C$ e quindi diciamo che $A\widehat{B}C$ è *minore* di $D\widehat{E}F$: $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$.

❑ **Osservazione** La seguente costruzione è possibile solo perché possiamo realizzare un compasso rigido (vedi 3.3).

Con riga e compasso.



(a) Situazione iniziale

(b) 1° passo: facciamo coincidere i vertici B ed E

(b) 2° passo: facciamo coincidere le semirette BA ed EF

FIGURA 3.25: Confronto di due angoli

Procedura 3.4 (Trasporto di un angolo). *Costruzione di un angolo congruente ad un angolo assegnato:*

1. *Traccia un angolo* AVB *e la semiretta* V′E *che sarà uno dei lati dell'angolo congruente.*
2. *Traccia la circonferenza con centro V passante per A.*
3. *Chiama E l'intersezione di questa circonferenza con il lato VB.*
4. *Traccia la circonferenza di centro* V′ *avente lo stesso raggio della precedente.*
5. *Chiama* A′ *il punto di intersezione di questa circonferenza con la semiretta.*
6. *Traccia la circonferenza di centro* A′ *e avente raggio uguale a* AE.
7. *Chiama* E′ *il punto di intersezione delle due ultime circonferenze.*
8. *L'angolo* A′V′E′ *è l'angolo richiesto.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: un angolo AVB e una semiretta V'D
Costruisci sulla semiretta un angolo congruente a AVB.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: angolo AVB e semiretta V'D
p_a = pyig.Point(-1, 5, width=6, name="A")
p_v = pyig.Point(-10, 6, width=6, name="V")
p_b = pyig.Point(-5, 8, width=6, name="B")
a_0 = pyig.Angle(p_a, p_v, p_b, [0, 1], color="dark green")
p_v1 = pyig.Point(1, -8, width=6, name="V'")
p_d = pyig.Point(13, -9, width=6, name="D")
r_0 = pyig.Ray(p_v1, p_d, color="dark green")
## Costruzione dell'angolo congruente
c_va = pyig.Circle(p_v, p_a, width=1)      # circ di centro V passante per A
p_e = pyig.Intersection(a_0.side1(), c_va, +1, name="E") # intersezione E
```

```
s_va = pyig.Segment(p_v, p_a, visible=False)# segmento VA
c_v1_va = pyig.Circle(p_v1, s_va, width=1)  # circ di centro V' di raggio VA
p_a1 = pyig.Intersection(r_0, c_v1_va, +1, name="A'")   # intersezione A'
s_ae = pyig.Segment(p_a, p_e, visible=False)# segmento AE
c_a1_ae = pyig.Circle(p_a1, s_ae, width=1) # circ di centro V' e raggio AE
p_e1 = pyig.Intersection(c_v1_va, c_a1_ae, +1, name="E'") # intersezione E'
pyig.Angle(p_a1, p_v1, p_e1, [0, 1], color="chocolate")   # ang. richiesto
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

3.4.6 Operazioni con i segmenti

Somma di due segmenti. La somma di due segmenti AB e CD è il segmento AD che si ottiene trasportando con un movimento rigido il segmento CD in modo che AB e CD siano adiacenti, con l'estremo B coincidente con C. Scriviamo $AB + CD \cong AD$, usando l'usuale simbolo di addizione.

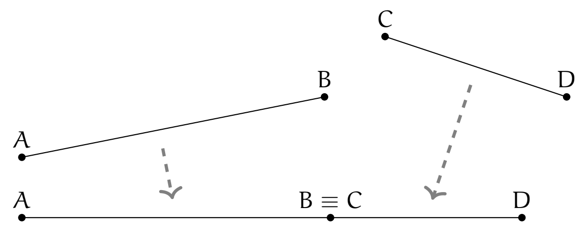


FIGURA 3.26: Somma di due segmenti. Il segmento AD è la somma dei segmenti AB e CD

Differenza di due segmenti. La differenza di due segmenti AB e CD, con $AB > CD$, è il segmento DB che si ottiene sovrapponendo AB e CD facendo coincidere l'estremo A con l'estremo C. Scriviamo $AB - CD \cong DB$.

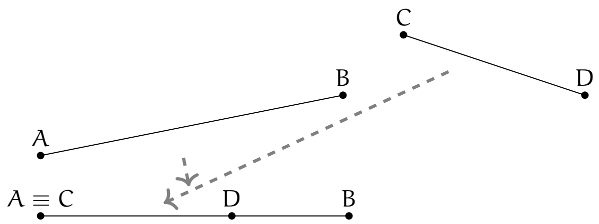


FIGURA 3.27: Differenza di due segmenti. Il segmento DB è la differenza dei segmenti AB e CD

Multiplo di un segmento. Il multiplo secondo m, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è il segmento AC che si ottiene sommando m volte il segmento AB a se stesso.

Se $m = 0$, il multiplo secondo m di qualsiasi segmento AB è il segmento nullo, ove per segmento nullo intendiamo un qualsiasi segmento in cui gli estremi coincidono, cioè il segmento ridotto a un solo punto.

Con riga e compasso.

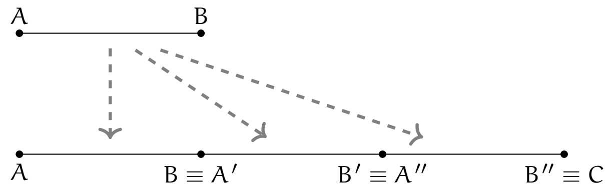


FIGURA 3.28: Multiplo di un segmento. Il segmento AC è il multiplo secondo 3 di AB, cioè $AC \cong 3 \cdot AB$

Procedura 3.5 (Multiplo di un segmento)**.** *Dato un segmento AB, costruisci il segmento AC congruente a 3AB:*

1. *Traccia il segmento AB e la semiretta r con origine A e passante per B.*
2. *Costruisci la circonferenza di centro B e passante per A.*
3. *Denomina B′ l'intersezione, diversa da A, della circonferenza con la semiretta r.*
4. *Costruisci una circonferenza di centro B′ e passante per B.*
5. *Denomina C l'intersezione, diversa da B′, di questa ultima circonferenza con la semiretta r.*
6. *Il segmento AC è quello richiesto.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: un segmento AB e la semiretta AB
Costruisci sulla semiretta il segmento AB'' uguale al triplo di AB.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: punto A e semiretta AB
p_a = pyig.Point(-10, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(-7, 2, width=6, name="B")
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, width=6, color="dark green") # segmento AB
r_0 = pyig.Ray(p_a, p_b, color="dark green")
## Costruzione del segmento AB'' triplo di AB
c_1 = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)   # circ di centro B passante per A
p_b1 = pyig.Intersection(s_ab, c_1, +1, name="B'")    # intersezione B'
c_2 = pyig.Circle(p_b1, s_ab, width=1)  # circ di centro B' passante per B
p_b2 = pyig.Intersection(s_ab, c_2, +1, name="B''")   # intersezione B''
s_va = pyig.Segment(p_a, p_b2, color="chocolate")     # segmento richiesto
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Analogamente si può procedere per costruire segmenti multipli di AB secondo un qualsiasi numero n naturale non nullo.

Retta parallela. Il quinto postulato di Euclide afferma che data una retta e un punto esiste una e una sola parallela alla retta passante per il punto.

Con riga e compasso.

Procedura 3.6 (Retta parallela). *Dato una retta AB e un punto* A' *costruisci la retta A'B' parallela ad AB:*

1. *Traccia la retta AB.*
2. *Traccia il punto* A'.
3. *Traccia la circonferenza di centro* A' *e raggio AB.*
4. *Traccia la circonferenza di centro B e raggio* AA'.
5. *Denomina* B' *l'intersezione (giusta) di queste due circonferenze.*
6. *La retta A'B' è la retta richiesta.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: una retta AB e un punto A'
Costruisci la retta A'B' parallela alla retta AB.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: retta AB e punto A'
p_a = pyig.Point(-10, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(-1, 2, width=6, name="B")
r_ab = pyig.Line(p_a, p_b, color="dark green")
p_a1 = pyig.Point(-7, -3, width=6, name="A'")
## Costruzione della retta A'B' parallela ad AB
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, visible=False)
c_a1_ab = pyig.Circle(p_a1, s_ab, width=1)    # circ di centro A1 e raggio AB
s_aa1 = pyig.Segment(p_a, p_a1, visible=False)
c_b_ab = pyig.Circle(p_b, s_aa1, width=1)    # circ di centro B e raggio AA'
p_b1 = pyig.Intersection(c_a1_ab, c_b_ab, -1, name="B'")    # intersezione B'
r_a1b1 = pyig.Line(p_a1, p_b1, color="chocolate") # retta parallela
# La procedura funziona solo se A' si trova da una certa parte della retta AB
# Se A' si trova dall'altra parte si deve scegliere l'atra intersezione
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Sottomultiplo di un segmento. Il sottomultiplo secondo n, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è un segmento AC tale che $AB \cong n \cdot AC$. Si può anche scrivere $AC \cong \frac{1}{n} \cdot AB$.

Con riga e compasso.

Procedura 3.7 (Sottomultiplo di un segmento). *Dato un segmento AB, costruisci il segmento AD congruente a 1/3 AB:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Traccia un punto C non appartenente a AB.*
3. *Traccia la semiretta AC.*
4. *Costruisci sulla semiretta il segmento AC'' triplo di AC (vedi 3.5).*
5. *Traccia la retta C″B.*
6. *Traccia la retta CD parallela a $C''B$.*
7. *Il segmento AD è quello richiesto.*

Con la geometria interattiva.

❑ **Osservazione** Dato che è possibile costruire una retta parallela ad una *retta data* passante per un *punto dato*, pyig mette a disposizione una classe “retta parallela” che richiede proprio queste due informazioni. Per costruire una retta parallela si può dunque scrivere l’istruzione:

pyig.Parallel(<retta>, <punto>, ...)

```
"""
Disegna: un segmento AB
Costruisci il segmento AB'' congruente a un terzo di AB.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: segmento AB
p_a = pyig.Point(-10, -3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(7, 2, width=6, name="B")
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, color="dark green")
## Costruzione di AD congruente a un terzo di AB
p_c = pyig.Point(-7, 1, width=6, name="C")
r_ac = pyig.Ray(p_a, p_c, width=1)
c_c_a = pyig.Circle(p_c, p_a, width=1)    # circ di centro C passante per A
p_c1 = pyig.Intersection(r_ac, c_c_a, +1, name="C'")     # intersezione C'
c_c1_c = pyig.Circle(p_c1, p_c, width=1) # circ di centro C' passante per C
p_c2 = pyig.Intersection(r_ac, c_c1_c, +1, name="C''")  # intersezione C'
r_c2b = pyig.Line(p_c2, p_b, width=1)       # retta C''B
r_c2b2 = pyig.Parallel(r_c2b, p_c, width=1) # retta parall. a C''B pass. C
p_d = pyig.Intersection(r_c2b2, s_ab, name="D")          # intersezione D
pyig.Segment(p_a, p_d, color="chocolate")    # AD e' il segmento richiesto
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Analogamente si può procedere per costruire segmenti sottomultipli di AB secondo un qualsiasi numero n naturale non nullo.

In generale, il segmento $AC \cong \frac{m}{n} \cdot AB$ si ottiene dividendo AB in n parti uguali ottenendo il segmento AD e poi sommando m segmenti congruenti ad AD.

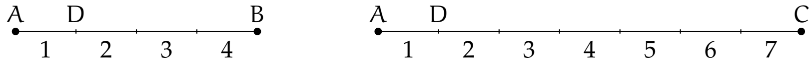


FIGURA 3.29: Sottomultiplo di un segmento. Il segmento AC è congruente a $\frac{7}{4}$ di AB, cioè AC $\cong \frac{7}{4} \cdot$ AB, infatti AB è stato suddiviso in 4 parti uguali e AC è costituito da 7 di tali parti

Definizione 3.28. Dato un segmento AB si chiama *punto medio di un segmento* il punto M interno al segmento che lo divide in due parti tra loro congruenti (AM $\cong$ MB).

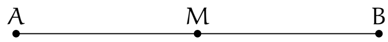


FIGURA 3.30: Punto medio di un segmento. M è il punto medio del segmento AB poiché AM $\cong$ MB

Con riga e compasso.

Procedura 3.8 (Punto medio)**.** *Costruzione del punto medio di un segmento dato:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza di centro A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza di centro B e passante per A.*
4. *Le circonferenze si intersecano in due punti: denominali C e D.*
5. *Traccia la retta CD.*
6. *Denomina M il punto di intersezione fra la retta Cd e il segmento AB: M è il* ***punto medio*** *del segmento AB.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: un segmento AB
Costruisci il punto medio del segmento.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: segmento AB
p_a = pyig.Point(-6, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(2, 1, width=6, name="B")
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, color="dark green")
## Costruzione del punto medio di AB
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)      # circ di centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)      # circ di centro B passante per A
p_c = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1, name="C")    # intersezione C
p_d = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, -1, name="D")    # intersezione D
r_cd = pyig.Line(p_c, p_d, width=1)                  # retta CD
pyig.Intersection(r_cd, s_ab, name="M",
```

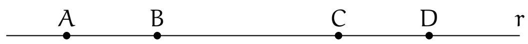
```
                        width=6, color="chocolate") # M e' il pto medio richiesto
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Proprietà:

- somme di segmenti a due a due congruenti sono congruenti;
- differenze di segmenti a due a due congruenti sono congruenti.

Esempio 3.2. Siano AB e CD due segmenti congruenti appartenenti a una retta r che non abbiano punti in comune. Dimostra che $AD - BC \cong 2 \cdot AB$.

Dimostrazione. Disponiamo i punti A, B, C, D su una retta r come in figura.



Per definizione di somma di segmenti si ha che $AD \cong AB + BC + CD$ e quindi

$$AD - BC \cong AB + BC + CD - BC \cong AB + CD.$$

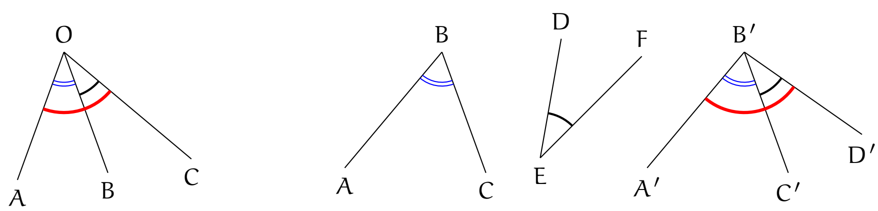
Poiché $AB \cong CD$ si ha che

$$AD - BC \cong AB + CD \cong AB + AB \cong 2 \cdot AB.$$

□

3.4.7 Operazioni con gli angoli

Somma di angoli. La somma di due angoli consecutivi $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ è l'angolo $A\hat{O}C$. Per sommare due angoli che non sono consecutivi, per esempio $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, si costruiscono due angoli consecutivi tra di loro, uno congruente a $A\hat{B}C$, l'altro congruente a $D\hat{E}F$ e quindi si calcola la somma (figura 3.31).



(a) Somma di angoli consecutivi (b) Somma di angoli non consecutivi

FIGURA 3.31: Somma di due angoli.

Differenza di angoli. La differenza di due angoli, di cui il primo è maggiore o congruente al secondo, è l'angolo che addizionato al secondo dà per somma il primo (figura 3.32). Se i due angoli considerati sono congruenti la loro differenza è l'angolo nullo.

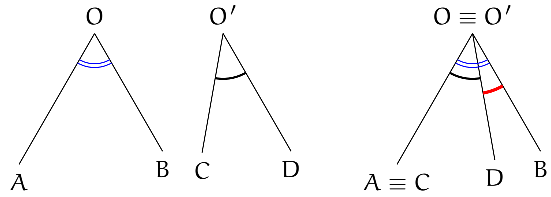


FIGURA 3.32: Differenza di due angoli.

Multiplo di un angolo. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ e un numero n naturale non nullo, il multiplo di $A\widehat{O}B$ secondo n (si può scrivere $n \cdot A\widehat{O}B$) è l'angolo che si ottiene sommando n angoli congruenti a $A\widehat{O}B$. Se $n = 0$, il multiplo secondo n di qualsiasi angolo $A\widehat{O}B$ è l'angolo nullo.

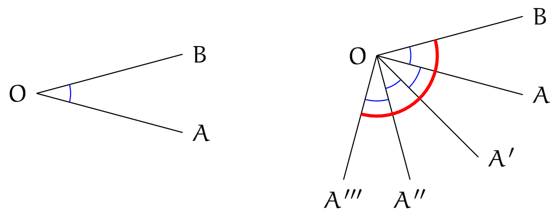


FIGURA 3.33: Multiplo di un angolo. L'angolo $A'''\widehat{O}B$ è il quadruplo di $A\widehat{O}B$, cioè $A'''\widehat{O}B \cong 4 \cdot A\widehat{O}B$

Sottomultiplo di un angolo. Il sottomultiplo secondo n, naturale non nullo, di un angolo $A\widehat{O}B$ è un angolo $A\widehat{O}C$ tale che $A\widehat{O}B \cong n \cdot A\widehat{O}C$. Si può anche scrivere $A\widehat{O}C \cong \frac{1}{n} \cdot A\widehat{O}B$.

In generale, un angolo $A\widehat{O}C \cong \frac{m}{n} \cdot A\widehat{O}B$ si ottiene suddividendo $A\widehat{O}B$ in n angoli uguali (indichiamo con $A\widehat{O}D$ il primo di essi), quindi l'angolo $A\widehat{O}C$ è ottenuto sommando m volte l'angolo $A\widehat{O}D$.

Definizione 3.29. Si dice *bisettrice di un angolo* la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli tra loro congruenti.

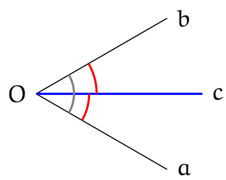


FIGURA 3.34: La semiretta c è la bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$, gli angoli $a\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}b$ sono congruenti

Con riga e compasso.

Procedura 3.9 (Bisettrice). *Costruzione della bisettrice di un angolo:*

1. *Disegna un angolo AVB.*
2. *Traccia una circonferenza di centro V e passante per A.*
3. *Chiama C la sua intersezione con il lato VB.*
4. *Traccia le due circonferenze con centro in A e C passanti per V.*
5. *Chiama D la loro intersezione diversa da V.*
6. *La retta VD è la bisettrice dell'angolo.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: un angolo
Costruisci la sua bisettrice.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: angolo AVB
p_a = pyig.Point(1, -2, width=6, name="A")
p_v = pyig.Point(-4, 1, width=6, name="V")
p_b = pyig.Point(3, 4, width=6, name="B")
angolo = pyig.Angle(p_a, p_v, p_b, [0, 1], color="dark green")
## Costruzione della bisettrice
c_va = pyig.Circle(p_v, p_a, width=1)     # circ centro p_v passante per p_a
p_c = pyig.Intersection(angolo.side1(), c_va, +1, name="C") # lato1 - circ.
c_av = pyig.Circle(p_a, p_v, width=1)     # circ di centro A passante per V
c_cv = pyig.Circle(p_c, p_v, width=1)     # circ di centro C passante per V
p_d = pyig.Intersection(c_av, c_cv, -1)  # intersezione
pyig.Line(p_v, p_d, color="chocolate")    # bisettrice
p_e = pyig.Intersection(c_av, c_cv, +1)  # Queste due linee servono
pyig.Line(p_v, p_e, color="chocolate")    # se l'angolo e' ottuso
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

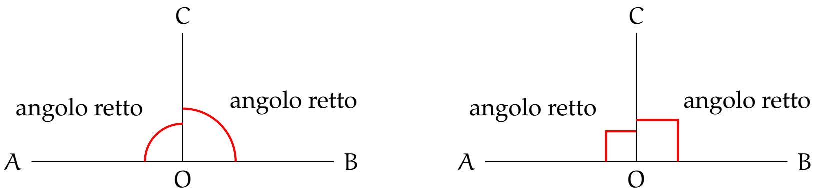
3.4.8 Angoli particolari

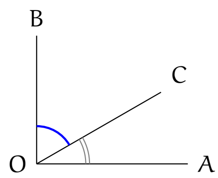
Possiamo ora dare dei nomi ai seguenti angoli particolari.

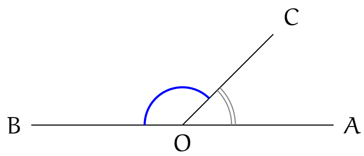
Definizione 3.30. Si dice *angolo retto* la metà di un angolo piatto.

Per denotare il fatto che un angolo è retto si è soliti indicarlo con un quadratino al posto dell'usuale archetto.

Definizione 3.31. Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.

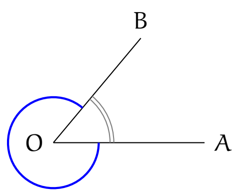






Definizione 3.32. Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

Definizione 3.33. Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è un angolo giro.



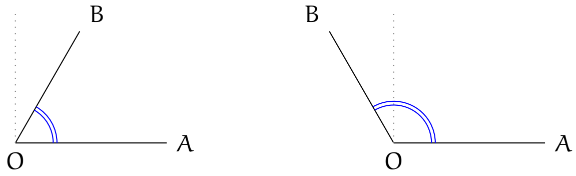
Definizione 3.34. Un angolo si dice *acuto* se è minore di un angolo retto.

Definizione 3.35. Un angolo convesso si dice *ottuso* se è maggiore di un angolo retto.

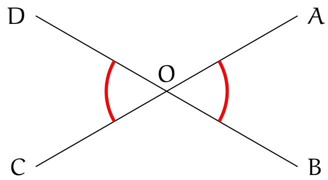
Teorema 3.10. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*

Dimostrazione. Si considerino due generici angoli opposti al vertice $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ come nella figura seguente.

Gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}D$ sono adiacenti, dato che hanno un lato in comune e gli altri due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro. Ma anche gli angoli $A\hat{O}D$ e $D\hat{O}C$ sono angoli



(a) Angolo acuto (b) Angolo ottuso



adiacenti per lo stesso motivo. Quindi gli angoli $D\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ sono adiacenti allo stesso angolo $A\hat{O}D$. Indicando con π l'angolo piatto si ha: $A\hat{O}D + D\hat{O}C \cong \pi$ da cui $D\hat{O}C \cong \pi - A\hat{O}D$. Analogamente $A\hat{O}B + A\hat{O}D \cong \pi$ da cui $A\hat{O}B \cong \pi - A\hat{O}D$. Ne consegue che $D\hat{O}C \cong A\hat{O}B$ e cioè la tesi. □

Prova tu a dimostrare il seguente teorema

Teorema 3.11. *Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.*

Suggerimento: Dopo aver realizzato il disegno, esplicita ipotesi e tesi. Segui poi il ragionamento del teorema precedente: se due angoli sono supplementari la loro somma è un angolo piatto …

Con riga e compasso.

Procedura 3.12 (Angolo di 60°)**.** *Costruzione di un angolo di 60°:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B e passante per A.*
4. *Chiama C e D le due intersezioni delle circonferenze.*
5. *Traccia le semirette AC e AD.*
6. *L'angolo CAB misura 60°.*

Quanto misura l'angolo CAD? e l'angolo ACD?

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: una semiretta AB
Costruisci Un angolo di 60 gradi.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

```

```
# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: semiretta AB
p_a = pyig.Point(−7, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(−1, 4, width=6, name="B")
r_ab = pyig.Ray(p_a, p_b, color="dark green")
## Costruzione dell'angolo di 60 gradi
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)      # circ di centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)      # circ di centro B passante per A
p_c = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1, name="C")     # intersezione C
p_d = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, −1, name="D")     # intersezione D
pyig.Angle(p_b, p_a, p_c, [0, 1],
           color="chocolate") # BAC e' l'angolo richiesto
pyig.Angle(p_c, p_a, p_d, [0, 1], width=1,
           color="chocolate") # CAD altro angolo notevole
pyig.Angle(p_a, p_c, p_d, [0, 1], width=1,
           color="chocolate") # ACD altro angolo notevole
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

3.4.9 Perpendicolari e altre definizioni

Definizione 3.36. Due rette si dicono *perpendicolari* se sono incidenti e formano tra loro quattro angoli retti.

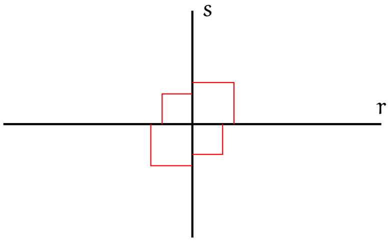


FIGURA 3.35: Le rette r e s sono perpendicolari poiché incontrandosi formano quattro angoli retti

Per indicare che le due rette r e s sono perpendicolari si usa il simbolo $r \perp s$.
Con riga e compasso.

Procedura 3.13 (Perpendicolare). *Costruzione della perpendicolare a una retta, passante per un punto C:*

1. *Traccia la retta passante per due punti A e B, e un punto C.*
2. *Traccia una circonferenza di centro C e passante per B.*
3. *La circonferenza interseca la retta in due punti: D e E.*
4. *Traccia la circonferenza di centro D e passante per E.*
5. *Traccia la circonferenza di centro E e passante per D.*
6. *Chiama F e G i punti di intersezione fra le due circonferenze.*
7. *La retta FG è la perpendicolare ad AB passante per C.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: una retta AB e un punto C
Costruisci la perpendicolare ad AB passante per C.
"""

# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: retta AB e punto C
p_a = pyig.Point(−5, −4, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(−1, −5, width=6, name="B")
r_ab = pyig.Line(p_a, p_b, color="dark green")
p_c = pyig.Point(4, −1, width=6, name="C")
## Costruzione della perpendicolare a AB passante per C
c_ab = pyig.Circle(p_c, p_b, width=1)     # circ di centro C passante per B
p_d = pyig.Intersection(c_ab, r_ab, −1, name="D")     # intersezione D
p_e = pyig.Intersection(c_ab, r_ab, +1, name="E")     # intersezione E
c_de = pyig.Circle(p_d, p_e, width=1)     # circ di centro B passante per C
c_ed = pyig.Circle(p_e, p_d, width=1)     # circ di centro D passante per C
p_f = pyig.Intersection(c_de, c_ed, −1, name="F")     # intersezione F
p_g = pyig.Intersection(c_de, c_ed, +1, name="G")     # intersezione G
pyig.Line(p_f, p_g, color="chocolate") # la perpendicolare cercata
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Definizione 3.37. Si dice *distanza di un punto* P *da una retta* la lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal punto P alla retta.

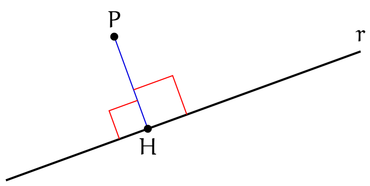


FIGURA 3.36: Il segmento PH, appartenente alla perpendicolare a r passante per P, è la distanza di P dalla retta r

Definizione 3.38. Si chiama *asse di un segmento* la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.

In genere un asse viene rappresentato con una linea a “tratto e punto”.

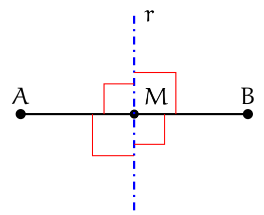


FIGURA 3.37: La retta r è l'asse del segmento AB in quanto è perpendicolare alla retta per AB e passa per M, il punto medio di AB

Definizione 3.39. Due punti si dicono *simmetrici rispetto a una retta* se la retta è asse del segmento che ha per estremi i due punti.

Nella figura 3.37, i punti A e B sono simmetrici rispetto alla retta r.
Con riga e compasso.

Procedura 3.14 (Asse di un segmento). *Costruzione dell'asse di simmetria di un segmento dato:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B e passante per A.*
4. *Le circonferenze si intersecano in due punti: etichettali C e D.*
5. *Traccia la retta CD, che è l'asse del segmento AB.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: due punti liberi e il segmento che li congiunge
Costruisci l'asse del segmento.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: segmento AB
p_a = pyig.Point(-1, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(6, 1, width=6, name="B")
s_2 = pyig.Segment(p_a, p_b, color="dark green", width=6)
## Costruzione dell'asse
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)   # circ di centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)   # circ di centro B passante per A
p_c = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1, name="C")  # intersezione C
p_d = pyig.Intersection(c_ab, c_ba, -1, name="D")  # intersezione D
pyig.Line(p_c, p_d, color='chocolate') # asse
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

3.5 Poligoni e poligonale

Definizione 3.40. Si chiama *spezzata* una figura formata da una sequenza ordinata di segmenti uno consecutivo all'altro. I segmenti che formano la spezzata si chiamano *lati*, gli estremi dei segmenti si chiamano *vertici*.

Ogni vertice di una spezzata è quindi in comune a due lati, ad eccezione del primo vertice del primo segmento e dell'ultimo vertice dell'ultimo segmento che appartengono a un solo segmento.

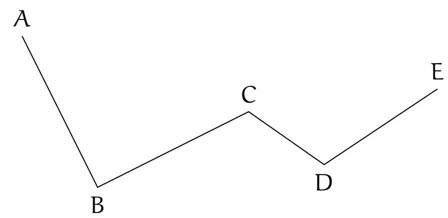
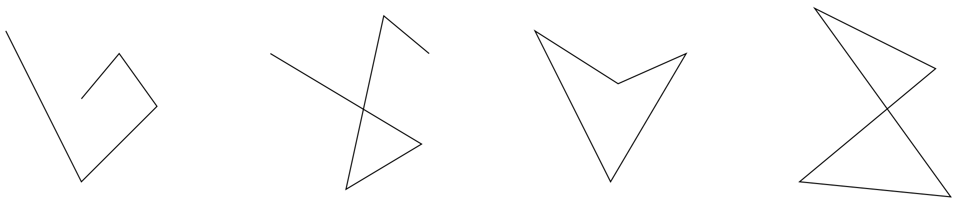


FIGURA 3.38: La linea ABCDE è una spezzata, perché formata da segmenti consecutivi. I segmenti AB, BC, CD e DE sono i lati della spezzata, i punti A, B, C, D ed E sono i vertici

Definizione 3.41. Un spezzata si dice *chiusa* se il primo estremo del primo segmento coincide con l'ultimo estremo dell'ultimo segmento; si dice *aperta* se il primo estremo e l'ultimo estremo sono distinti.

Definizione 3.42. Un spezzata si dice *intrecciata* se almeno due suoi lati si intersecano in punti diversi dagli estremi; si dice *semplice* o *non intrecciata* se ogni coppia di lati non consecutivi non ha punti in comune.



F_1 (semplice, aperta) F_2 (intrecciata, aperta) F_3 (semplice, chiusa) F_4 (intrecciata, chiusa)

FIGURA 3.39: La figura F_1 è un spezzata semplice aperta (i lati non si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_2 è una spezzata intrecciata aperta (due lati si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_3 è una spezzata semplice chiusa (non ci sono lati non consecutivi che si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati); la figura F_4 è una spezzata intrecciata chiusa (due lati si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati)

Definizione 3.43. Si chiama *poligonale* una spezzata chiusa non intrecciata.

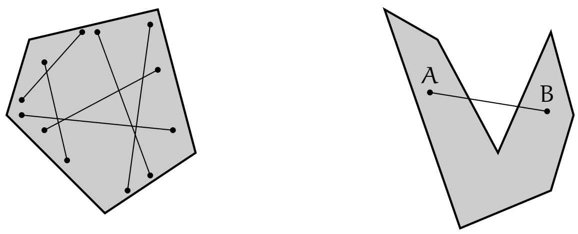
3.5.1 Poligono

Definizione 3.44. Si chiama *poligono* la figura formata da una poligonale e dalla parte finita di piano da essa delimitata.

Definizione 3.45. In un poligono chiamiamo:

- *vertici* del poligono i vertici della poligonale;
- *lati* del poligono i lati della poligonale;
- *contorno* del poligono la poligonale stessa;
- *punti interni* i punti del poligono non situati sul contorno;
- *punti esterni* tutti i punti del piano che non sono interni e non appartengono al contorno;
- *perimetro* del poligono il segmento somma dei lati del poligono.

Definizione 3.46. Un poligono si dice *convesso* se è una figura convessa, cioè se il segmento che ha per estremi due suoi punti qualsiasi è interamente contenuto nel poligono, si dice *concavo* se non è convesso, cioè se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è contenuto interamente nel poligono.



(a) P_1 (poligono convesso) (b) P_2 (poligono concavo)

FIGURA 3.40: Il poligono P_1 è convesso perché comunque si prendono due suoi punti interni, il segmento che li unisce è interno al poligono; il poligono P_2 è concavo perché il segmento AB cade in parte all'esterno del poligono

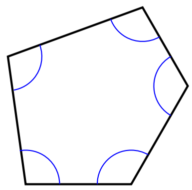
Nel seguito, quando parleremo di poligoni intenderemo sempre poligoni convessi.

Definizione 3.47. In un poligono chiamiamo:

- *angolo interno* o *angolo del poligono* ognuno degli angoli che ha per lati le semirette che contengono due lati consecutivi del poligono e ha per vertice il vertice del poligono in comune a quei due lati;
- *angolo esterno* ciascun angolo adiacente ad un angolo interno.

Osservazioni

- Un poligono è convesso se ogni angolo interno è convesso.
- Un poligono è concavo se ha almeno un angolo interno concavo.


(a) angoli interni

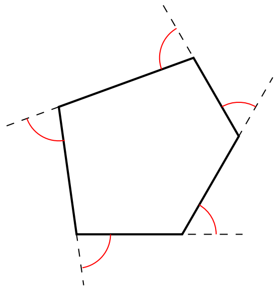

(b) Angoli esterni

FIGURA 3.41: Nella figura (a) sono indicati gli angoli interni al poligono, nella figura (b) sono indicati gli angoli esterni, ognuno di essi è adiacente a un angolo interno

Osserva che per ogni angolo interno esistono due angoli esterni, congruenti tra di loro perché opposti al vertice, ovvero perché supplementari dello stesso angolo.

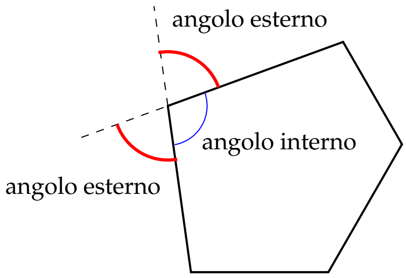


FIGURA 3.42: Ogni angolo interno ha due angoli esterni adiacenti ad esso

Inoltre diamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.48. In un poligono chiamiamo:

- *corda* ogni segmento che unisce due qualsiasi punti del contorno del poligono che non appartengono allo stesso lato;
- *diagonale* ogni corda che unisce due vertici non consecutivi.

I poligoni hanno nomi diversi a seconda del loro numero di lati:

- *triangolo* è un poligono con tre lati;
- *quadrilatero* è un poligono con quattro lati;
- *pentagono* è un poligono con cinque lati;
- *esagono* è un poligono con sei lati;
- e così via.

Definizione 3.49. Un poligono si dice *equilatero* se ha tutti i lati congruenti tra loro.

Definizione 3.50. Un poligono si dice *equiangolo* se ha tutti gli angoli interni congruenti tra loro.

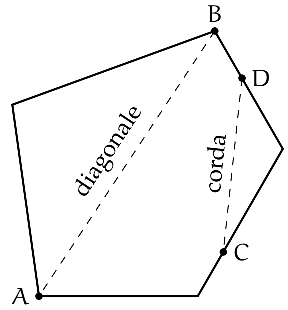


FIGURA 3.43: Il segmento AB è una diagonale del poligono poiché unisce i vertici non consecutivi A e B; il segmento CD è una corda poiché unisce due punti posti su due lati distinti del poligono

Definizione 3.51. Un poligono equiangolo e equilatero si dice *poligono regolare*.

3.6 Esercizi

3.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 - Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

3.1. Trasforma nella forma «Se ... allora ...» le seguenti frasi:

a) «Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra»
b) «Quando piove prendo l'ombrello»
c) «I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5»
d) «Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza»

3.2. Completa i seguenti ragionamenti:

a) «Se un numero è multiplo di 10 allora è pari»; «il numero n non è pari quindi ....»
b) «Se il sole tramonta fa buio»; «il sole è tramontato quindi ....»

3.3. Distingui nelle seguenti frasi le definizioni dalle proposizioni o proprietà

a) «La Terra ruota su se stessa in un giorno» D P
b) «Il solstizio è il momento in cui il Sole raggiunge, nel suo moto apparente lungo l'eclittica, il punto di declinazione massima o minima» D P
c) «La cellula è l'unità fondamentale di tutti gli organismi viventi» D P
d) «I virus sono responsabili di alcune malattie» D P
e) «I numeri che hanno per ultima cifra 0 sono numeri pari» D P
f) «Un numero si dice pari se è divisibile per 2» D P

[a) P, b) D, c) D, d) P, e) P, f) D.]

3.4. Dimostra con un controesempio che l'affermazione «Tutti i multipli di 3 sono dispari» non è vera. [Un controesempio è 6, che è pari.]

3.5 (I Giochi di Archimede, 1997). «Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo». Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?

a) «Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo»;
b) «Se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio»;
c) «Se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio»;
d) «Se la sera non ho fame, allora non mangio troppo»;
e) «Se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio».

3.6. Gli enti primitivi della geometria sono quelli...

a) che occorre definire;
b) che occorre dimostrare;
c) che non si definiscono;
d) che si conoscono già per averli studiati prima.

[c]

3.7. Gli assiomi sono:

a) proposizioni note che si preferisce non dimostrare per non appesantire lo studio;
b) proposizioni che è necessario dimostrare;
c) proposizioni che si assumono vere senza dimostrazione;
d) proposizioni che non si definiscono;
e) proposizioni che non si dimostrano perché la loro dimostrazione è molto semplice.

[c]

3.8. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) Due punti sono sempre allineati

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) Tre punti sono sempre allineati

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) Tre punti sono sempre complanari

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) Tre punti allineati individuano un unico piano $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

e) Una retta e un punto esterno ad essa individuano un piano $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[a) V, b) F, c) V, d) V, e) V.]

3.9. Su una retta si segnano quattro punti A, B, C e D. Quanti segmenti restano individuati?

3.10. Date tre semirette a, b e c aventi la stessa origine O, quanti angoli restano individuati?

3.11. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, tre punti non allineati e posti sullo stesso piano.

3.12. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, quattro punti, a tre a tre non allineati, di uno stesso piano.

3.13. Quattro rette a due a due incidenti quanti punti di intersezione individuano complessivamente?

3.14. Quale assioma è rappresentato nella figura 3.44?

a) tre punti distinti non allineati determinano uno ed un solo piano che li contiene;
b) su un piano esistono infiniti punti ed infinite rette;
c) la retta passante per due punti distinti di un piano giace completamente nel piano;
d) su una retta esistono infiniti punti.

[a]

3.15. Rispondi a voce alle seguenti domande

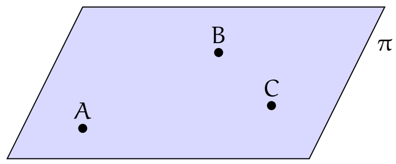


FIGURA 3.44: Esercizio 3.14

a) Qual è l'origine della parola "geometria"?
b) Qual è la differenza tra "assioma" e "teorema"?
c) Qual è la differenza tra "ente definito" e "ente primitivo"?

3.3 - Prime definizioni

3.16. Disegna una retta a e una retta b che si incontrano in un punto X, disegna anche una retta c che incontra la a in Y e la b in Z. Elenca tutte le semirette e tutti i segmenti che si vengono a formare.

3.17. Disegna due rette a e b parallele tra di loro; disegna poi la retta c che interseca la a in A e la b in B; disegna poi la retta d che interseca a in A e b in C. Quali segmenti si vengono a formare?

3.18. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A \in r$ e $B \in r$, $B \in s$ e $C \in s$, $A \in t$ e $C \in t$
b) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = AD$. $AB \cup CD = \dots$
c) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = \emptyset$. $AB \cup CD = \dots$
d) $AB \subset r$, $CD \subset s$, $r \parallel s$, $P \notin r \cup s$

3.19. Attribuisci il nome corretto a ciascuna coppia di segmenti rappresentati nella figura 3.45 tra: adiacenti, incidenti, disgiunti, consecutivi.

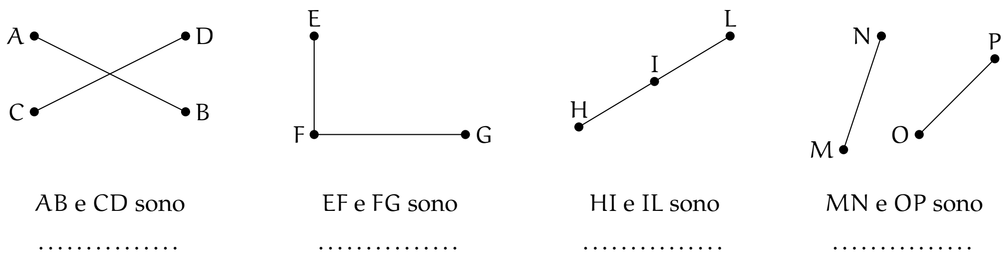


FIGURA 3.45: Esercizio 3.19

3.20. Su una retta r disegna i punti A e B, sapendo che A precede B, disegna i punti C e D sapendo che D è compreso tra A e B e che C segue B. Indica tutti i segmenti che si vengono a formare.

3.21. Dati cinque punti nel piano, in modo che a tre a tre non siano allineati, quante rette passanti per due di questi punti è possibile tracciare? Sai esprimere il legame generale tra il numero N di punti e il numero M di rette che si possono tracciare?

3.22. Vero o falso?

a) Per un punto passa una sola retta V F
b) Per due punti passa una sola retta V F
c) Per tre punti passano almeno tre rette V F
d) Due punti distinti del piano individuano sempre un segmento V F
e) Due rette distinte del piano hanno al più un punto in comune V F
f) Tre punti distinti del piano individuano almeno tre rette V F
g) Due semirette distinte del piano che hanno la stessa origine sono opposte V F
h) Alcuni segmenti consecutivi non sono adiacenti V F
i) Due angoli che hanno il vertice in comune sono consecutivi V F
j) Per un punto del piano passano solo due rette V F
k) Due segmenti posti sulla stessa retta sono adiacenti V F
l) Due segmenti consecutivi hanno in comune un estremo e nessun altro punto V F

[a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V.]

3.23. Due segmenti si dicono adiacenti se:

a) appartengono alla stessa retta;
b) sono consecutivi ma non appartengono alla stessa retta;
c) non sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
d) sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
e) appartengono alla stessa retta e hanno gli estremi coincidenti.

[e]

3.24. Un angolo è convesso se:

a) è adiacente ad un altro angolo;
b) i suoi lati sono rette incidenti;
c) contiene il prolungamento dei suoi lati;
d) è consecutivo ad un altro angolo;
e) non contiene il prolungamento dei suoi lati.

[e]

3.25. Due angoli si dicono opposti al vertice se:

a) sono sullo stesso piano;
b) sono uno concavo e uno convesso;
c) hanno il vertice in comune;
d) i lati dell'uno sono contenuti nell'altro;
e) i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro.

[e]

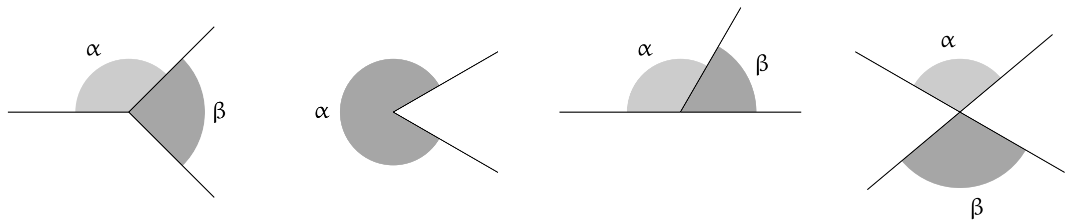
3.26. Quanti angoli individuano tre semirette aventi la stessa origine? Fai un disegno.

3.27. Dai la definizione di "angolo".

3.28. Qual è la differenza tra angolo piatto e angolo nullo? *Fai riferimento alle definizioni e non al fatto che il primo misura* 360° *e il secondo* 0°.

3.29. Qual è la differenza tra angoli consecutivi e angoli adiacenti?

3.30. Per ciascun esempio riportato nella figura 3.46 scrivi di che angolo si tratta relativamente agli angoli colorati in grigio, scegliendo i termini tra: angolo concavo, angoli adiacenti, angoli consecutivi, angoli opposti al vertice.



α e β sono	α è	α e β sono	α e β sono
....	....	....	....

FIGURA 3.46: Esercizio 3.30

3.31. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A\hat{O}B \cup A\hat{O}C = A\hat{O}B$;
b) $A\hat{O}B \cap A\hat{O}C = A\hat{O}B$;
c) $A\hat{O}B \cap C\hat{O}D = C\hat{O}B$ e $A\hat{O}B \cup C\hat{O}D = A\hat{O}B$.

3.32. Facendo riferimento alla figura 3.47 indica

a) una coppia di segmenti consecutivi ....;
b) una coppia di segmenti adiacenti ....;
c) una coppia di rette incidenti ....;
d) una coppia di rette parallele ....;
e) una coppia di angoli consecutivi ....;
f) una coppia di angoli adiacenti ....;
g) una coppia di angoli opposti al vertice ....;
h) un angolo concavo ....;
i) un angolo convesso ....

3.33. Indica quali delle figure geometriche riportate nella figura 3.48 sono convesse

a) A, B, C, G; b) B, C, D, F; c) B, C, D; d) B, C; e) D, E, F, G.

[c]

3.34. Scrivi per esteso nel linguaggio comune quanto è indicato in simboli e rappresenta con un disegno tutti i casi possibili: $(P \in r) \wedge (P \in s) \wedge (Q \in r)$.

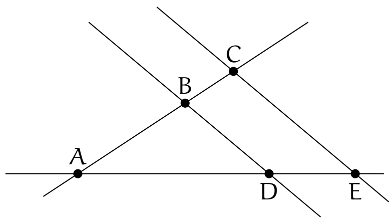


FIGURA 3.47: Esercizio 3.32

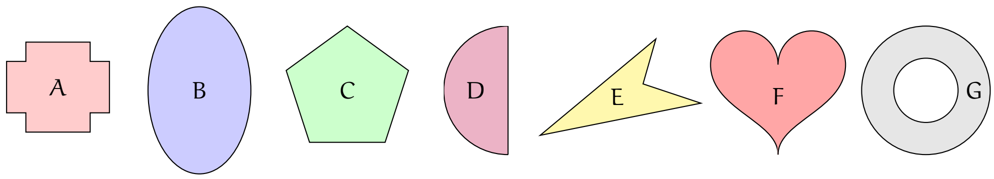


FIGURA 3.48: Esercizio 3.33

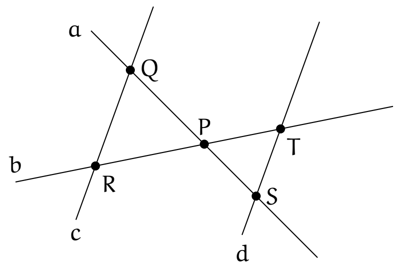


FIGURA 3.49: Esercizio 3.35

3.35. Descrivi la costruzione della figura 3.49, dove le rette c e d sono parallele.

3.36. Se P è centro di un fascio di rette e A è un punto dello stesso piano, è vero che nel fascio di centro P esiste una retta passante per A? [Sì]

3.37. Motiva la verità o la falsità della proposizione: «Tutte le rette incidenti formano 2 coppie di angoli opposti al vertice».

3.38. Siano a, b, c, d quattro semirette aventi l'origine in comune O disposte in ordine antiorario come nella figura 3.50. Individua, aiutandoti con il disegno, quali sono gli angoli che si ottengono dalle seguenti operazioni:

a) $a\widehat{O}d \cap d\widehat{O}b$;
b) $d\widehat{O}c \cup c\widehat{O}b$;
c) $c\widehat{O}b \cup c\widehat{O}a$;
d) $a\widehat{O}b \cap d\widehat{O}b$;
e) $c\widehat{O}a \cap d\widehat{O}b$.

3.4 - Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

3.39. Due angoli sono complementari e uno è doppio dell'altro. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

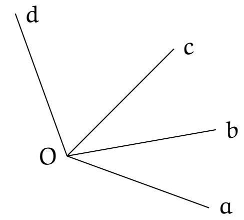


FIGURA 3.50: Esercizio 3.38

a) uno è retto e l’altro è piatto;
b) uno è 1/3 dell’angolo retto e l’altro i 2/3 dell’angolo retto;
c) uno è 1/3 dell’angolo retto e l’altro 1/6 dell’angolo retto;
d) uno è 1/2 dell’angolo retto e l’altro è retto;
e) uno è 2/3 dell’angolo retto e l’altro i 4/6 dell’angolo retto.

3.40. Siano α e β due angoli consecutivi esplementari e siano a e b le loro bisettrici. L’angolo tra a e b è

a) piatto;
b) retto;
c) nullo;
d) non si può sapere.

[a]

3.41. Se α e β sono due angoli di vertice O, consecutivi e complementari e a e b le loro bisettrici, allora dell’angolo $a\widehat{O}b$ si può dire che:

a) è uguale all’angolo retto;
b) è la metà di un angolo retto;
c) è la terza parte di un angolo retto;
d) è la quarta parte di un angolo retto;
e) non è possibile determinarne l’ampiezza.

[b]

3.42. Le bisettrici di due angoli adiacenti:

a) sono parallele;
b) sono lati di un angolo retto;
c) sono lati di un angolo concavo;
d) coincidono;
e) sono semirette opposte.

[b]

3.43. Due angoli si dicono complementari quando:

a) sono consecutivi;
b) sono angoli opposti al vertice;
c) la loro somma è un angolo retto;
d) ciascuno di essi è acuto;
e) ciascuno è la metà di un angolo retto.

[c]

3.44. Dati due segmenti adiacenti AB e BC tali che $AB \cong \frac{1}{3} \cdot BC$, allora per $AC = AB + BC$ si può dire che:

a) $AC \cong \frac{1}{4} \cdot BC$;
b) $AC \cong 3 \cdot BC$;
c) $AC \cong 2 \cdot BC$;
d) $AC \cong \frac{1}{2} \cdot BC$;
e) $AC \cong \frac{4}{3} \cdot BC$.

[e]

3.45. Due segmenti AB e CD appartengono alla stessa retta e hanno lo stesso punto medio. Si può affermare che:

a) $AB \cong CD$; b) $AC \cong CD$; c) $DB \cong DC$; d) $AC \cong BD$; e) $AC \cong AB$.

[d]

3.46. Per ciascuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, e spiegare perché

a) l'angolo retto è la metà dell'angolo giro $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) ogni angolo convesso ha due bisettrici $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) due angoli che hanno in comune il vertice sono consecutivi $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) un angolo ottuso è maggiore di qualunque angolo acuto $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) sommando due angoli acuti si può ottenere un angolo piatto $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

[a) F, b) F, c) F, d) V, e) F.]

3.47. Tre semirette a, b, c uscenti da uno stesso punto dividono il piano in tre angoli congruenti. Dopo aver rappresentato le semirette, traccia la semiretta b_1 opposta di b. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) b_1 è perpendicolare alla semiretta a;
b) b_1 è bisettrice dell'angolo formato da a e c;
c) b_1 è perpendicolare alla semiretta c;

[b]

3.48. Dato l'angolo acuto $A\hat{O}B$, sia OC la sua bisettrice. Sia poi OD una semiretta esterna all'angolo come nella figura 3.51, quale relazione è vera?

a) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A - D\hat{O}B)$;
b) $C\hat{O}B \cong (A\hat{O}D - A\hat{O}B)$;
c) $C\hat{O}B \cong (B\hat{O}D - C\hat{O}B)$;
d) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A + D\hat{O}B)$.

[a]

3.49. Individua tra gli angoli rappresentati nella figura 3.52 quello piatto, quello retto, quello acuto, quello ottuso e quello concavo, scrivendolo nelle relative etichette. Per ciascuno di essi traccia la bisettrice.

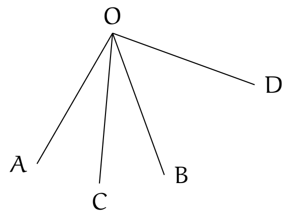


FIGURA 3.51: Esercizio 3.48

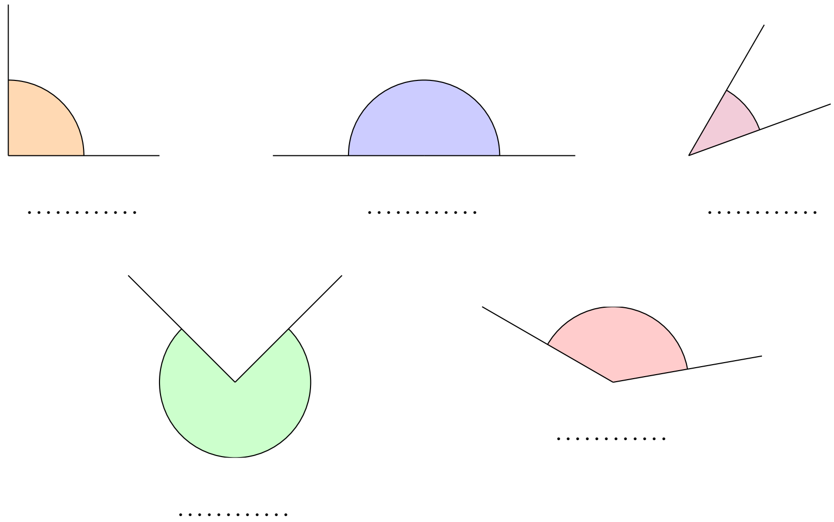


FIGURA 3.52: Esercizio 3.49

3.50. Per ognuna delle seguenti affermazioni indica se è vera oppure falsa

a) Sommando due angoli acuti si ottiene sempre un angolo acuto V F
b) Sommando due angoli piatti si ottiene un angolo giro V F
c) Sommando un angolo acuto e uno retto si ottiene un angolo ottuso V F
d) Sommando due angoli retti si ottiene un angolo giro V F
e) Sommando un angolo piatto e un angolo acuto si ottiene un angolo concavo V F
f) Sommando due angoli convessi si ottiene sempre un angolo convesso V F
g) Sommando un angolo retto e un angolo piatto si ottiene un angolo giro V F

[a) F, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F, g) F]

3.51. Individua l'angolo

a) La differenza tra un angolo piatto è un angolo retto è un angolo ....
b) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo ....
c) La differenza tra un angolo acuto e un angolo retto è un angolo ....
d) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo ....
e) Il doppio di un angolo piatto è un angolo ....

f) Il doppio di un angolo retto è un angolo ....

3.52. Spiega perché se due angoli sono complementari i loro doppi sono supplementari.

3.53. Verifica, aiutandoti con un disegno, che se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} < \widehat{D}$ allora $\widehat{A} + \widehat{C} < \widehat{B} + \widehat{D}$.

3.54. Un angolo α è retto e un angolo β è la sesta parte di un angolo piatto. A quale frazione di angolo retto corrisponde la somma $\alpha + \beta$? [$\frac{4}{3}$]

3.55. Dati quattro segmenti $AB > BC > CD > DE$. Verifica, aiutandoti con dei disegni, che:

a) $AB - CD > BC - CD$;
b) $AB + DE > BC + CD$.

3.56. Disegna due angoli consecutivi α e β, disegna l'angolo γ adiacente ad α non contenente β e l'angolo δ adiacente a β non contenente α. Gli angoli $\gamma + \delta$ e $\alpha + \beta$ sono:

a) complementari;
b) supplementari;
c) opposti al vertice;
d) esplementari.

[b]

3.57. Su una semiretta di origine A segna il segmento AB, il segmento $BC \cong 3 \cdot AB$ e il segmento $CD \cong AB$, i punti sono consecutivi secondo l'ordine alfabetico. Secondo quale numero frazionario AD è multiplo di BC? [$\frac{5}{3}$]

3.58. Su una retta, i punti A, B, C, D si susseguono secondo l'ordine alfabetico. Se AB è congruente a CD i punti medi di BC e AD coincidono? Spiega perché? []

3.59. Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r, non aventi alcun punto in comune e in modo che AB preceda CD. Dimostra che il punto medio di BC è anche punto medio di AD.

3.60. Siano AB e BC due segmenti adiacenti non necessariamente congruenti, sia M il punto medio di AC ed N il punto medio di BC, dimostra che $MN \cong \frac{1}{2} \cdot AB$.

3.61. In un piano gli angoli $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}D$ sono adiacenti. Sia OF la bisettrice di $A\widehat{O}C$ e OE la bisettrice di $C\widehat{O}D$. Spiega perché $F\widehat{O}E$ è retto.

?? - ??

3.5 - Poligoni e poligonale

3.62. Quante diagonali ha un triangolo?

a) nessuna;
b) 1;
c) 2;
d) 3.

[a]

3.63. Quante diagonali puoi tracciare dal vertice di un poligono di 6 lati?

a) 6;
b) 5;
c) 4;
d) 3.

[d]

3.64. Traccia l'angolo esterno relativo agli angoli interni indicati con un arco nella figura 3.53.

3.65. Quali tra le seguenti figure geometriche sono sempre congruenti tra loro?

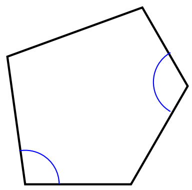


FIGURA 3.53: Esercizio 3.64

a) Tutti i punti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Tutte le rette $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) Tutte le semirette $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) Tutti i semipiani $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) Tutti gli angoli $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) Tutti i poligoni convessi $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) Tutti i triangoli $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) Tutti i triangoli equilateri $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) Tutti i quadrati $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

[a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) F, g) F, h) F, i) F]

3.66 (Prove invalsi 2006)**.** Che cosa si definisce "diagonale" in un poligono convesso? Un segmento che

a) congiunge due vertici non consecutivi del poligono;
b) congiunge due vertici qualsiasi del poligono;
c) congiunge i punti medi di due lati consecutivi del poligono;
d) divide il poligono in due parti congruenti.

[a]

3.67 (Prove invalsi 2006)**.** Scegli tra le figure riportate nella figura 3.54 quella in cui risulta vera l'uguaglianza $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{4}$. [d]

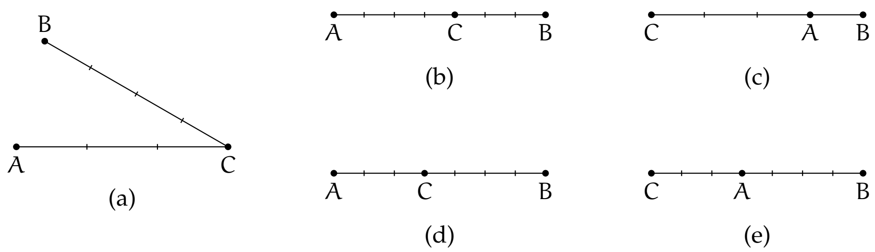


FIGURA 3.54: Esercizio 3.67

3.68 (Prove invalsi 2005)**.** Due segmenti misurano 5 dm e 30 cm rispettivamente. Qual è il rapporto fra la lunghezza del secondo segmento e quella del primo?

a) 6; b) 5/3; c) 3/5; d) 1/6.

[c]

3.69 (Prove invalsi 2005). I punti A, B e C sono allineati come nella figura 3.55. Se l'angolo $A\widehat{B}E$ misura 54° e BD è la bisettrice dell'angolo $E\widehat{B}C$, quanto misura l'angolo $D\widehat{B}C$?

a) 26°; b) 36°; c) 54°; d) 63°.

[d]

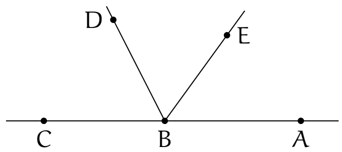


FIGURA 3.55: Esercizio 3.69

3.70 (Prove invalsi 2005). Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali. Un poligono non è regolare se e solamente se ...

a) tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali;
b) tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali;
c) almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali;
d) almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

[d]

a

Congruenza nei triangoli 4

"Triangle Shapes"
Foto di maxtodorov
http://www.flickr.com/photos/maxtodorov/3066505212/

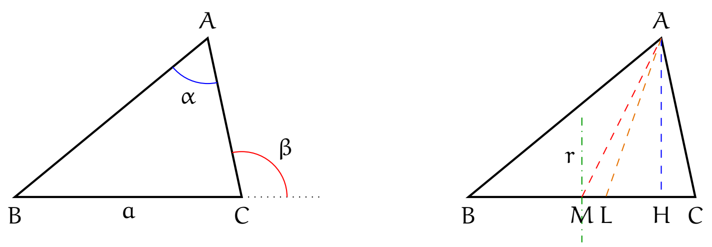
4.1 Definizioni relative ai triangoli

Definiamo gli elementi principali di un triangolo

Definizione 4.1.

- Un *triangolo* è un poligono di tre lati.
- Si chiamano *vertici* gli estremi dei lati.
- Un vertice si dice *opposto a un lato* se non appartiene a quel lato.
- Si chiamano *angoli interni* del triangolo i tre angoli formati dai lati.
- Un angolo interno si dice *angolo compreso tra due lati* quando i lati dell'angolo contengono dei lati del triangolo.
- Un angolo interno si dice *angolo adiacente a un lato* del triangolo quando uno dei suoi lati contiene quel lato del triangolo.
- Un angolo si dice *angolo esterno* al triangolo se è un angolo adiacente a un angolo interno.
- Si dice *bisettrice* relativa a un vertice, il segmento di bisettrice dell'angolo al vertice che ha per estremi il vertice stesso e il punto in cui essa incontra il lato opposto.
- Si dice *mediana* relativa a un lato il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.
- Si dice *altezza* di un triangolo relativa a un suo lato il segmento di perpendicolare che ha per estremi il vertice opposto al lato e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta contenente il lato.
- Si dice *asse* di un triangolo, relativo a un suo lato, la perpendicolare al lato condotta nel suo punto medio.

Nel triangolo (a) della figura seguente, A, B e C sono i vertici del triangolo, il vertice A è opposto al lato a, l'angolo α è interno al triangolo ed è compreso tra i lati AB e AC, mentre l'angolo β è esterno. Nel triangolo (b) AL è la bisettrice dell'angolo nel vertice A, AH è altezza relativa alla base BC, AM è la mediana relativa al lato BC e la retta r è l'asse di BC.



(a) (b)

FIGURA 4.1: Triangolo. Vertici, angoli, bisettrice, mediana, asse.

I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati

Definizione 4.2.

- un triangolo si dice *equilatero* se ha i tre lati congruenti;
- un triangolo si dice *isoscele* se ha (almeno) due lati congruenti;
- un triangolo si dice *scaleno* se ha i lati a due a due non congruenti.

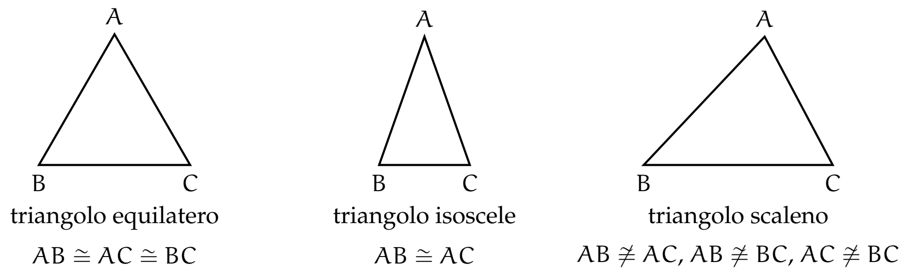


FIGURA 4.2: Classificazione di un triangolo rispetto ai lati

o rispetto agli angoli

Definizione 4.3.

- un triangolo si dice *rettangolo* se ha un angolo interno retto; in un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato che si oppone all'angolo retto e si chiamano *cateti* i lati adiacenti all'angolo retto;
- un triangolo si dice *ottusangolo* se ha un angolo interno ottuso;
- un triangolo si dice *acutangolo* se ha tutti gli angoli interni acuti.

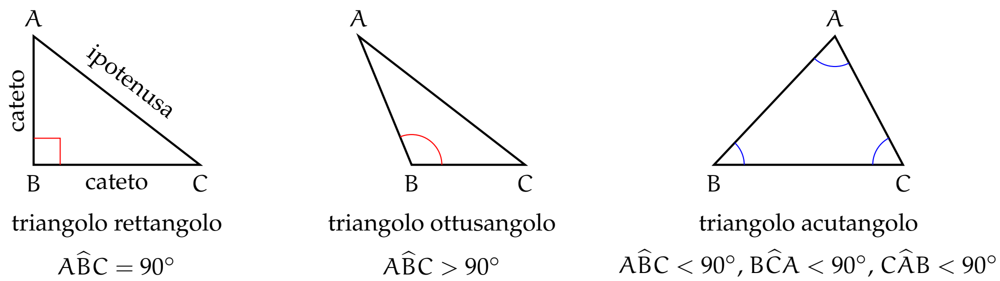


FIGURA 4.3: Classificazione di un triangolo rispetto agli angoli

Abbiamo già costruito un triangolo equilatero (vedi 3.2).
Vediamo ora come costruire triangoli isosceli. Se è data la base.
Con riga e compasso.

Procedura 4.1. *Costruzione di un triangolo isoscele di base assegnata:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B, base del triangolo da costruire.*
2. *Costruisci l'asse del segmento AB.*
3. *Prendi un punto sull'asse e denominalo C.*
4. *I segmenti AC e BC hanno la stessa lunghezza e quindi il triangolo ABC è isoscele.*

Con questa procedura, quanti triangoli isosceli di base assegnata AB puoi costruire?

Con la geometria interattiva.

```python
"""
Disegna: un segmento
Costruisci i triangoli isosceli che abbiano quel segmento come base.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: segmento AB
p_a = pyig.Point(-1, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(7, 1, width=6, name="B")
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, width=5, color="dark green")
## Costruzione del triangolo
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)  # circ. centro A passante per B
c_ba = pyig.Circle(p_b, p_a, width=1)  # circ. centro B passante per A
asse = pyig.Line(pyig.Intersection(c_ab, c_ba, -1),
                 pyig.Intersection(c_ab, c_ba, +1), width=1) # asse
p_c = pyig.ConstrainedPoint(asse, 0.7, width=6, name="C") # vertice C
pyig.Polygon((p_a, p_b, p_c), color="chocolate", intcolor="gold") # triiso.
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Se è dato il lato obliquo.
Con riga e compasso.

Procedura 4.2. *Costruzione di un triangolo isoscele di lato obliquo assegnato:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B, lato obliquo del triangolo da costruire.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B, con apertura AB.*
3. *Scegli un punto qualsiasi sulla circonferenza: denominalo C; il triangolo ABC è isoscele sulla base AC.*

Con questa procedura, quanti triangoli isosceli di lati assegnati congruenti ad AB puoi costruire?

Con la geometria interattiva.

```python
"""
Disegna: un segmento
Costruisci i triangoli isosceli che abbiano quel segmento come lato obliquo.
"""
# lettura delle librerie
import pyig
```

```

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: segmento AB
p_a = pyig.Point(-1, 3, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(7, 1, width=6, name="B")
s_ab = pyig.Segment(p_a, p_b, width=5, color="dark green")
## Costruzione del triangolo
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)  # circ. centro A passante per B
p_c = pyig.ConstrainedPoint(c_ab, .5, width=6, name="C") # vertice C
pyig.Polygon((p_a, p_b, p_c), color="chocolate", intcolor="gold") # triiso
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

4.2 Criteri di congruenza dei triangoli

Ricordiamo che due figure piane si dicono *congruenti* se sono sovrapponibili, cioè se è possibile spostare una sull'altra, senza deformarle, in modo che coincidano perfettamente.

In particolare, due triangoli sono sovrapponibili se hanno "ordinatamente" congruenti i tre lati e i tre angoli. Con il termine ordinatamente intendiamo che, a partire da una coppia di vertici (il primo di un triangolo ed il secondo dell'altro) procedendo lungo il contorno in senso orario, oppure antiorario, incontriamo lati tra loro congruenti e vertici di angoli tra loro congruenti. Nel caso dei triangoli, questo succede esattamente quando angoli congruenti nei due triangoli sono compresi tra coppie di lati congruenti o, in maniera equivalente, quando sono opposti a lati congruenti.

I criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che è sufficiente conoscere la congruenza di solo alcuni elementi dei due triangoli, generalmente tre elementi di un triangolo congruenti a tre elementi dell'altro triangolo, per poter affermare che i due triangoli sono tra loro congruenti, e quindi dedurne la congruenza degli altri elementi.

Un modo tradizionale di presentare l'argomento, dovuto allo stesso Euclide, è quello di "dimostrare" i primi due criteri di congruenza dei triangoli facendo uso della definizione stessa di congruenza come "uguaglianza per sovrapposizione", e di utilizzarli successivamente per la verifica di altre proprietà.

Secondo il matematico tedesco Hilbert, il primo criterio di congruenza è invece un assioma e il secondo criterio può essere dimostrato per assurdo attraverso il primo.

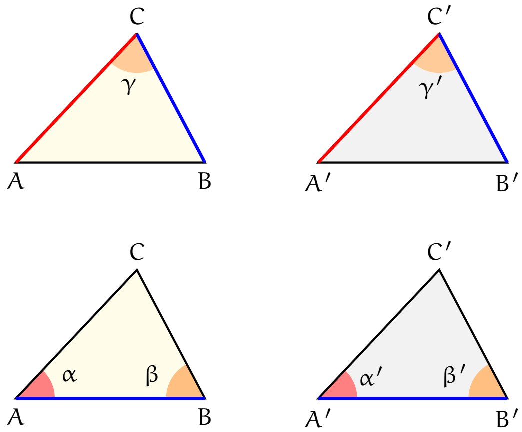
Di seguito presenteremo solo gli enunciati dei tre criteri di congruenza.

Teorema 4.3 (1° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.*

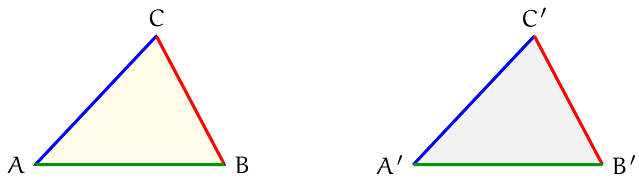
Ipotesi: $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $\gamma \cong \gamma'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

Teorema 4.4 (2° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato tra essi compreso.*

Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.



Teorema 4.5 (3º criterio di congruenza dei triangoli). *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti le tre coppie di lati.*



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

Esempio 4.1. Si considerino due rette incidenti, r ed s, ed il loro punto in comune P. Sulle semirette opposte di origine P si prendano punti equidistanti da P, come in figura, in maniera tale che $AP \cong PB$, $CP \cong PD$. Dimostra che, unendo i quattro punti in modo da costruire un quadrilatero, i quattro triangoli che si vengono a formare sono a due a due congruenti: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Realizziamo il disegno (figura 4.4) ed esplicitiamo ipotesi e tesi.

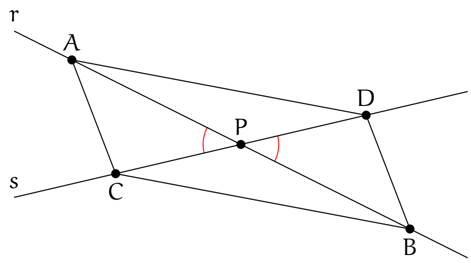


FIGURA 4.4: Esempio 4.1

Ipotesi: $r \cap s = P$, $AP \cong PB$, $CP \cong PD$.
Tesi: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Dimostrazione. I triangoli ACP e BPD hanno: AP $\cong$ PB per ipotesi, CP $\cong$ PD per ipotesi, $A\widehat{P}C \cong B\widehat{P}D$ perché opposti al vertice. Pertanto sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.

Analogamente, i triangoli ADP e BPC hanno: .... □

Esempio 4.2. Si considerino un segmento AB ed il suo punto medio M. Si tracci una generica retta r passante per M e distinta dalla retta per AB. Si traccino inoltre due semirette di origine rispettivamente A e B, situate nei due semipiani opposti rispetto alla retta per AB, che intersechino la retta r rispettivamente in C e in D e che formino con la retta per AB due angoli congruenti (vedi figura 4.5). Detti C e D i rispettivi punti di intersezione delle due semirette con la retta r, dimostra che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

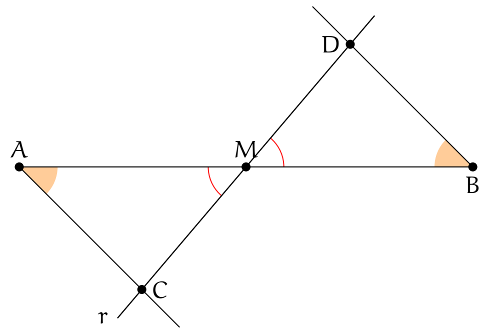


FIGURA 4.5: Esempio 4.2

Ipotesi: AM $\cong$ MB, $M\widehat{A}C \cong M\widehat{B}D$. Tesi: AMC $\cong$ BMD.

Dimostrazione. I segmenti AM e MB sono congruenti in quanto M è il punto medio di AB, gli angoli di vertice M sono congruenti perché opposti al vertice, gli angoli di vertici A e B sono congruenti per costruzione. Allora i triangoli AMC e BMD sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli. □

4.3 Teoremi del triangolo isoscele

Il *triangolo isoscele* ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama *base*, i due lati congruenti si dicono *lati obliqui*.

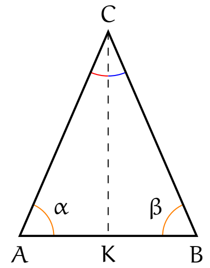
Il *triangolo equilatero* è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che *il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base*.

Teorema 4.6 (del triangolo isoscele [teorema diretto]). *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.*

Ipotesi: AC $\cong$ BC. Tesi: $\alpha \cong \beta$.

Dimostrazione. Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C. I triangoli ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

- AC $\cong$ CB per ipotesi;

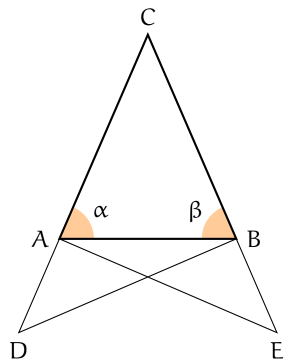


- CK lato in comune;
- $A\widehat{C}K \cong B\widehat{C}K$ perché CK è la bisettrice dell'angolo in C.

Pertanto, essendo congruenti, i due triangoli hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo α (in A) è congruente all'angolo β (in B). □

Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando tra loro ipotesi e tesi.

Teorema 4.7 (del triangolo isoscele [teorema inverso]). *Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (rispetto al lato compreso tra gli angoli congruenti preso come base).*



Ipotesi: $\alpha \cong \beta$. Tesi: $AC \cong BC$.

Dimostrazione. Procediamo per passi, realizzando una costruzione che ci permetta di confrontare coppie di triangoli congruenti. Prolunghiamo i lati AC e BC dalla parte di A e di B rispettivamente, e sui prolungamenti prendiamo due punti D ed E in maniera tale che risulti $AD \cong BE$.

Osserviamo che i triangoli ADB e BAE risultano congruenti per il 1° criterio, avendo in comune il lato AB ed essendo $AD \cong BE$ per costruzione e $D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}E$ perché adiacenti agli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$ congruenti per ipotesi. Pertanto, tutti gli elementi dei due triangoli ADB e AEB sono ordinatamente congruenti, in particolare $DB \cong AE$, $A\widehat{D}B \cong B\widehat{E}A$ e $A\widehat{B}D \cong B\widehat{A}E$.

I triangoli CDB e CAE risultano dunque congruenti per il 2° criterio poiché hanno $DB \cong AE$, $C\widehat{D}B \cong C\widehat{E}A$ per quanto appena dimostrato e $C\widehat{B}D \cong C\widehat{A}E$ perché somma di angoli rispettivamente congruenti: $C\widehat{B}D \cong C\widehat{B}A + A\widehat{B}D$ e $C\widehat{A}E \cong C\widehat{A}B + B\widehat{A}E$.

Pertanto, i restanti elementi dei due triangoli risultano ordinatamente congruenti, in particolare $CB \cong CA$, che è la tesi che volevamo dimostrare. □

Dai due teoremi precedenti seguono importanti proprietà, che qui riportiamo come corollari.

Corollario 4.8. *Un triangolo equilatero è anche equiangolo.*

Dimostrazione. Poiché un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base, la tesi segue dal teorema diretto del triangolo isoscele. □

Corollario 4.9. *Se un triangolo è equiangolo allora è equilatero.*

Dimostrazione. Possiamo confrontare gli angoli a due a due; risulteranno i lati congruenti a due a due in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 4.10. *Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.*

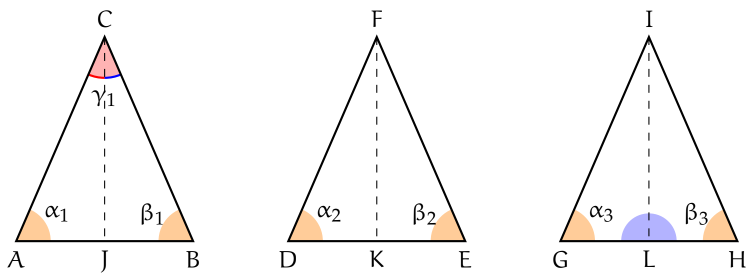
Dimostrazione. Se per assurdo un triangolo scaleno avesse due angoli congruenti, allora risulterebbe isoscele, in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 4.11. *Se un triangolo non ha angoli congruenti allora è scaleno.*

Dimostrazione. Se un triangolo non ha angoli tra loro congruenti non può essere isoscele. □

Proposzione 4.12 (Proprietà del triangolo isoscele)**.** *In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.*

Nella figura, CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice γ_1 del triangolo ABC, FK è la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF, IL è l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI.



Dividiamo l'enunciato in tre parti:

a) In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana relativa alla base.
b) In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza relativa alla base.

c) In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.

Per ciascuna di esse scriviamo ipotesi e tesi.

a) In ABC: Ipotesi: $AC \cong CB$, $\alpha_1 \cong \beta_1$, $A\widehat{C}J \cong B\widehat{C}J$. Tesi: $CJ \perp AB$, $AJ \cong JB$.
b) In DEF: Ipotesi: $DF \cong FE$, $\alpha_2 \cong \beta_2$, $DK \cong KE$.
Tesi: $FK \perp DE$, $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$.
c) In GHI: Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha_3 \cong \beta_3$, $IL \perp GH$.
Tesi: $GL \cong LH$, $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$.

Dimostrazione. Avviamo la dimostrazione delle prime due parti, che lasciamo completare al lettore e rimandiamo al prossimo capitolo la dimostrazione della terza.

a) I triangoli AJC e CJB sono congruenti per il 2° criterio. Infatti hanno . . . .
Dunque $AJ \cong JB$ e $A\widehat{J}C \cong C\widehat{J}B$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.
b) I triangoli DKF e FKE sono congruenti per il 1° criterio. Infatti hanno . . . .
Dunque $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$ e $F\widehat{K}D \cong F\widehat{K}E$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

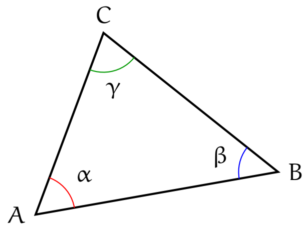
□

4.4 Esercizi

4.4.1 Esercizi riepilogativi

4.1. In base alla figura a lato rispondi alle seguenti domande

a) Il lato AB si oppone all'angolo ....
b) L'angolo α si oppone al lato ....
c) L'angolo di vertice C si chiama ....
d) L'angolo γ è adiacente ai lati ...... e ......
e) I lati AB e BC sono adiacenti all'angolo ......
f) I lati AC e AB formano l'angolo ......
g) Traccia l'angolo esterno al triangolo nel vertice A
h) Traccia la bisettrice dell'angolo β
i) Traccia l'altezza relativa alla base AB
j) Traccia la mediana relativa al lato BC



4.2. Disegna un segmento AB, quindi disegna i triangoli ABC e ABD che hanno la base AB in comune.

4.3. Disegna le tre altezze di ciascuno dei triangoli nella figura 4.6.

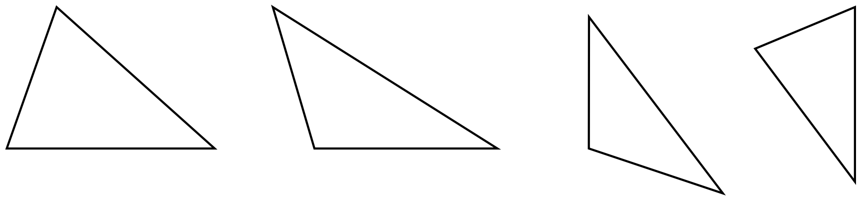
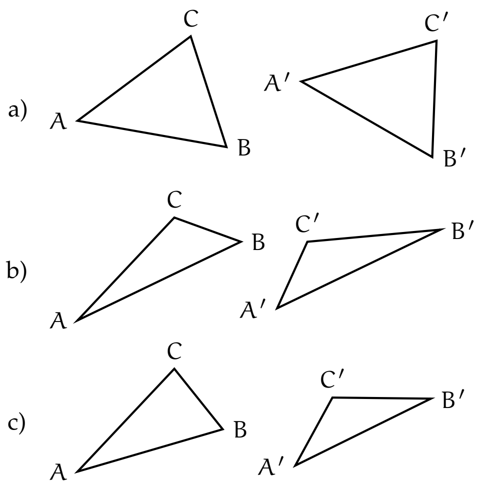


FIGURA 4.6: Esercizio 4.3

4.4. Per ciascuna delle coppie di triangoli a lato indica se sono congruenti ed eventualmente per quale criterio.

a) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e AC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con l'angolo $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....
b) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e gli angoli $\widehat{A}$ con $\widehat{B'}$ e $\widehat{B}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....
c) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e BC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....



Dimostra le seguenti affermazioni, utilizzando il 1° e il 2° criterio di congruenza dei triangoli.

4.5. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente a MA. Dimostra che il triangolo AMC è congruente al triangolo BMD e che il triangolo ABM è congruente al triangolo CMD.

4.6. Due triangoli ABC e DEF hanno il lati AB e DE congruenti, hanno inoltre gli angoli esterni ai vertici A e B rispettivamente congruenti agli angoli esterni ai vertici D ed E. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

4.7. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.

4.8. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto adiacente ad esso.

4.9. Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, prolunga la bisettrice AD di un segmento DE. Dimostra che AE è bisettrice dell'angolo $B\widehat{E}C$.

4.10. Siano ABC e DEF due triangoli congruenti. Sui lati congruenti AB e DE prendi il punto G su AB e H su DE, in modo che $AG \cong DH$. Dimostra che anche GC è congruente ad HF.

4.11. Sui prolungamenti oltre A del lato AC, oltre B del lato AB e oltre C del lato BC di un triangolo equilatero ABC si considerino i segmenti congruenti AA', BB', CC'. Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è ancora equilatero.

4.12. Dato l'angolo convesso $b\widehat{A}c$ si considerino su b i due punti B e B' e su c i punti C e C', tali che AB e AB' siano rispettivamente congruenti con AC e AC'. Dimostrare che BB' e BC' sono rispettivamente congruenti con CC' e $B'C$.

4.13. Dato un segmento AB, condurre per il suo punto medio M una qualsiasi retta r e considerare su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due segmenti congruenti MC e MD. Dimostrare che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

4.14. Sui lati a e b di un angolo di vertice O prendi i punti A e B sulla semiretta a e i punti C e D sulla semiretta b, in modo che $OA \cong OC$ e $AB \cong CD$. Sia E il punto di intersezione di AD con BC. Dimostra che sono congruenti i triangoli ABE e CDE.

4.15. Sia C un punto della bisettrice dell'angolo convesso $a\widehat{O}b$, A un punto sul lato a e B un punto sul lato b, tali che $OA \cong OB$. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

Dimostra le seguenti affermazioni sui triangoli isosceli.

4.16. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.

4.17. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti.

4.18. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'angolo al vertice e uno dei lati obliqui.

4.19. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.

4.20. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e la bisettrice dell'angolo al vertice.

4.21. Sia P il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostra che anche APB è isoscele.

4.22. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, indica con M il punto medio di AC, con N il punto medio di CB e con H il punto medio di AB. Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

a) AMH e HNB
b) MNH e MNC
c) AMH e MCN

4.23. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga la base AB, dalla parte di A di un segmento AD e dalla parte di B di un segmento BE congruente ad AD. Dimostra che anche il triangolo DEC è isoscele.

4.24. Due triangoli isosceli ABC e ABD hanno in comune la base AB, i vertici C e D sono situati da parti opposte rispetto alla base AB. Dimostra che la retta per CD è bisettrice dell'angolo in C.

4.25. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto D e su CB un punto E in modo che $CD \cong CE$. Dimostra che il triangolo DME, dove M è il punto medio della base AB, è isoscele.

4.26. Due triangoli isoscele hanno in comune la base, dimostra che la retta che unisce i vertici dei due triangoli divide la base a metà.

4.27. Si prolunghino i lati AC e CB del triangolo isoscele ABC rispettivamente di due segmenti CP e CQ tra loro congruenti. Dimostrare che $A\widehat{Q}B \cong A\widehat{P}Q$ e che $A\widehat{B}P \cong Q\widehat{A}B$.

Esercizi sui criteri di congruenza dei triangoli e sui triangoli isosceli.

4.28. Due triangoli sono congruenti se hanno

a) tre lati congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) tre angoli congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) due lati e l'angolo compreso congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) due angoli e il lato in comune congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) un lato e l'angolo opposto congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[a) V, b) F, c) V, d) V, e) F]

4.29. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la mediana relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

4.30. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la bisettrice relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

4.31. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A prendi un punto D sul lato AB e un punto E sul lato AC, in modo che $BD \cong EC$, unisci C con D e B con E. Sia $F = BE \cap DC$. Dimostra che i triangoli BFA e CFA sono congruenti.

4.32. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$, prolunga la base BC di un segmento BG, dalla parte di B, e di un segmento CF dalla parte di C, in modo che $BG \cong CF$. Dimostra che sono congruenti i triangoli ADG e AEF.

4.33. In un triangolo scaleno ABC sia $AC > BC$. Prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento CD congruente ad AC e prolunga AC, dalla parte di C, di un segmento CE congruente a BC. Detto H il punto di intersezione della retta per AB con la retta per DE, dimostra che $AH \cong DH$.

4.34. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$. Unisci D con C e prolunga il segmento DC, dalla parte di C di un segmento CF. Unisci E con B e prolunga il segmento EB dalla parte di B di un segmento $BG \cong CF$. Dimostra che i triangoli AGD e AFE sono congruenti.

4.35. Dato il triangolo convesso non piatto $a\widehat{O}b$ si prenda un punto A sul lato Oa e un punto B sul lato Ob, in modo che $OA \cong OB$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di OB, congiungi A con N e B con M, indica con P in punto di intersezione. Dimostra che sono congruenti i triangoli OBC e OAD e i triangoli AOP e OPB.

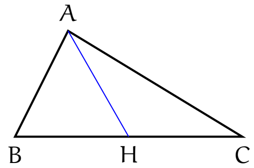
4.36. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC di base AB e sia $AP \cong PB$. Si dimostri che CP appartiene alla bisettrice dell'angolo in C.

4.37. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC, di base AB. Dimostra che se $P\widehat{A}C \cong P\widehat{C}B$ allora P si trova sulla bisettrice dell'angolo in A.

4.38. Sulla bisettrice c di un angolo $a\widehat{O}b$ prendi un punto P e traccia da esso le perpendicolari ai lati a e b dell'angolo che incontrano rispettivamente in A e in B i suddetti lati. Dimostra che $OA \cong OB$.

4.39 (Prove invalsi 2006). Osserva la figura a lato. Se $AB \not\cong AC$ e $BH \cong HC$, che cosa rappresenta il segmento AH nel triangolo ABC?

a) Un'altezza.
b) Una mediana.
c) Una bisettrice.
d) Un asse.



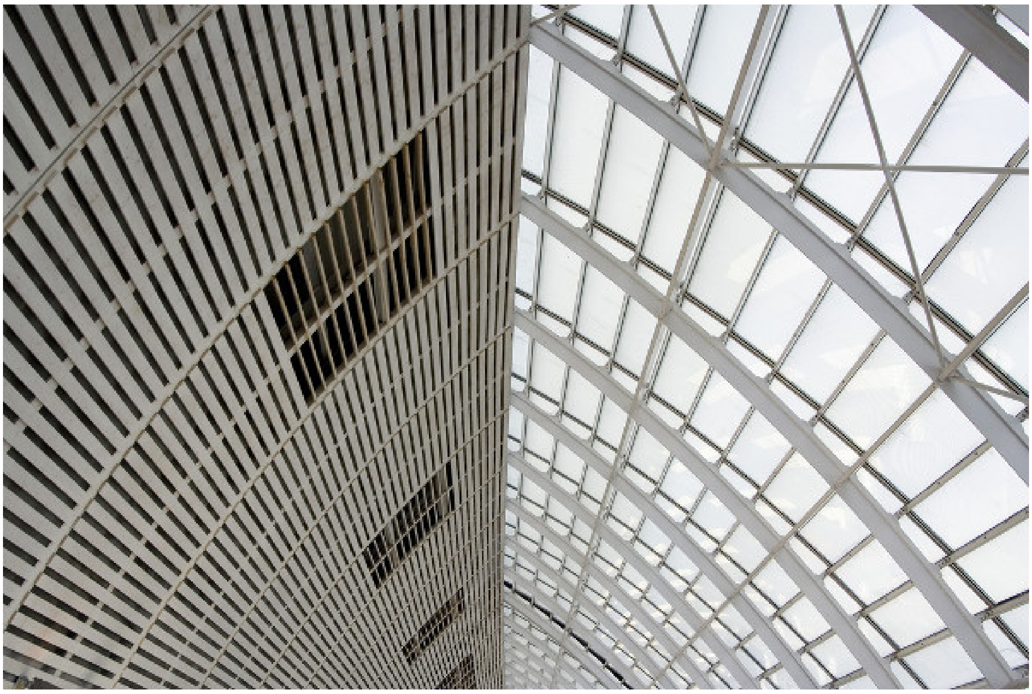
[b]

4.40 (Prove invalsi 2003). Da un triangolo equilatero MNO di lato 6 cm viene tagliato via un triangolo equilatero di vertice in O e lato 2 cm. Il perimetro del quadrilatero rimanente è ...

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm; e) 20 cm.

[c]

Elementi di informatica III



"WIcker Composition"
Foto di cobalt123
http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

5 Approfondimenti di Geometria interattiva

5.1 Altri strumenti della la geometria interattiva

Come fare le stesse cose in modo più semplice.

Nella prima parte della geometria interattiva abbiamo scritto alcuni programmi per realizzare degli oggetti semplici: triangoli equilateri, punti medi, bisettrici, rette parallele, rette perpendicolari, ... Alcuni di questi oggetti sono utili per costruire degli oggetti più complessi ad esempio per costruire un quadrato posso:

Procedura 5.1 (Quadrato)**.** *Dato il segmento AB costruire il quadrato che ha AB come lato.*

1. *Traccia i punti A e B e il segmento AB.*
2. *Traccia la circonferenza di centro A e passante per B.*
3. *Traccia la perpendicolare a AB passante per A.*
4. *Individua un punto D di intersezione della circonferenza e della perpendicolare.*
5. *Traccia la perpendicolare a AB passante per B.*
6. *Traccia la perpendicolare a AD passante per D.*
7. *Individua un punto C di intersezione della circonferenza e della perpendicolare.*
8. *Il poligono ABCD è il quadrato richiesto.*

Ora abbiamo imparato a tracciare la perpendicolare ad una retta passante per un punto: è un'operazione che richiede 4 o 5 operazioni semplici, ma nella procedura precedente dobbiamo eseguirla 3 volte. Un programma fatto così diventa lungo noioso e soggetto facilmente ad errori. Chi ha progettato la libreria pyig ha pensato di mettere a disposizione anche altre classi oltre a quelle già presentate. In articolare esiste la classe che permette di costruire una retta perpendicolare: pyig.Orthogonal(<line>, <point>, ...) Usando questo oggetto al posto della sequenza di operazioni vista in precedenza la costruzione del quadrato diventa:

```
"""
Dati: i punti A e B,
disegna il quadrato di lato AB.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: punti A e B
p_a = pyig.Point(-5, -4, width=6, name="A")
p_b = pyig.Point(-1, -5, width=6, name="B")
## Costruzione del quadrato di lato AB
r_ab = pyig.Line(p_a, p_b, width=1)         # retta AB
r_ad = pyig.Orthogonal(r_ab, p_a, width=1) # perpend. a AB pass. per A
```

```
c_ab = pyig.Circle(p_a, p_b, width=1)        # circ. centro A pass. per B
p_d = pyig.Intersection(c_ab, r_ad, -1, name="D") # intersezione D
r_bc = pyig.Orthogonal(r_ab, p_b, width=1) # perpend. a AB pass. per B
r_dc = pyig.Orthogonal(r_ad, p_d, width=1) # perpend. a AD pass. per D
p_c = pyig.Intersection(r_dc, r_bc, name="C") # intersezione C
pyig.Polygon((p_a, p_b, p_c, p_d), color="chocolate", intcolor="gold")
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Vediamo di seguito alcuni nuovi strumenti che la libreria ci fornisce come “primitivi” ma che noi abbiamo già o possiamo comunque costruire con “riga e compasso”.

5.1.1 Orthogonal

Scopo Crea la retta perpendicolare ad una retta data passante per un punto.

Sintassi Orthogonal(line, point, ...)

Esempio Disegna la perpendicolare ad una retta data passante per un punto.

```
# lettura delle librerie
import pyig
# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane('Orthogonal')
retta = pyig.Line(pyig.Point(-4, -1, width=5, name="A"),
                  pyig.Point(6, 2, width=5, name="B"),
                  width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = pyig.Point(-3, 5, width=5, name='P')
pyig.Orthogonal(retta, punto)
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Nota: in tutti gli esempi seguenti, per motivi di spazio, saranno omesse le seguenti righe, prima dell’esempio:

```
# lettura delle librerie
import pyig
# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane('Orthogonal')
```

e dopo l’esempio:

```
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Per eseguire l’esempio bisogna ricordarsi di aggiungerle.

5.1.2 Parallel

Scopo Crea la retta parallela ad una retta data passante per un punto.

Sintassi Parallel(line, point, ...)

Esempio Disegna la parallela ad una retta data passante per un punto.

```
retta = pyig.Line(pyig.Point(-4, -1, width=5),
                  pyig.Point(6, 2, width=5),
                  width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = pyig.Point(-3, 5, width=5, name='P')
pyig.Parallel(retta, punto)
```

5.1.3 MidPoints

Scopo Crea il punto medio tra due punti.

Sintassi MidPoints(point0, point1, ...)

Esempio Punto medio tra due punti.

```
# creo due punti
p_0 = pyig.Point(-2, -5)
p_1 = pyig.Point(4, 7)
# cambio i loro attributi
p_0.color = "#00a600"
p_0.width = 5
p_1.color = "#006a00"
p_1.width = 5
# creao il punto medio tra p0 e p1
m = pyig.MidPoints(p0, p1, name='M')
# cambio gli attributi di m
m.color = "#f0f000"
m.width = 10
```

5.1.4 MidPoint

Scopo Crea il punto medio di un segmento

Sintassi MidPoint(segment)

Esempio Punto medio di un segmento.

```
# creo un segmento
s = pyig.Segment(pyig.Point(-2, -1, color="#a60000", width=5),
                 pyig.Point(5, 7, color="#6a0000", width=5),
                 color="#a0a0a0")
# creo il suo punto medio
pyig.MidPoint(s, color="#6f6f00", width=10, name=\'M\')
```

5.1.5 Bisector

Scopo Retta bisettrice di un angolo.

Sintassi Bisector(angolo, ...)

Esempio Disegna l'incentro di un triangolo.

```
p_a = pyig.Point(-7, -3, color="#40c040", width=5, name="A")
p_b = pyig.Point(5, -5, color="#40c040", width=5, name="B")
p_c = pyig.Point(-3, 8, color="#40c040", width=5, name="C")
pyig.Polygon((p_a, p_b, p_c))       # Il triangolo
cba = pyig.Angle(p_c, p_b, p_a)  # Due angoli del triangolo
bac = pyig.Angle(p_b, p_a, p_c)
b1 = pyig.Bisector(cba, color="#a0c040") # Le bisettrici
b2 = pyig.Bisector(bac, color="#a0c040")
pyig.Intersection(b1, b2, color="#c040c0", width=5, name="Incentro")
```

5.1.6 PointOn

Scopo Punto disegnato su un oggetto in una posizione fissa.

Sintassi PointOn(obj, parameter)

Osservazioni L'oggetto deve essere una linea o una retta o una circonferenza, parameter è un numero che individua una precisa posizione sull'oggetto. Sia le rette sia le circonferenze hanno una loro metrica che è legata ai punti base dell'oggetto. Su una retta una semiretta o un segmento point0 corrisponde al parametro 0 mentre point1 corrisponde al parametro 1. Nelle circonferenze il punto di base della circonferenza stessa corrisponde al parametro 0 l'intera circonferenza vale 2. Il punto creato con PointOn non può essere trascinato con il mouse.

Esempio Disegna il simmetrico di un punto rispetto ad una retta.

```
asse = pyig.Line(pyig.Point(-4, -11, width=5),
                 pyig.Point(-2, 12, width=5),
                 width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = pyig.Point(-7, 3, width=5, name='P')
perpendicolare = pyig.Orthogonal(asse, punto, width=1)
pyig.PointOn(perpendicolare, -1, width=5, color="DebianRed", name="P'")
```

5.1.7 ConstrainedPoint

Scopo Punto legato ad un oggetto.

Sintassi ConstrainedPoint(obj, parameter)

Osservazioni Per quanto riguarda parameter, valgono le osservazioni fatte per PoinOn. Questo punto però può essere trascinato con il mouse pur restando sempre sull'oggetto. Dato che può essere trascinato con il mouse ha un colore di default diverso da quello degli altri oggetti.

Esempio Circonferenza e proiezioni sugli assi.

```
circ = pyig.Circle(pyig.Point(0, 0, visible=False),
                   pyig.Point(10, 0, visible=False), color="gray10")
cursor = pyig.ConstrainedPoint(circ, .25, name='cursor', width=5)
```

```
pyig.Point(cursor.xcoord(), 0, width=5, color='dark turquoise')
pyig.Point(0, cursor.ycoord(), width=5, color='pink')
```

5.1.8 parameter

Scopo I punti legati agli oggetti hanno un metodo che permette di ottenere il parametro relativo alla loro posizione.

Sintassi <constrained point>.parameter()

Osservazioni In PointOn il parametro è fissato nel momento della costruzione dell'oggetto e non è modificabile. In ConstrainedPoint il parametro può essere variato trascinando il punto con il mouse.

Esempio Scrivi i dati relativi a un punto collegato a un oggetto.

```
c0 = pyig.Circle(pyig.Point(-6, 6, width=6), pyig.Point(-1, 5, width=6))
c1 = pyig.Circle(pyig.Point(6, 6, width=6), pyig.Point(1, 5, width=6))
a = pyig.PointOn(c0, 0.5, width=6, name='A')
b = pyig.ConstrainedPoint(c1, 0.5, width=6, name='B')
pyig.VarText(-5, -1, 'ascissa di A: {0}', a.xcoord())
pyig.VarText(-5, -2, 'ordinata di A: {0}', a.ycoord())
pyig.VarText(-5, -3, 'posizione di A: {0}', a.coords())
pyig.VarText(-5, -4, 'parametro di A: {0}', a.parameter())
pyig.VarText(5, -1, 'ascissa di B: {0}', b.xcoord())
pyig.VarText(5, -2, 'ordinata di B: {0}', b.ycoord())
pyig.VarText(5, -3, 'posizione di B: {0}', b.coords())
pyig.VarText(5, -4, 'parametro di B: {0}', b.parameter())
```

5.1.9 Text

Scopo Crea un testo posizionato in un punto del piano.

Sintassi Text(x, y, text, ...)

Esempio Scrive due frasi.

```
pyig.Text(-2, 2, "Prove di testo blue violet",
          color='blue violet', width=20)
pyig.Text(-2, -2, "Prove di testo pale green",
          color='pale green', width=20)
```

5.1.10 VarText

Scopo Crea un testo variabile. Il testo contiene dei "segnaposto" che verranno sostituiti con i valori prodotti dai dati presenti nel parametro variables.

Sintassi VarText(x, y, text, variables, ...)

Osservazioni

- text è la stringa che contiene la parte costante e i segnaposto.
- In genere i *segnaposto* saranno nella forma: "{0}" che indica a Python di convertire in stringa il risultato prodotto dal dato.
- variables è un dato o una tupla di dati. visualizzata.

Esempio Un testo che riporta la posizione dei un punto.

```
p0 = pyig.Point(7, 3, color='green', width=10, name='A')
pyig.VarText(-4, -3, "Posizione del punto A: ({0}; {1})",
             (p0.xcoord(), p0.ycoord()),
             color='green', width=10)
```

5.1.11 Calc

Scopo È un oggetto Dato che contiene il risultato di un calcolo.

Sintassi Calc(function, variables)

Osservazioni

- function è una funzione Python, al momento del calcolo, alla funzione vengono passati come argomenti il contenuto di variables.
- variables è un oggetto Data o una *tupla* che contiene oggetti Data. Il risultato è memorizzato all'interno dell'oggetto Calc e può essere visualizzato con VarText o utilizzato per definire la posizione di un punto.

Esempio Calcola il quadrato di un lato e la somma dei quadrati degli altri due lati di un triangolo.

```
circ = pyig.Circle(pyig.Point(2, 4), pyig.Point(-3, 4), width=1)
ip.defwidth = 5
p_a = pyig.PointOn(circ, 0, name="A")
p_b = pyig.PointOn(circ, 1, name="B")
p_c = pyig.Point(-1, 8, name="C")
ab = pyig.Segment(p_a, p_b, color="#40c040")
bc = pyig.Segment(p_b, p_c, color="#c04040")
ca = pyig.Segment(p_c, p_a, color="#c04040")
q1 = pyig.Calc(lambda a: a*a, ab.length())
q2 = pyig.Calc(lambda a, b: a*a+b*b, (bc.length(), ca.length()))
pyig.VarText(-5, -5, "ab^2 = {0}", q1, color="#40c040")
pyig.VarText(-5, -6, "bc^2 + ca^2 = {0}", q2, color="#c04040")
```

La Libreria pyig mette a disposizione molte altre classi e altri metodi con cui si possono creare vari oggetti utili nelle costruzioni geometriche.

Per avere informazioni sugli oggetti messi a disposizione dalla libreria possiamo dare i seguenti comandi:

```
>>> import pyig
>>> help(pyig)
```

Allargando il numero di strumenti che sappiamo usare possiamo risolvere problemi più complessi.

5.1.12 Riassumendo

- Per affrontare problemi più complessi con la geometria interattiva è utile conoscere anche altri strumenti messi a disposizione dalla libreria pyig.
  - Orthogonal(linea, punto, ...) per tracciare rette perpendicolari.
  - Parallel (linea , punto, ...) per tracciare rette parallele.
  - MidPoints(punto, punto, ...) per tracciare il punto medio tra due punti.
  - MidPoint(segmento, ...) per tracciare il punto medio di un segmento.
  - Bisector(angolo, ...) per tracciare la bisettrice di un angolo.
  - PointOn(linea, parametro, ...) per tracciare un punto in una posizione fissata di una linea.
  - ContrainedPoint(linea, parametro, ...) per tracciare un punto vincolato ad una linea.
  - <punto_vincolato>.parameter() per ottenere il parametro di un punto vincolato ad una linea.
  - Text(x, y, testo) per scrivere un testo in una posizione del piano.
  - VarText(x, y, testo , variabili) per scrivere un testo con delle parti variabili in una posizione del piano.
  - Calc(funzione, variabili) per eseguire dei calcoli.
- Per avere informazioni su tutti gli strumenti messi a disposizione della libreria si può consultare il manale distribuito assieme alla libreria stessa nella cartella docs o visualizzare l'help in una finestra della shell con le due istruzioni:

```
>>> import pyig
>>> help(pyig)
```

5.2 Insegnare a pyig

Come insegnare nuove costruzioni a pyig.

5.2.1 Funzioni

Partiamo da un problema:

problema

Costruire tre triangoli equilateri sui lati di un triangolo.

Sappiamo già costruire triangoli, sappiamo costruire triangoli equilateri, quindi la soluzione è abbastanza semplice.

Con riga e compasso.

Procedura 5.2 (Triangolo con triangoli equilateri)**.** *Costruire tre triangoli equilateri sui lati di un triangolo:*

1. *Traccia i punti A, B, C.*
2. *Traccia il triangolo ABC.*
3. *Traccia il triangolo equilatero di lato AB.*
4. *Traccia il triangolo equilatero di lato BC.*
5. *Traccia il triangolo equilatero di lato CA.*

Il problema è che per tracciare i vari triangoli equilateri devo ripetere una sequenza di istruzioni (sempre le stesse) per tre volte. In questo caso posso armarmi di pazienza e utilizzando il "copia-incolla" me la posso cavare abbastanza presto. Ma se dovessi ripetere la stessa costruzione decine o centinaia di volte? I computer sono fatti apposta per ripetere istruzioni banali e gli informatici hanno inventato metodi proprio per evitare di doverlo fare loro.

Dobbiamo generalizzare la soluzione del sottoproblema di disegnare un triangolo equilatero partendo da un suo lato. Per farlo dobbiamo:

- trovare un nome per questa funzione, in questo caso, dato che il risultato è un triangolo equilatero la chiameremo: `triequi`;
- individuare i dati da cui parte la costruzione, in questo caso sono due punti estremi del primo lato che potremmo chiamare: `p_0` e `p_1`.
- decidere quale deve essere il risultato, in questo caso un poligono.

Di seguito riporto un programma che risolve il problema seguito dal suo commento.

copiare

```
# 25/08/2016 -- Triangolo di triangoli -- Daniele Zambelli
"""
Disegnare un triangolo con un triangolo equilatero
costruito esternamente ad ogni lato
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# funzioni
def triequi(p_0, p_1, **kargs):
    """Funzione che crea e restituisce un triangolo equilatero."""
    c_01 = pyig.Circle(p_0, p_1, visible=False)
    c_10 = pyig.Circle(p_1, p_0, visible=False)
    p_2 = pyig.Intersection(c_01, c_10, -1)
    return pyig.Polygon((p_0, p_1, p_2), **kargs)

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
p_a = pyig.Point(-3, 2, width=6)
p_b = pyig.Point(-2, -5, width=6)
p_c = pyig.Point(7, -1, width=6)
triequi(p_a, p_b, width=4, color="DebianRed", intcolor="gold")
triequi(p_b, p_c, width=4, color="DebianRed", intcolor="gold")
```

```
24 triequi(p_c, p_a, width=4, color="DebianRed", intcolor="gold")
25 ## attivazione della finestra grafica
26 ip.mainloop()
```

capire

linea 1 L'intestazione del programma che contiene le solite tre informazioni.

linee 2-5 Descrizione del problema risolto da questo programma.

linea 7 Lettura della libreria.

linee 9-15 Definizione delle funzioni utilizzate dal programma principale.

linea 10 Prima riga della definizione di una funzione. È formata da queste parti:

- la parola riservata "**def**";
- il nome della funzione in questo caso: "triequi";
- una sequenza di parametri:
  - p_0 conterrà il primo estremo del lato,
  - p_1 conterrà il secondo estremo del lato,
  - **kargs conterrà tutti gli altri argomenti passati alla funzione.
- il carattere duepunti: ":".

linea 11 La docstring, un testo che descrive cosa fa la funzione.

linea 12-14 Vengono create le solite due circonferenze e la loro intersezione.

linea 15 Viene creato il poligono che ha per vertici i due punti dati e l'intersezione e questo poligono viene dato come risultato della funzione.

linea 18-26 Programma principale.

linea 18 Creazione del piano interattivo.

linea 19-21 Creazione dei tre vertici del triangolo.

linea 22-24 Creazione dei tre triangoli equilateri.

linea 26 Attivazione della finestra grafica.

osservazioni

- La definizione di una funzione è composta da un'intestazione seguita da un blocco di istruzioni. Il *blocco*di istruzioni è indicato dall'*indentazione* cioè dal rientro: tutte le istruzioni *indentate* fanno parte del blocco.
- Quando la funzione triequi viene chiamata le vengono passati due argomenti che verranno messi nei due parametri p_0 e p_1 più eventuali altri argomenti che vengono riuniti tutti dentro il contenitore kargs.
- La funzione triequi utilizza i due parametri p_0 e p_1 mentre non si interessa di cosa sia contenuto in kargs e passa il contenuto direttamente alla funzione che crea il poligono.
- Il risparmio di codice che si ottiene scrivendo una funzione, nel nostro caso, è abbastanza ridotto, ma se dovessi creare centinaia di triangoli equilateri, la differenza sarebbe sensibile. Non solo, ma da un punto di vista informatico, avere del codice duplicato

non è una buona idea. Supponiamo di aver trovato un errore nella procedura che costruisce il triangolo, o di voler modificarla, se ho scritto una funzione so esattamente dove modificare e i cambiamenti valgono per tutto il programma, se ho ripetuto il codice in diversi punti del programma devo trovarli tutti e eseguire in ognuno gli stessi cambiamenti altrimenti il programma diventa incoerente.

modificare

1. Modifica la funzione `triequi` in modo che vengano visualizzati, con spessore 1 gli elementi di costruzione.
2. Modifica il programma in modo che la finestra grafica abbia un titolo e che non visualizzi gli assi e la griglia.
3. Fa in maniera che sia colorato anche l'interno del triangolo di partenza.
4. Cambia lo spessore e il colore dei punti base e dei triangoli equilateri.

5.2.2 Riassumendo

- Quando un problema diventa complesso è buona norma suddividerlo in parti. Una funzione è un pezzo di programma che risolve una parte di problema.
- La sintassi per la definizione di una funzione è:

```
def <nome_funzione>(<parametri>):
    <istruzioni>
```

- Una funzione può dare come risultato un oggetto se c'è l'istruzione:

```
    return <oggetto>
```

- Un programma Python generalmente è composto da queste sezioni:

```
# Intestazioni
# Lettura delle librerie
# Definizione delle funzioni
# Programma principale
```

5.3 Iterazione

Come sfruttare qualche "trucco" di Python.

Osservando il programma precedente possiamo vedere che ci sono alcune righe praticamente uguali e questo non va bene. Python mette a disposizione un'istruzione che permette di *iterare*, cioè di ripetere, delle istruzioni per tutti gli elementi di una sequenza. Vediamo come è possibile eliminare le operazioni ripetute nel nostro programma.

copiare

Riporto solo il programma principale, il resto rimane invariato.

```
# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
p_a = pyig.Point(-3, 2, width=6)
```

```
20 p_b = pyig.Point(-2, -5, width=6)
21 p_c = pyig.Point(7, -1, width=6)
22 for p_0, p_1 in ((p_a, p_b), (p_b, p_c), (p_c, p_a)):
23     triequi(p_0, p_1, width=4, color="DebianRed", intcolor="gold")
24 ## attivazione della finestra grafica
25 ip.mainloop()
```

capire

linee -21 Fin qui il programma è invariato

linea 22 È l'intestazione di un ciclo. Le due variabili p_0 e p_1 assumono i valori delle coppie contenute nella sequenza delimitata dalla parentesi tonda. Quindi nella prima iterazione
p_0 sarà uguale a p_a e p_1 sarà uguale a p_b,
nella seconda iterazione
p_0 sarà uguale a p_b e p_1 sarà uguale a p_c,
nella terza
p_0 sarà uguale a p_c e p_1 sarà uguale a p_a.
Poi non ci sono più elementi nella sequenza e il ciclo termina.

linea 23 Per ogni interazione vengono eseguite tutte le istruzioni del blocco indentato che segue il comando **for**, in questo caso una sola che crea un triangolo equilatero. Ma quest'unica istruzione viene ripetuta tre volte.

osservazioni

➡ Tre righe di programma sono diventate due, ma ho tolto delle parti ripetitive e anche dovessi disegnare centinaia di triangoli equilateri lo potrei fare sempre con due righe di codice.

modificare

1. Cambia ora le caratteristiche dei triangoli, su quante linee di codce devi intervenire.
2. È possibile, con questo meccanismo, modificare anche le caratteristiche dei singoli triangoli equilateri. L'intestazione del ciclo potrebbe essere:

```
for p_0, p_1, intcol in ((p_a, p_b, "orchid1"), (p_b, p_c, "orchid2"),
                         (p_c, p_a, "orchid3")):
...
```

   In quale variabile va a finire il nome del colore? Come dovrà cambiare l'istruzione che si trova nel corpo del ciclo?
3. In questo caso la lunghezza del programma non è diminuita, ma abbiamo operato un altro miglioramento importante, abbiamo separato i dati dall'algoritmo. Nell'intestazione c'è una sequenza che contiene i dati, il blocco di istruzioni della sequenza è un algoritmo che lavora su dei dati ricevuti dall'eterno.
4. Modifica il programma in modo che i tre triangoli abbiano diversi anche i colori del bordo.

È possibile sintetizzare anche le tre righe 19-21 in un ciclo, ma qui dobbiamo usare un metodo un po' più complesso, infatti, non basta creare i tre punti, dobbiamo anche mantenere un riferimento a ciascuno di loro per poterli utilizzare in seguito.

copiare

Anche qui riporto solo il programma principale.

```
17 # programma principale
18 ip = pyig.InteractivePlane()
19 vertici = ((-3, 2), (-2, -5), (7, -1))
20 p_a, p_b, p_c = (pyig.Point(x, y, width=6) for x, y in vertici)
21 for p_0, p_1 in ((p_a, p_b), (p_b, p_c), (p_c, p_a)):
22     triequi(p_0, p_1, width=4, color="DebianRed", intcolor="gold")
23 ## attivazione della finestra grafica
24 ip.mainloop()
```

capire

linea 19 All'identificatore vertici viene associata una sequenza di coppie di numeri, le coordinate dei punti.

linea 22 Questa linea è complessa, analizziamo le sue parti:

p_a, p_b, p_c sono tre identificatori separati da una virgola a questi saranno associati i tre oggetti prodotti dalla parte di istruzione che si trova a destra dell'uguale.
(pyig.Point(x, y, width=6) for x, y in vertici) produce una sequenza di punti le cui coordinate x e y sono ricavate scorrendo la sequenza associata a vertici.

Questa linea realizza un ciclo **for**, ma raccoglie tutti i risultati in una sequenza.

osservazioni

- Anche in questo caso, nel nostro programma, abbiamo risparmiato una sola riga su tre, ma se vertici fosse una sequenza di 200 coppie di numeri, potremmo ottenere una sequenza di 200 punti con un'unica istruzione (non male).
- Se un programma richiede che siano costruiti diversi punti base da cui partire per il resto della costruzione, questo può essere un buon modo per crearli.

modificare

1. Cambia il colore dei punti base.
2. Cambia il programma in modo che i triangoli siano disegnati sui lati di un quadrilatero.
3. Cambia il programma in modo che i triangoli siano disegnati sui lati di un pentagono.

5.3.1 Poligoni regolari

Come combinare una caratteristica di pyig con una di Python.
Problema vogliamo disegnare un ettagono regolare.

copiare

```
1  # 26/08/2016 -- Ettagono regolare -- Daniele Zambelli
2  """
3  Disegnare un ettagono regolare.
4  """
5  # lettura delle librerie
6  import pyig
7  #costanti
8  NUMLATI = 7
9  # programma principale
10 ip = pyig.InteractivePlane()
11 centro = pyig.Point(-3, 2, width=6, name="C")
12 p_p = pyig.Point(5, 3, width=6, name="P")
13 c_cp = pyig.Circle(centro, p_p, width=1)
14 arco = 2./ NUMLATI
15 vertici = [pyig.PointOn(c_cp, arco*cont, color="red")
16                           for cont in range(NUMLATI)]
17 pyig.Polygon(vertici, intcolor="yellow")
18 ## attivazione della finestra grafica
19 ip.mainloop()
```

capire

linee 8 Meglio mettere il numero di lati desiderati in una variabile. In questo caso, dato che non viene cambiata durante tutto il programma, la considereremo una costante e per convenzione la scriviamo tutta in maiuscolo.

linee 12-13 Viene creata una circonferenza

linea 14 Ad ogni linea di pyig è associata una metrica. Per convenzione una circonferenza è lunga 2. In realtà sarebbe 2π, ma chi ha creato pyig ha pensato fosse più semplice usare la costante 2 come lunghezza della circonferenza. Dividendo la lunghezza della circonferenza per il numero di lati del poligono, trovo la lunghezza di ogni singolo arco.

linee 15-16 Queste due linee costruiscono una lista di punti posizionati sulla circonferenza. Analizziamola partendo dal fondo.

range(NUMLATI) restituisce la sequenza di numeri da zero a NUMLATI meno uno, nel nostro caso: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

for cont Esegue un ciclo in cui cont assume uno alla volta i valori da 0 a 6.

*pyig.PointOn(c_cp, arco*cont)* Crea i punti fissati nella posizione arco*cont sulla circonferenza c_cp.

vertici = Associa all'identificatore vertici la lista di punti appena creata.

linea 17 Costruisce il poligono.

osservazioni

- Quando è possibile conviene usare “costanti” al posto di numeri.
- La costruzione di liste (“listcomprehension”) è uno strumento di Python molto potente, anche se non di immediata comprensione.
- In pyig le circonferenze hanno sempre “lunghezza” 2 e le rette hanno una lunghezza infinita dove però il primo punto di costruzione ha coordinata 0 e il secondo coordinata 1.

modificare

1. Modifica colori e spessori degli elementi dell’ettagono.
2. Rendi invisibile la circonferenza di costruzione.
3. Disegna poligoni regolari con un diverso numero di lati.
4. Puoi disegnare un bilatero regolare? e un monolatero? e un zerolatero?

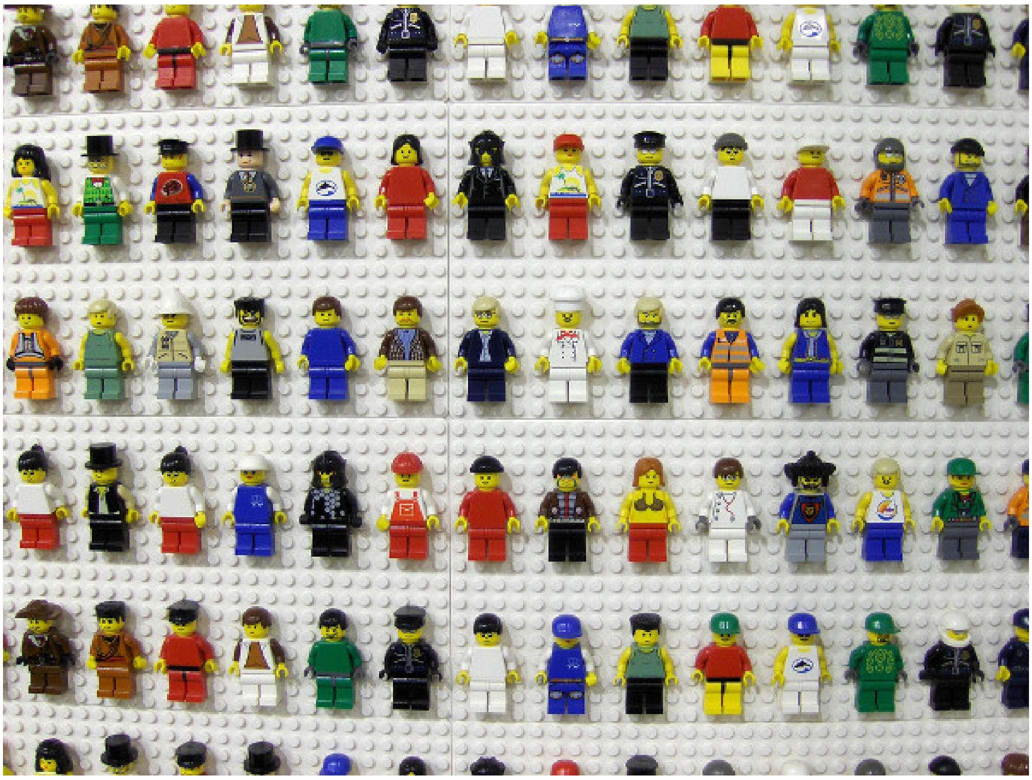
5.3.2 Riassumendo

- L’istruzione **range**(<num>) restituisce una sequenza di numeri che vanno da 0 a <num> − 1.
- Un ciclo **for** itera un’operazione per ogni elemento della sequenza a cui è applicato.
- È possibile costruire delle sequenze per mezzo della “listcomprehension”.

5.4 Altri problemi

1. Scrivi la funzione che disegni un parallelogramma dati tre vertici.
2. Scrivi la funzione che disegni un quadrato dati due vertici consecutivi.
3. Scrivi la funzione che disegni un quadrato dati due vertici opposti.
4. Scrivi la funzione che disegni un rettangolo dati una semiretta e due segmenti.
5. Scrivi la funzione che disegni un rombo dati una semiretta e due segmenti.
6. Scrivi la funzione che disegni un esagono dati due vertici consecutivi.
7. Scrivi un programma che disegni nel primo quadrante un pentagono, nel secondo un esagono, nel terzo un ettagono e nel quarto un ottagono tutti con lo stesso raggio.
8. Scrivi una funzione che, dati tre vertici, restituisca il baricentro del triangolo.
9. Scrivi una funzione che, dati tre vertici, restituisca il circocentro del triangolo.
10. Scrivi una funzione che, dati tre vertici, restituisca l’incentro del triangolo.
11. Scrivi una funzione che, dati tre vertici, restituisca l’ortocentro del triangolo.
12. Scrivi la funzione che, dati una circonferenza e un punto, disegni le tangenti alla circonferenza per il punto.
13. Scrivi la funzione che, dati un asse e un punto, restituisca il simmetrico del punto rispetto all’asse.
14. Scrivi la funzione che, dati un asse e un centro, restituisca il simmetrico del punto rispetto al centro.
15. Scrivi la funzione che, dati un punto e un vettore, e restituisca il traslato del punto.
16. Scrivi la funzione che, dati un punto, un centro e un angolo, e restituisca punto ruotato.
17. Scrivi la funzione che, dati un punto, un centro e un numero, e restituisca punto omotetico.
18. Scrivi un programma che illustri il teorema di Pitagora.
19. Scrivi la funzione che dati gli estremi di un segmento ne individui la sua sezione aurea.

Geometria IV



"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

Il piano cartesiano 6

6.1 Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

Nonostante queste intuizioni, per migliaia di anni la geometria e l'algebra sono state due discipline completamente separate nella matematica.

Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri. Il *piano cartesiano* è uno strumento che permette di trattare elementi geometrici con metodi algebrici ed elementi algebrici con metodi geometrici. Così, a volte, problemi algebrici difficili possono a trovare una soluzione geometrica semplice e viceversa. In matematica, ma anche nelle altre scienze, quando si riesce a trovare un collegamento tra due rami della disciplina che fino a quel momento erano rimasti separati, si fa un grande passo avanti.

La geometria analitica permette di descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra e viceversa.

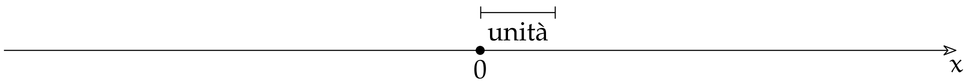
6.2 Asse cartesiano

Lo strumento che ci permette di fare tutto ciò è il *riferimento cartesiano*. L'idea di base è che su una retta ci sono infiniti punti e anche i numeri sono infiniti possiamo quindi far corrispondere ai punti della retta tutti gli elementi di un insieme numerico. Possiamo farlo a fantasia o seguendo un metodo che permette a tutti di disporre i numeri esattamente nello stesso modo.

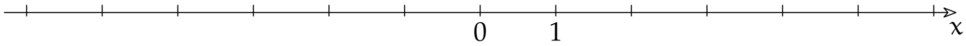
Per farlo in modo preciso abbiamo bisogno di aggiungere ad una retta alcuni elementi ottenendo così un asse cartesiano:

Definizione 6.1. Un *asse cartesiano* è una retta dotata di:

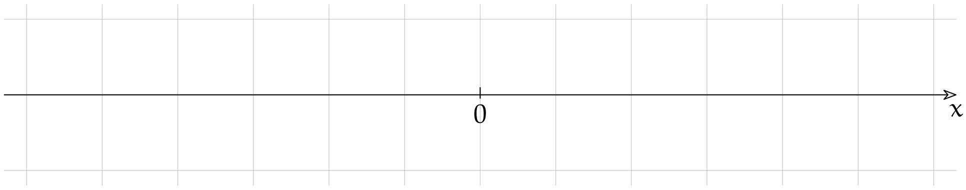
- *origine*, un punto della retta che rappresenta lo zero, a questo punto normalmente viene dato il nome "O";
- *verso*, una freccia che indica da quale parte i numeri aumentano;
- *unità di misura*, un segmento che indica la distanza tra un numero intero e il successivo.



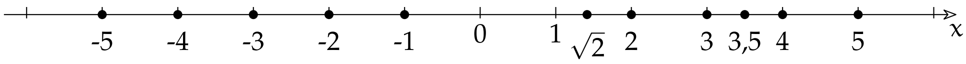
Normalmente, invece di indicare l'unità di misura al di fuori dell'asse indichiamo sull'asse i punti 0 e 1.



Quando lavoriamo su un foglio a quadretti, indichiamo esplicitamente l'unità solo se è diversa dal quadretto e evitiamo anche di tracciare tutti i trattini verticali.



In questo modo possiamo far corrispondere ad ogni numero un punto della retta e ad ogni punto della retta un numero *reale*. Il numero che corrisponde al punto si chiama *coordinata* del punto.



6.3 Piano cartesiano

Abbiamo visto qualche problema sull'asse cartesiano, ma in realtà un solo asse non è molto interessante. Se invece prendiamo due assi cartesiani non paralleli la situazione diventa più complessa, interessante e divertente.

Due assi non paralleli permettono di realizzare una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri: ad ogni punto corrisponde una ben precisa coppia di numeri e ad ogni coppia di numeri un ben preciso punto. La coppia ordinata di numeri prende il nome di *coordinate* del punto.

In entrambi questi riferimenti cartesiani al punto P corrisponde la coppia di numeri (2; 3). Pur essendo validi entrambi, per noi sarà molto più comodo usare il secondo riferimento cartesiano. Cioè un riferimento in cui gli assi:

- hanno l'origine in comune;
- sono perpendicolari;
- hanno la stessa unità di misura.

Un asse, di solito quello orizzontale, si chiama asse delle *ascisse* o asse x; l'altro asse di solito quello verticale, si chiama asse delle *ordinate* o asse y. La prima delle due coordinate si riferisce alla coordinata dell'asse x, la seconda alla coordinata dell'asse y: $(x;\ y)$.

Un riferimento di questo tipo si chiama: *Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico*, (*rcom*). E noi d'ora in poi, quando parleremo di piano cartesiano o di riferimento cartesiano, ci riferiremo sempre ad un *rcom*.

Riassumendo possiamo dare la seguente definizione:

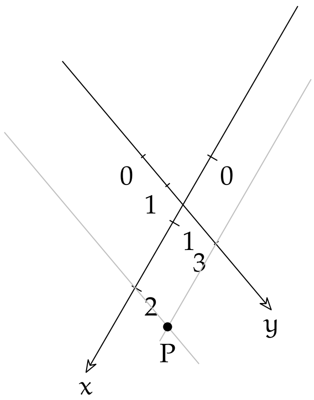


FIGURA 6.1: Riferimento cartesiano.

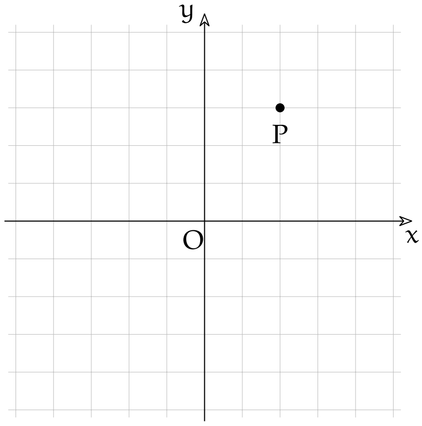


FIGURA 6.2: Rif. cart. ortogonale monometrico.

Definizione 6.2. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di assi cartesiani perpendicolari, con l'origine in comune e dotati di uguale unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura 6.3.

Tutti i punti che appartengono all'asse x hanno l'ordinata (la y) uguale a zero. Tutti i punti che appartengono all'asse y hanno l'ascissa (la x) uguale a zero. L'intersezione degli assi, l'origine, ha coordinate $(0; 0)$

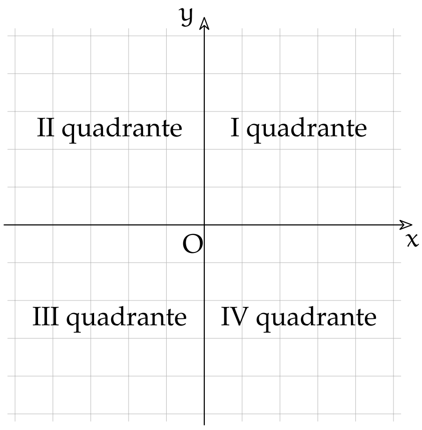


FIGURA 6.3: I quattro quadranti.

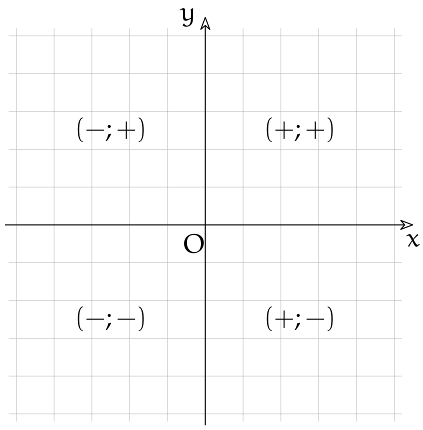


FIGURA 6.4: Collocazione delle coordinate positive e negative.

Per rappresentare un punto P date le sue coordinate $(x_P; y_P)$ si procede nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale x_P
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale y_P

- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

L'intersezione delle parallele tracciate, è il punto P che ha per coordinate la coppia ordinata $(x_P; y_P)$.

Il procedimento inverso permette di passare da un punto del piano alle sue coordinate,

---

Esempio 6.1. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2; 3)$, $(-1; 4)$, $(-3; -2)$, e $(4; -3)$.

Nella figura 6.5 sono riportati i punti: A che è l'immagine della coppia $(2;\ 3)$, B immagine della coppia $(-1;\ 4)$, C immagine della coppia $(3;\ -2)$ e D della coppia $(4;\ -3)$.

Esempio 6.2. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $R(0; 4)$, $S(0; -2)$, $H(-4; 0)$, $K(3; 0)$.

Osserviamo (figura 6.6) che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia $(0;\ 4)$ sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia $(0;\ -2)$ al punto S dello stesso asse. Analogamente le coppie $(-4;\ 0)$ e $(3;\ 0)$ sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

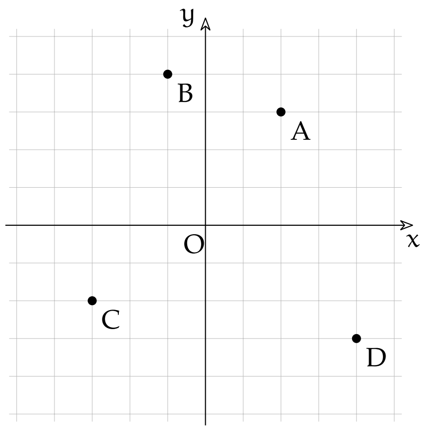


FIGURA 6.5: Punti interni ai quadranti.

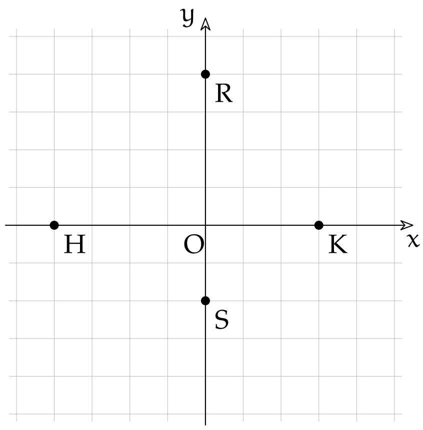


FIGURA 6.6: Punti sugli assi.

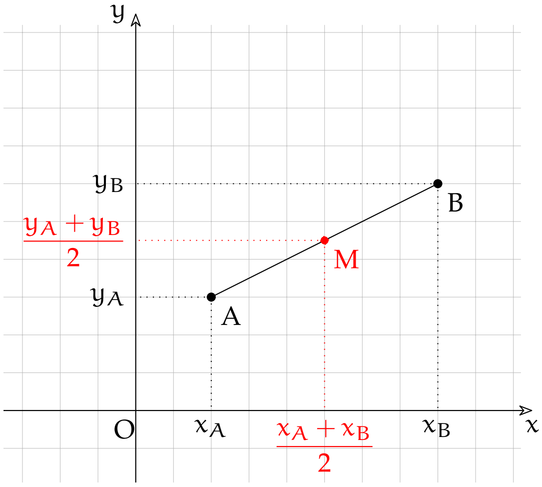
6.4 Problemi nel piano cartesiano

6.4.1 Punto medio di un segmento

Utilizzando i risultati ottenuti nel caso dei punti posti su un asse cartesiano possiamo osservare che anche per quanto riguarda un segmento posto nel piano le coordinate del punto medio sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.

Conoscendo le coordinate degli estremi $A(x_A; y_A$ e $B(x_B; y_B)$ le coordinate del suo punto medio sono (figura 6.7):

Esempio 6.3. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-3; -2)$ e $B(5; 7)$. Trova il punto medio usando il righello disegnalo e assegnagli l'etichetta "M". Poi calcola le coordinate del punto medio con la formula precedente e controlla che le coordinate ottenute siano proprio quelle del punto trovato precedentemente.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

o

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

FIGURA 6.7: Il punto medio.

Esempio 6.4. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-9;8)$ e $M(-6;7)$. Usando il righello trova il punto B in modo che M sia il punto medio del segmento AB. Applica la formula precedente per verificare la correttezza di quanto trovato.

6.4.2 Lunghezza di un segmento

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, date le coordinate degli estremi.

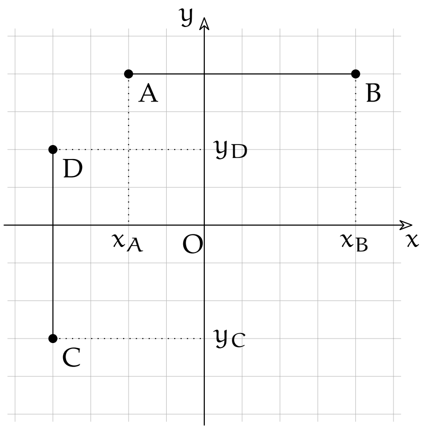


FIGURA 6.8: Lunghezza segmenti paralleli agli assi.

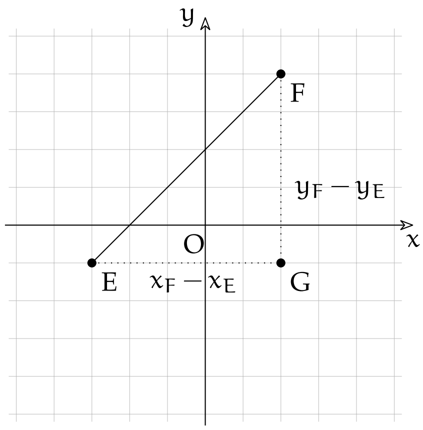


FIGURA 6.9: Lunghezza di un segmento.

Possiamo distinguere due casi:

Primo caso: segmenti paralleli agli assi

i due punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata (figura 6.8). È facile osservare in questo caso che il problema si riduce a quello analogo risolto per segmenti su un asse cartesiano. Se i due punti hanno la stessa ordinata, la stessa y:
$\overline{AB} = x_B - x_A$.
Se hanno la stessa ascissa, la stessa x:
$\overline{CD} = y_D - y_C$.

Secondo caso: segmento qualunque

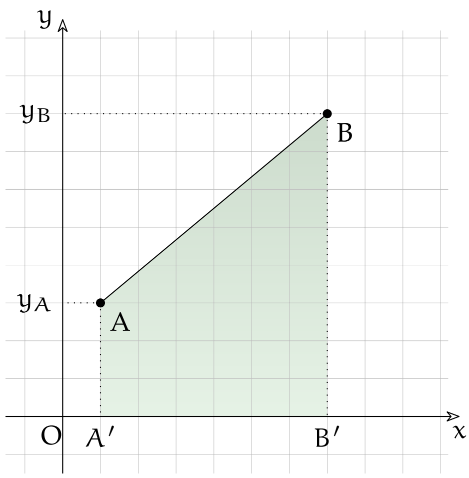
è questo il caso generale, il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 6.9).
Dati: $E(x_E; y_E)$, $F(x_F; y_F)$.
Obiettivo: $\overline{EF}$.
Procedura risolutiva: tracciando da E la parallela all'asse x e da F la parallela all'asse y si determina il vertice G del triangolo rettangolo EGF di cui EF è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{EF} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_G - y_F)^2}$.

Poiché $x_G = x_F$ e $y_G = y_E$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}$.
In conclusione, la *misura del segmento* AB, *note le coordinate* dei suoi estremi è:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}.$$

6.4.3 Area sottesa a un segmento

Dati gli estremi di un segmento trovare la superficie compresa tra il segmento e l'asse x. Partiamo da una situazione particolare: i punti A e B non appartengono all'asse x e il segmento AB non è parallelo all'asse x.



Che forma ha l'area sottesa a questo segmento? È un quadrilatero, ha solo due lati paralleli ha due angoli retti... questa è la descrizione di un trapezio! Forse non hai mai disegnato un trapezio messo in questo modo. Puoi verificare facilmente che è un trapezio, ti basta ruotare il quaderno do 90°. L'area del trapezio è uguale alla somma delle basi per l'altezza diviso due:

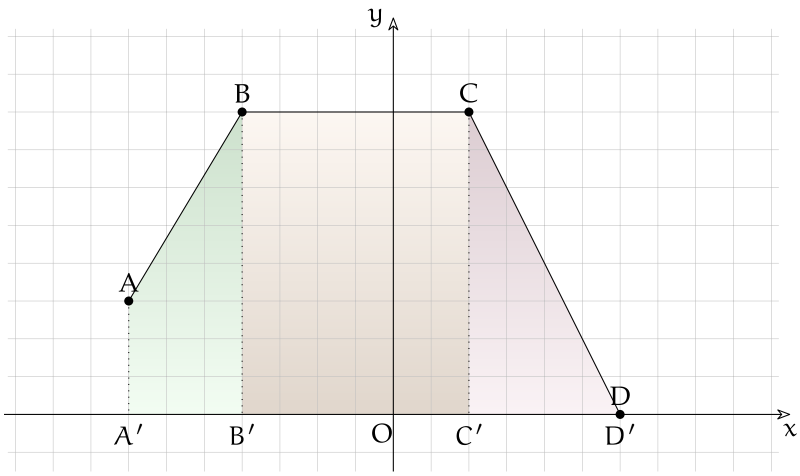
$$Area_{trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Ma quali sono le basi e quale è l'altezza? Nel trapezio le basi sono i due lati paralleli e l'altezza è la distanza tra i due lati paralleli. Uno dei lati paralleli è AA' cioè l'ordinata di A (la y_A) e l'altro è BB' cioè l'ordinata di B (la y_B). L'altezza del trapezio è la lunghezza del segmento $A'B'$ cioè $x_B - x_A$.

Mettendo assieme tutti gli ingredienti otteniamo che l'area sottesa al segmento AB è:

$$\mathcal{A}_{AB} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{2}$$

E se il segmento è messo in un altro modo? Anche limitandoci al primo quadrante possiamo osservare che ci sono svariati casi:



L'area sottesa al segmento AB è un trapezio rettangolo, l'area sottesa al segmento CD è un rettangolo, l'area sottesa al segmento EF è un triangolo rettangolo.

Nel paragrafo precedente abbiamo risolto il primo caso, quello del trapezio, dovremo ripetere tutti quei ragionamenti anche per gli altri due? No! I matematici, che sono un po strani, ritengono che:

- un triangolo rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con una base lunga zero;
- un rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con le basi uguali.

A questo punto non dobbiamo preoccuparci di casi diversi, la formula trovata per il trapezio rettangolo risolverà anche gli altri casi

---

Esempio 6.5. Dopo aver trovato le coordinate dei punti della figura precedente calcola le aree sottese ai tre segmenti sia usando le formule della geometria sia usando la formula dell'area sottesa e confronta i risultati.

Esempio 6.6. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(3; -2)$ e $B(8; -6)$. Calcola l'area sottesa a questo segmento sia usando la formula dell'area del trapezio sia usando la formula dell'area sottesa... Cosa puoi osservare?

Anche per le aree sottese abbiamo una situazione strana: in certi casi l'area di una figura risulta negativa. Questo fatto può essere irritante, ma in certi casi risulterà comodo.

Ci sono certi segmenti che formano con l'asse x una figura con una superficie diversa da zero ma che hanno area sottesa uguale a zero. Quando avviene questo?

6.4.4 Area di un triangolo

Date le coordinate dei vertici di un triangolo trova l'area della sua superficie.

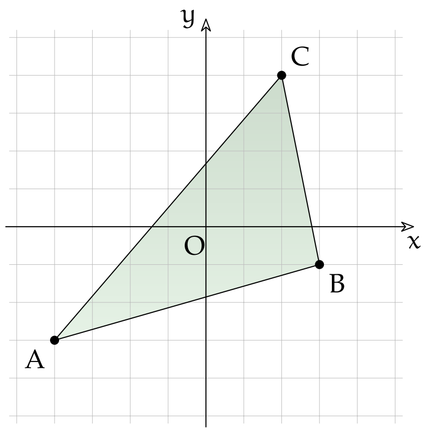


FIGURA 6.10: Area con la formula di Erone.

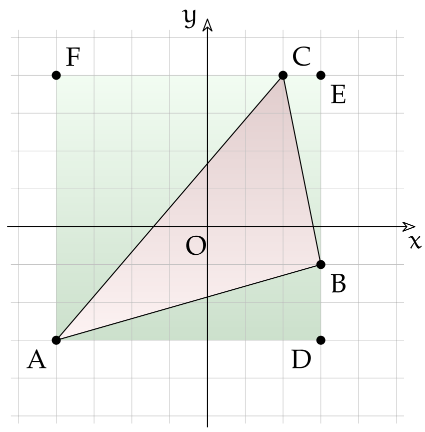


FIGURA 6.11: Area come differenza di superfici.

Formula di Erone

Se conosciamo le coordinate dei tre vertici possiamo trovare le lunghezze dei tre lati e conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo possiamo trovare la sua area utilizzando la formula di Erone. Chiamando: a, b e c i tre lati e p il semiperimetro:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ma spesso le lunghezze dei lati sono numeri approssimati e quindi la formula di Erone, già complicata di suo, risulta piuttosto scomoda.

Differenza di superfici

Un altro metodo consiste nell'iscrivere il triangolo in un rettangolo, trovare l'area del rettangolo e sottrarre da questa le aree dei tre triangoli complementari.

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \mathcal{A}_{rettangolo} - \mathcal{A}_{tri1} - \mathcal{A}_{tri2} - \mathcal{A}_{tri3}$$

Casi particolari

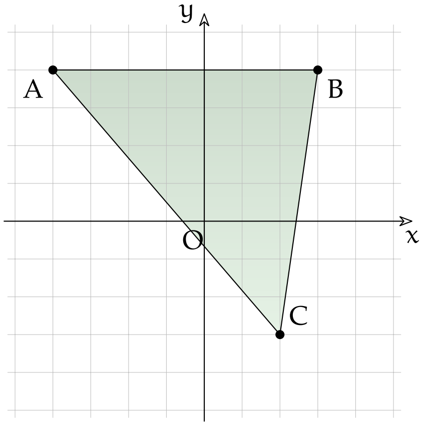


FIGURA 6.12: Area con la formula di Erone.

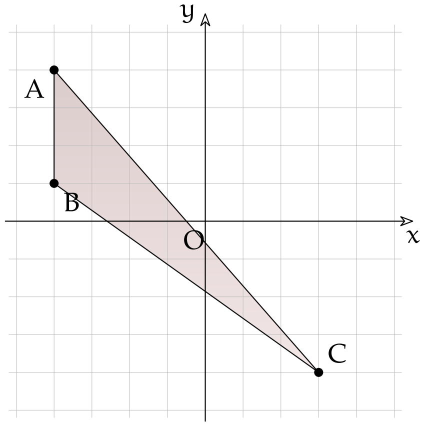


FIGURA 6.13: Area come differenza di superfici.

Se il triangolo ha un lato parallelo ad uno degli assi allora è facile calcolare l'altezza rispetto a questo lato e quindi si può usare la solita formula:

$$\mathcal{A}_{\text{triangolo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Dopo aver trovato le coordinate dei vertici delle figure precedenti:

Esempio 6.7. Con riferimento alla figura 6.10 calcola la lunghezza dei lati e l'area del triangolo con la formula di Erone.

Esempio 6.8. Con riferimento alla figura 6.11 calcola l'area del triangolo come differenza di aree. Confronta poi il risultato con quello ottenuto nel calcolo precedente.

Esempio 6.9. Con riferimento alla figura 6.12 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

Esempio 6.10. Con riferimento alla figura 6.13 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

6.5 Esercizi

6.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.4 Problemi nel piano cartesiano

6.1. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-5;1)$; $B = (-2;-4)$ $[M_{AB} = (-3.5, -1.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_A B = -4.5]$
b) $A = (-3;0)$; $B = (-1;-4)$ $[M_{AB} = (-2.0, -2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47;\ A_A B = -4.0]$
c) $A = (-3;0)$; $B = (0;-5)$ $[M_{AB} = (-1.5, -2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_A B = -7.5]$
d) $A = (-7;-2)$; $B = (0;-6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{65} = 8.06;\ A_A B = -28.0]$
e) $A = (-4;-1)$; $B = (1;-4)$ $[M_{AB} = (-1.5, -2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_A B = -12.5]$
f) $A = (-7;-3)$; $B = (-6;-7)$ $[M_{AB} = (-6.5, -5.0);\ \overline{AB} = \sqrt{17} = 4.12;\ A_A B = -5.0]$
g) $A = (-4;-3)$; $B = (-1;-6)$ $[M_{AB} = (-2.5, -4.5);\ \overline{AB} = \sqrt{18} = 4.24;\ A_A B = -13.5]$
h) $A = (-5;0)$; $B = (-3;-3)$ $[M_{AB} = (-4.0, -1.5);\ \overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61;\ A_A B = -3.0]$
i) $A = (-7;-2)$; $B = (-2;-5)$ $[M_{AB} = (-4.5, -3.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_A B = -17.5]$
j) $A = (-2;-3)$; $B = (2;-6)$ $[M_{AB} = (0.0, -4.5);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_A B = -18.0]$

6.2. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A(-8;\ 0)$; $B(0;\ -4)$; $C(2;\ 3)$ $[2p = 26.66\ A = 32.0]$
b) $A(-7;\ 0)$; $B(-1;\ -2)$; $C(5;\ 7)$ $[2p = 31.03\ A = 33.0]$
c) $A(-3;\ -3)$; $B(-2;\ -6)$; $C(3;\ 5)$ $[2p = 25.25\ A = 13.0]$
d) $A(-4;\ 0)$; $B(-2;\ -8)$; $C(6;\ 1)$ $[2p = 30.34\ A = 41.0]$
e) $A(-7;\ -3)$; $B(1;\ -6)$; $C(5;\ 3)$ $[2p = 31.81\ A = 42.0]$
f) $A(-6;\ 2)$; $B(0;\ -8)$; $C(2;\ 3)$ $[2p = 30.90\ A = 43.0]$
g) $A(-5;\ -1)$; $B(-3;\ -3)$; $C(5;\ 7)$ $[2p = 28.44\ A = 18.0]$
h) $A(-6;\ 0)$; $B(-5;\ -3)$; $C(-2;\ 7)$ $[2p = 21.66\ A = 9.5]$
i) $A(-2;\ -1)$; $B(2;\ -4)$; $C(5;\ 3)$ $[2p = 20.68\ A = 18.5]$
j) $A(-3;\ 0)$; $B(-2;\ -6)$; $C(5;\ 4)$ $[2p = 27.23\ A = 26.0]$

6.5.2 Esercizi riepilogativi

6.3. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-7;0)$; $B = (-6;-5)$ $[M_{AB} = (-6.5, -2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{26} = 5.10;\ A_A B = -2.5]$
b) $A = (-5;2)$; $B = (-4;0)$ $[M_{AB} = (-4.5, 1.0);\ \overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24;\ A_A B = 1.0]$
c) $A = (-4;0)$; $B = (-3;-6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{37} = 6.08;\ A_A B = -3.0]$
d) $A = (-4;0)$; $B = (0;-6)$ $[M_{AB} = (-2.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{52} = 7.21;\ A_A B = -12.0]$
e) $A = (-3;1)$; $B = (2;-5)$ $[M_{AB} = (-0.5, -2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{61} = 7.81;\ A_A B = -10.0]$
f) $A = (-3;-3)$; $B = (0;-5)$ $[M_{AB} = (-1.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61;\ A_A B = -12.0]$
g) $A = (-4;-2)$; $B = (-3;-4)$ $[M_{AB} = (-3.5, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24;\ A_A B = -3.0]$
h) $A = (-8;0)$; $B = (-6;-6)$ $[M_{AB} = (-7.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{40} = 6.32;\ A_A B = -6.0]$
i) $A = (-5;-2)$; $B = (-2;-6)$ $[M_{AB} = (-3.5, -4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_A B = -12.0]$
j) $A = (-6;-2)$; $B = (-4;-4)$ $[M_{AB} = (-5.0, -3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{8} = 2.83;\ A_A B = -6.0]$

6.4. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A = (-8;-3)$; $B = (1;-6)$; $C = (3;-2)$ [$2p = 25.00$ $A = 21.0$]
b) $A = (-6;-3)$; $B = (-4;-5)$; $C = (4;7)$ [$2p = 31.39$ $A = 20.0$]
c) $A = (-4;2)$; $B = (2;-5)$; $C = (6;4)$ [$2p = 29.27$ $A = 41.0$]
d) $A = (-5;-2)$; $B = (-1;-5)$; $C = (7;1)$ [$2p = 27.37$ $A = 24.0$]
e) $A = (-8;-1)$; $B = (1;-4)$; $C = (4;1)$ [$2p = 27.48$ $A = 27.0$]
f) $A = (-6;0)$; $B = (-3;-4)$; $C = (-2;5)$ [$2p = 20.46$ $A = 15.5$]
g) $A = (-2;2)$; $B = (1;-8)$; $C = (4;5)$ [$2p = 30.49$ $A = 34.5$]
h) $A = (-3;-2)$; $B = (-2;-7)$; $C = (-1;2)$ [$2p = 18.63$ $A = 7.0$]
i) $A = (-8;-3)$; $B = (-2;-6)$; $C = (-1;-1)$ [$2p = 19.09$ $A = 16.5$]
j) $A = (-7;0)$; $B = (-2;-3)$; $C = (2;5)$ [$2p = 25.07$ $A = 26.0$]

6.5. Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$
Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;0)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti dell'asse y

6.6. Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$ È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

6.7. Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$ Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$

6.8. Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

6.9. Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$

6.10. Determina la distanza di $P\,(-3;2,5)$ dall'origine del riferimento.

6.11. Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$

6.12. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$

6.13. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

6.14. Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$

6.15. Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

6.16. Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$ Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$

6.17. I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

6.18. I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$

6.19. Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$
c) $A(-1;4), B(1;-4)$
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B\left(-2;-1\right)$
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$

6.20. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC

6.21. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC Determina il perimetro di ABC e di MNP Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

6.22. Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

6.23. Verifica che i segmenti AB e CD di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

6.24. Verifica che il triangolo di vertici $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-4;\ 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

6.25. Verifica che il triangolo di vertici $A(-4;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(1;\ 6)$ è isoscele e calcola l'area. [17]

6.26. Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici $A(0;\ 4)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ -2)$ [5]

6.27. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(2;\ -3)$ [(2; 0)]

6.28. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(-3;\ 4)$, $B(-1;\ -3)$, $C(1;\ 5)$ [(-1; 2)]

7 Rette piano cartesiano

7.1 Equazioni lineari in due variabili

Abbiamo visto che tutte le equazioni del tipo: $ax + b = 0$ hanno una soluzione se $a \neq 0$. Ma sulle equazioni lineari (di primo grado) con due incognite, cosa possiamo dire? Consideriamo l'equazione: $3x + 2y - 6 = 0$ ha una soluzione? Ma prima ancora, cosa significa *una* soluzione per questa equazione? La soluzione per una equazione in due incognite non è un numero, ma una coppia di numeri il primo da mettere al posto della x e il secondo da mettere al posto della y per rendere vera l'uguaglianza. Possiamo quindi precisare la seguente definizione:

Definizione 7.1. La soluzione di un'equazione a due incognite è la coppia ordinata di numeri che sostituiti ordinatamente alle incognite rendono vera l'uguaglianza.

Si possono trovare molte soluzione di questa equazione, due sono semplici da trovare: $(0; 3)$ e $(2; 0)$. Si possono verificare facilmente:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$$

Ne esistono altre?

...	...
...	...
...	...
...	...
$(0;\ 3)$	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$
$(2;\ 0)$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$
$(4;\ -3)$	$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 6 = 0$
$(6;\ -6)$	$3 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) - 6 = 0$
$(8;\ -9)$	$3 \cdot 8 + 2 \cdot (-9) - 6 = 0$
$(10;\ -12)$	$3 \cdot 10 + 2 \cdot (-12) - 6 = 0$

FIGURA 7.1: Soluzioni equazione.

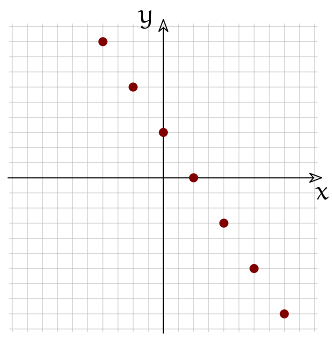


FIGURA 7.2: I corrispondenti punti nel piano.

Sapresti individuare la regola con la quale ho costruito le soluzioni? Sapresti aggiungere altre soluzioni che precedono quelle trovate da me?

In generale una equazione lineare in due incognite ha infinite soluzioni che sono coppie di numeri. Ma abbiamo già visto che una coppia di numeri rappresenta un punto nel piano cartesiano quindi ogni soluzione rappresenta un punto del piano vedi figura 7.2.

Possiamo osservare che i punti sono tutti allineati, ma cosa succede *tra* due punti? Per renderci più agevole il calcolo modifichiamo l'equazione di partenza ottenendo una equazione equivalente del tipo: $y = \ldots$:

$$3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Possiamo costruire una tabella inserendo nella prima colonna dei valori x scelti da noi e nella seconda i corrispondenti valori di y calcolati, magari con l'uso della calcolatrice. Poi riportiamo questi valori in un piano cartesiano.

x	y
0	3
0,5	2,25
1	1,5
1,5	0,75
2	0

FIGURA 7.3: Altre soluzioni.

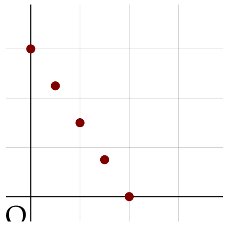


FIGURA 7.4: Altri punti.

Tra due punti calcolati possiamo inserirne quanti vogliamo, ma saranno sempre allineati con gli altri.

Si può dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione sono punti allineati e che tutti i punti che sono allineati con due qualunque di quella retta hanno coordinate che sono soluzioni di quell'equazione.

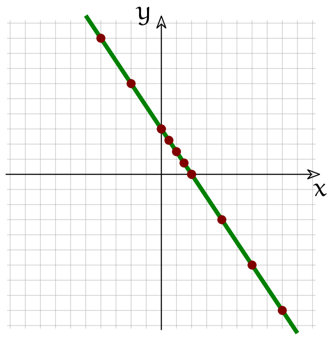


FIGURA 7.5: Retta di equazione: $3x + 2y - 6 = 0$.

I matematici dicono che c'è una *corrispondenza biunivoca* tra le soluzioni di quell'equazione e i punti di quella retta per cui dicono che quella equazione è l'*equazione della retta* e che quella retta è il *grafico dell'equazione*.

7.2 Equazioni della retta

Nel paragrafo precedente abbiamo scritto l'equazione della retta in due modi diversi. A questi due modi di scrivere l'equazione sono stati dati dei nomi:

- $3x + 2y - 6 = 0$: equazione implicita;
- $y = -\frac{3}{2}x + 3$: equazione esplicita.

In generale un'equazione implicita è un'equazione nella forma:

$$ax + by + c = 0$$

e un'equazione esplicita è un'equazione nella forma:

$$y = mx + q$$

dove a, b, c, m, q sono dei *parametri* numerici mentre x, y sono delle variabili.

- x è la variabile a cui diamo noi dei valori e si chiama variabile *indipendente*;
- y è la variabile il cui valore viene calcolato e si chiama variabile *dipendente*.

Cosa succede se nell'equazione implicita a o b valgono zero? Otteniamo delle equazioni senza la x o senza la y. Possiamo osservare che anche le equazioni di primo grado con una sola variabile rappresentano delle rette:

- la retta s di equazione $y = -2$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a -2 e qualunque ascissa;
- la retta t di equazione $y = 3$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a 3 e qualunque ascissa;
- la retta q di equazione $x = -4$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a -4 e qualunque ordinata;
- la retta r di equazione $x = 1$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a 1 e qualunque ordinata.

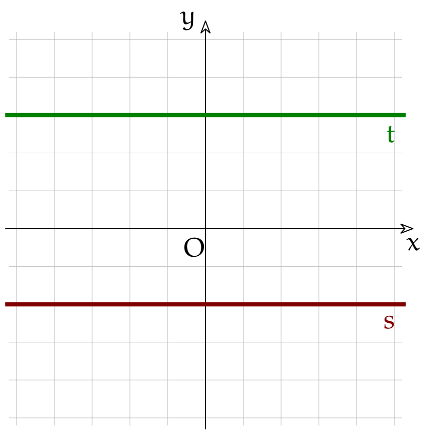


FIGURA 7.6: Rette parallele all'asse x.

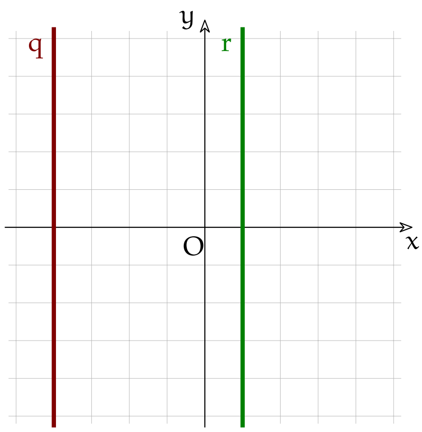


FIGURA 7.7: Rette parallele all'asse y.

Vedi le figure:7.6 e 7.7

In conclusione l'equazione $ax + by + c = 0$ al variare dei parametri a, b, c, rappresenta tutte le rette del piano.

7.3 Come disegnare le rette

Quando vogliamo disegnare una retta partendo dalla sua equazione, possiamo applicare la seguente procedura:

Procedura 7.1. *Per disegnare una retta:*

a) *ricava l'equazione esplicita* $y = mx + q$
b) *riempi una tabella con alcuni valori di* x *scelti da te e i corrispondenti valori di* y *calcolati;*
c) *per ogni coppia* $(x;\ y)$, *disegna un punto sul piano cartesiano;*
d) *disegna una retta che passi per quei punti.*

Consideriamo un altro esempio.

Procedura 7.2. *disegna la retta che ha per equazione:* $x + 2y + 6 = 0$*:*

a) *l'equazione esplicita è* $y = -\frac{1}{2}x - 3$
b) *Nel calcolo, ogni valore di* x *dovrà essere diviso per due, quindi, per* x *scegli valori pari che sono più comodi, costruisci la tabella e calcola i corrispondenti valori di* y, *vedi figura 7.8;*
c) *disegna nel piano cartesiano i punti che ci stanno;*
d) *disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 7.9.*

x	y
-6	-6
-4	-5
-2	-4
0	-3
2	-2
4	-1
6	-0

FIGURA 7.8: Tabella.

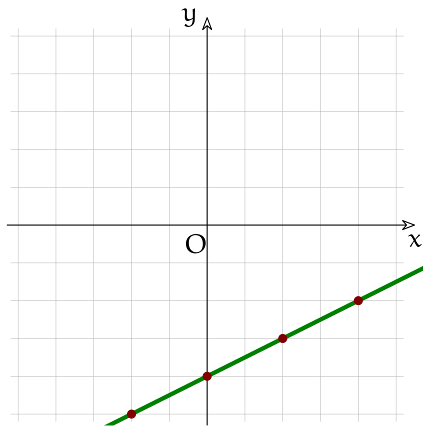


FIGURA 7.9: Disegno di una retta.

Ma ho proprio bisogno di tutti quei punti? Per individuare una retta bastano 2 punti quindi noi ne useremo... 3! In questo modo se i punti non appariranno allineati sapremo che abbiamo commesso un errore o nel calcolo o nel disegno. Un punto ci serve come controllo (come l'ultimo carattere del codice fiscale).

7.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

Prima di procedere dobbiamo procurarci un po' di esempi su cui ragionare. Disegna, in un piano cartesiano, le seguenti rette:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$
b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
c) $y = -3x + 2$
d) $y = 2x + 2$
e) $y = \frac{4}{3}x + 2$
f) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Disegna in un altro piano cartesiano queste altre rette:

a) $y = \frac{1}{2}x - 6$
b) $y = \frac{1}{2}x - 4$
c) $y = \frac{1}{2}x - 1$
d) $y = \frac{1}{2}x$
e) $y = \frac{1}{2}x + 2$
f) $y = \frac{1}{2}x + 5$

Confrontando cosa cambia e cosa resta uguale nei due gruppi di equazioni e di rette possiamo concludere che nell'equazione $y = mx + q$:

- il coefficiente q indica il punto in cui la retta interseca l'asse y e viene anche detto *intercetta* o *termine noto*;
- il coefficiente m è legato alla *pendenza* della retta e viene anche detto *coefficiente angolare*;

7.4.1 Il coefficiente angolare

Sul coefficiente angolare possiamo fare alcune osservazioni:

1. se è positivo la retta è crescente;
2. se è negativo la retta è decrescente;
3. se non è né positivo né negativo la retta non è né crescente né decrescente, è costante;
4. più si avvicina a zero più la retta si avvicina all'orizzontale;
5. più si allontana da zero, sia in positivo (crescendo) sia in negativo (decrescendo), più la retta si avvicina alla verticale;
6. non esiste alcun coefficiente angolare che produca una retta verticale.

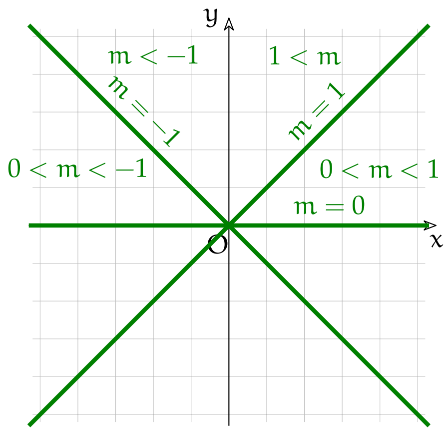


FIGURA 7.10: Coefficienti angolari.

Se consideriamo una retta, ad es. $y = \frac{3}{2}x - 2$ e alcuni suoi punti ad es. $A(-3;\ -4)$, $B(-1;\ -1)$, $C(1;\ 2)$, $D(-3;\ 5)$, possiamo osservare che il rapporto tra gli incrementi delle ordinate e delle ascisse, cioè l'aumento dell'ordinata diviso l'aumento dell'ascissa, è sempre lo stesso vedi figura: 7.12.

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = m$$

FIGURA 7.11: Tre rapporti incrementali sulla stessa retta.

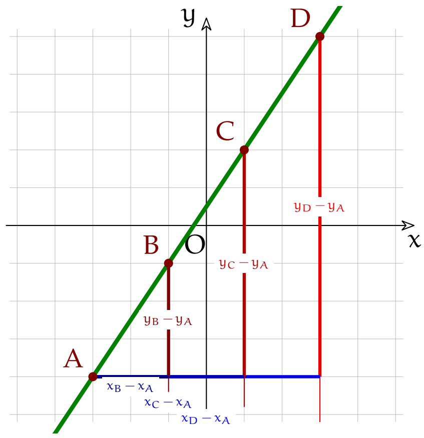


FIGURA 7.12: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In generale, dati due punti qualunque di una retta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

7.4.2 Disegno rapido

L'ultima osservazione ci permette di usare un metodo rapido per disegnare le rette, un metodo applicabile quando il coefficiente angolare è una frazione e l'intercetta un numero intero (la maggior parte degli esercizi propone rette di questo tipo). Questo metodo ci mette in grado di disegnare una retta in 10 secondi circa. Per ottenere questi tempi deve permetterci di disegnare la retta senza farci fare calcoli, perché il nostro cervello non è adatto a fare calcoli.

Procedura 7.3. *Disegna la retta che ha per equazione:* $y = mx + q$*:*

a) *individua:* q, Δx *e* Δy
b) *disegna sull'asse* y *il punto di ordinata* q
c) *a partire da questo punto conta* Δx *quadretti verso destra e* Δy *quadretti verso l'alto segna questo punto;*
d) *ripeti l'operazione c) per trovare altri punti sia a destra sia a sinistra dell'asse* y.
e) *disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 7.14.*

$r:\ y = -\frac{2}{3}x + 4$
$q = 4$
$\Delta x = 3$
$\Delta y = -2$
(andare verso l'alto di -2
significa...)

FIGURA 7.13: Elementi da individuare.

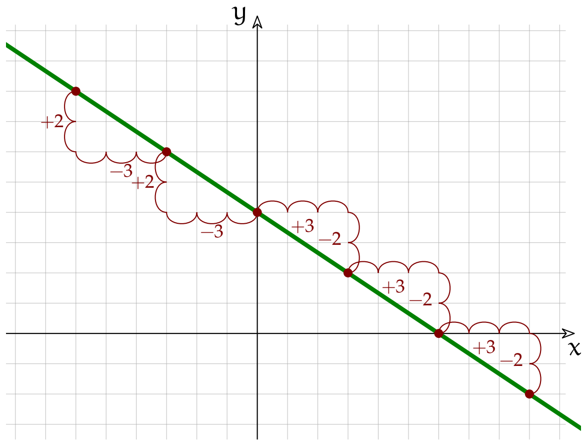


FIGURA 7.14: Metodo rapido.

7.5 Rette parallele e perpendicolari

Se abbiamo capito il significato di coefficiente angolare, non è difficile, guardando l'equazione di due rette dire se sono parallele. Nel seguente elenco evidenzia con colori diversi le rette parallele:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$
b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
c) $y = 3x + 2$
d) $y = \frac{4}{6}x + 3$
e) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
f) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
g) $y = -\frac{2}{3}x + 7$
h) $y = \frac{6}{9}x + 2$
i) $-3x + 9y = 0$
j) $2x - 4y + 2 = 0$
k) $10x + 15y + 2$
l) $3x - y + 7 = 0$

Definizione 7.2. Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Per le rette perpendicolari il problema è più complicato. Partiamo da disegnare la retta r di equazione $y = \frac{4}{5}x$ poi ci procuriamo un oggetto dotato di un angolo retto e disegniamo la retta s perpendicolare a r nel punto $(0;\ 0)$. Dobbiamo disegnare con la massima precisione.

Possiamo osservare innanzitutto che se la retta precedente era crescente, la perpendicolare sarà decrescente e viceversa. In questo caso il coefficiente angolare di s sarà negativo. Se abbiamo fatto un buon lavoro con il disegno dovremmo trovare che, partendo dal punto in cui r interseca l'asse y, il prossimo punto in cui la perpendicolare passa per l'incrocio dei quadretti è $(4;\ -5)$. Il coefficiente angolare di s è quindi: $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Definizione 7.3. Due rette sono perpendicolari se e solo se il coefficiente angolare di una è l'*antireciproco* del coefficiente angolare dell'altra.

Esempio 7.1. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta s parallela a r passante per $P(-4;\ 3)$.

Esempio 7.2. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta n perpendicolare a r passante per $P(-4;\ 3)$.

7.6 Retta per due punti

Più sopra abbiamo ricordato che per due punti passa una sola retta. In quale modo possiamo trovare l'equazione della retta che passa per due punti assegnati?

Procedura 7.4. *Calcola l'equazione della retta passante per i punti A e B:*

a) *Conoscendo i due punti non è difficile calcolare il coefficiente angolare:* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

b) *poi resta da calcolare l'intercetta e per questo possiamo applicare la condizione di passaggio per un punto:* $y_A = mx_A + q \Leftarrow q = y_A - mx_A$.

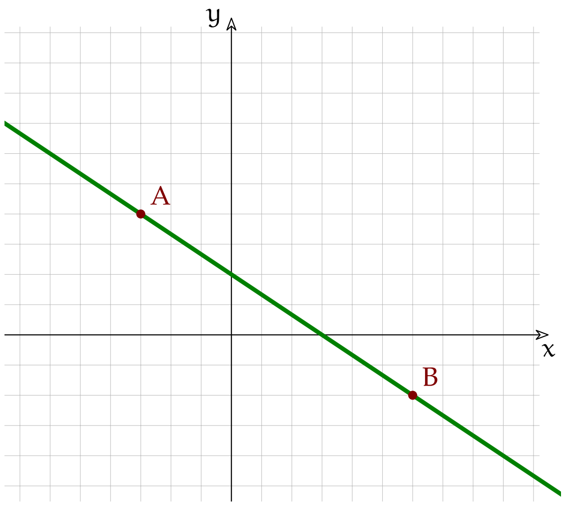


FIGURA 7.15: Equazione di una retta.

Esempio 7.3. Calcola l'equazione della retta passante per $A(-3;\ 4)$ e $B(6;\ -2)$ (figura: 7.15).

Per prima cosa disegna i punti e la retta. È facile prevedere che il coefficiente angolare dovrà essere negativo e che l'intercetta dovrà valere all'incirca due.

Calcoliamo il coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{6-(-3)} = \frac{-2-4}{6+3} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Per trovare q e imponiamo che la retta di cui conosciamo m passi per A (si ottiene lo stesso risultato imponendo il passaggio per B):

$$y_A = -\frac{2}{3}x_A + q \Leftarrow q = y_A + \frac{2}{3}x_A q = 4 + \frac{2}{3}(-3) q = 4 - 2 = 2$$

L'equazione della retta è quindi:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(Come sospettavamo).

Esempio 7.4. Calcola, usando la formuletta, l'equazione della retta passante per gli stessi due punti.

7.7 Fasci di rette

L'equazione parametrica: $y - y_P = m(x - x_P)$ al variare del parametro m rappresenta senz'altro una retta perché è un'equazione di primo grado nelle due incognite x e y. Senz'altro questa retta passa per il punto P, infatti se al posto di x e di y sostituisco rispettivamente: x_P e y_P l'uguaglianza è verificata:

$$y_P - y_P = m(x_P - x_P) \Leftarrow 0 = m \cdot 0$$

Dunque $y - y_P = m(x - x_P)$ è l'equazione di una generica retta passante per P. Al variare di m ottengo quasi tutte le rette passanti per P... Perché *quasi* tutte?

Esempio 7.5. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(3;\ 2)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta parallela alla retta passante per i punti $A(-4;\ 1)$ e $B(3;\ -1)$.

Esempio 7.6. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(-23;\ 1)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta perpendicolare alla retta passante per i punti $A(3;\ 4)$ e $B(5;\ -2)$.

7.7.1 Formula della retta per due punti

A questo punto possiamo combinare due argomenti trattati per risolvere in un solo passo un problema già affrontato e risolto in due passaggi. Possiamo combinare la formula del fascio di rette per un punto $y - y_P = m(x - x_P)$ e la formula per calcolare il coefficiente angolare $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ Sostituendo m nella prima otteniamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

La formula per del fascio di rette passsanti per un punto permette di scriverne una analoga che dà immediatamente l'equazione di una retta passante per due punti.

7.8 Distanza punto retta

Ricordiamo che la distanza tra un punto e una retta è la lunghezza del segmento di perpendicolare compreso tra il punto e la retta.

Procedura 7.5. *Per trovare la distanza del punto* P *dalla retta* r, basta*:*

a) *calcolare l'equazione della retta* s *perpendicolare a* r *passante per* P
b) *trovare l'intersezione* I *tra le due rette* r *e* s
c) *calcolare la distanza tra i punti* P *e* I.

Fortunatamente qualche matematico è riuscito a sintetizzare tutto questo procedimento in un'unica formula. Dato un punto $P(x_P; y_P)$ e una retta $r : ax + by + c = 0$, la distanza $d(P, r)$ tra il punto e la retta si ottiene dalla seguente formula:

$$d(P,r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il numeratore è ottenuto partendo dall'equazione implicita della retta sostituendo le variabili con le coordinate del punto P.

Esempio 7.7. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(-1;\ 5)$ e $r:\ y = \frac{1}{3}x - 2$.

Esempio 7.8. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(4;\ -3)$ e $r:\ y = \frac{-1}{5}x + 5$,

---

7.9 Intersezione di rette

Ritorniamo dove eravamo partiti: i punti di una rette sono tutti e soli quei punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione. Se due rette hanno un punto in comune questo significa che le coordinate di quel punto sono soluzione di entrambe le equazioni. Trovare le coordinate del punto che due rette hanno in comune significa trovare le soluzioni comuni alle due equazioni.

Esempio 7.9. Disegna le due rette $r:\ y = -\frac{1}{3}x + 3$ e $s:\ y = \frac{4}{3}x - 2$ individua graficamente l'intersezione e verifica che le sue coordinate sono soluzioni di entrambe le equazioni.

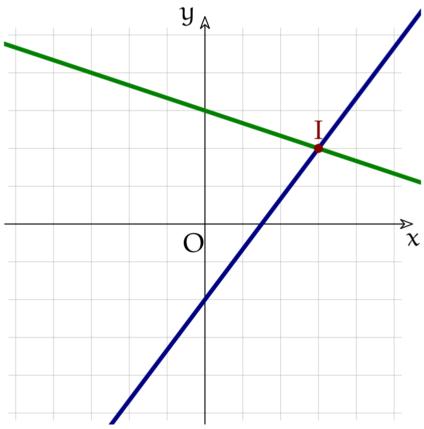


FIGURA 7.16: Intersezione di due rette.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x + 3 \\ 2 &= -\frac{1}{3}3 + 3 = -1 + 3 \\ y &= \frac{4}{3}x - 2 \\ 2 &= \frac{4}{3}3 - 2 = 4 - 2 \end{aligned}$$

FIGURA 7.17: Verifica dell'intersezione.

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano nel punto $I(3;\ 2)$. Sostituendo 3 alla x e 2 alla y nelle due equazioni otteniamo:

$y = -\frac{1}{3}x + 3 \ \Rightarrow\ 2 = -\frac{1}{3}3 + 3 = -1 + 3 = 2 \qquad y = \frac{4}{3}x - 2 \ \Rightarrow\ 2 = \frac{4}{3}3 - 2 = 4 - 2 = 2$

Ovviamente il metodo appena utilizzato non è generale: come facciamo a trovare le coordinate esatte se l'intersezione non cade esattamente sul vertice di un quadretto? Rovesciamo il problema: per individuare il punto cerchiamo i due numeri che risolvono entrambe le equazioni, quei due numeri sono le coordinate dell'intersezione delle rette.

In matematica per indicare che due frasi devono essere contemporaneamente vere si usa il simbolo di una grande parentesi graffa aperta che le racchiuda e l'insieme di più equazioni che devono essere vere contemporaneamente viene chiamato sistema. Risolvere un sistema significa trovare quei numeri che messi al posto delle incognite rendono vere tutte le uguaglianza.

Alla soluzione dei sistemi è dedicato tutto il prossimo capitolo, ma possiamo intanto anticipare uno dei trucchi che useremo: se nella prima equazione c'è scritto che y è uguale a un'espressione, nella seconda equazione, al posto di y possiamo scrivere quella espressione. Vediamo questo procedimento con un esempio.

Esempio 7.10. Disegna le due rette $r: \ y = \dfrac{3}{2}x + 2$ e $s: \ y = \dfrac{2}{3}x - 1$ calcola le coordinate dell'intersezione e verifica di aver ottenuto una soluzione credibile.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$
$$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{2}{3}x - 1$$
$$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -1 - 2$$
$$\frac{5}{6}x = -3$$
$$x = -\frac{18}{5} = -3,6$$
$$y = \frac{2}{3}(-\frac{18}{5}) - 1$$
$$y = -\frac{12}{5} - 1 = -\frac{17}{5} = -3,4$$

FIGURA 7.18: Calcolo dell'intersezione.

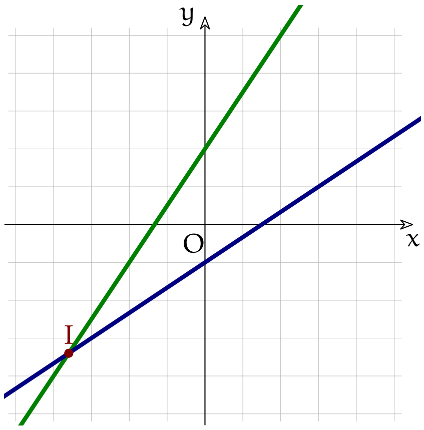


FIGURA 7.19: Intersezione di due rette.

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano circa nel punto I(3; 2). Risolviamo il sistema:

$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

La prima equazione ci dice che y è equivalente a $\frac{3}{2}x + 3$ quindi, nella seconda equazione al posto di y scriviamo: $\frac{3}{2}x + 3$ otteniamo così un'equazione che contiene una sola incognita, l'ascissa dell'intersezione:

$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{2}{3}x - 1$

$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -1 - 2$

$\frac{5}{6}x = -3$

$x = -\frac{18}{5} = 3,6$

E sostituendo questo valore in una delle due equazioni troviamo anche il valore dell'ordinata dell'intersezione:

$y = \frac{2}{3}(-\frac{18}{5}) - 1 = -\frac{12}{5} - 1 = -\frac{17}{5} = 3,4$

7.10 Esercizi

7.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1 Equazioni lineari in due variabili

7.1. Individua quale tra i seguenti punti appartiene alla retta.

a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{33}{2}$ — $(-5;\ 9)$, $(4;\ -10)$, $(4;\ -9)$, $(5;\ -9)$, $(-6;\ 9)$, $(5;\ -10)$
b) $y = -\frac{13}{2}x - 37$ — $(3;\ 10)$, $(-4;\ -11)$, $(-5;\ -12)$, $(4;\ 10)$, $(-5;\ -11)$, $(-4;\ -12)$
c) $y = \frac{3}{7}x + \frac{72}{7}$ — $(-11;\ 6)$, $(10;\ -7)$, $(-10;\ 5)$, $(-11;\ 5)$, $(-10;\ 6)$, $(10;\ -6)$
d) $y = \frac{2}{15}x - \frac{2}{5}$ — $(-12;\ -2)$, $(11;\ 1)$, $(-13;\ -3)$, $(11;\ 2)$, $(12;\ 1)$, $(12;\ 2)$
e) $y = -\frac{13}{5}x + \frac{32}{5}$ — $(-1;\ 9)$, $(1;\ -9)$, $(-2;\ 9)$, $(0;\ -9)$, $(0;\ -10)$, $(1;\ -10)$
f) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$ — $(-9;\ 3)$, $(-9;\ 4)$, $(-8;\ 4)$, $(8;\ -5)$, $(7;\ -5)$, $(8;\ -4)$
g) $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$ — $(5;\ 2)$, $(-6;\ -2)$, $(-5;\ -3)$, $(4;\ 2)$, $(-5;\ -2)$, $(-6;\ -3)$
h) $y = \frac{4}{3}x - 3$ — $(5;\ 5)$, $(-7;\ -5)$, $(6;\ 5)$, $(-7;\ -6)$, $(5;\ 4)$, $(-6;\ -6)$
i) $y = -5x + 49$ — $(-9;\ -10)$, $(-8;\ -10)$, $(7;\ 8)$, $(8;\ 8)$, $(-9;\ -9)$, $(8;\ 9)$
j) $y = \frac{2}{9}x + \frac{49}{9}$ — $(-11;\ 3)$, $(10;\ -3)$, $(-11;\ 2)$, $(11;\ -3)$, $(-12;\ 3)$, $(10;\ -4)$
k) $y = \frac{8}{3}x + \frac{56}{3}$ — $(4;\ -8)$, $(3;\ -8)$, $(-4;\ 7)$, $(-5;\ 7)$, $(4;\ -9)$, $(-4;\ 8)$
l) $x = -9$ — $(-10;\ -9)$, $(-10;\ -8)$, $(-9;\ -8)$, $(8;\ 7)$, $(8;\ 8)$, $(9;\ 8)$
m) $y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$ — $(-2;\ 8)$, $(0;\ -9)$, $(-1;\ 7)$, $(-2;\ 7)$, $(-1;\ 8)$, $(0;\ -8)$
n) $y = 3x + 10$ — $(4;\ 4)$, $(5;\ 4)$, $(-5;\ -6)$, $(-6;\ -5)$, $(4;\ 5)$, $(-5;\ -5)$
o) $y = \frac{3}{17}x - \frac{135}{17}$ — $(-12;\ 5)$, $(-12;\ 6)$, $(10;\ -6)$, $(11;\ -6)$, $(-11;\ 5)$, $(11;\ -7)$
p) $y = \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}$ — $(-2;\ -2)$, $(-1;\ -2)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -3)$, $(0;\ 2)$
q) $y = \frac{3}{10}x + \frac{19}{5}$ — $(-7;\ 2)$, $(-6;\ 2)$, $(-7;\ 1)$, $(5;\ -2)$, $(-6;\ 1)$, $(6;\ -2)$

7.2 Equazioni della retta

7.2. Riconosci quali delle seguenti è l'equazione di una retta:

a) $y = -3x + 4$
b) $y^2 = x + 3$
c) $y^3 = -x + y^3 - 2$
d) $(x+2)(x-2) = (x+3)^2$
e) $(x+y)(x-y) + (y-5)^2 = (x+4)^2$
f) $0,1x + 0,2y = 0,3$
g) $x^2 - y^2 = 0$
h) $3x^2 - 2x + 5y = 3x^2$
i) $y + 4x = 5$
j) $5x - 4y + 3 = 0$
k) $(x+3)^2 - (y+2)^2 = 2x - 2y$
l) $y = 0$
m) $y = 2$
n) $x = y$
o) $0x + 0y = 7$
p) $x^2 - (x+2)^2 = 7(x-y)$

7.3. Trasforma le equazioni implicite in equazioni esplicite.

a) $-1x-11y-110=0$
b) $-8x-2y-20=0$
c) $-9x=0$
d) $8x+y-7=0$
e) $-2x-6y-54=0$
f) $-6x-9y-27=0$
g) $-7x-8y-64=0$
h) $4x-5y-5=0$
i) $7x-y-9=0$
j) $4x+7y+14=0$
k) $-7x+6y+0=0$
l) $-5x+10y-50=0$
m) $x=0$
n) $6x+4y-4=0$
o) $6x-11y+99=0$
p) $11x-8y-40=0$
q) $x=-7$
r) $-4x-9y+36=0$
s) $-9x-6y-6=0$
t) $-7x+4y-40=0$
u) $8x+4y-12=0$

7.4. Trasforma le equazioni esplicite in equazioni implicite.

a) $y=\frac{2}{5}x+2$
b) $y=\frac{10}{11}x-6$
c) $y=-\frac{5}{3}x+10$
d) $y=\frac{1}{3}x-3$
e) $y=-x-5$
f) $x=0$
g) $y=\frac{8}{7}x+8$
h) $y=\frac{1}{11}x+9$
i) $y=-\frac{3}{10}x-7$
j) $y=-\frac{1}{3}x-7$
k) $y=-11x+8$
l) $y=-\frac{5}{11}x+10$
m) $y=-8$
n) $y=-\frac{3}{5}x-6$
o) $y=1$
p) $y=-\frac{9}{5}x-9$
q) $y=8x$
r) $y=\frac{2}{5}x+7$
s) $y=-\frac{11}{10}x+2$
t) $y=-\frac{1}{2}x+8$
u) $y=-\frac{3}{5}x+1$

7.3 Come disegnare le rette

7.5. Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

1.	a)	$y=\frac{6}{5}x+7$	b)	$y=\frac{11}{10}x-6$	c)	$y=-\frac{6}{11}x+11$
2.	a)	$y=3x+12$	b)	$y=-3$	c)	$y=\frac{9}{5}x-2$
3.	a)	$y=-\frac{5}{9}x+6$	b)	$y=2x-9$	c)	$y=\frac{9}{7}x+12$
4.	a)	$x=0$	b)	$y=-\frac{10}{3}x-7$	c)	$y=-\frac{12}{11}x-11$
5.	a)	$y=\frac{8}{3}x-6$	b)	$y=3x+10$	c)	$y=\frac{3}{5}x+3$
6.	a)	$y=7x+5$	b)	$y=5x+4$	c)	$y=0$
7.	a)	$y=\frac{10}{7}x-10$	b)	$y=-\frac{2}{5}x+4$	c)	$x=5$

7.6. Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

1.	a)	$2x-10y-30=0$	b)	$4x+10y-40=0$	c)	$-3x+y+0=0$
2.	a)	$11x-3y-12=0$	b)	$7x=0$	c)	$-10x-2y-16=0$
3.	a)	$-7x-4y-4=0$	b)	$9x+7y+42=0$	c)	$-8x+y+9=0$
4.	a)	$10x-y+9=0$	b)	$6x-8y-48=0$	c)	$-7x-y-11=0$
5.	a)	$4x+4y+36=0$	b)	$-5x-8y-48=0$	c)	$-7x=0$
6.	a)	$-7x+7y+63=0$	b)	$7x+6y+30=0$	c)	$-11x-y+3=0$
7.	a)	$-5x+5y-45=0$	b)	$8x-y+11=0$	c)	$5x+6y-24=0$

7.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

7.7. Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

1.	a) $y = -\frac{1}{3}x - 4$	b) $y = x - 8$	c) $y = -\frac{2}{5}x - 2$
2.	a) $y = -\frac{1}{2}x + 11$	b) $y = -\frac{9}{11}x - 6$	c) $y = 7x - 7$
3.	a) $y = \frac{5}{6}x + 3$	b) $y = 2x - 6$	c) $y = -x + 1$
4.	a) $y = \frac{9}{2}x - 4$	b) $y = \frac{11}{4}x - 3$	c) $y = -\frac{2}{5}x - 5$
5.	a) $y = -\frac{9}{10}x - 11$	b) $y = -3x + 12$	c) $y = -\frac{2}{3}x + 12$
6.	a) $y = 1$	b) $y = \frac{1}{8}x + 3$	c) $y = \frac{10}{3}x - 4$
7.	a) $y = -2$	b) $y = x + 12$	c) $y = 2x - 7$

7.8. Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

1.	a) $8x - 2y - 18 = 0$	b) $-5x + 6y - 18 = 0$	c) $9x - 45 = 0$
2.	a) $-7x + 8y + 80 = 0$	b) $2y + 18 = 0$	c) $-4x + 6y + 12 = 0$
3.	a) $-7x - 6y + 12 = 0$	b) $-6x - 4y + 20 = 0$	c) $-4x + y + 6 = 0$
4.	a) $10x - 11y = 0$	b) $-5y + 15 = 0$	c) $3x + 11y + 0 = 0$
5.	a) $-5x + 5y + 50 = 0$	b) $-2x + 7 = 0$	c) $6x - 5y + 30 = 0$
6.	a) $-8x - y + 12 = 0$	b) $-4x + 11y - 11 = 0$	c) $-2x + 7y - 84 = 0$
7.	a) $-12x - 7y = 0$	b) $8x - 10y - 50 = 0$	c) $5x - 10y - 30 = 0$

7.6 Retta per due punti

7.9. Calcola l'equazione della retta: AB.

a) $A(3;\ 2)$, $B(8;\ 8)$ [$y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}$]

b) $A(-6;\ 7)$, $B(-11;\ 6)$ [$y = \frac{1}{5}x + \frac{41}{5}$]

c) $A(-9;\ 1)$, $B(9;\ 4)$ [$y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{2}$]

d) $A(0;\ -12)$, $B(-10;\ 11)$ [$y = -\frac{23}{10}x - 12$]

e) $A(-5;\ 1)$, $B(4;\ -2)$ [$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$]

f) $A(-3;\ -4)$, $B(4;\ -7)$ [$y = -\frac{3}{7}x - \frac{37}{7}$]

g) $A(6;\ -7)$, $B(-1;\ -9)$ [$y = \frac{2}{7}x - \frac{61}{7}$]

h) $A(-1;\ 3)$, $B(-7;\ -4)$ [$y = \frac{7}{6}x + \frac{25}{6}$]

i) $A(10;\ 1)$, $B(-11;\ -10)$ [$y = \frac{11}{21}x - \frac{89}{21}$]

j) $A(-8;\ -6)$, $B(-1;\ -11)$ [$y = -\frac{5}{7}x - \frac{82}{7}$]

k) $A(-4;\ 9)$, $B(3;\ 6)$ [$y = -\frac{3}{7}x + \frac{51}{7}$]

l) $A(1;\ 8)$, $B(-1;\ -11)$ [$y = \frac{19}{2}x - \frac{3}{2}$]

m) $A(-6;\ 1)$, $B(-12;\ 6)$ [$y = -\frac{5}{6}x - 4$]

n) $A(4;\ 11)$, $B(2;\ -9)$ [$y = 10x - 29$]

o) $A(10;\ -6)$, $B(-12;\ 7)$ [$y = -\frac{13}{22}x - \frac{1}{11}$]

p) $A(-6;\ -5)$, $B(-4;\ -3)$ [$y = x + 1$]

q) $A(-9;\ 9)$, $B(9;\ 10)$ [$y = \frac{1}{18}x + \frac{19}{2}$]

r) $A(4;\ -5)$, $B(-10;\ 11)$ [$y = -\frac{8}{7}x - \frac{3}{7}$]

s) $A(-4;\ 8)$, $B(-6;\ 2)$ [$y = 3x + 20$]

7.5 Rette parallele e perpendicolari

7.10. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C.

a) $A(10; 7)$, $B(-9; -10)$, $C(3; -12)$
b) $A(-1; 6)$, $B(-5; 6)$, $C(-4; -5)$
c) $A(-7; -2)$, $B(-9; -6)$, $C(5; -12)$
d) $A(-3; 0)$, $B(-4; -4)$, $C(-9; -9)$
e) $A(4; -3)$, $B(-10; 9)$, $C(8; 6)$
f) $A(4; 11)$, $B(-12; -11)$, $C(9; 5)$
g) $A(6; -2)$, $B(-12; -7)$, $C(10; -8)$
h) $A(-4; 4)$, $B(10; -10)$, $C(11; -1)$
i) $A(-3; -10)$, $B(9; 8)$, $C(8; -9)$
j) $A(7; -12)$, $B(6; -4)$, $C(-11; -3)$
k) $A(0; 0)$, $B(-8; -3)$, $C(4; 11)$
l) $A(-2; -2)$, $B(7; -7)$, $C(4; 8)$
m) $A(-7; -9)$, $B(-4; 8)$, $C(4; 10)$
n) $A(-8; -5)$, $B(11; 11)$, $C(9; 5)$
o) $A(11; -7)$, $B(-12; 5)$, $C(-4; -7)$
p) $A(11; 3)$, $B(-1; -4)$, $C(-10; -1)$
q) $A(5; 0)$, $B(6; 11)$, $C(3; -1)$
r) $A(-7; 8)$, $B(-7; 4)$, $C(8; -8)$
s) $A(7; 5)$, $B(-4; 2)$, $C(-6; -5)$
t) $A(7; -5)$, $B(2; -12)$, $C(-7; 0)$

7.7 Fasci di rette

7.11. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C. poi calcolane le equazioni.

a) $A(3; -3)$, $B(-10; 3)$, $C(-4; 9)$ $\quad [y = -\frac{6}{13}x - \frac{21}{13},\ y = -\frac{6}{13}x + \frac{93}{13},\ y = \frac{13}{6}x + \frac{53}{3}]$

b) $A(4; -12)$, $B(9; -6)$, $C(6; -9)$ $\quad [y = \frac{6}{5}x - \frac{84}{5},\ y = \frac{6}{5}x - \frac{81}{5},\ y = -\frac{5}{6}x - 4]$

c) $A(4; -9)$, $B(-11; -5)$, $C(4; -10)$ $\quad [y = -\frac{4}{15}x - \frac{119}{15},\ y = -\frac{4}{15}x - \frac{134}{15},\ y = \frac{15}{4}x - 25]$

d) $A(-3; 3)$, $B(-10; -7)$, $C(0; -3)$ $\quad [y = \frac{10}{7}x + \frac{51}{7},\ y = \frac{10}{7}x - 3,\ y = -\frac{7}{10}x - 3]$

e) $A(6; -3)$, $B(9; -12)$, $C(10; 8)$ $\quad [y = -3x + 15,\ y = -3x + 38,\ y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}]$

f) $A(-4; -8)$, $B(4; 2)$, $C(-12; -11)$ $\quad [y = \frac{5}{4}x - 3,\ y = \frac{5}{4}x + 4,\ y = -\frac{4}{5}x - \frac{103}{5}]$

g) $A(10; -6)$, $B(9; 7)$, $C(0; -5)$ $\quad [y = -13x + 124,\ y = -13x - 5,\ y = \frac{1}{13}x - 5]$

h) $A(-2; 0)$, $B(1; 4)$, $C(2; 0)$ $\quad [y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3},\ y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3},\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}]$

i) $A(-10; 7)$, $B(-6; -3)$, $C(11; 5)$ $\quad [y = -\frac{5}{2}x - 18,\ y = -\frac{5}{2}x + \frac{65}{2},\ y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}]$

j) $A(-6; 8)$, $B(2; -5)$, $C(-11; -3)$ $\quad [y = -\frac{13}{8}x - \frac{7}{4},\ y = -\frac{13}{8}x - \frac{167}{8},\ y = \frac{8}{13}x + \frac{49}{13}]$

k) $A(-4; -4)$, $B(1; 2)$, $C(-7; 4)$ $\quad [y = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5},\ y = \frac{6}{5}x + \frac{62}{5},\ y = -\frac{5}{6}x - \frac{11}{6}]$

l) $A(-1; -6)$, $B(8; -9)$, $C(10; 9)$ $\quad [y = -\frac{1}{3}x - \frac{19}{3},\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{37}{3},\ y = 3x - 21]$

m) $A(10; -10)$, $B(-12; 10)$, $C(-12; 5)$ $\quad [y = -\frac{10}{11}x - \frac{10}{11},\ y = -\frac{10}{11}x - \frac{65}{11},\ y = \frac{11}{10}x + \frac{91}{5}]$

n) $A(-1; -9)$, $B(2; -11)$, $C(-9; 11)$ $\quad [y = -\frac{2}{3}x - \frac{29}{3},\ y = -\frac{2}{3}x + 5,\ y = \frac{3}{2}x + \frac{49}{2}]$

o) $A(11; 2)$, $B(-12; 11)$, $C(7; 9)$ $\quad [y = -\frac{9}{23}x + \frac{145}{23},\ y = -\frac{9}{23}x + \frac{270}{23},\ y = \frac{23}{9}x - \frac{80}{9}]$

p) $A(-8; -4)$, $B(5; -10)$, $C(-2; -7)$ $\quad [y = -\frac{6}{13}x - \frac{100}{13},\ y = -\frac{6}{13}x - \frac{103}{13},\ y = \frac{13}{6}x - \frac{8}{3}]$

7.8 Distanza punto retta

7.12. Calcola la distanza tra il punto P e la retta r

a) $P(11;\ -7),\ r:\ -6x+7y+21=0$ $[\frac{94}{\sqrt{85}} \approx 10.2]$

b) $P(-10;\ 10),\ r:\ 3x+10y+10=0$ $[\frac{80}{\sqrt{109}} \approx 7.663]$

c) $P(8;\ -1),\ r:\ -12x-10y+40=0$ $[\frac{46}{\sqrt{244}} \approx 2.945]$

d) $P(-5;\ -11),\ r:\ -6x+0=0$ $[\frac{30}{\sqrt{36}} \approx 5.0]$

e) $P(-1;\ -4),\ r:\ -3x+9y-81=0$ $[\frac{114}{\sqrt{90}} \approx 12.02]$

f) $P(-3;\ 0),\ r:\ 9x-6y+72=0$ $[\frac{45}{\sqrt{117}} \approx 4.16]$

g) $P(-10;\ -7),\ r:\ 10x-9y+27=0$ $[\frac{10}{\sqrt{181}} \approx 0.7433]$

h) $P(4;\ 0),\ r:\ -9x+4y+44=0$ $[\frac{8}{\sqrt{97}} \approx 0.8123]$

i) $P(-5;\ 8),\ r:\ 10x-3y-27=0$ $[\frac{101}{\sqrt{109}} \approx 9.674]$

j) $P(-11;\ 0),\ r:\ 9x+11y-33=0$ $[\frac{132}{\sqrt{202}} \approx 9.287]$

k) $P(-9;\ -10),\ r:\ 2x+4y+24=0$ $[\frac{34}{\sqrt{20}} \approx 7.603]$

l) $P(5;\ 7),\ r:\ 3x+1y+8=0$ $[\frac{30}{\sqrt{10}} \approx 9.487]$

m) $P(8;\ 7),\ r:\ -10x+6y+54=0$ $[\frac{16}{\sqrt{136}} \approx 1.372]$

n) $P(-2;\ -6),\ r:\ -2x-6y-6=0$ $[\frac{34}{\sqrt{40}} \approx 5.376]$

o) $P(-12;\ 9),\ r:\ -1x+9y-63=0$ $[\frac{30}{\sqrt{82}} \approx 3.313]$

p) $P(-6;\ 4),\ r:\ -11x+10y-70=0$ $[\frac{36}{\sqrt{221}} \approx 2.422]$

q) $P(-6;\ -3),\ r:\ -3y+33=0$ $[\frac{42}{\sqrt{9}} \approx 14.0]$

r) $P(7;\ 5),\ r:\ -2x-7y-35=0$ $[\frac{84}{\sqrt{53}} \approx 11.54]$

s) $P(-5;\ -6),\ r:\ -10x+7y+63=0$ $[\frac{71}{\sqrt{149}} \approx 5.817]$

t) $P(-6;\ 11),\ r:\ 9x+5y+55=0$ $[\frac{56}{\sqrt{106}} \approx 5.439]$

7.13. Calcola la distanza tra il punto P e la retta r

a) $P(-2;\ -10),\ r:\ y=-\frac{1}{9}x-11$ $[\frac{7}{\sqrt{82}} \approx 0.773]$

b) $P(7;\ -9),\ r:\ y=\frac{2}{11}x+1$ $[\frac{124}{\sqrt{125}} \approx 11.09]$

c) $P(6;\,-2)$, $r:\ y=-\frac{3}{4}x-1$ $\quad[\frac{28}{\sqrt{100}}\approx 2.8]$

d) $P(-1;\,-7)$, $r:\ y=-\frac{2}{5}x-6$ $\quad[\frac{7}{\sqrt{29}}\approx 1.3]$

e) $P(-4;\,0)$, $r:\ y=-x+7$ $\quad[\frac{33}{\sqrt{18}}\approx 7.778]$

f) $P(11;\,9)$, $r:\ y=\frac{10}{11}x+2$ $\quad[\frac{33}{\sqrt{221}}\approx 2.22]$

g) $P(8;\,0)$, $r:\ y=-\frac{1}{10}x-6$ $\quad[\frac{68}{\sqrt{101}}\approx 6.766]$

h) $P(-8;\,-4)$, $r:\ y=-\frac{9}{10}x-6$ $\quad[\frac{52}{\sqrt{181}}\approx 3.865]$

i) $P(2;\,0)$, $r:\ y=-\frac{6}{5}x+2$ $\quad[\frac{2}{\sqrt{61}}\approx 0.2561]$

j) $P(9;\,7)$, $r:\ y=\frac{1}{2}x+2$ $\quad[\frac{4}{\sqrt{80}}\approx 0.4472]$

k) $P(-3;\,1)$, $r:\ y=\frac{2}{7}x+2$ $\quad[\frac{1}{\sqrt{53}}\approx 0.1374]$

l) $P(1;\,6)$, $r:\ y=\frac{6}{5}x+3$ $\quad[\frac{9}{\sqrt{61}}\approx 1.152]$

m) $P(3;\,-3)$, $r:\ y=-\frac{11}{12}x+9$ $\quad[\frac{111}{\sqrt{265}}\approx 6.819]$

n) $P(-11;\,-7)$, $r:\ y=\frac{3}{4}x-6$ $\quad[\frac{29}{\sqrt{25}}\approx 5.8]$

o) $P(1;\,5)$, $r:\ y=-\frac{6}{5}x-9$ $\quad[\frac{152}{\sqrt{244}}\approx 9.731]$

p) $P(5;\,3)$, $r:\ y=-\frac{5}{11}x-11$ $\quad[\frac{179}{\sqrt{146}}\approx 14.81]$

q) $P(-1;\,10)$, $r:\ y=2x-11$ $\quad[\frac{23}{\sqrt{5}}\approx 10.29]$

r) $P(-4;\,-11)$, $r:\ y=\frac{3}{4}x+6$ $\quad[\frac{56}{\sqrt{25}}\approx 11.2]$

s) $P(-8;\,10)$, $r:\ y=-\frac{2}{9}x+4$ $\quad[\frac{38}{\sqrt{85}}\approx 4.122]$

t) $P(-10;\,-7)$, $r:\ y=\frac{7}{4}x$ $\quad[\frac{42}{\sqrt{65}}\approx 5.209]$

7.14. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e calcola la sua equazione. Calcola la lunghezza del segmento AB, la distanza del punto C dalla retta AB e l'area del triangolo ABC

a) $A(-4;\,10)$, $B(-3;\,0)$, $C(3;\,-9)$ $\quad[-10x-30,\ \sqrt{101},\ \frac{51}{\sqrt{101}},\ 25.5]$

b) $A(8;\,11)$, $B(6;\,-7)$, $C(7;\,-7)$ $\quad[9x-61,\ \sqrt{328},\ \frac{9}{\sqrt{82}},\ 9]$

c) $A(11;\,2)$, $B(2;\,7)$, $C(11;\,-1)$ $\quad[-\frac{5}{9}x+\frac{73}{9},\ \sqrt{106},\ \frac{27}{\sqrt{106}},\ 13.5]$

d) $A(-5;\,9)$, $B(-8;\,4)$, $C(9;\,-5)$ $\quad[\frac{5}{3}x+\frac{52}{3},\ \sqrt{34},\ \frac{112}{\sqrt{34}},\ 56]$

e) $A(6;\,-8)$, $B(-10;\,-6)$, $C(4;\,-10)$ $[-\frac{1}{8}x-\frac{29}{4},\ \sqrt{260},\ \frac{18}{\sqrt{65}},\ 18]$

f) $A(3;\,-6)$, $B(-5;\,-2)$, $C(10;\,-11)$ $[-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2},\ \sqrt{80},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ 6]$

g) $A(1;\,-2)$, $B(3;\,-11)$, $C(7;\,-2)$ $[-\frac{9}{2}x+\frac{5}{2},\ \sqrt{85},\ \frac{54}{\sqrt{85}},\ 27]$

h) $A(-6;\,9)$, $B(11;\,11)$, $C(1;\,4)$ $[\frac{2}{17}x+\frac{165}{17},\ \sqrt{293},\ \frac{99}{\sqrt{293}},\ 49.5]$

i) $A(2;\,1)$, $B(6;\,1)$, $C(-6;\,-7)$ $[1,\ \sqrt{16},\ \frac{8}{\sqrt{1}},\ 16.0]$

j) $A(1;\,-4)$, $B(-6;\,-10)$, $C(7;\,7)$ $[\frac{6}{7}x-\frac{34}{7},\ \sqrt{85},\ \frac{41}{\sqrt{85}},\ 20.5]$

k) $A(11;\,-8)$, $B(-8;\,9)$, $C(0;\,-8)$ $[-\frac{17}{19}x+\frac{35}{19},\ \sqrt{650},\ \frac{187}{\sqrt{650}},\ 93.5]$

l) $A(7;\,-1)$, $B(-3;\,-12)$, $C(-11;\,-11)$ $[\frac{11}{10}x-\frac{87}{10},\ \sqrt{221},\ \frac{98}{\sqrt{221}},\ 49]$

m) $A(-7;\,-10)$, $B(9;\,-6)$, $C(-8;\,-3)$ $[\frac{1}{4}x-\frac{33}{4},\ \sqrt{272},\ \frac{29}{\sqrt{17}},\ 58]$

n) $A(-11;\,0)$, $B(4;\,-2)$, $C(11;\,5)$ $[-\frac{2}{15}x-\frac{22}{15},\ \sqrt{229},\ \frac{119}{\sqrt{229}},\ 59.5]$

o) $A(-12;\,-1)$, $B(11;\,7)$, $C(-3;\,-1)$ $[\frac{8}{23}x+\frac{73}{23},\ \sqrt{593},\ \frac{72}{\sqrt{593}},\ 36]$

p) $A(-10;\,11)$, $B(9;\,-5)$, $C(-12;\,2)$ $[-\frac{16}{19}x+\frac{49}{19},\ \sqrt{617},\ \frac{203}{\sqrt{617}},\ 101.5]$

q) $A(6;\,-12)$, $B(-4;\,6)$, $C(10;\,-8)$ $[-\frac{9}{5}x-\frac{6}{5},\ \sqrt{424},\ \frac{56}{\sqrt{106}},\ 56]$

r) $A(9;\,-10)$, $B(0;\,-6)$, $C(-5;\,-2)$ $[-\frac{4}{9}x-6,\ \sqrt{97},\ \frac{16}{\sqrt{97}},\ 8]$

s) $A(3;\,-11)$, $B(-6;\,4)$, $C(6;\,2)$ $[-\frac{5}{3}x-6,\ \sqrt{306},\ \frac{54}{\sqrt{34}},\ 81]$

t) $A(3;\,-9)$, $B(-8;\,0)$, $C(-9;\,9)$ $[-\frac{9}{11}x-\frac{72}{11},\ \sqrt{202},\ \frac{90}{\sqrt{202}},\ 45]$

7.15. Disegna le due rette, individua le coordinate dell'intersezione, verifica che queste sono soluzioni di entrambe le equazioni.

a) $r:\ y=4x-8;\quad s:\ y=-\frac{1}{4}x+9$

b) $r:\ y=\frac{5}{8}x-4;\quad s:\ y=\frac{1}{4}x-7$

c) $r:\ y=-\frac{20}{3}x+9;\quad s:\ y=-\frac{17}{3}x+6$

d) $r:\ y=1; s:\ y=3x-11$

e) $r:\ y=-\frac{5}{2}x-4;\quad s:\ y=-8x+7$

f) $r:\ y=4x-3;\quad s:\ y=\frac{17}{3}x-8$

g) $r:\ y=4x;\quad s:\ y=16x-12$

h) $r:\ y=\frac{10}{11}x-11;\quad s:\ y=-\frac{5}{11}x+4$

i) $r:\ y=\frac{1}{2}x+7;\quad s:\ y=\frac{11}{4}x-11$

j) $r:\ y=\frac{3}{2}x+7;\quad s:\ y=4$

k) $r:\ y=9;\quad s:\ y=\frac{10}{11}x-1$

l) $r:\ y=\frac{5}{4}x-11;\quad s:\ y=\frac{11}{8}x-12$

m) $r:\ y=\frac{9}{8}x;\quad s:\ y=-\frac{1}{4}x+11$

n) $r:\ y=\frac{9}{4}x+6;\quad s:\ y=\frac{5}{2}x+8$

o) $r:\ y=-\frac{4}{5}x-10;\quad s:\ y=\frac{3}{10}x+1$

p) $r:\ y=2x+9;\quad s:\ y=\frac{17}{9}x+8$
q) $r:\ x=0;\quad s:\ x=0$
r) $r:\ y=\frac{9}{5}x-7;\quad s:\ y=\frac{11}{10}x$
s) $r:\ y=-\frac{2}{3}x;\quad s:\ y=-\frac{7}{9}x+1$
t) $r:\ y=\frac{1}{9}x-11;\quad s:\ y=\frac{1}{9}x-11$

7.16. Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r:\ y=-\frac{3}{11}x-6; s:\ y=-\frac{11}{8}x-6$ $[(0;\ -6)]$
b) $r:\ y=\frac{5}{7}x-1; s:\ y=\frac{1}{5}x-7$ $[\left(-\frac{35}{3};\ -\frac{28}{3}\right)]$
c) $r:\ y=\frac{5}{12}x+6; s:\ y=-\frac{6}{7}x-8$ $[\left(-\frac{1176}{107};\ \frac{152}{107}\right)]$
d) $r:\ y=-\frac{11}{2}x+1; s:\ y=-\frac{5}{2}x+6$ $[\left(-\frac{5}{3};\ \frac{61}{6}\right)]$
e) $r:\ y=11x-8; s:\ y=-\frac{7}{11}x-1$ $[\left(\frac{77}{128};\ -\frac{177}{128}\right)]$
f) $r:\ y=4; s:\ y=\frac{6}{7}x$ $[\left(\frac{14}{3};\ 4\right)]$
g) $r:\ y=\frac{5}{2}x-11; s:\ y=-\frac{11}{7}x+9$ $[\left(\frac{280}{57};\ \frac{73}{57}\right)]$
h) $r:\ y=-\frac{9}{2}x-5; s:\ y=\frac{5}{6}x+11$ $[\left(-3;\ \frac{17}{2}\right)]$
i) $r:\ y=\frac{7}{9}x+1; s:\ y=\frac{8}{3}x+12$ $[\left(-\frac{99}{17};\ -\frac{60}{17}\right)]$
j) $r:\ y=-\frac{1}{3}x+2; s:\ y=2x+12$ $[\left(-\frac{30}{7};\ \frac{24}{7}\right)]$
k) $r:\ y=-7x+1; s:\ y=-5x+11$ $[(-5;\ 36)]$
l) $r:\ y=6x-5; s:\ y=8x-1$ $[(-2;\ -17)]$
m) $r:\ y=3x+11; s:\ y=-\frac{7}{2}x+1$ $[\left(-\frac{20}{13};\ \frac{83}{13}\right)]$
n) $r:\ y=\frac{2}{9}x-4; s:\ y=\frac{1}{3}x-4$ $[(0;\ -4)]$
o) $r:\ y=-\frac{2}{5}x-9; s:\ y=\frac{4}{5}x+7$ $[\left(-\frac{40}{3};\ -\frac{11}{3}\right)]$
p) $r:\ y=\frac{12}{7}x+7; s:\ y=\frac{1}{9}x$ $[\left(-\frac{441}{101};\ -\frac{49}{101}\right)]$
q) $r:\ y=2x+8; s:\ y=\frac{1}{2}x-9$ $[\left(-\frac{34}{3};\ -\frac{44}{3}\right)]$
r) $r:\ y=-9x; s:\ y=-\frac{11}{10}x+5$ $[\left(-\frac{50}{79};\ \frac{450}{79}\right)]$
s) $r:\ y=\frac{5}{8}x-10; s:\ y=-\frac{1}{5}x-2$ $[\left(\frac{320}{33};\ -\frac{130}{33}\right)]$

7.17. Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r:\ 4x+7y-63=0; s:\ -9x-10y+110=0$ $[\left(\frac{140}{23};\ \frac{127}{23}\right)]$
b) $r:\ -7x+0=0; s:\ -6x+6y+60=0$ $[(0;\ -10)]$

c) $r: 8x + 0 = 0; s: -10x - 12y + 72 = 0$ $[(0; 6)]$
d) $r: -12x - 10y - 60 = 0; s: 6x - 5y + 10 = 0$ $[\left(-\frac{10}{3}; -2\right)]$
e) $r: 4x - 8y + 24 = 0; s: -1x + 10y + 50 = 0$ $[(-20; -7)]$
f) $r: -9x + 2y - 2 = 0; s: -1x + 10y + 30 = 0$ $[\left(-\frac{10}{11}; -\frac{34}{11}\right)]$
g) $r: 7x + 0 = 0; s: -3x + 10y - 20 = 0$ $[(0; 2)]$
h) $r: -1x - 12y + 12 = 0; s: -2y + 18 = 0$ $[(-96; 9)]$
i) $r: -1x + 3y + 30 = 0; s: 11x - 9y - 72 = 0$ $[\left(-\frac{9}{4}; -\frac{43}{4}\right)]$
j) $r: 11x - 1y + 11 = 0; s: -7x - 8y - 8 = 0$ $[\left(-\frac{96}{95}; -\frac{11}{95}\right)]$
k) $r: -6x - 10y + 30 = 0; s: 5x + 9y - 45 = 0$ $[(-45; 30)]$
l) $r: 7x - 9y + 63 = 0; s: -2x - 12y - 120 = 0$ $[(-18; -7)]$
m) $r: -10x + 9y + 72 = 0; s: 7x + 1y + 6 = 0$ $[\left(\frac{18}{73}; -\frac{564}{73}\right)]$
n) $r: -5x + 2y + 12 = 0; s: -7x - 4y - 24 = 0$ $[(0; -6)]$
o) $r: -10x - 10y - 40 = 0; s: -10x - 4y - 20 = 0$ $[\left(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{3}\right)]$
p) $r: -11y - 99 = 0; s: -10x + 1y + 5 = 0$ $[\left(-\frac{2}{5}; -9\right)]$
q) $r: 8x - 7y - 77 = 0; s: 5x - 9y - 99 = 0$ $[(0; -11)]$
r) $r: -1x + 10y - 100 = 0; s: -6y + 66 = 0$ $[(10; 11)]$

7.10.2 Esercizi riepilogativi

7.18. Determina il circocentro, l'ortocentro, il baricentro, il perimetro e l'area del triangolo avente per vertici i punti $A(-1; -1), B(2; -1), C(0; 3)$.

7.19. Determina la proiezione ortogonale del punto $P(-1; -4)$ sulla retta $y = -\frac{1}{5}x - 1$

7.20. Dati i tre punti $A(1; 3)$, $B(-1; 6)$, $C(-4; 4)$ determina il punto D in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ risulti essere un quadrato. (Suggerimento: ci sono due metodi per risolvere l'esercizio, uno è molto veloce...)

7.21. Verifica che il triangolo di vertici $A(3; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-4; 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

7.22. Nel fascio di rette di centro $A(-2; 1)$ determinare la retta r perpendicolare alla retta di equazione $2x - 2y - 3 = 0$ [x + y + 1 = 0]

7.23. Nel fascio di rette parallele a $y = -2x$ determinare la retta r passante per $A(0; -3)$ [2x + y + 3 = 0]

7.24. Dati i tre vertici di un triangolo $A(5; 0)$ $B(1; 2)$ e $C(-3; 2)$, scriverne le equazioni dei lati. $[x + 2y - 5 = 0 \; x + 4y - 5 = 0 \; y = 2]$

7.25. Scrivere l'equazione di una retta passante per $A(4; 2)$ e per il punto comune alle rette $r: x + y = 3$ e $s: x - y + 1 = 0$ $[y = 2]$

7.26. Scrivere l'equazione della retta congiungente il punto d'intersezione delle rette $a:\ x+y=3$ e $b:\ x-y+1=0$, con quello d'intersezione delle rette $c:\ x-y=1$ e $d\ x=-1$ $[y=2x]$

7.27. Scrivere l'equazione della retta passante per $A(-5;\ -1)$ parallela alla retta congiungente l'origine delle coordinate con $B(1;\ 2)$ $[2x-y+9=0]$

7.28. La retta passante per $A(2;\ 3)$ e $B(-1;\ -6)$ e quella per $C(6;\ -1)$ e $D(-3;\ 2)$ come sono fra loro? [perpendicolari]

8 Rette parallele

“Intersection de deux parallèles”
Foto di OliBac
http://www.flickr.com/photos/olibac/3244014009/

8.1 Rette parallele

Secondo la definizione di Euclide, due rette nel piano sono parallele se non hanno punti in comune. In maniera più moderna il concetto di parallelismo è interpretato come l'avere la stessa direzione. Si può anche dare una formulazione che unifichi le due definizioni precedenti; si deve però ricorrere al concetto di distanza: due rette nel piano sono parallele se mantengono sempre la stessa distanza. Se la distanza è nulla, le due rette sono coincidenti. Noi utilizzeremo la seguente:

Definizione 8.1. Due rette giacenti nello stesso piano si dicono *parallele* se sono coincidenti oppure non si incontrano mai.

Assumendo dunque questa come definizione di parallelismo, abbiamo bisogno di precisare il concetto di distanza. Dati due punti P e Q, la *distanza* tra P e Q è la lunghezza del *percorso più breve* che unisce i due punti. Questo concetto è valido anche se si riferisce alle distanze tra due città che si trovano negli stradari: sono riportate le lunghezze dei percorsi minimi tra tutte le strade alternative che collegano due città. Naturalmente, nel piano, ove si "dispone" di tutti i punti da poter "attraversare", il percorso più breve che collega due punti P e Q è il segmento PQ; quindi nella geometria euclidea assumiamo come distanza tra due punti la lunghezza del segmento avente per estremi i due punti.

Se vogliamo parlare di distanza tra due insiemi di punti, allora va considerato il percorso più breve tra tutti i percorsi che collegano un qualsiasi punto del primo insieme con un qualsiasi punto del secondo: in pratica la distanza è la lunghezza del più piccolo segmento tra tutti quelli che collegano i due insiemi di punti.

Nel caso particolare di un punto A ed una retta BC, se il punto appartiene alla retta allora la distanza di A da BC è uguale a zero, altrimenti si considera come distanza la lunghezza del segmento AH, dove H è il punto in cui la perpendicolare a BC passante per A interseca la stessa retta BC: il motivo si intuisce in base a quanto detto, ma risulterà chiaro più avanti, quando affronteremo lo studio delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Analogamente, come distanza tra due rette parallele si assume la lunghezza di un qualunque segmento che unisce il punto di una delle due rette con il piede della perpendicolare mandata da esso sull'altra retta. Affermare che tali segmenti sono tutti congruenti è un modo più preciso per dire che le due rette mantengono sempre la stessa distanza.

Ricordiamo la versione "moderna" del V Postulato di Euclide: *dati una retta* r *ed un punto* P, *allora esiste una ed una sola retta parallela ad* r *e passante per* P.

Si è scelto di considerare parallele sia rette nel piano che non hanno punti in comune sia rette coincidenti proprio per fare in modo che la relazione di parallelismo sia una relazione di equivalenza: riflessiva, simmetrica, transitiva. Con la definizione di parallelismo data da Euclide, al contrario, sarebbe stata solo simmetrica, ma non riflessiva né transitiva. Per convincersi della non transitività, basta considerare tre rette a, b, c con a e c coincidenti e b parallela ad entrambe e distinta da esse: allora $a \parallel b$ e $b \parallel c$, ma a e c non sono parallele secondo la definizione di Euclide.

Procedura 8.1. *Costruzione della parallela a una retta, passante per un punto C esterno ad essa:*

1. *Traccia la retta r passante per due punti qualsiasi A e B.*
2. *Traccia un punto C non appartenente alla retta.*
3. *Traccia la retta passante per C ed A.*
4. *Traccia la circonferenza C_0 di centro C e raggio CA*
5. *Traccia la circonferenza C_1 di centro A e raggio CA*
6. *Denomina D ed E (E è più vicino a C) i punti di intersezione della retta r con la circonferenza C_1.*
7. *Traccia la circonferenza C_2 di centro A e raggio EC, che interseca la circonferenza C_1 nei punti G ed F (G appartiene allo stesso semipiano individuato da r, contenente C).*
8. *Traccia la retta CG, che è la parallela alla retta AB, passante per C.*

8.1.1 Rette parallele tagliate da una trasversale

Due rette parallele a e b vengono intersecate da una retta c (detta *trasversale*) che non è parallela ad esse,

- se la retta c è perpendicolare (ad entrambe), si vengono a formare otto angoli retti;
- se la retta c non è perpendicolare ad esse, si vengono a formare otto angoli, di cui quattro acuti e quattro ottusi, rispetto alla posizione che occupano alle coppie vengono attribuiti i seguenti nomi (figura 8.1):
  - le coppie di angoli 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 si dicono *corrispondenti* (perché occupano posizioni analoghe da una parallela all'altra);
  - le coppie di angoli 3 e 5, 4 e 6 si dicono *alterni interni* (alterni perché occupano posizioni opposte rispetto alla trasversale, interni perché si trovano all'interno delle due parallele);
  - le coppie di angoli 1 e 7, 2 e 8 si dicono *alterni esterni* (alterni perché sono opposti rispetto alla trasversale; esterni perché si trovano all'esterno della zona tra le due parallele);
  - le coppie di angoli 3 e 6, 4 e 5 si dicono *coniugati interni* (si dicono coniugati perché stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale);
  - le coppie di angoli 1 e 8, 2 e 7 si dicono *coniugati esterni*.

Inoltre le coppie 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 sono angoli opposti al vertice.

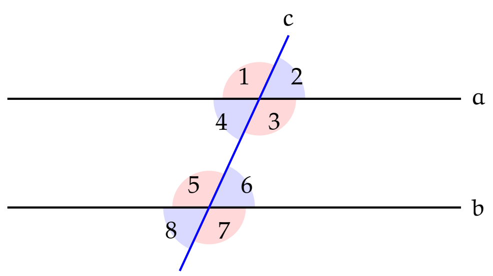
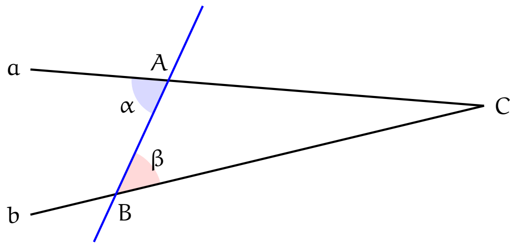


FIGURA 8.1: Le rette parallele a e b sono tagliate dalla trasversale c

Teorema 8.2 (delle parallele [diretto])**.** *Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.*



Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette a e b non siano parallele. Se non sono parallele si incontreranno in un punto C e quindi tra esse e la trasversale si viene a formare il triangolo ABC. Per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, l'angolo (esterno) α è maggiore dell'angolo (interno) β. Questa conseguenza contraddice l'ipotesi del teorema, secondo la quale gli angoli alterni interni α e β sono congruenti. Allora abbiamo sbagliato a negare la tesi, che perciò risulta vera. □

Possiamo generalizzare il teorema precedente ad altri casi.

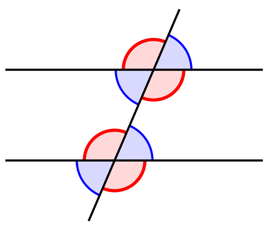
Teorema 8.3 (Criterio di parallelismo)**.** *Se due rette tagliate da una trasversale danno origine ad una tra le seguenti coppie di angoli*

- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari*

allora sono parallele.

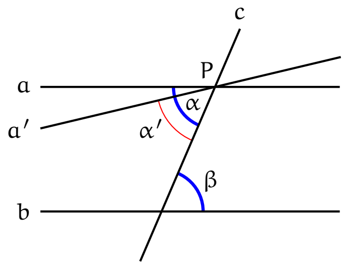
Dimostrazione. Tenendo conto che due angoli opposti al vertice sono congruenti e due angoli adiacenti sono supplementari, se risulta che due angoli corrispondenti qualsiasi sono congruenti, allora i quattro angoli acuti sono tutti congruenti ed i quattro angoli ottusi sono congruenti, e quindi anche angoli alterni interni. Pertanto, per il teorema precedente, le rette sono parallele.

Analogamente, se risultano supplementari due qualsiasi angoli coniugati (interni o esterni) risulta sempre che i quattro angoli acuti sono tutti congruenti tra loro come i quattro angoli ottusi, pertanto gli angoli alterni interni sono congruenti e, sempre per il teorema precedente, le due rette sono parallele. □



Teorema 8.4 (delle parallele [inverso])**.** *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualsiasi due angoli alterni interni congruenti.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che esista una coppia di angoli alterni interni α e β con $\alpha > \beta$. Per il punto P, vertice dell'angolo α si potrà allora tracciare una retta a' in modo che l'angolo da essa formato α' sia congruente a β. Ne segue che a' e b sono parallele perché formano angoli alterni interni congruenti. Allora esisterebbero due rette distinte, a e a', passanti per lo stesso punto P, entrambe parallele alla retta b. Questa conclusione contraddice il V postulato di Euclide, secondo il quale per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. In altre parole la tesi è vera. □



In generale possiamo enunciare il seguente

Teorema 8.5. *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualunque*

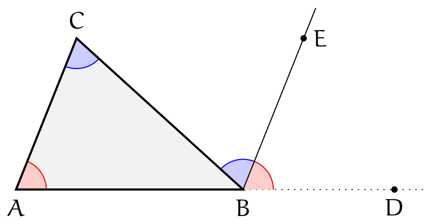
- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono congruenti gli angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale. Tenendo conto che gli angoli opposti al vertice sono congruenti e gli angoli adiacenti sono supplementari, si possono dedurre facilmente tutte le tesi di questo teorema. □

8.2 Somma degli angoli interni di un triangolo

Passiamo ora a dimostrare il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

Teorema 8.6. *In un triangolo, un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.*



Dimostrazione. Sia ABC un triangolo e sia $C\widehat{B}D$ un angolo esterno. Tracciamo la semiretta $BE \parallel AC$ che divide l'angolo $C\widehat{B}D$ in due parti, $C\widehat{B}E$ ed $E\widehat{B}D$. L'angolo $C\widehat{B}E$ risulta congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ in quanto i due angoli sono alterni interni rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale CB; analogamente l'angolo $E\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $C\widehat{A}B$ in quanto i due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale AD. Dunque $C\hat{B}D$ è congruente alla somma degli angoli interni di vertici A e C. □

Corollario 8.7. *La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.*

Dimostrazione. Dalla figura precedente $A\hat{B}D \cong A\hat{B}C + C\hat{B}E + E\hat{B}D \cong A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B$, pertanto la somma degli angoli interni è congruente all'angolo piatto $A\hat{B}D$. □

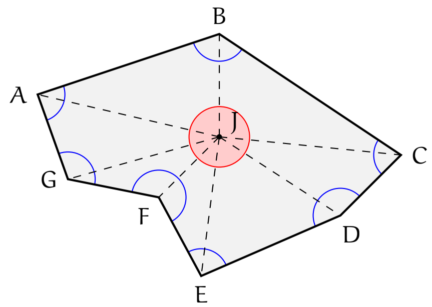
Corollario 8.8. *Un triangolo non può avere più di un angolo retto e/o ottuso.*

Dunque, necessariamente almeno due angoli sono acuti. Di conseguenza, gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

8.3 Somma degli angoli interni di un poligono

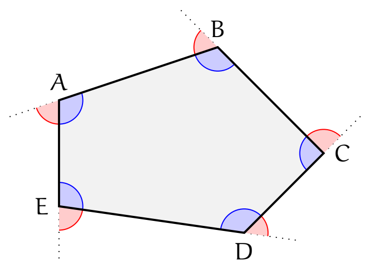
Teorema 8.9. *Dato un poligono P di n lati, la somma degli angoli interni di P è $n-2$ angoli piatti.*

Dimostrazione. Infatti, dato un qualunque poligono (anche concavo) di n lati, scelto un opportuno punto interno J in modo che, congiunto con esso ciascun vertice il poligono resti diviso in n triangoli, si può osservare che la somma degli angoli interni del poligono è data dalla somma degli angoli interni di n triangoli (n angoli piatti) meno l'angolo giro (2 angoli piatti) in J. □



Teorema 8.10. *La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso, indipendentemente dal numero dei lati, è congruente ad un angolo giro.*

Dimostrazione. Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno, per cui se si hanno m lati, e quindi m vertici, la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è pari ad m angoli piatti. Essendo la somma degli angoli interni congruente a $m-2$ angoli piatti (per il teorema precedente), la somma degli angoli esterni sarà di due angoli piatti, cioè un angolo giro. □

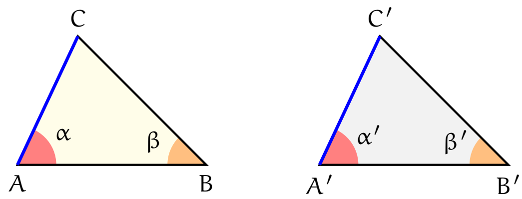


8.4 Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente due angoli congruenti, allora anche i terzi angoli saranno congruenti nei due triangoli, in quanto supplementari della somma di angoli congruenti.

Dunque, se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli, anche se il lato congruente non è compreso tra i due angoli congruenti, risultano congruenti. Precisamente, vale la seguente proposizione.

Teorema 8.11 (Generalizzazione del 2° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti una coppia di lati e due coppie di angoli ugualmente posti rispetto ai lati congruenti.*



Dimostrazione. Il caso in cui il lato congruente è compreso tra gli angoli congruenti è stato già dimostrato (2° criterio di congruenza dei triangoli) ed utilizzato per la dimostrazione di varie proprietà. Ora consideriamo l'altro caso.

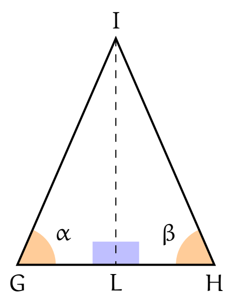
In figura abbiamo rappresentato due triangoli, ABC e $A'B'C'$ che hanno per ipotesi i lati $AC \cong A'C'$ e gli angoli $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$. I due triangoli risultano congruenti, poiché deve risultare $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$, in quanto tali angoli sono supplementari alla somma di angoli congruenti per ipotesi (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto). Ci riconduciamo quindi al caso del 2° criterio di congruenza, già dimostrato in precedenza. □

Riprendiamo una proprietà dei triangoli isosceli che abbiamo enunciato ma non abbiamo dimostrato.

Proposzione 8.12. *In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.*

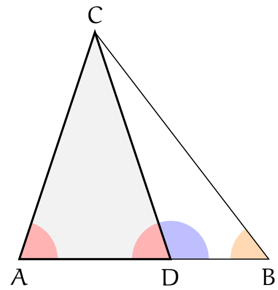
Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha \cong \beta$, $IL \perp GH$.
Tesi: $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$, $GL \cong LH$.

Dimostrazione. I triangoli GLI e LHI sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo congruenti un lato (quello obliquo, $IG \cong IH$) e due angoli ($\alpha \cong \beta$ e $I\widehat{L}G \cong I\widehat{L}H$). Di conseguenza, i restanti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare $GL \cong LH$ e $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$. □



❑ **Osservazione** Dall'esame dei primi tre criteri di congruenza dei triangoli, nonché dalla generalizzazione del secondo criterio, si potrebbe essere indotti a pensare che due triangoli sono congruenti se hanno tre coppie di elementi rispettivamente congruenti, se almeno una delle tre coppie di elementi è costituita da lati.

In realtà, il primo criterio non si può generalizzare come il secondo. Basta pensare alla figura a lato: ADC è un triangolo isoscele, B è un punto sul prolungamento della base AD. Unendo B con C, vengono individuati due nuovi triangoli, ABC e BCD che hanno in comune il lato CB e l'angolo di vertice B, ed hanno inoltre congruenti i lati AC e CD, ma evidentemente non sono congruenti. Quindi se due triangoli hanno due lati ed un angolo qualsiasi congruenti, non è detto che siano congruenti. Però nei due triangoli citati in figura, gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{D}B$ sono supplementari.



8.4.1 Congruenze di triangoli rettangoli

Per quanto affermato nelle proposizioni precedenti, sappiamo che i triangoli rettangoli hanno una coppia di angoli congruenti (quelli retti, essendo tutti congruenti fra loro, come affermato dal IV postulato di Euclide) e gli altri angoli necessariamente acuti, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto (come segue dal secondo teorema dell'angolo esterno e dai corollari).

Tenendo conto dunque dei criteri di congruenza dei triangoli, si possono riformulare dei criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli. Di questi ultimi omettiamo la dimostrazione.

Teorema 8.13 (Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli)**.** *Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti almeno uno tra:*

- *i due cateti (1^o criterio);*
- *l'ipotenusa e un angolo acuto (2^o criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto adiacente (2^o criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto opposto (2^o criterio);*
- *un cateto e l'ipotenusa (4^o criterio).*

A titolo esemplificativo, ecome applicazione dei criteri, proponiamo qui di seguito due possibili costruzioni di triangoli rettangoli mediante l'utilizzo della riga e del compasso.

Procedura 8.14. *Costruisci un triangolo rettangolo i cui cateti sono congruenti a due segmenti dati:*

1. *Traccia un segmento e denominalo AB.*
2. *Traccia un segmento e denominalo CD.*
3. *Traccia un punto E e la circonferenza c′ di centro E e raggio AB.*
4. *Considera sulla circonferenza c′ un punto e denominalo F.*
5. *Traccia il segmento EF.*
6. *Costruisci la retta r passante per E e perpendicolare a EF.*
7. *Traccia la circonferenza c″ di centro E e raggio CD.*
8. *Denomina G e G′ le intersezioni della retta r con la circonferenza c″ tracciata.*
9. *Il triangolo EFG è rettangolo e ha i due cateti EF e EG congruenti ai due segmenti AB e CD dati.*
10.

Anche il triangolo EFG′ è rettangolo e ha i due cateti EF e EG′ congruenti ai due segmenti AB e CD dati.

Procedura 8.15. *Costruisci un triangolo rettangolo, dato un cateto e un angolo adiacente al cateto:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Costruisci l'angolo CDE.*
3. *Traccia un punto F .*
4. *Traccia la circonferenza di centro F e raggio AB.*
5. *Traccia arbitrariamente sulla circonferenza un punto G.*
6. *Traccia la semiretta di origine G e passante per F.*
7. *Trasporta l'angolo CDE sulla semiretta GF.*
8. *Costruisci la perpendicolare s a FG e passante per F.*
9. *H è il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo (diverso dalla semiretta FG) con la perpendicolare s.*
10. *Il triangolo GFH è il triangolo rettangolo in F, con un angolo acuto congruente a CDE (quale?................) e un cateto congruente ad AB (quale? …..............)*

Procedura 8.16. *Costruisci un triangolo rettangolo, dato un cateto e l'ipotenusa:*

1. *Traccia un segmento AB e un segmento DE > AB.*
2. *Traccia un punto F del piano.*
3. *Traccia la circonferenza di centro F e raggio congruente ad AB.*
4. *Sia G un punto della circonferenza.*
5. *Traccia il segmento FG e la retta r perpendicolare a FG e passante per F.*
6. *Traccia la circonferenza di centro G e raggio congruente a DE,*
7. *Denomina H il punto di intersezione fra la retta r e la circonferenza.*
8. *Il triangolo HFG è il triangolo rettangolo con un cateto congruente ad AB e l'ipotenusa congruente a DE.*

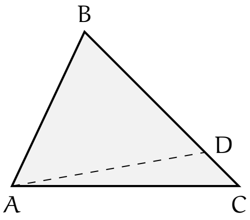
Si può dire che il triangolo rettangolo si forma in ogni caso?

8.5 Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

Teorema 8.17. *In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*

Ipotesi: $BC > AB$. Tesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$.

Dimostrazione. Scegliamo opportunamente un punto D sul lato maggiore BC in modo che BD sia congruente ad AB. Se uniamo A con D, poiché il segmento AD è interno al triangolo ABC, il triangolo ABC viene diviso in due nuovi triangoli, ADB e ACD. Il triangolo ADB è isoscele sulla base AD pertanto ha gli angoli alla base congruenti, per cui risulta $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$. Ma $B\widehat{A}D$ è una parte propria di $B\widehat{A}C$, mentre $A\widehat{D}B$, come angolo esterno al triangolo ACD è maggiore dell'angolo $A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$, interno non adiacente, per il primo teorema dell'angolo esterno. Si ha dunque: $B\widehat{A}C > B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B > A\widehat{C}B$ e quindi la tesi (in maniera del tutto analoga si può dimostrare che $B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$). □



Teorema 8.18. *In un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.*

Ipotesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Tesi: $BC > AB$.

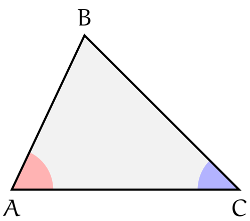
Dimostrazione. Dimostriamo la tesi in maniera indiretta, facendo uso del teorema precedente e del teorema del triangolo isoscele. Supponiamo vera l'ipotesi $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Facciamo un confronto tra i segmenti BC e AB considerando tutte le possibilità. È possibile che sia:

(i) $BC \cong AB$; (ii) $BC < AB$; (iii) $BC > AB$.

Se fosse vera la (i), il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base AC e risulterebbe $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, per il teorema del triangolo isoscele, contro l'ipotesi.

Se fosse vera la (ii), per il teorema precedente risulterebbe $B\widehat{A}C < A\widehat{C}B$, contro l'ipotesi.

Rimane solo la possibilità che sia vera la (iii), la quale infatti non contraddice il teorema precedente, anzi lo conferma. Quindi la tesi è dimostrata. □

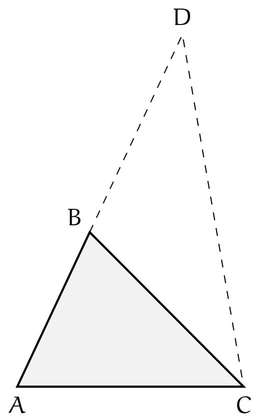


Da questo teorema discende la proprietà che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti, in quanto l'ipotenusa è il lato che si oppone all'angolo maggiore, l'angolo retto.

Ora dimostriamo una proprietà importante dei triangoli, nota come *disuguaglianza triangolare*.

Teorema 8.19 (Disuguaglianza triangolare)**.** *In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Dimostrazione. In riferimento alla figura a lato, dimostriamo che nel triangolo ABC, $AC < AB + BC$. Se AC fosse minore di un altro lato, sicuramente sarebbe minore della somma degli altri due e il teorema sarebbe dimostrato. Esaminiamo il caso in cui AC è maggiore sia di AB che di BC. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un punto D sul prolungamento in modo che il segmento BD sia congruente a BC. Unendo D con C abbiamo il triangolo ACD nel quale il lato AD è congruente alla somma dei lati AB e BC. La tesi si riconduce dunque a dimostrare che il lato AC è minore di AD. Osserviamo che il triangolo CBD è isoscele sulla base CD, per cui i suoi angoli alla base sono congruenti: $B\widehat{C}D \cong B\widehat{D}C$. Ma l'angolo $B\widehat{C}D$ è una parte propria di $A\widehat{C}D$ che quindi risulta maggiore di $B\widehat{C}D \cong A\widehat{D}C$. Dunque, nel triangolo ACD, il lato AD, che si oppone ad angolo maggiore, è maggiore del lato AC, che si oppone ad angolo minore, per il teorema precedente.



Visto che la costruzione fatta si può ripetere tale e quale rispetto a qualsiasi lato, si può concludere che $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$ e dunque, sottraendo ad ambo i membri della prima disuguaglianza il lato BC si ha $AC - AB < BC$, analogamente, sottraendo uno stesso segmento, si hanno $AC - BC < AB$, $AC - BC < AB$, $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$, $BC - AC < AB$, $BC - AB < AC$. Leggendo le relazioni da destra verso sinistra, ogni lato è maggiore della differenza degli altri due (abbiamo scritto tutte le disuguaglianze, anche se ovviamente ogni lato ha misura positiva mentre la differenza tra due lati può essere anche nulla o negativa). □

Proponiamo ora un teorema sulle disuguaglianze tra gli elementi di due triangoli.

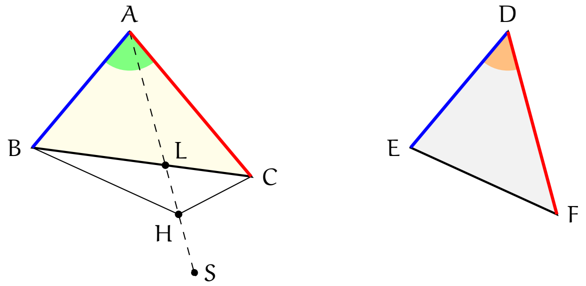
Supponiamo di avere due triangoli aventi due coppie di lati rispettivamente congruenti. Allora, se anche gli angoli compresi sono congruenti, i due triangoli risultano congruenti per il primo criterio. Altrimenti, se i due angoli compresi tra i lati congruenti non sono congruenti, i due triangoli non sono congruenti, ed i terzi lati sono diseguali nello stesso verso degli angoli opposti ad essi (cioè compresi tra i lati congruenti).

Teorema 8.20. *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente congruenti a due lati di un altro triangolo, e l'angolo tra essi compreso è nel primo triangolo maggiore che nel secondo, allora il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$ ($AB \leqslant AC$). Tesi: $BC > EF$.

Dimostrazione. Tracciamo la semiretta AS di origine A, interna all'angolo $B\widehat{A}C$, in modo tale che $B\widehat{A}S \cong E\widehat{D}F$. Se prendiamo su AS il punto H tale che $AH \cong DF$ ed uniamo H con B, otteniamo un triangolo ABH congruente a DEF per il primo criterio.

È importante dimostrare che il punto H è esterno al triangolo ABC. Per dimostrare ciò, prendiamo il punto L, intersezione tra la semiretta AS ed il lato BC. Notiamo che abbiamo iniziato la costruzione a partire dal lato AB avendo supposto $AB \leqslant AC$, ma da questa disuguaglianza segue la corrispondente disuguaglianza tra gli angoli opposti: $A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$.



L'angolo $A\widehat{L}C$ è esterno al triangolo ABL, pertanto è maggiore dell'angolo $A\widehat{B}C$ per il primo teorema dell'angolo esterno. Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha $A\widehat{L}C > A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$, dunque nel triangolo ALC vale la seguente relazione tra due angoli: $A\widehat{L}C > A\widehat{C}B$. Vale quindi anche la corrispondente relazione tra i lati opposti, per cui $AC > AL$. Poiché $AX \cong DF \cong AC$, il punto L è interno al segmento AH, e dunque H è esterno al triangolo ABC.

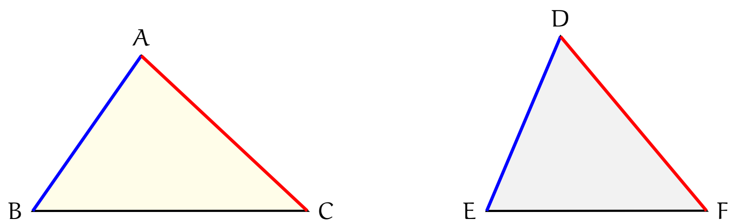
Abbiamo già unito H con B, uniamo H anche con C e ragioniamo sul triangolo BHC. Essendo BH congruente ad EF, la tesi è ricondotta a dimostrare che BC è maggiore di BH. Confrontiamo i rispettivi angoli opposti. Poiché il triangolo AHC è isoscele sulla base HC, gli angoli alla base risultano congruenti $A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H$, dunque risulta $B\widehat{H}C \cong B\widehat{C}H$ perché:

$$B\widehat{H}C = B\widehat{H}A + A\widehat{H}C > A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H = A\widehat{C}B + B\widehat{C}H > B\widehat{C}H.$$

Dalla precedente disuguaglianza tra gli angoli segue la corrispondente disuguaglianza tra i lati opposti $BC > BH$ e dunque la tesi. □

Teorema 8.21. *Se due lati di un triangolo sono, rispettivamente, congruenti a due lati di un altro triangolo, e il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo, allora l'angolo opposto al lato diseguale (compreso tra i lati congruenti) è nel primo triangolo maggiore che nel secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC > EF$. Tesi: $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.



Dimostrazione. Procediamo per esclusione, in maniera analoga a come abbiamo fatto nel teorema inverso sulle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Supponiamo vera l'ipotesi e studiamo i vari casi delle possibili relazioni tra gli angoli citati nella tesi. Sono possibili tre casi:

(i) $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$; (ii) $B\widehat{A}C < E\widehat{D}F$; (iii) $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.

Se valesse l'ipotesi (i), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, i triangoli risulterebbero congruenti per il primo criterio, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

Se valesse l'ipotesi (ii), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, per il teorema precedente risulterebbe $BC < EF$, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

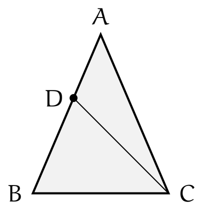
Rimane l'ipotesi (iii), che non contraddice il teorema precedente e che anzi lo conferma. Dunque la tesi è dimostrata. □

Esempio 8.1. Nel triangolo ABC, isoscele sulla base BC, sia D un punto qualsiasi sul lato AB. Dimostra che $DC > DB$.

Individuiamo ipotesi, tesi e costruiamo il disegno.

Ipotesi: $AB \cong AC$, $D \in AB$.   Tesi: $CD > BD$.

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ABC e DBC a lato. Poiché $B\widehat{C}D < B\widehat{C}A$ e $B\widehat{C}A \cong A\widehat{B}C$ si ha che $B\widehat{C}D < D\widehat{B}C$. Quindi, poiché in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore, considerando il triangolo DBC si ha $CD > BD$. □



8.6 Esercizi

8.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

8.1 Rette parallele

8.1. Vero o Falso?

a) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano quattro angoli alterni interni V F
b) Gli angoli corrispondenti sono a due a due interni o esterni V F
c) Gli angoli interni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
d) Gli angoli esterni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
e) Due rette parallele possono anche coincidere V F
f) La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza V F
g) Due rette distinte hanno sempre un punto in comune V F
h) Una retta che incontra due rette parallele forma angoli alterni interni supplementari V F
i) Per ogni retta è possibile tracciare una sola retta parallela V F
j) Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni allora sono parallele V F
k) Nel ragionamento per assurdo si nega l'ipotesi per dimostrare che la tesi è vera V F
l) Ragionando per assurdo si nega la tesi e si ottenere una contraddizione con l'ipotesi V F

[a) F, b) F, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V]

8.2. Nella figura 8.2 disegna una parallela e una perpendicolare alla retta r passanti per P e una parallela e una perpendicolare a s passanti per Q.

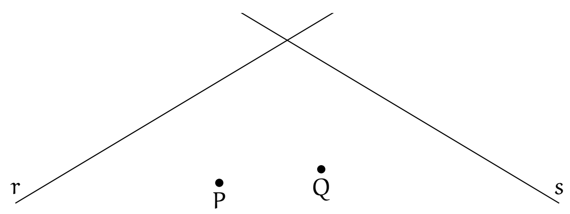


FIGURA 8.2: Esercizio 8.2

8.3. Nella figura 8.3 sono state tracciate due rette parallele e una trasversale. Indica con un arco gli angoli corrispondenti.

8.4. Nella figura a fianco sono state tracciate due rette parallele e una trasversale, sapendo che $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, dove π è l'angolo piatto, indica che frazione dell'angolo piatto sono gli altri angoli:

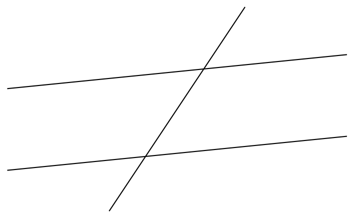
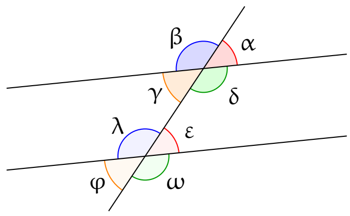


FIGURA 8.3: Esercizio 8.3

$\alpha = \frac{1}{3}\pi$
$\beta = \ldots$
$\gamma = \ldots$
$\delta = \ldots$
$\varepsilon = \ldots$
$\lambda = \ldots$
$\varphi = \ldots$
$\omega = \ldots$



$[\alpha = \frac{1}{3}\pi, \beta = \frac{2}{3}\pi, \gamma = \frac{1}{3}\pi, \delta = \frac{2}{3}\pi, \varepsilon = \frac{1}{3}\pi, \lambda = \frac{2}{3}\pi, \varphi = \frac{1}{3}\pi, \omega = \frac{2}{3}\pi]$

8.5. Nella figura 8.4 ABC è un triangolo isoscele, IF è parallela a BC. Individua tutti gli angoli congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$.

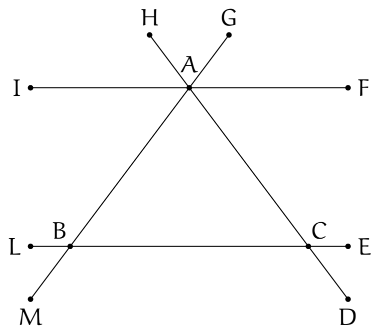
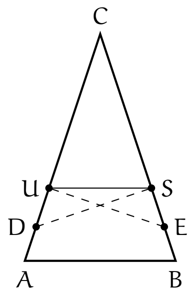


FIGURA 8.4: Esercizio 8.5

8.6. Completa ipotesi e tesi e metti in ordine le tre parti della dimostrazione:
In un triangolo ABC, isoscele su base AB, si prendano rispettivamente su AC e BC i punti D ed E equidistanti da C. Indicata con S la proiezione di D su BC e con U quella di E su AC. Dimostrare che il segmento US è parallelo ad AB.

Ipotesi: $AC \cong \ldots$, $D \in AC$, $E \in \ldots$, $S \in BC$, $DS \perp BC$, $U \in \ldots$, $EU \perp \ldots$ Tesi: $US \parallel AB$.



Parte 1. I triangoli CDS e CEU hanno: l'angolo $\widehat{C}$ in comune, CD … CE per ……, $D\widehat{S}C$ ……… perché angoli ……, quindi tali triangoli sono congruenti per il ………, ne segue CS … CU e pertanto $C\widehat{U}S \cong$ …

Parte 2. Applicando il teorema sulla somma degli angoli interni ai triangoli ABC e CUS, si ha che $C\widehat{U}S + C\widehat{S}U \ldots C\widehat{A}B + C\widehat{B}A$ perché supplementari dello stesso angolo $\widehat{C}$, ed essendo $\widehat{A} \ldots\ \widehat{B}$ perché ……… ed essendo $C\widehat{U}S$ …… perché ………, risulta che $C\widehat{A}B \ldots\ C\widehat{U}S$ perché ………

Parte 3. Gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{U}S$ (congruenti perché dimostrato) sono angoli …… rispetto alle rette AB e US tagliate dalla trasversale …, quindi le rette AB e US sono parallele.

8.7 (Prove invalsi 2005). A, B e C sono tre punti nel piano tali che per i seguenti tre angoli, tutti minori di un angolo piatto, valga la relazione $B\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B$. Quanto vale $B\widehat{A}C$?

a) 70°; b) 80°; c) 90°; d) 100°.

[c]

Dimostra le seguenti affermazioni sul parallelismo nei poligoni

8.8. Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli, uno di essi è 1/3 dell'angolo retto. Determina le misure degli altri angoli.

8.9. Siano α e β due angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è parallela alla bisettrice di β.

8.10. Siano α e β due angoli coniugati formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è perpendicolare alla bisettrice di β.

8.11. Nel triangolo isoscele ABC traccia una parallela alla base AB, che incontra i lati obliqui in D ed E. Dimostra che anche DCE è un triangolo isoscele.

8.12. Sia M il punto medio del segmento AB. Sia r una retta che incontra AB in M. Sulla retta r da parti opposte rispetto a M prendi due punti C e D in modo che AC ∥ BD. Dimostra che AC ≅ BD.

8.13. Dal vertice C di un triangolo isoscele ABC conduci la parallela alla base AB. Dimostra che tale parallela è bisettrice dell'angolo esterno in C al triangolo.

8.14. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Sia r la semiretta di origine C bisettrice dell'angolo formato dal prolungamento di BC e dal lato AC. Dimostra che la retta per AB è parallela a r.

8.15. Dato il triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prolunga la base AB dalla parte di A di un segmento AD. Sia E un punto interno all'angolo $D\widehat{A}C$ in modo che $E\widehat{A}D \cong C\widehat{A}B$. Dimostra che EA ∥ CB.

8.16. Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Detti D, E ed F i punti di intersezione delle parallele, dimostra che il triangolo DEF ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC.

8.17. Sia AD la bisettrice dell'angolo in A del triangolo ABC. Dal punto D traccia la parallela al lato AB, essa incontra il lato AC in E. Dimostra che il triangolo EDC ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC. Dimostra anche che ADE è un triangolo isoscele.

8.18. In un triangolo ABC rettangolo in A traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che il triangolo ABH ha gli angoli congruenti a quelli di ABC.

8.19. In un triangolo ABC sia E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC. Sia D un punto del lato AB tale che $DE \cong DB$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

8.20. Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento $AD \cong AB$, prolunga poi il lato AC dalla parte di A di un segmento $AE \cong AC$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

8.21. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Si prolunghi AM dalla parte di M di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che CD è parallelo ad AB.

8.22. Disegna due segmenti AB e CD disposti in modo che si incontrino nel loro punto medio comune M. Congiungi A con D e B con C, dimostra che AD è parallelo a CB.

8.23. Disegna un angolo acuto $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi l'asse del segmento OP. Indica con Q e R i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con la semiretta a e la semiretta b. Dimostra che OQ è parallelo a RP.

8.24. Disegna un angolo convesso $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi le perpendicolari PR e PQ rispettivamente alle semirette a e b. Dimostra che c è asse del segmento QR.

8.25. Sia ABC un triangolo equilatero. Traccia una parallela al lato AB che incontra il lato BC in D e AC in E. Dimostra che anche il triangolo CDE è equilatero.

8.26. Dimostra che in un triangolo isoscele la congiungente i punti medi dei lati congruenti è parallela alla base del triangolo.

8.2 Somma degli angoli interni di un triangolo

8.27. Vero o Falso?

a) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo esterno $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a 3 angoli piatti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) La somma degli angoli esterni di un pentagono è congruente a 5 angoli piatti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a due angoli retti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) Un triangolo isoscele non può avere un angolo ottuso $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

8.28. Sia ABC un triangolo equilatero. Si prolunghi AB di un segmento BD congruente al lato stesso e si congiunga D con C. Si dimostri che ACD è un triangolo rettangolo.

8.29. Calcola la misura degli angoli di un triangolo ABC sapendo che l'angolo interno in A è $4/5$ del relativo angolo esterno e che l'angolo interno in B è la metà dell'angolo interno in A.

8.30 (I Giochi di Archimede 2005). Nella figura seguente, quanto misura l'angolo α?

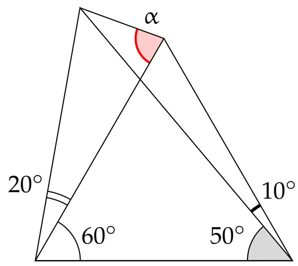


FIGURA 8.5: Esercizio 8.17

8.4 Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

8.31. Vero o Falso?

a) Un triangolo rettangolo ha due angoli complementari V F
b) Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno almeno un lato congruente V F
c) Due triangoli rettangoli che hanno un cateto in comune sono congruenti V F
d) Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune sono congruenti V F
e) Due triangoli rettangoli isosceli sono sempre congruenti V F
f) Due triangoli rettangoli isosceli che hanno un lato in comune sono congruenti V F
g) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari V F

Dimostra le seguenti affermazioni sui teoremi di congruenza generalizzati

8.32. Dimostra che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti.

8.33. Dimostra che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.

8.34. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l'angolo al vertice.

8.35. In un triangolo isoscele, le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

8.36. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

8.37. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e la mediana relativa ad esso.

8.38. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo acuto e la sua bisettrice.

8.39. Se due triangoli hanno congruenti due coppie di lati e le mediane relative ai lati rimanenti, allora sono congruenti.

8.40. Dato un angolo convesso $a\widehat{O}b$ traccia la sua bisettrice c. Per un punto P della bisettrice traccia la perpendicolare alla bisettrice stessa. Chiama A e B i punto di intersezione della perpendicolare con i lati a e b dell'angolo convesso. Dimostra che P è punto medio di AB.

8.41. Dato il triangolo isoscele ABC, di base AB, sul prolungamento dell'altezza relativa ad AB prendi un punto P. Traccia le rette PA

e PB. Dimostra che l'angolo formato dalle rette PA e CA è congruente all'angolo formato dalle rette per PB e CB.

8.42. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Dimostra che se ABM è isoscele il triangolo ABC è rettangolo e viceversa, se il triangolo ABC è rettangolo in A allora ABM è isoscele.

8.43. Nel triangolo ABC traccia la media CM e il suo prolungamento MD a piacere. Da A conduci la perpendicolare alla mediana che la incontra in E, da B conduci un'altra perpendicolare alla mediana che la incontra in F. Dimostra che i triangoli AEM e BFM sono congruenti.

8.44. Sia ABC un triangolo acutangolo. Nel semipiano di origine AB che non contiene C individua un punto D in modo che $B\widehat{A}D \cong C\widehat{B}A$. Dimostra che $CB \parallel AD$. Nell'ipotesi in cui $AD \cong CB$ dimostra che anche $AC \parallel BD$.

8.5 Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

8.45. Vero o Falso?

a) Esiste un triangolo i cui lati misurano 10 cm, 3 cm e 15 cm $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) Un triangolo isoscele può essere ottusangolo $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) Dati tre segmenti di cui almeno uno maggiore degli altri è sempre possibile costruire un triangolo che ha lati congruenti ai tre segmenti dati $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) Dai tre segmenti di cui due uguali e uno maggiore degli altri due è sempre possibile costruire un triangolo isoscele che ha lati congruenti ai tre segmenti dati $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è minore della somma dei due cateti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) Un triangolo di perimetro 100 cm non può avere un lato di 60 cm $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) In un triangolo l'angolo che si oppone al lato maggiore è sempre acuto $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) In un triangolo rettangolo i cateti sono sempre congruenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa può essere congruente ad un cateto $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
j) Un triangolo può avere due lati disuguali e due angoli uguali $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[a) F, b) V, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) V]

Dimostra le seguenti affermazioni

8.46. Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

8.47. In un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.

8.48. Dimostra che in un triangolo il doppio di un lato è minore del perimetro del triangolo.

8.49. In un triangolo ogni lato è minore del semiperimetro.

8.50. In un triangolo l'altezza è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

8.51. Esternamente al triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Dimostra che il perimetro di ABC è minore del doppio della somma delle distanze di D dai tre vertici del triangolo.

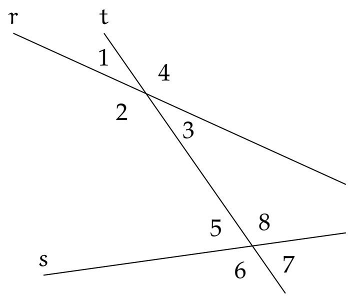
8.52. Nel triangolo ABC traccia la mediana AM relativa al lato BC, dimostra che AM è minore della semisomma degli altri due lati AB e AC. (Prolunga la mediana di un segmento congruente alla mediana stessa.)

8.53. Dato un triangolo ABC in cui $AB < AC$ traccia l'altezza AH relativa alla base BC. Dimostra che l'angolo $H\widehat{A}C$ è maggiore dell'angolo $H\widehat{A}B$.

8.54. Due triangoli rettangoli hanno un cateto in comune e l'angolo opposto al cateto in comune è maggiore nel primo triangolo. Dimostra che l'ipotenusa del primo triangolo è minore di quella del secondo.

8.55. Disegna un punto D interno a un triangolo ABC qualsiasi. Dimostra che $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$.

8.56 (Prove invalsi 2004).
Le rette r ed s sono tagliate dalla trasversale t. Quale delle seguenti condizioni permette di stabilire, per qualunque posizione di t, che r ed s sono parallele?
Gli angoli …



a) 1 e 5 sono supplementari;
b) 2 e 8 sono uguali;
c) 3 e 7 sono supplementari;
d) 4 e 7 sono uguali.

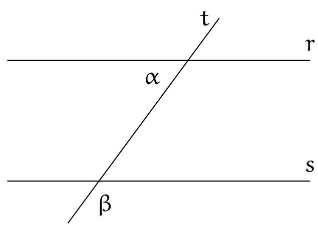
[b]

8.57 (Prove invalsi 2006). Per un triangolo ottusangolo qualsiasi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) La somma dei suoi due angoli più piccoli è minore dell'angolo più grande.
b) Il punto di incontro degli assi dei lati è certamente interno al triangolo.
c) Il triangolo è necessariamente isoscele.
d) Il triangolo può essere rettangolo.

[a]

8.58 (Prove invalsi 2006).
r ed s sono due rette parallele tagliate da una trasversale t. Quale tra le seguenti proposizioni è vera qualunque sia la posizione di t? Gli angoli α e β sono …



a) supplementari;
b) uguali;
c) complementari;
d) corrispondenti.

[a]

8.59 (Prove invalsi 2004). In un triangolo, le misure dei lati sono a, b e c, con $a = b < c$. Detti α, β e γ gli angoli interni del triangolo, rispettivamente opposti ai lati a, b e c, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\alpha = \gamma$; b) $\beta = \gamma$; c) $\gamma > \alpha$; d) $\alpha > \beta$.

[c]

8.60 (Prove invalsi 2010)**.** Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm. Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

a) 6,5 cm; b) 10 cm; c) 15,5 cm; d) 17 cm.

[d]

8.61 (Prove invalsi 2005)**.** In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo?

a) $72°, 72°, 36°$; b) $30°, 60°, 90°$; c) $36°, 36°, 72°$; d) $90°, 45°, 45°$.

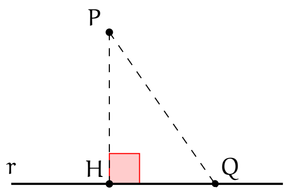
[a]

Quadrilateri 9

"In geometry, a rhombus or rhomb is a quadrilateral whose four sides all have the same length"
Foto di pursanovd
http://www.flickr.com/photos/pursanovd/3669422214/

9.1 Generalità sui quadrilateri

9.1.1 Distanza di un punto da una retta e altezza di una striscia di piano



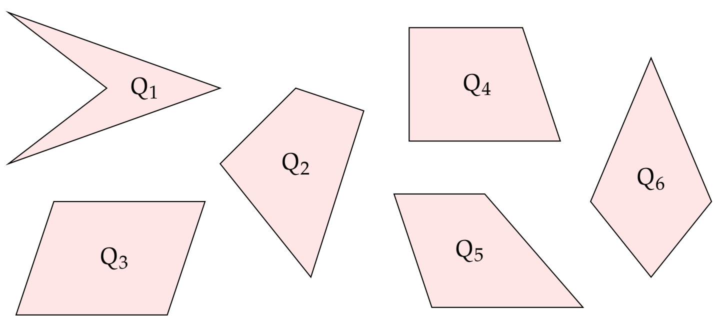
Ricordiamo che come definizione di (*misura* della) *distanza di un punto da una retta* è stata presa la lunghezza del segmento congiungente il punto con il piede della perpendicolare mandata dal punto alla retta (vedi figura). Analogamente, per *distanza tra due rette parallele*, detta anche *altezza della striscia di piano individuata dalle due rette parallele*, si intende la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra retta. Vogliamo far vedere ora che queste definizioni sono coerenti con il concetto di distanza tra due insiemi di punti come *percorso più breve* che congiunge un qualsiasi punto del primo insieme con un generico punto appartenente al secondo insieme. Se congiungiamo, infatti, un generico punto P sia con H, piede della perpendicolare alla retta r, che con un altro punto $Q \in r$, viene individuato un triangolo rettangolo PHQ, di cui PH è un cateto e PQ l'ipotenusa. Dal teorema sulle disuguaglianze degli elementi di un triangolo, l'ipotenusa è certamente maggiore di un cateto in quanto lato che si oppone ad angolo maggiore (quello retto). Dunque PH è il segmento di lunghezza minore tra tutti quelli che congiungono P con un punto della retta r.

9.1.2 Generalità sui poligoni

Se un poligono ha più di tre lati, allora può anche essere concavo. Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°.

Definizione 9.1. Due lati non consecutivi di un quadrilatero si dicono *opposti*; analogamente sono detti *opposti* due angoli non adiacenti allo stesso lato.

Nella figura seguente sono rappresentati un quadrilatero concavo (Q_1), un generico quadrilatero convesso (Q_2), un quadrilatero particolare a forma di "aquilone" (Q_6) e tre quadrilateri "notevoli": Q_3 ha i lati opposti paralleli (a due a due), Q_4 e Q_5 hanno una coppia di lati opposti paralleli.



I quadrilateri che, come Q_6, hanno due lati consecutivi congruenti ed altri due lati consecutivi anch'essi congruenti, si dicono *deltoidi*; i quadrilateri che, come Q_3, hanno i lati opposti paralleli si dicono *parallelogrammi*; i quadrilateri che, come Q_4 e Q_5, hanno una coppia di lati opposti paralleli si dicono *trapezi*.

❑ **Osservazione** In analogia alla definizione di triangolo isoscele (come triangolo avente "almeno" due lati congruenti), alcuni autori definiscono trapezio un quadrilatero avente "almeno" una coppia di lati opposti paralleli: con questa definizione un parallelogramma è un particolare tipo di trapezio. Ricordiamo anche che Euclide, al contrario, classificava come trapezi tutti i quadrilateri che non fossero parallelogrammi. Noi useremo come definizione di *trapezio* quella di un *quadrilatero avente "solo" una coppia di lati opposti paralleli*. Ci riferiremo al parallelogramma come a una figura piana costituita dall'intersezione di due strisce di piano non parallele fra loro; al trapezio come intersezione tra una striscia di piano ed un angolo convesso con vertice esterno alla striscia e lati che intersecano la striscia stessa. Poiché le strisce di piano sono convesse, sia i parallelogrammi sia i trapezi, come intersezioni di figure convesse, sono convessi.

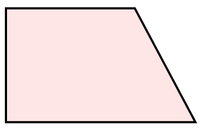
Procedura 9.1. *Dato un segmento AB e un punto C, traccia un trapezio ABCD, con CD e AB lati paralleli:*

1. *Traccia il segmento AB, il punto C e il segmento BC.*
2. *Traccia la retta passante per C e parallela ad AB.*
3. *Traccia arbitrariamente un punto D su tale retta.*
4. *Costruisci il quadrilatero ABCD*

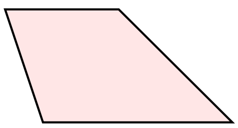
9.2 Trapezio e deltoide

Osserviamo le figure seguenti. I quadrilateri $ABCD$, $EFGH$, $IJKL$ e $MNOP$ sono trapezi perché hanno una coppia di lati opposti paralleli. Tali lati paralleli si dicono *basi* e si distinguono in *base maggiore* e *base minore*. Gli altri lati si dicono *lati obliqui*. La distanza tra le rette parallele si dice *altezza* del trapezio. Un trapezio avente i lati obliqui congruenti si dice *isoscele*. Un trapezio avente un lato perpendicolare alle basi si dice *rettangolo*. Un trapezio che non è né isoscele né rettangolo si dice *scaleno*.

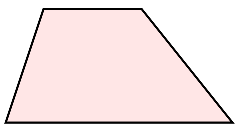
trapezio isoscele



trapezio rettangolo



trapezio scaleno



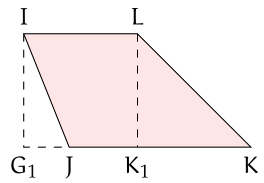
trapezio scaleno

9.2.1 Proprietà del trapezio

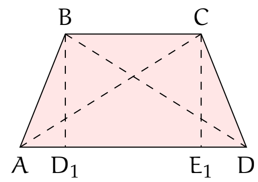
In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari. Essi, infatti, sono coniugati interni rispetto alle rette delle basi tagliate dalla trasversale individuata dal lato obliquo.

In un trapezio rettangolo, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono uno retto ed uno acuto e gli angoli adiacenti alla base minore sono uno retto ed uno ottuso. Se un trapezio avesse quattro angoli retti, i lati obliqui sarebbero entrambi perpendicolari alle basi e di conseguenza paralleli tra loro. Dunque in questo caso il trapezio risulterebbe essere un parallelogramma.

Un trapezio scaleno può avere gli angoli adiacenti alla base maggiore entrambi acuti (e quindi gli angoli adiacenti alla base minore entrambi ottusi) oppure due angoli opposti entrambi acuti e gli altri ottusi (i due tipi di trapezio scaleno sono rappresentati nella figura precedente). I quattro angoli sono comunque non congruenti, altrimenti il trapezio risulterebbe isoscele nel primo caso e un parallelogramma nel secondo caso.



In un trapezio isoscele, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono acuti e quelli adiacenti alla base minore sono ottusi. A tal proposito, facciamo riferimento al trapezio $IJKL$ nella figura a fianco per dire che non può esistere un trapezio isoscele con due angoli acuti opposti e due angoli ottusi opposti. Infatti, se fosse $IJ \cong LK$, i triangoli IG_1J e LK_1K risulterebbero congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio IJ e LK) ed una coppia di cateti (le altezze IG_1 e LK_1), da cui seguirebbe in particolare che $I\widehat{J}G_1 \cong L\widehat{K}K_1$, e pertanto l'angolo in K sarebbe supplementare dell'angolo in J, cosa che garantirebbe il parallelismo dei lati obliqui. Dunque, un ipotetico trapezio isoscele con due angoli acuti opposti sarebbe un parallelogramma.



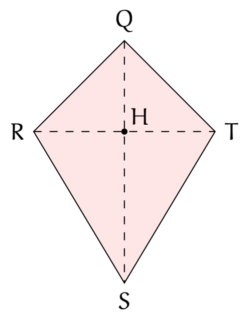
Inoltre, se il trapezio è isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono congruenti. Infatti, in riferimento al trapezio $ABCD$, traccia le altezze BD_1 e CE_1 (tra loro congruenti perché entrambe rappresentano la distanza tra due rette parallele), i triangoli AD_1B e E_1DC risultano congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio) ed una coppia di cateti (le altezze del trapezio). Pertanto i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti: $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}C$, $A\widehat{B}D_1 \cong D\widehat{C}E_1$, $AD_1 \cong E_1D$.

Dunque sono congruenti anche le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore. Quindi anche $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D$ in quanto somme di angoli congruenti $A\widehat{B}D_1 + \widehat{R} \cong D\widehat{C}E_1 + \widehat{R}$.

In un trapezio isoscele, inoltre, anche le due diagonali sono congruenti. Infatti, in riferimento sempre al trapezio $ABCD$ in figura, i triangoli ABC e DCB risultano congruenti per il primo criterio, avendo BC in comune, $AB \cong CD$ per ipotesi e gli angoli compresi (adiacenti alla base minore) congruenti per quanto appena dimostrato. Di conseguenza, i rimanenti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare i terzi lati (che sono, appunto, le diagonali AC e BD del trapezio).

9.2.2 Proprietà del deltoide

Il poligono $QRST$ nella figura a fianco è un deltoide, ha i lati a due a due congruenti $QR \cong QT$ e $RS \cong TS$. Tracciamo le diagonali QS ed RT. I triangoli QRT e STR sono isosceli sulla base comune RT. Dunque, se chiamiamo H il punto medio di RT, QH ed SH sono mediane, bisettrici e altezze (relative alla



base ed agli angoli al vertice dei due triangoli isosceli), per cui QS è perpendicolare ad RT e passa per il punto H. Quindi le due diagonali sono perpendicolari e si incontrano nel punto medio di RT. Inoltre i triangoli SQR ed STQ sono congruenti per il terzo criterio, pertanto $Q\widehat{R}S \cong Q\widehat{T}S$.

I quattro lati di un deltoide non potrebbero essere tutti congruenti, in quanto, dalla congruenza degli angoli opposti banalmente deducibile, risulterebbero i lati opposti paralleli, e quindi il deltoide sarebbe un parallelogramma. Non è al contrario escluso che un angolo possa essere retto (ma non più di uno, altrimenti il deltoide sarebbe un parallelogramma), mentre gli angoli ottusi possono essere uno, due o tre (come pure gli angoli acuti).

Lasciamo al lettore il compito di provare queste semplici proprietà, costruendo vari tipi di deltoidi.

Procedura 9.2. *Costruisci un trapezio isoscele, cioè con due lati congruenti:*

1. *Traccia il segmento AB, il punto C e il segmento BC.*
2. *Traccia la retta r passante per C e parallela ad AB.*
3. *Traccia la circonferenza di centro A e raggio BC.*
4. *Chiama D e E le due intersezioni della retta r con la circonferenza (in modo che risulti CD<CE)*
5. *ABCD è il trapezio isoscele.*
6. *ABCE invece un parallelogramma... un trapezio particolare! La suddetta costruzione quindi oltre a permetterti di disegnare un trapezio isoscele, ti consente di costruire un parallelogramma, che ha come lati due segmenti consecutivi dati.*

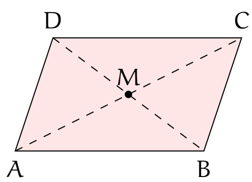
9.3 Proprietà dei parallelogrammi

Ricordiamo che, per definizione, un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

Teorema 9.3. *In ogni parallelogramma:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà.*

Ipotesi: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



Dimostrazione.

1. Tesi: $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, $B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong \pi$ (π è l'angolo piatto).
   Se $AB \parallel CD$, gli angoli in A e D sono supplementari, e così pure gli angoli in B e C, in quanto coniugati interni rispetto alle due rette parallele tagliate rispettivamente dalle trasversali AD e BC. Analogamente, se $AD \parallel BC$, gli angoli in A e B sono supplementari, ed anche gli angoli in C e D. La tesi 1 è pertanto dimostrata.
2. Tesi: $A\widehat{B}C \cong C\widehat{D}A$, $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 1. Da queste segue che gli angoli opposti sono congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo: gli angoli in A e C sono supplementari entrambi dell'angolo in B, gli angoli in B e in D sono entrambi supplementari dell'angolo in A. La tesi 2 è pertanto dimostrata.
3. Tesi: $ABC \cong CDA$, $DAB \cong BCD$.
   Tracciamo ora una diagonale, ad esempio AC, e consideriamo i due triangoli che si vengono a formare, ABC e ACD. Essendo $AB \parallel CD$, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ ed essendo $AD \parallel BC$, risulta $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, in quanto sono coppie di angoli alterni interni, i primi rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC, gli altri rispetto alle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC. I due triangoli dunque, avendo in comune il lato AC, risultano congruenti per il secondo criterio. Analogamente, applicando il ragionamento precedente ai triangoli ABD e DBC dopo aver tracciato la diagonale DB, concludiamo che anche i due triangoli ADB e DBC risultano congruenti per il secondo criterio. Pertanto la tesi 3 è dimostrata.
4. Tesi: $AB \cong CD$, $AD \cong BC$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 3. Dalla congruenza dei triangoli ABC e CDA segue la congruenza dei lati AB e CD, dalla congruenza dei triangoli DAB e BCD segue la congruenza dei lati AD e BC. Pertanto la tesi 4 è dimostrata.
5. Tesi: $AM \cong MC$, $DM \cong MB$.
   Dopo aver tracciato entrambe le diagonali, chiamiamo M il loro punto di intersezione. Confrontiamo i triangoli ABM e CDM: essi risultano congruenti per il secondo criterio, in quanto $AB \cong CD$ (tesi 4), $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$ e $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ (come visto nel punto 3 della dimostrazione). Quindi anche i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti, in particolare $AM \cong MC$ e $DM \cong MB$. Pertanto anche la tesi 5 è dimostrata.

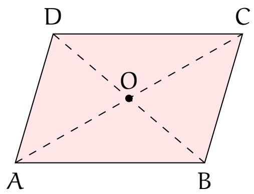
□

Il teorema precedente è invertibile. Precisamente vale il teorema seguente:

Teorema 9.4. *Se in un quadrilatero è verificata una delle seguenti ipotesi:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il quadrilatero in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà;*
6. *due lati opposti sono paralleli e congruenti;*

allora il quadrilatero è un parallelogramma.



Dimostrazione.

1. Sia per ipotesi $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$ (dove π è l'angolo piatto). Tali angoli, rispetto alle rette AD ed BC tagliate dalla trasversale AB sono coniugati interni, allora per quanto visto nel capitolo precedente sul parallelismo, le rette AD e BC sono parallele perché formano angoli coniugati interni supplementari con la trasversale AB. Analogamente, se $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, le rette AB ed DC sono parallele. Dunque ABCD è un parallelogramma, avendo i lati opposti paralleli.
2. Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura 360°, se gli angoli opposti sono congruenti, vuol dire che $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C + B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong 2D\widehat{A}B + 2A\widehat{B}C \cong 2\pi$, per cui $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, cioè gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari e per la dimostrazione precedente ABCD è un parallelogramma.
3. Essendo i triangoli ABC e BDC congruenti, l'angolo $A\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $B\widehat{D}C$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD allora le due rette AB e CD saranno parallele. In maniera analoga $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$ e quindi, essendo alterni interni rispetto alle rette BC e AD intersecate dalla trasversale BD si ha che anche $BC \parallel AD$. Quindi ABCD è un parallelogramma. allora i vertici E e G cadranno su semipiani opposti rispetto alla retta FH. Nel caso in cui i due triangoli FHE e FHG, oltre che congruenti, sono isosceli sulla base FH, il quadrilatero EFGH ha gli angoli opposti congruenti, per cui è un parallelogramma per la tesi 2. Se, al contrario, FHE e FHG non sono isosceli sulla base FH, allora dobbiamo considerare due sottocasi distinti, evidenziati in figura, con quattro diversi quadrilateri. Se fosse $EH \cong HG$ e $EF \cong FG$, la figura risulterebbe un deltoide e l'altra diagonale EG non dividerebbe il quadrilatero in due triangoli congruenti. Rimane l'altro sottocaso possibile, $EF \cong HG$ e $EH \cong FG$, ed inoltre $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$, $A\widehat{B}D \cong B\widehat{D}C$ e $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$, pertanto il quadrilatero risulta essere un parallelogramma per la 2. Dunque in ogni caso possibile la tesi è dimostrata.

4. Consideriamo la diagonale AC. Il quadrilatero $ABCD$ è diviso in due triangoli ABC e ACD congruenti per il terzo criterio. Pertanto $A\widehat{C}D \cong C\widehat{A}B$ e $A\widehat{C}B \cong C\widehat{A}D$, coppie di angoli alterni interni, nell'ordine rispetto alle rette AB e CD e rispetto alle rette AD ed BC, tagliate dalla trasversale AC. Dunque i lati opposti del quadrilatero $ABCD$ risultano paralleli, cioè è un parallelogramma.
5. Detto O il punto di incontro delle diagonali, i triangoli OAB ed OCD risultano congruenti per il primo criterio, in quanto $OA \cong OC$, $OD \cong OB$ e gli angoli tra essi compresi sono congruenti perché opposti al vertice. Di conseguenza, risulta anche $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$, che sono angoli alterni interni rispetto alle rette DC ed AB tagliate dalla trasversale AC, pertanto $DC \parallel AB$. Analogamente, considerando i triangoli congruenti OBC ed ODA si ha anche $BC \parallel AD$. Dunque $ABCD$ è un parallelogramma.
6. Supponiamo AB e CD paralleli e congruenti. Tracciata la diagonale AC, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ e dunque i triangoli ACD e CAB risultano congruenti per il primo criterio. Di conseguenza risulta $AD \cong BC$, per cui il quadrilatero ha anche l'altra coppia di lati opposti congruenti. $ABCD$ è dunque un parallelogramma per la 4.

□

Procedura 9.5. *Costruire un parallelogramma dai tre suoi vertici:*

1. *Siano A, B, C tre punti del piano, ordinati in senso antiorario.*
2. *Traccia il segmento AC.*
3. *Costruisci il punto medio del segmento AC e denominalo M.*
4. *Traccia la semiretta di origine B passante per M.*
5. *Traccia la circonferenza di centro M e raggio MB.*
6. *Denomina D il punto, diverso da B, di intersezione della semiretta con la circonferenza.*
7. *Il quadrilatero ABCD è il parallelogramma che soddisfa alle richieste*

Procedura 9.6. *Costruisci un quadrilatero convesso ABCD con le coppie di lati opposti congruenti.(AB congruente a DC e AD congruente a BC):*

1. *Traccia un punto A e una semiretta di origine A.*
2. *Considera un segmento AB, con B appartenente a tale semiretta, e l'ulteriore segmento BC, con C non appartenente alla semiretta.*
3. *Traccia la circonferenza di centro C e raggio congruente ad AB.*
4. *Traccia la circonferenza di centro A e raggio BC.*
5. *Il punto D è, dei due punti di intersezione fra le due circonferenze, quello che appartiene al semipiano originato dalla retta AB contenente C.*
6. *Il qadrilatero ABCD è un parallelogramma.*

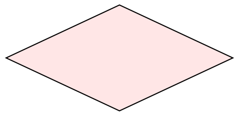
9.4 Parallelogrammi particolari

I parallelogrammi possono essere sia equiangoli sia equilateri.

Se un parallelogramma è equiangolo, dato che la somma degli angoli interni è 360°, deve avere quattro angoli retti: questo succede quando due lati opposti, paralleli tra loro, sono perpendicolari all'altra coppia di lati opposti. Un tale parallelogramma si chiama *rettangolo*.

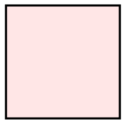
rettangolo

Se un parallelogramma è equilatero, vuol dire che ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli. Un tale parallelogramma si chiama *rombo*.



rombo

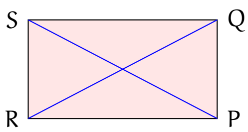
Un parallelogramma sia equiangolo sia equilatero deve essere contemporaneamente un rettangolo ed un rombo: l'unico tipo di quadrilatero regolare, il *quadrato*. Infatti un quadrilatero, per essere regolare, deve necessariamente avere quattro angoli retti; è quindi un parallelogramma, prima ancora che un rettangolo, perché due angoli retti, oltre ad essere congruenti, sono anche supplementari; inoltre è un rombo in quanto è un parallelogramma con quattro lati congruenti.



quadrato

A parte le proprietà particolari insite nelle stesse definizioni, il rettangolo e il rombo si distinguono tra loro e dagli altri parallelogrammi per alcune proprietà riguardanti le diagonali. Naturalmente il quadrato gode delle proprietà sia del rettangolo sia del rombo. Ricordiamo che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente per metà. Ora mostreremo che in un rettangolo le diagonali sono congruenti ed in un rombo sono perpendicolari.

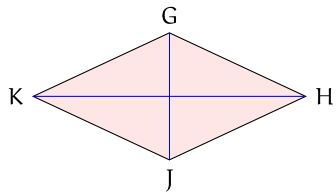
Teorema 9.7. *In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.*



Dimostrazione. Sia RPQS un rettangolo; tracciate le diagonali RQ e PS, confrontiamo i triangoli SRP e RPQ. Tali triangoli rettangoli hanno il cateto RP in comune ed hanno gli altri cateti, SR e PQ, rispettivamente congruenti in quanto lati opposti di un rettangolo. Dunque SRP e RPQ sono congruenti per il primo criterio e di conseguenza devono avere congruenti anche le ipotenuse SP e RQ, le quali sono le diagonali del rettangolo.

Sia RPQS un parallelogramma avente le diagonali RQ e PS congruenti, sempre confrontando i triangoli SRP e RPQ, possiamo affermare che tali triangoli sono congruenti per il terzo criterio, perché hanno il lato RP in comune, i lati RS e QP congruenti in quanto lati opposti di un parallelogramma ed i lati SP e RQ congruenti per ipotesi. Dunque anche gli angoli devono essere ordinatamente congruenti, in particolare perché opposti ai lati congruenti SP e RQ. Ma tali angoli sono anche supplementari in quanto adiacenti allo stesso lato RP di un parallelogramma e pertanto devono risultare retti. Dunque il quadrilatero RPSQ è un rettangolo. □

Teorema 9.8. *In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari e sono anche bisettrici degli angoli aventi per vertici i loro estremi. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari è un rombo; inoltre, se un angolo di un parallelogramma è diviso a metà dalla diagonale passante per il suo vertice, allora il parallelogramma è un rombo.*



Dimostrazione. Notiamo che, in ciascuna delle fasi della dimostrazione, è tra le ipotesi del teorema che $JHGK$ sia un parallelogramma. Ricordiamo che le diagonali di $JHGK$ vengono divise a metà dal loro punto di intersezione, che chiamiamo M, per cui risulta $JM \cong MG$ e $HM \cong MK$.

a) Se supponiamo che $JHGK$ sia un rombo, i triangoli JHG, HGK, GKJ e KJH risultano isosceli, per cui le mediane HM, GM, KM e JM sono anche altezze e bisettrici, per cui la prima parte del teorema è dimostrata.
b) Se supponiamo che JG e HK siano perpendicolari, in particolare i triangoli rettangoli JHM, HGM, GKM e KJM risultano congruenti per il primo criterio, avendo congruenti i cateti. Dunque risultano congruenti anche le ipotenuse, che sono i lati del parallelogramma $JHGK$, il quale pertanto risulta essere un rombo.
c) Se supponiamo ad esempio $K\widehat{G}J \cong J\widehat{G}H$, essendo anche $K\widehat{G}J \cong G\widehat{J}H$ in quanto alterni interni rispetto alle rette parallele KG e JH tagliate dalla trasversale GJ, dalla proprietà transitiva della congruenza segue che $G\widehat{J}H \cong J\widehat{G}H$, per cui il triangolo JGH risulta isoscele sulla base JG. Dunque il parallelogramma $JHGK$ ha due lati consecutivi congruenti, e quindi i quattro lati congruenti, ed è pertanto un rombo.

□

I teoremi precedenti si estendono automaticamente ai quadrati.

Corollario 9.9. *Le diagonali di un quadrato sono fra loro congruenti e perpendicolari e dividono per metà gli angoli. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari, allora è un quadrato; inoltre, se le diagonali di un parallelogramma sono congruenti ed un angolo è diviso a metà da una diagonale, allora il parallelogramma è un quadrato.*

Procedura 9.10. *Dato un segmento AB, costruisci un rombo di lato AB:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Traccia la circonferenza con il centro in B passante per A.*
3. *Traccia un quasiasi punto appartenente alla circonferenza: denominalo C.*
4. *Traccia la circonferenza di centro C e passante per B.*
5. *Traccia la circonferenza di centro A e passante per B.*
6. *Denomina D il punto, diverso da B, di intersezione fra le due ultime circonferenze tracciate.*
7. *ABCD è il rombo che corrisponde alle richieste.*

Procedura 9.11. *Costruire un rettangolo, dati il punto di intersezione delle diagonali e un lato.:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Traccia un punto O esterno al segmento AB.*
3. *Traccia la semiretta di origine B e passante per O e denominala r.*
4. *Traccia la retta per A perpendicolare ad AB e denominala s.*
5. *Denomina D il punto di intersezione di r ed s.*
6. *Traccia la perpendicolare al lato AD passante per il punto D: denominala t.*
7. *Traccia la perpendicolare al lato AB passante per il punto B: denominala z.*
8. *Denomina C il punto di intesezione di t e z.*
9. *ABCD è il rettangolo che soddisfa le richieste.*

Sapresti individuare altre modalità per eseguire questa stessa costruzione?

Procedura 9.12. *Costruisci il quadrato di lato ABCD di lato AB assegnato:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Traccia la circonferenza con centro in B e passante per A.*
3. *Traccia la perpendicolare al lato AB passante per B e denominala r.*
4. *Denomina con C uno dei due punti di intersezione della circonferenza con la retta r.*
5. *Traccia la perpendicolare per C al lato BC e denominala s.*
6. *Traccia la perpendicolare per A al lato AB e denominala t.*
7. *Denomina D l'intersezione fra la retta s e la retta t.*
8. *ABCD è il quadrato che soddisfa le richieste.*

Con questa costruzione quanti quadrati ABCD, secondo le richieste, è possibile costruire? Sapresti individuare altre modalità per eseguire questa stessa costruzione?

Procedura 9.13. *Costruisci il quadrato di assegnata diagonale:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Costruisci il punto medio M.*
3. *Traccia la circonferenza con centro M e passante per A.*
4. *Traccia la perpendicolare al segmento AB passante per il punto M:denominala r.*
5. *Denomina con H e K i due punti di intersezione fra la retta r e la circonferenza.*
6. *Il quadrilatero non intrecciato AHBK è il quadrato richiesto, di diagonale data AB.*

9.5 Esercizi

9.5.1 Esercizi riepilogativi

9.1. Quali tra le seguenti sono proprietà del parallelogrammo?

a) Ciascuna diagonale lo divide in due triangoli uguali V F
b) Gli angoli opposti sono uguali V F
c) Tutti i lati sono uguali V F
d) Gli angoli sulla base sono uguali V F
e) Le diagonali sono perpendicolari V F
f) Gli angoli sono tutti congruenti V F
g) Le diagonali sono anche bisettrici V F

[a) V, b) V, c) F, d) F, e) F, f) F, g) F]

9.2. Vero o Falso?

a) Un quadrilatero che ha i lati consecutivi a due a due congruenti è un deltoide V F
b) Un quadrilatero che ha una sola coppia di lati opposti uguali è un trapezio V F
c) Il trapezio scaleno ha tutti i lati diversi tra di loro per lunghezza V F
d) Gli angoli adiacenti alla base maggiore di un trapezio rettangolo sono uno retto e uno acuto V F
e) Un trapezio scaleno può avere due angoli opposti ottusi V F
f) In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base minore sono ottusi V F
g) In un trapezio isoscele sono congruenti le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore V F
h) Le diagonali di un deltoide si incontrano nel loro punto medio comune V F
i) Nel parallelogramma gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari V F
j) Nel parallelogramma una delle due diagonali lo divide in due triangoli isosceli V F
k) Se le diagonali di un quadrilatero si dividono a metà allora è un parallelogramma V F
l) Le diagonali del rombo sono anche bisettrici V F
m) Se le diagonali di un parallelogramma sono uguali il parallelogramma è un quadrato V F
n) Un parallelogramma che ha un angolo retto è un rettangolo V F
o) Un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un quadrato V F
p) Un quadrilatero con due lati opposti congruenti è un trapezio V F
q) Il rombo è anche un rettangolo V F
r) Il rombo è anche quadrato V F
s) Il rettangolo è anche parallelogrammo V F
t) Il quadrato è anche rombo V F
u) Il trapezio è anche parallelogrammo V F

v) Alcuni rettangoli sono anche rombi V F

[a) F, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) V, h) F, i) V, j) F, k) F, l) V, m) F, n) V, o) V, p) F, q) F, r) F, s) V, t) V, u) F, v) V]

Dimostra le seguenti proprietà

9.3. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.

9.4. Sia ABCD un parallelogramma, siano M, N, O e P i punti medi dei lati. Dimostra che MNOP è un parallelogramma.

9.5. Nel parallelogramma ABCD si prendono sui lati opposti AB e CD i punti E ed F tali che AE sia congruente a CF. Dimostra che anche AECF è un parallelogramma.

9.6. Di un triangolo ABC prolunga i lati AB e CB rispettivamente di due segmenti BD e BE tali che $AB \cong BD$ e $CB \cong BE$. Dimostra che ACDE è un parallelogramma.

9.7. Dato un parallelogramma ABCD prolunga il lati nel seguente modo: CD di un segmento DE, DA di un segmento DF, AB di un segmento BG, BC di un segmento CH. Dimostra che se $DE \cong AF \cong BG \cong CH$ allora EFGH è anche un parallelogramma.

9.8. Dato un segmento AB, sia M il suo punto medio. Traccia rispettivamente da A e da B le rette r ed s parallele tra loro. Dal punto M traccia una trasversale t alle due rette che incontra r in C ed s in D. Dimostra che CADB è un parallelogramma.

9.9. Dimostra che in un parallelogramma ABCD i due vertici opposti A e C sono equidistanti dalla diagonale BD.

9.10. Che tipo di quadrilatero si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rombo?

9.11. Che tipo di quadrilatero si ottiene congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo?

9.12. Se un trapezio ha tre lati congruenti, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

9.13. Dimostra che un rombo è diviso da una sua diagonale in due triangoli isosceli congruenti.

9.14. Nel parallelogramma ABCD sia M il punto medio di AB ed N il punto medio di DC. Sia P il punto di intersezione di AN con DM e Q il punto di intersezione di CM con BN. Dimostra che PNAM è un rombo.

9.15. Dimostra che se un rombo ha le diagonali congruenti allora è un quadrato.

9.16. Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo si ottiene un rombo.

9.17. In un trapezio ABCD la diagonale AC è congruente alla base maggiore AB. Sia M il punto medio del lato obliquo BC. Prolunga AM di un segmento ME congruente ad AM. Dimostra che ABEC è un rombo.

9.18. Nel trapezio isoscele ABCD con la base maggiore doppia della base minore, unisci il punto medio M di AB con gli estremi della base DC. Dimostra che AMCD è un parallelogramma.

9.19. Nel trapezio isoscele ABCD i punti M e N sono rispettivamente i punti medi delle basi AB e DC. Dimostra che MNCB è un trapezio rettangolo.

9.20. Siano M e N i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele ABCD. Dimostra che BCMN è un trapezio isoscele.

9.21. Dimostra che le proiezioni dei lati obliqui di un trapezio isoscele sulla base maggiore sono congruenti.

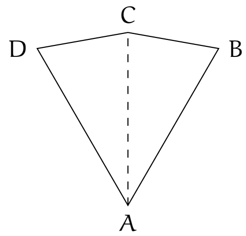
9.22. Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, traccia le bisettrici agli angoli adiacenti alla base. Detti D ed E i punti di incontro di dette bisettrici rispettivamente con AC e AB, dimostra che $EBCD$ è un trapezio isoscele.

9.23. Dato un quadrato $ABCD$ di centro O, siano H e K due punti sulla diagonale AC simmetrici rispetto ad O. Dimostra che il quadrilatero $BHDK$ è un rombo.

9.24. Le diagonali di un trapezio isoscele dividono il trapezio in quattro triangoli, dei quali due triangoli sono isosceli e aventi gli angoli ordinatamente congruenti, mentre gli altri due triangoli sono congruenti.

9.25. Sia AD bisettrice del triangolo ABC. Da D traccia le parallele ai lati AB e AC, detto E il punto di intersezione del lato AC con la parallela ad AB ed F il punto di intersezione del lato AB con la parallela ad AC, dimostra che $AEDF$ è un rombo.

9.26 (Prove invalsi 2003). Il quadrilatero nella figura a fianco è simmetrico rispetto alla retta AC. Sapendo che $B\widehat{A}C = 30°$ e $C\widehat{D}A = 70°$, quanto vale $B\widehat{C}D$?



a) 140°;
b) 150°;
c) 160°;
d) 165°;
e) Le informazioni sono insufficienti.

[c]

9.27 (Prove invalsi 2003). Quale fra le seguenti proprietà è falsa per tutti i parallelogrammi?

a) I lati opposti sono uguali.
b) Gli angoli adiacenti sono supplementari.
c) Gli angoli opposti sono supplementari.
d) I lati opposti sono paralleli.
e) Le diagonali si dimezzano scambievolmente.

[c]

9.28 (Prove invalsi 2004). Quale tra le seguenti affermazioni riferite ad un parallelogramma qualsiasi è FALSA?

a) I lati opposti sono paralleli.
b) Le diagonali sono uguali.
c) Gli angoli opposti sono uguali.
d) Ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali.

[c]

9.29 (Prove invalsi 2005). Quale tra le seguenti affermazioni relative ad un rombo è FALSA?

a) Non ha i lati opposti paralleli.
b) Ha tutti i lati uguali.
c) Ha gli angoli opposti uguali.
d) Ha le diagonali perpendicolari.

[a]

9.30 (Prove invalsi 2005)**.** Quale fra le seguenti condizioni è sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo?

a) I lati opposti siano uguali e un angolo sia retto.
b) Le diagonali si dividano a metà.
c) I lati opposti siano paralleli.
d) Le diagonali siano uguali e un angolo sia retto.

[a]

9.31 (Prove invalsi 2006)**.** Quale fra le seguenti affermazioni è vera? Il quadrilatero avente i vertici nei punti medi dei lati di . . .

a) . . . un rettangolo qualsiasi è sempre un quadrato.
b) . . . un trapezio isoscele qualsiasi è un rettangolo.
c) . . . un quadrilatero qualsiasi è un parallelogramma.
d) . . . un quadrato è un rombo, ma non un quadrato.

[c]

9.32 (Prove invalsi 2007)**.** Quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

a) Ogni rettangolo è anche un rombo.
b) Ogni rettangolo è anche un parallelogramma.
c) Ogni quadrato è anche un rombo.
d) Ogni rettangolo ha le diagonali uguali.

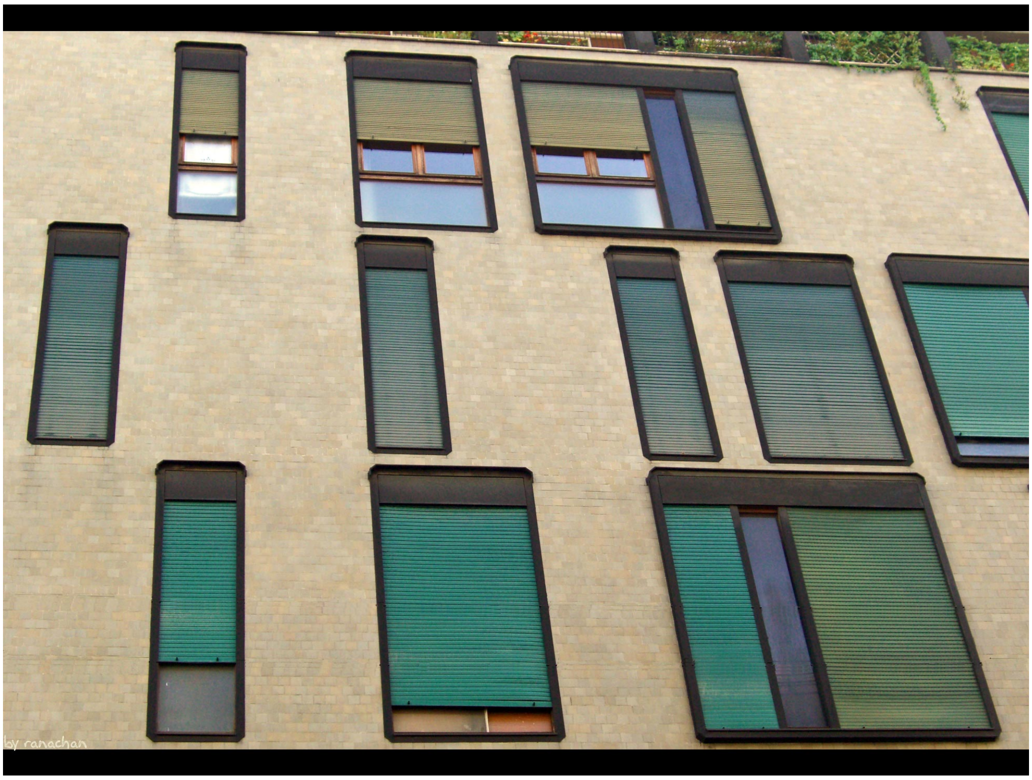
[a]

9.33 (Prove invalsi 2007)**.** È dato un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si dimezzano scambievolmente.
Alberto afferma: «Di sicuro si tratta di un quadrato.»
Barbara afferma: «Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rombo.»
Carla afferma: «Non è detto che sia un quadrato, ma di sicuro è un rettangolo.»
Daniele afferma: «Si tratta certamente di un quadrilatero a forma di aquilone.»
Chi ha ragione?

a) Alberto; b) Barbara; c) Carla; d) Daniele.

[b]

10 Equiestensione e aree



“Window geometry”
Foto di midori.no.kerochan
http://www.flickr.com/photos/28661972@N05/2751042868/
Licenza: Creative Commons Attribution 2.0

10.1 Estensione superficiale

Il *tangram* è un antichissimo gioco cinese. Il nome con cui lo conosciamo si pensa derivato dall'unione della parola *tang* o *tan*, che significa *cinese*, e *gram* che significa *immagine*. Anticamente in Cina era chiamato "schema intelligente a sette pezzi" o anche "le sette pietre della saggezza" poiché si riteneva che la padronanza del gioco fosse la chiave per ottenere saggezza e talento. Il gioco è costituito da un quadrato ritagliato in 7 pezzi poligonali aventi in comune solo punti del loro contorno (figura 10.1).

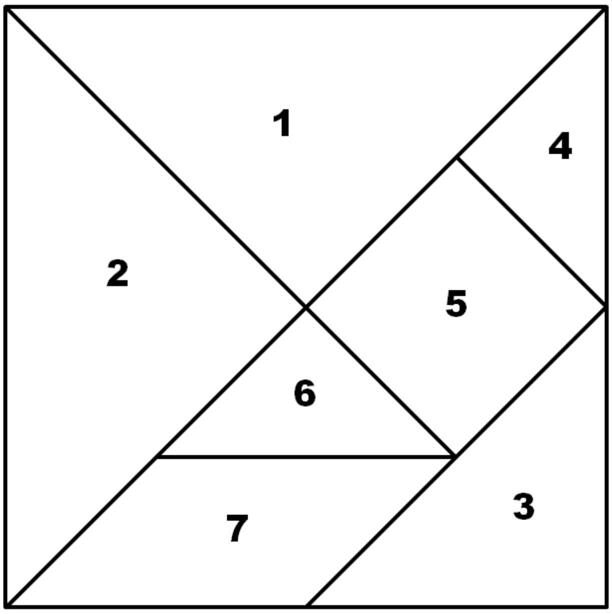


FIGURA 10.1: Il gioco del tangram

I pezzi possono essere disposti e accostati gli uni agli altri senza sovrapposizioni in modo da ottenere una grande varietà di figure; la regola base è che devono essere utilizzati tutti i 7 pezzi. Si possono così formare alcuni disegni come mostrato nella figura 10.2.

Potete osservare che si forma un poligono quando i singoli pezzi vengono accostati mediante un lato: l'uomo seduto è un poligono, ma non la candela; i due poligoni rappresentati sono l'uno concavo e l'altro convesso.

Con tutti i 7 pezzi del gioco si possono costruire 13 poligoni convessi, compreso il quadrato iniziale, provate a costruirli: fotocopiate la pagina precedente e ritagliate i 7 pezzi del tangram.

Evidentemente i 13 poligoni che avrete costruito non sono congruenti, né hanno la stessa forma; potete dire che sono formati dalle stesse parti poligonali, ciascuno può cioè essere pensato come unione dei *tan* aventi in comune almeno un punto del loro perimetro, ma nessun punto interno.

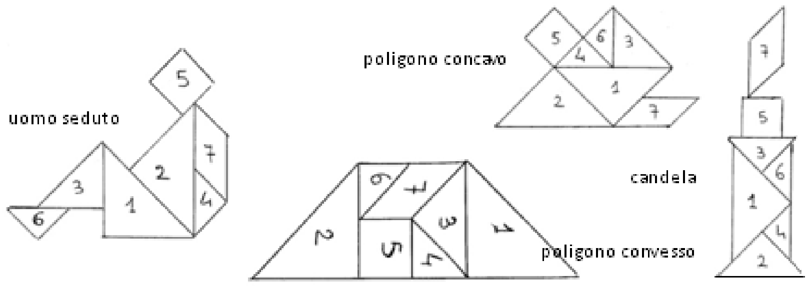


FIGURA 10.2: Alcune figure realizzabili con il tangram

Definizione 10.1. Con *somma* di due *figure piane* X e Y, non aventi punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, intendiamo la figura Z unione dei punti di X e Y e la indicheremo con

$$\boxed{Z = X + Y}$$

Diremo inoltre che X è la *differenza* tra Z e Y e scriveremo

$$\boxed{X = Z - Y}$$

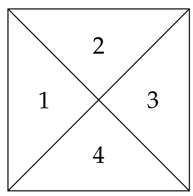
Definizione 10.2. Due poligoni p_1 e p_2 sono *equicomposti* se sono formati dalle stesse parti poligonali (figure piane). Sono *equiscomponibili* se è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di parti poligonali con le quali si possa ricoprire l'altro. In simboli

$$\boxed{p_1 \doteq p_2}$$

che si legge "p_1 equicomposto p_2"

Tutte le figure poligonali costruite con i pezzi del tangram $p_1, p_2, \ldots$ sono dunque poligoni equicomposti, ma possono anche essere considerati poligoni equiscomponibili, quindi $p_1 \doteq p_2 \doteq \ldots$

Esempio 10.1. Ritagliate da un quadrato i quattro triangoli rettangoli isosceli che si ottengono tracciando le sue diagonali (fotocopia e ritaglia la figura a fianco). Disponendo fianco a fianco i triangoli ottenuti in modo che i due lati comuni abbiano la stessa lunghezza, si ottengono 14 figure diverse. Due di esse sono riportate nella figura 10.3. Realizzate tutte le altre figure.



Le figure ottenute sono .... perché sono formate da ....
(da: Prova di allenamento della gara di "Matematica senza frontiere" del 9/02/1994)

Esempio 10.2. Nella figura 10.4 sono disegnati un quadrato $ABCD$, un rettangolo $PQRS$ avente $PQ = 2AB$ e $SP = AB/2$ e un rombo $FGHK$ avente una diagonale uguale al lato del

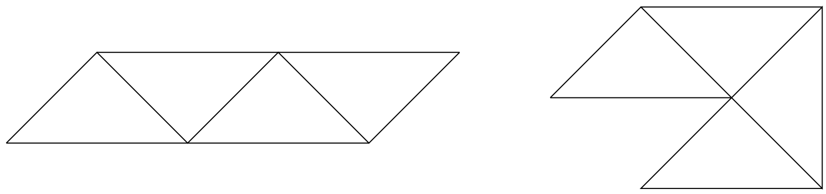


FIGURA 10.3: Alcune figure realizzabili (esempio 10.1)

quadrato e l'altra il doppio. Mostra come sia possibile scomporre ciascuno dei tre poligoni in parti tali da poter ricoprire gli altri due. Puoi concludere che i tre poligoni assegnati sono equiscomponibili? ......

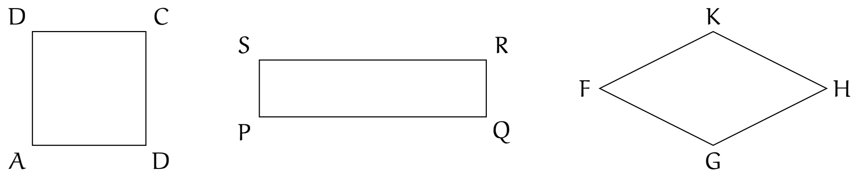


FIGURA 10.4: Esempio 10.2

Esempio 10.3. Dato l'insieme $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ delle figure poligonali disegnate a lato, segui le seguenti istruzioni:

ripeti:

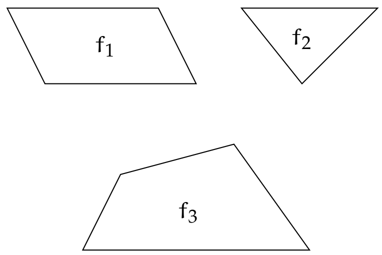
scegli una figura dell'insieme F*;*

traccia alcuni segmenti che la decompongano in parti poligonali;

forma con le parti ottenute altre 3 figure poligonali;

finché non hai esaurito le figure.

Costruisci l'insieme G di tutti i poligoni ottenuti con questa procedura e indica con simboli arbitrari i suoi elementi.



Nell'insieme $S = F \cup G$ (dove F e G sono gli insiemi definiti nell'esempio 10.3) la relazione R espressa dal predicato: «essere equicomposti» gode della proprietà

- riflessiva, infatti ....
- simmetrica, infatti ....
- transitiva, infatti ....

Si può dunque concludere che R è una relazione di equivalenza e quindi si possono costruire sia l'insieme delle parti $P(S)$, sia l'insieme quoziente $E = S/R$ avente come elementi le tre classi di equivalenza, ciascuna rappresentata dal poligono iniziale (figura 10.5):

$$[f_1] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_1\};$$

$$[f_2] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_2\};$$

$$[f_3] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_3\}.$$

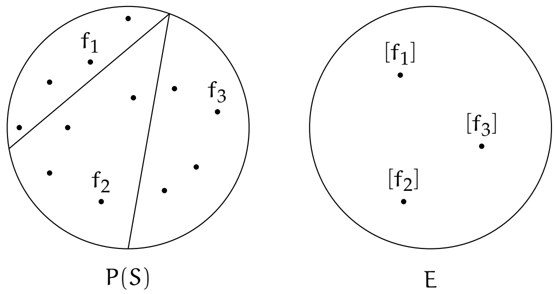


FIGURA 10.5: Rappresentazione dell'insieme delle parti di S e del quoziente $E = S/R$

Definizione 10.3. Diciamo che due qualunque poligoni p_1 e p_2 appartenenti alla stessa classe sono *equivalenti* e useremo la scrittura $p_1 \doteq p_2$ per esprimere questa caratteristica (*equivalenza per scomposizione*); essi hanno una caratteristica comune che chiamiamo *estensione superficiale* (ES).

I poligoni costruiti con i pezzi del tangram appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato iniziale. Anche i 14 poligoni realizzati nell'esempio 10.1 appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato assegnato.

❑ **Osservazione** Sin dalla scuola elementare avete usato termini come "superficie", "estensione" e "area" quando vi siete accostati allo studio dei poligoni, probabilmente ritenendoli sinonimi. Lo studio di una particolare relazione di equivalenza vi ha mostrato che il concetto di estensione di un poligono si ottiene attraverso il procedimento di passaggio al quoziente nell'insieme dei poligoni piani.

Definizione 10.4. Chiamiamo *area* di un poligono p il numero reale positivo $A(p)$ che esprime la misura della sua estensione superficiale.

Possiamo concludere che ad ogni classe di equivalenza, generata con la relazione «essere equicomposti» o «essere equiscomponibili», può essere associato un numero: l'area della figura scelta come rappresentante della classe di equivalenza. In tal modo trasformeremo una relazione di equivalenza tra poligoni, espressa con il simbolo $\doteq$ in una relazione di uguaglianza tra numeri. Ad esempio, riferendoci ai poligoni costruiti con i pezzi del tangram possiamo trasformare la relazione di equivalenza $p_1 \doteq p_2 \doteq p_3 \doteq \dots$ in un'uguaglianza tra le aree scrivendo $A(p_1) = A(p_2) = A(p_3) = \dots$

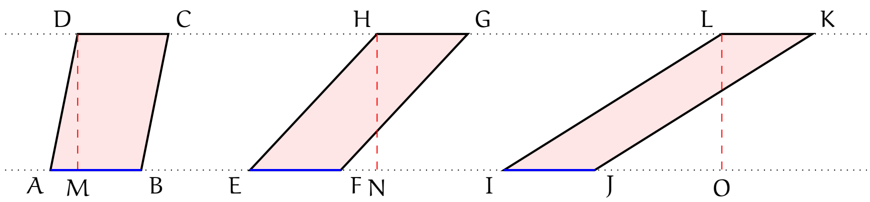
10.2 Poligoni equivalenti

Premettiamo alcuni assiomi:

1. Poligoni congruenti sono equivalenti.
2. Un poligono non è equivalente ad una sua parte propria.
3. Somma e differenza di poligoni equivalenti originano poligoni equivalenti.

Teorema 10.1. *Due parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le rispettive altezze, sono equivalenti.*

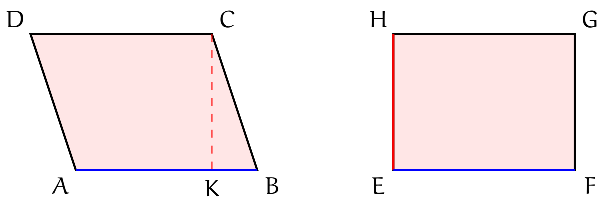
Nella figura sottostante sono rappresentati alcuni degli infiniti parallelogrammi aventi basi e altezze congruenti; le loro basi appartengono a rette parallele.
Ipotesi: $AB \cong EF \cong IJ$, $DM \perp AB$, $HN \perp EF$, $LO \perp IJ$, $DM \cong HN \cong LO$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH \doteq IJLK$.



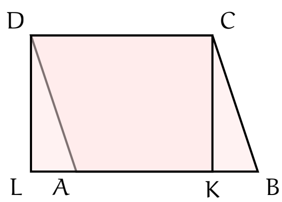
Si tralascia la dimostrazione. Alcuni esempi saranno offerti con le più semplici dimostrazioni dei corollari.

Corollario 10.2. *Ogni parallelogramma è equivalente al rettangolo avente un lato congruente alla sua base e l'altro lato congruente alla sua altezza.*

Ipotesi: $AB \cong EF$, $CF \perp AB$, $CK \cong HE$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH$.



Dimostrazione. Dal vertice D tracciamo l'altezza DL relativa alla base AB; il quadrilatero DLKC è un rettangolo congruente a EFGH; dimostrando che $ABCD \doteq DLKC$ si ottiene la tesi.
Completate la dimostrazione.
Osserviamo che ABCD è composto da .... e DLKC è composto da .... Consideriamo i triangoli ....
Sono congruenti perché .... quindi .... □



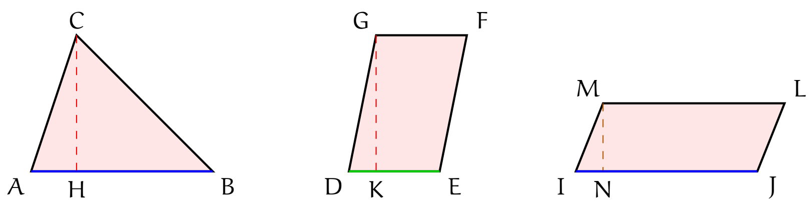
Il teorema 10.1 e il suo corollario 10.2 ci assicurano che i parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le relative altezze formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo che ha un lato congruente alla base del parallelogramma e l'altro lato congruente alla sua altezza. Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq EFGH \Rightarrow A_{ABCD} = A_{EFGH}$.

Teorema 10.3. *Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente:*

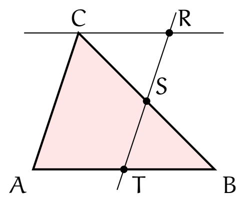
a) base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, oppure
b) base congruente alla base del triangolo e altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo.

Nella figura sono rappresentati il triangolo ABC, il parallelogramma $DEFG$ avente base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, il parallelogramma $IJLM$ avente altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo e base congruente alla base del triangolo.

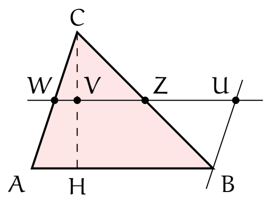
Ipotesi: $AB \perp CH$, $DE \cong \frac{1}{2}AB$, $GK \perp DE$, $GK \cong CH$, $IJ \cong AB$, $MN \perp IJ$, $MN \cong \frac{1}{2}CH$.
Tesi: a) $ABC \doteq DEFG$; b) $ABC \doteq IJLM$.



Dimostrazione.
Caso a.
Dal punto medio T della base AB tracciamo la parallela al lato AC che incontra CB in S; dal vertice C tracciamo la parallela alla base AB che interseca in R la retta ST; il parallelogramma $ATRC$ soddisfa le ipotesi del caso a) ed è equivalente a $DEFG$ per il teorema 10.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da $CATS + BST$ e $ATRC$ composto da $CATS + CSR$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CSR e BST potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $TB \cong CR$ infatti .... $SB \cong CS$ infatti .... $T\widehat{B}S \cong S\widehat{C}R$ infatti .... Allora per il primo criterio di congruenza $TBS \cong SCR$ e quindi $ATRC \doteq BST$.



Caso b.
Dal punto medio V dell'altezza CH tracciamo la parallela alla base AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente in W e Z; da B tracciamo la parallela al lato AC che interseca la retta WZ in U; il parallelogramma $AWUB$ soddisfa le ipotesi del caso b) ed è equivalente a IJLM per il teorema 10.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da .... e $AWUB$ composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CWZ e ZBU potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $CW \cong \ldots$ infatti .... $CZ \cong \ldots$ infatti .... $\ldots \cong Z\widehat{B}U$ infatti .... Pertanto ....

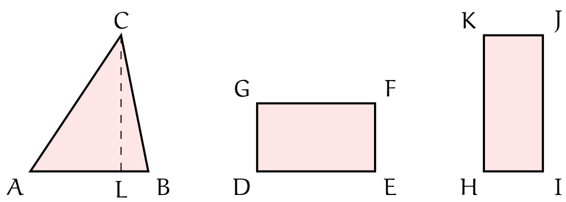


□

Corollario 10.4. *I triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa proprietà.

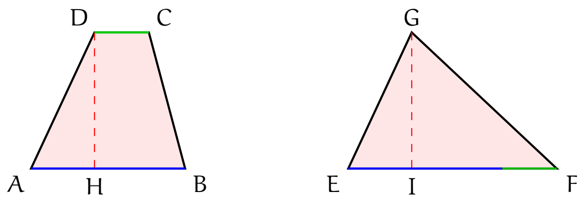
Il teorema 10.3 e il suo corollario (10.4) ci assicurano che i triangoli aventi rispettivamente congruenti la base e la rispettiva altezza formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo con un lato congruente alla base del triangolo e l'altro lato congruente a metà della sua altezza, oppure un lato congruente all'altezza del triangolo e l'altro lato congruente a metà della base.



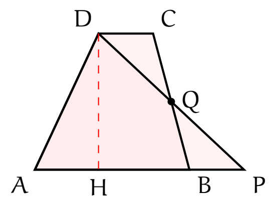
Ipotesi: $CL \perp AB$, $DE \cong AB$, $DG \cong \frac{1}{2}CL$, $KH \cong CL$, $HI \cong \frac{1}{2}AB$.
Tesi: $ABC \doteq DEFG \doteq HIJK \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DEFG} = \mathcal{A}_{HIJK}$.

Teorema 10.5. *Un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.*

Ipotesi: $EF \cong AB + CD$, $DH \perp AB$, $GI \perp EF$, $GI \cong DH$.
Tesi: $ABCD \doteq EFG$.



Dimostrazione. Prolunghiamo la base AB del segmento BP congruente a DC e congiungiamo D con P. APD è un triangolo equivalente a EFG avendo stessa base e stessa altezza, quindi basta dimostrare che $ABCD \doteq APD$. Confrontiamo il trapezio e il triangolo: possiamo pensare $ABCD$ composto da .... e APD composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli .... potremo concludere che trapezio e triangolo, essendo equicomposti, sono equivalenti. I due triangoli sono congruenti perché hanno .... Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq APD \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{APD}$. □



Pertanto, utilizzando il teorema 10.3 e il suo corollario (10.4) possiamo sempre determinare il rettangolo equivalente a un trapezio dato.

10.3 Aree dei principali poligoni

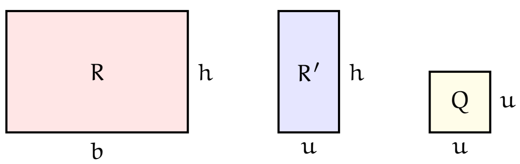
Per *area* di una qualunque figura piana intendiamo il numero reale che esprime la misura dell'estensione superficiale della figura data.

Per calcolare le aree dei principali poligoni si ricava per prima l'area del rettangolo e poi, basandosi sui teoremi relativi all'equivalenza delle figure piane, da questa si ricavano le aree di altri poligoni fondamentali.

10.3.1 Area del rettangolo

Teorema 10.6. *L'area del rettangolo è data dal prodotto della misura delle sue dimensioni*

$$\boxed{\mathcal{A} = b \cdot h}$$



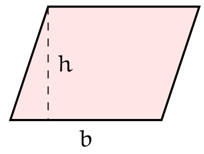
10.3.2 Area del quadrato

Poiché il quadrato è un particolare rettangolo avente le dimensioni congruenti tra loro, $b = h = l$, anche la sua area si calcolerà in modo analogo a quella del rettangolo $\mathcal{A} = b \cdot h = l \cdot l$ ovvero

$$\boxed{\mathcal{A} = l^2}$$

Dunque l'area del quadrato è data dal quadrato del lato.

10.3.3 Area del parallelogramma



Ricordando il teorema 10.1 sull'equivalenza tra parallelogrammi, secondo il quale due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno un lato (base) e l'altezza ad esso relativa tra loro congruenti, da cui deriva il corollario 10.2 che un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruenti a quelle del parallelogramma stesso, è immediato dedurre che anche l'area del parallelogramma si calcola moltiplicando un lato, ritenuto la base, per l'altezza ad esso relativa, cioè

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

10.3.4 Area del triangolo

Anche in questo caso ci si deve rifare al teorema 10.3 sull'equivalenza tra un triangolo e un parallelogramma «Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente come base metà della base del triangolo ed altezza congruente a quella del triangolo». Appare allora evidente che l'area del triangolo è

$$\boxed{A = \frac{b}{2} \cdot h}$$

dove $b/2$ è la base del parallelogramma ad esso equivalente.

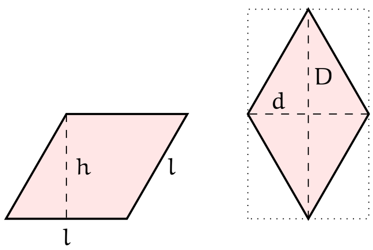
10.3.5 Area del trapezio

Sempre dai teoremi sull'equivalenza, sappiamo che «Un trapezio è equivalente ad un triangolo la cui base è congruente alla somma delle basi del trapezio e la cui altezza ad essa relativa è congruente all'altezza del trapezio» (teorema 10.5). Dunque l'area del trapezio sarà

$$\boxed{A = \frac{B + b}{2} \cdot h}$$

dove $B + b$ è la somma delle basi del trapezio, e quindi $(B + b)/2$ è la base del triangolo ad esso equivalente.

10.3.6 Area del rombo



Poiché il rombo è un particolare parallelogramma, la sua area si trova moltiplicando uno dei suoi lati per l'altezza ad esso relativa, cioè $A = l \cdot h$. Possiamo però notare che un rombo si può considerare come la metà di un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alle diagonali del rombo (D e d). Come si può facilmente dimostrare, le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti ai quattro triangoli rettangoli esterni al rombo, e quindi il rombo è equivalente alla metà del rettangolo, per cui la sua area può essere espressa come

$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Si può inoltre dimostrare, in maniera del tutto analoga a quanto precedentemente descritto, che l'area di un qualsiasi quadrilatero che abbia le diagonali perpendicolari è determinabile in questo modo.

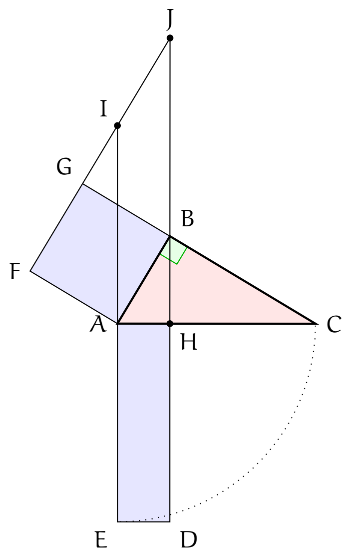
10.4 Teoremi di Pitagora e di Euclide

Teorema 10.7 (Primo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola di un segmento HD congruente all'ipotenusa stessa e costruiamo il rettangolo $AEDH$. Sul cateto AB costruiamo il quadrato $ABGF$. Prolunghiamo i lati HD ed AE del rettangolo ed il lato FG del quadrato e chiamiamo I e J i punti di intersezione tra questi prolungamenti. Otteniamo il parallelogramma $ABJI$. La tesi da dimostrare è che il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$.

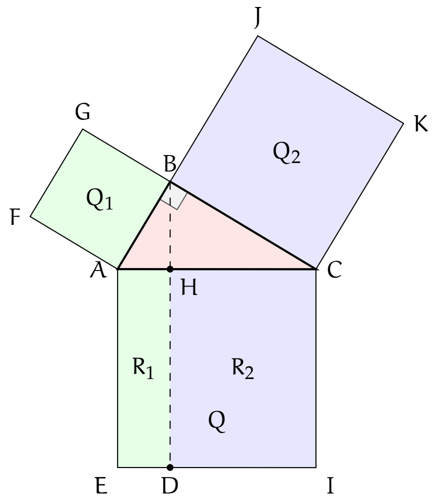
Consideriamo innanzitutto i triangoli AIF e ABC, essi sono congruenti in quanto hanno entrambi un angolo retto ($A\widehat{F}I$ e $A\widehat{B}C$), $AF \cong AB$ in quanto lati di un quadrato, $F\widehat{A}I \cong B\widehat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\widehat{A}B$. Dunque i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, ed in particolare avranno $AI \cong AC$.

Consideriamo ora il parallelogramma $ABJI$ ed il quadrato $ABGF$; essi sono equivalenti in quanto hanno il lato AB in comune e la stessa altezza BG relativa a questo lato. Consideriamo poi il parallelogramma $ABJI$ ed il rettangolo $AHDE$; anch'essi sono equivalenti poiché hanno basi congruenti AE e AI, entrambe congruenti ad AC, e stessa altezza AH. Allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che anche il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$ e così la tesi è provata. □



Teorema 10.8 (di Pitagora)**.** *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione. Dopo aver disegnato i quadrati Q_1 e Q_2 sui cateti e Q sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola finché non incontra il lato IE del quadrato Q, il quale risulta così diviso in due rettangoli R_1 ed R_2. Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC avremo che $Q_1 \doteq R_1$ e che $Q_2 \doteq R_2$ in quanto, per costruzione, R_1 ed R_2 hanno la stessa altezza, pari alla lunghezza dell'ipotenusa AC e ognuno di essi ha la base pari alla proiezione sull'ipotenusa stessa del relativo cateto. Sommando quindi ambo i membri di queste due equivalenze otteniamo che $Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$. Ma $R_1 + R_2 \doteq Q$, da cui segue, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, $Q \doteq Q_1 + Q_2$, che è proprio quanto volevamo dimostrare. □

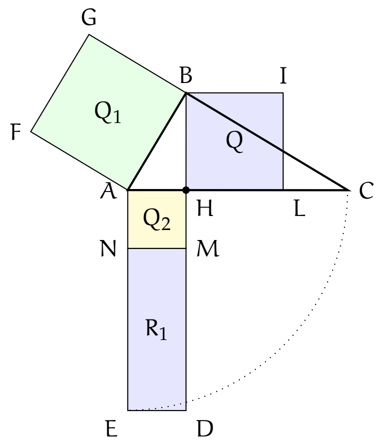


Teorema 10.9 (Secondo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che il quadrato Q che ha come lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo R_1 che ha come lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

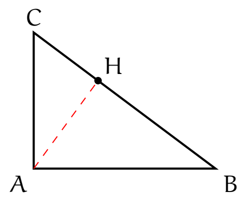
La costruzione è la seguente: dopo aver disegnato il quadrato Q si disegnano anche il quadrato Q_1, che ha come lato il cateto AB, ed il rettangolo R, che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione AH di AB sull'ipotenusa. All'interno di questo rettangolo possiamo individuare il quadrato Q_2, di lato AH, ed il rettangolo R_1, che ha come dimensioni $NM \cong AH$ e $MD \cong HD - HM \cong HC$, in quanto $HD \cong AC$ e $HM \cong AH$.

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABH, e applichiamo ad esso il teorema di Pitagora, risulta $Q_1 \doteq Q + Q_2$. Applichiamo ora al triangolo ABC il primo teorema di Euclide, si ha $Q_1 \doteq R$. Confrontiamo le due relazioni ed applichiamo la proprietà transitiva dell'equivalenza $Q + Q_2 \doteq R$. Ma $R \doteq Q_2 + R_1$, quindi sostituendo avremo $Q + Q_2 \doteq Q_2 + R_1$ e sottraendo ad ambo i membri la stessa quantità Q_2 otteniamo la tesi $Q \doteq R_1$. □



Per ciascuno dei tre teoremi dimostrari vale anche il teorema inverso.

10.5 Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora



Consideriamo il triangolo rettangolo ABC nella figura a fianco. Supponiamo di conoscere la misura dell'ipotenusa BC e della proiezione CH del cateto AC, sull'ipotenusa; allora possiamo applicare il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza del cateto AC: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$.

Se invece conosciamo la lunghezza del cateto AC e quella della sua proiezione CH e vogliamo trovare l'ipotenusa, allora avremo $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}}$.

Supponiamo ora di conoscere le misure delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, BH e CH, e di voler trovare la misura di AH, altezza relativa all'ipotenusa, applicando il secondo teorema di Euclide avremo $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}}$.

Se invece conosciamo l'altezza relativa all'ipotenusa ed una delle due proiezioni dei cateti, ad esempio CH, e vogliamo trovare la lunghezza dell'altra (BH), avremo $BH = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}}$.

Per quanto riguarda poi le applicazioni del teorema di Pitagora, che sicuramente lo studente conosce già dalle scuole medie, ricordiamo che se abbiamo la misura dei due cateti avremo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, da cui $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$; viceversa, conoscendo l'ipotenusa ed un cateto, ad esempio AC, avremo $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$.

Esempio 10.4. Calcolare perimetro ed area di un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo 10 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa lunga 8 cm.

Facendo riferimento alla figura 10.6, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{CH} = 8$ cm.

Applichiamo il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}} = \dfrac{10^2}{8} = \dfrac{100}{8} = 12{,}5$ cm. Per trovare l'altro cateto possiamo applicare il teorema di Pitagora $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4} - 100} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ cm. Quando il teorema di Pitagora viene applicato per trovare un cateto si può anche semplificare il calcolo scomponendo la differenza di quadrati

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(\overline{BC} - \overline{AC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{AC})} = \sqrt{\left(\frac{25}{2} - 10\right) \cdot \left(\frac{25}{2} + 10\right)} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{45}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^2}{2^2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

A questo punto conosciamo tutti i lati, quindi possiamo calcolare il perimetro $2p = 8 + 7{,}5 + 12{,}5 = 30$ cm e l'area $A = (\text{cateto} \times \text{cateto})/2 = 37{,}5\ \text{cm}^2$.

Esempio 10.5. Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12 cm. Il perimetro del triangolo formato dall'altezza e da uno dei cateti è 36 cm. Determina la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa e il perimetro del triangolo ABC.

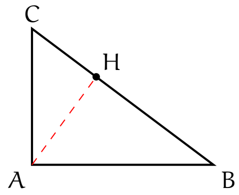


FIGURA 10.6: Esempi 10.4 e 10.5

Dai dati si ha che $AH = 12$ cm, e $2p_{ABH} = 36$ cm (figura 10.6). Questo vuol dire che $AB + BH = 2p - AH = 24$ cm. Posso allora porre $AB = x$, da cui $BH = 24–x$. Applichiamo il teorema di Pitagora ed otteniamo l'equazione

$$x^2 = 12^2 + (24 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12^2 + 24^2 - 48x + x^2$$

sviluppando i calcoli, il termine in x^2 si elimina e otteniamo l'equazione di primo grado $48x = 24^2 + 12^2$. Per evitare i calcoli raccogliamo al secondo membro 12^2, quindi ricaviamo $x = \dfrac{12^2 \cdot (2^2 + 1)}{4 \cdot 12} = 15$ cm.

A questo punto possiamo ottenere $BH = 24 - x = 24 - 15 = 9$ cm. Oppure, ricorrendo alla terna pitagorica fondamentale 3, 4, 5, di cui i lati del triangolo ABH sono multipli secondo il numero 3, ho $BH = 3 \cdot 3 = 9$ cm.

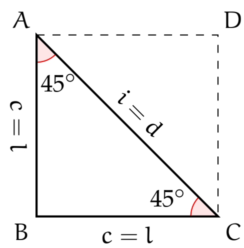
Per ricavare CH applichiamo il secondo teorema di Euclide $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{BH}} = \dfrac{144}{9} = 16$ cm.

Sommando CH con BH troviamo l'ipotenusa $BC = 25$ cm. Per ricavare l'altro cateto ricorriamo alla terna pitagorica fondamentale $AB = 3 \cdot 5 = 15$ cm, $BC = 5 \cdot 5 = 25$ cm, da cui $AC = 4 \cdot 5 = 20$ cm. Il perimetro vale quindi $2p = 15 + 25 + 20 = 60$ cm.

10.6 Applicazioni dell'algebra alla geometria

10.6.1 Triangoli rettangoli con angoli di 45°

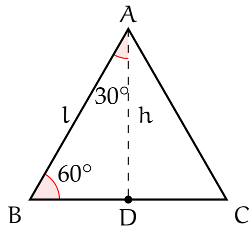
Un triangolo rettangolo avente un angolo di 45° è necessariamente isoscele, in quanto anche il terzo angolo varrà 45°, infatti $180° - (90° + 45°) = 45°$. Indicando con i l'ipotenusa e con c ognuno dei due cateti, applicando il teorema di Pitagora avremo $i = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$.



Viceversa, se conosciamo l'ipotenusa e vogliamo ricavare i cateti, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $c = \dfrac{i}{\sqrt{2}} = i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Un triangolo rettangolo isoscele può anche essere interpretato come metà di un quadrato, di cui i cateti sono i lati e l'ipotenusa è la diagonale. Indicando con l il lato e d la diagonale, anche per un quadrato varranno quindi le precedenti relazioni, ovvero $d = l\sqrt{2}$ e $l = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10.6.2 Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°



Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° avrà il secondo angolo acuto di 60°, infatti $180° - (90° + 30°) = 60°$. Questo triangolo può essere interpretato come metà di un triangolo equilatero: l'ipotenusa coincide con il lato di questo triangolo, il cateto adiacente all'angolo di 60° è metà del lato del triangolo equilatero ed il cateto adiacente all'angolo di 30° è l'altezza del triangolo equilatero. Dunque, indicando con i l'ipotenusa, il cateto BD, adiacente all'angolo di 60°, varrà $\frac{i}{2}$, mentre il cateto AD, opposto all'angolo di 60° e adiacente a quello di 30°, applicando il teorema di Pitagora, varrà $AD = \sqrt{i^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2} = \sqrt{i^2 - \frac{i^2}{4}} = \sqrt{\frac{3i^2}{4}} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Viceversa, se conosciamo il cateto AD e vogliamo ricavare l'ipotenusa, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $i = \frac{2AD}{\sqrt{3}} = 2AD\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicando quindi con l il lato del triangolo equilatero e con h la sua altezza avremo analogamente $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $l = 2h\frac{\sqrt{3}}{3}$.

In questo modo possiamo anche determinare l'area di un qualunque triangolo equilatero conoscendone soltanto il lato $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l\frac{\sqrt{3}}{2} = l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Esempio 10.6. Gli angoli adiacenti alla base minore di un trapezio isoscele misurano 135°. Determinare area e perimetro del trapezio, sapendo che le basi misurano 4 cm e 20 cm.

Tracciamo l'altezza AH (figura 10.7); si verrà così a determinare il triangolo rettangolo ABH. Poiché $A\widehat{B}H = 45°$, anche $B\widehat{A}H = 45°$. Avremo quindi $\overline{BH} = \overline{AH}$; ma $\overline{BH} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2} = 8$ cm, quindi $\overline{AH} = 8$ cm. L'area vale dunque $A = \frac{(20+4) \cdot 8}{2} = 96\ \text{cm}^2$.

Per calcolare il perimetro ricordiamo che $\overline{AB} = \overline{BH}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm e $\overline{CD} = \overline{AB}$. Dunque $2p = 20 + 4 + 2 \cdot 8\sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2} = 8(3 + 2\sqrt{2})$ cm.

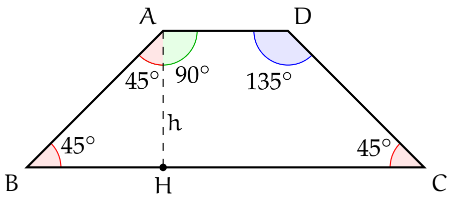


FIGURA 10.7: Esempio 10.6

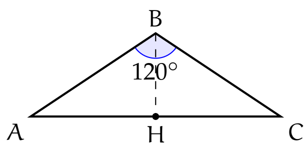


FIGURA 10.8: Esempio 10.7

Esempio 10.7. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di 120°. Determina perimetro ed area sapendo che la base è lunga 60 cm.

Tracciamo l'altezza BH (figura 10.8). Poiché il triangolo è isoscele, l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi $AH \cong HC$; ma BH è anche bisettrice dell'angolo al vertice B, quindi si ottengono due triangoli rettangoli tra loro congruenti, ciascuno dei quali ha in B un angolo di $60°$. Consideriamo uno dei due triangoli, ad esempio ABH; il cateto $\overline{AH} = 30$ cm; poiché l'angolo $\widehat{A} = 30°$, per calcolare $\overline{AB}$ si deve usare la formula inversa $\overline{AB} = \frac{2\overline{AH}\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$ cm. Il perimetro vale dunque $2p = 60 + 40\sqrt{3} = 20(3 + 2\sqrt{3})$ cm.

Per calcolare l'area bisogna prima trovare $\overline{BH}$, che è congruente a metà ipotenusa $\overline{BH} = 10\sqrt{3}$ cm. Quindi $A = \frac{60 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3}$ cm^2.

10.6.3 Formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo

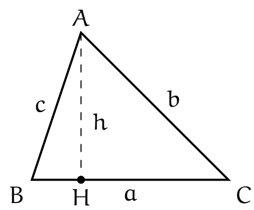
La *formula di Erone* permette di calcolare l'area di un triangolo qualsiasi se si conoscono le misure dei suoi lati.

La sua dimostrazione è piuttosto complicata e non verrà presentata qui, ma la formula può essere utile in alcune circostanze:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Dove con p si intende il semiperimetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



10.7 Esercizi

10.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

10.2 - Poligoni equivalenti

10.1. Enuncia e dimostra il teorema le cui ipotesi e tesi sono indicate di seguito.
Ipotesi: $AB \parallel DC$, $GH \perp AB$, $CJ \perp AB$, $AE \cong DE$, $CF \cong FB$.
Tesi: $ABCD \doteq GHJI$.

10.2. Dai vertici B e C dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC traccia le rette rispettivamente parallele ai cateti AC e AB; sia D il loro punto di intersezione. Dimostrare che $ABDC \doteq 2 \cdot ABC$ e che $MNPQ \doteq 2 \cdot ABC$ dove $MNPQ$ è il rettangolo avente un lato congruente all'ipotenusa BC e l'altro lato congruente all'altezza AH relativa all'ipotenusa.

10.3. Costruire un rettangolo equivalente ad un trapezio dato.

10.4. Dimostrare che la mediana relativa ad un lato di un triangolo divide il triangolo dato in due triangoli equivalenti.

10.5. Dimostrare che in un parallelogramma $ABCD$ sono equivalenti i quattro triangoli determinati dalle diagonali AC e BD.

10.6. Assegnato il trapezio $ABCD$, detto E il punto di intersezione delle diagonali DB e AC, dimostrare che DEA è equivalente a BEC.

10.6 - Applicazioni dell'algebra alla geometria

10.7. Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano $2a$ e $4a$ e l'angolo tra essi compreso misura $60°$. Trovare la misura dell'area e delle diagonali. $[A = 4\sqrt{3}a^2, \quad d_1 = 2\sqrt{3}a, \quad d_2 = 2\sqrt{7}a]$

10.8. Determinare perimetro ed area di un triangolo isoscele, sapendo che la base misura $10a$ e che l'angolo adiacente ad uno degli angoli alla base misura $150°$. $[2p = 10a(2\sqrt{3}+3)/3, \quad A = 25a^2/\sqrt{3}]$

10.9. È dato un trapezio isoscele avente un angolo di $45°$ e il lato obliquo che misura 2 cm. Trovare l'area sapendo che la base minore misura $\sqrt{3}$ cm. $[2+\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2]$

10.10. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 2 m; costruite sul lato DC il triangolo isoscele DEC di base DC e avente $D\widehat{E}C = 120°$; siano F e G i punti di intersezione delle rette ED e EC con la retta AB. Determinate la misura dei lati del triangolo EFG. $[4+2/\sqrt{3}, \quad 4\sqrt{3}+2]$

10.11. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ di base maggiore AB, l'angolo acuto di vertice B misura $45°$ e l'altezza è di 8 m. Sapendo che la base minore è 3/4 dell'altezza, determinate perimetro e area del trapezio. $[28+8\sqrt{2}, \quad 80]$

10.12. Nel parallelogramma $ABCD$ la diagonale minore AC è perpendicolare al lato BC e forma col lato AB un angolo di $45°$. Sapendo che $AC = 5$ m, calcolate il perimetro e l'area del parallelogramma. $[10(1+\sqrt{2}), \quad 25]$

10.13. Il trapezio $ABCD$ di base maggiore AB, ha $\widehat{A} = 45°$ e $\widehat{B} = 60°$; sapendo che la base minore è uguale all'altezza che misura 12 cm, determinate perimetro e area del trapezio. $[24(9+\sqrt{3}), \quad 36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3}]$

10.14. Il triangolo isoscele ABC ha l'angolo in A opposto alla base BC di $120°$ ed è circoscritto ad una circonferenza di raggio $OH = \sqrt{6}$ m;

calcolate perimetro e area del triangolo dato. $[14\sqrt{2}+8\sqrt{6}, \quad 14\sqrt{3}+24]$

10.15. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la base minore è metà dell'altezza. Determinate perimetro e area in funzione della misura x della base minore nei casi in cui l'angolo acuto del trapezio è di

a) 45°;
b) 30°;
c) 60°.

[a) $2p = 2x(\sqrt{2}+3)$; $A = 4x^2$, b) $2p = 2x(4+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(1+\sqrt{3})$, c) $2p = 2x(2+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(3+\sqrt{3})$]

10.16. Il triangolo ABC è rettangolo e l'angolo di vertice C misura 30°; detta AP la bisettrice dell'angolo retto, con P su BC, e sapendo che $\overline{AP} = a$, determinate, in funzione di a, perimetro e area del triangolo dato. $[\frac{11}{6}a\sqrt{2}+a\sqrt{6}, \quad \frac{1}{6}a^2(e+2\sqrt{3})]$

10.17. Il segmento AC è la diagonale del quadrilatero $ABCD$ avente $A\widehat{B}C = C\widehat{A}D = 90°$ e $B\widehat{C}A = A\widehat{D}C = 60°$. È vero che $ABCD$ è un trapezio rettangolo? Calcolate perimetro e area del quadrilatero sapendo che $\overline{AC} = 2a$. $[2p = a+3a\sqrt{3}, \quad A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}]$

10.18. In un parallelogramma di area 12 m^2, le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra e uno degli angoli interni misura 60°. Determina la lunghezza delle diagonali. $[2\sqrt[4]{27}\ m]$

10.19. La base di un rettangolo è più lunga di 8 cm dell'altezza ed è più corta di 10 cm della diagonale. Calcola perimetro ed area del rettangolo.

10.20. In un triangolo equilatero ABC di lato l individua sul lato AB un punto P tale che detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AC e BC risulti $\overline{PH}^2+\overline{PK}^2 = \overline{PC}^2+12{,}67$

10.21. Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra le aree delle due figure? [16/9]

10.22. Disegna un rombo con la diagonale minore lunga 6 cm e la diagonale maggiore 8 cm. Costruisci su ciascun lato del rombo un quadrato. Unisci i vertici liberi dei quadrati formando un ottagono. Calcolane l'area. Calcola anche l'area dei quattro triangoli che si sono formati. Calcola inoltre la misura degli angoli interni dell'ottagono. [12 cm^2, 12 cm^2, 172°]

10.23. Disegna un quadrato $ABCD$ e sul lato AB poni i punti M ed N in modo che $AM \cong MN \cong NB$. Che figura è $MNCD$? Calcola il rapporto tra l'area di $MNCD$ e quella di $ABCD$. Calcola il perimetro di $MNCD$ sapendo che l'area del quadrato è 10 cm^2. [0,665, 10,85 cm]

10.24. Disegna un triangolo isoscele ABC di base $AC = 40$ mm e lato obliquo $AB = 52$ mm. Costruisci sulla base AC il triangolo ACD di area doppia di ABC e determina il perimetro del quadrilatero $ABCD$. Di che figura si tratta? [300,12 mm]

10.25. Il parallelogramma $ABCD$ ha la base AB lunga 12 cm e l'altezza di 6 cm. Disegna su AB un punto H e su CD un punto K tali che $DK = BH = 3$ cm. Considera i due quadrilateri in cui il parallelogramma rimane diviso dal segmento HK: che quadrilateri sono? Calcolane l'area. Calcola inoltre il rapporto tra l'area di $HBCD$ e quella di $ABCD$. [36, 0,625]

10.26. Calcola l'altezza del rombo avente le diagonali di 36 cm e 48 cm. Calcola l'area del trapezio equivalente al rombo, sapendo che l'altezza del trapezio è di 24 cm e che la base maggiore è il doppio di quella minore. []

10.27. Il rettangolo R ha base $AB = 9$ cm e l'altezza BC è i $4/3$ di AB. Calcola il perimetro e l'area di R. Disegna il parallelogramma P equivalente al rettangolo R e avente la base congruente alla diagonale del rettangolo. Calcola l'altezza di P. [42 cm, 108 cm^2, 7,2 cm]

10.28. Calcola l'area del parallelogramma P di base 4,5 cm e altezza 2 cm e con il lato obliquo che è 5/4 dell'altezza. Disegna la diagonale AC e traccia l'altezza relativa ad AB del triangolo ABC. Calcola l'area del triangolo ABC. [11,25 cm^2, 5,625 cm^2]

10.29. Dato il rombo $ABCD$, avente perimetro di 10 cm e la diagonale maggiore di 4 cm, calcola la misura della diagonale minore, l'area del rombo e la sua altezza. Considera un triangolo isoscele equivalente al rombo e avente la sua stessa altezza. Calcolane la misura di ciascun lato. [3 cm, 6 cm^2, 2,4 cm, 5 cm, 3,5 cm]

10.30. La differenza tra le diagonali di un rombo è 7 cm e una è 5/12 dell'altra. Determina l'area di un triangolo isoscele il cui perimetro supera di 6 cm quello del rombo e la cui base è 8 cm.

10.31. Determinare l'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari sapendo che l'una è 5/8 dell'altra e che la loro somma è 39 cm. []

10.32. Determinare la misura degli angoli di un parallelogramma sapendo che uno degli angoli alla base è 2/7 di quello adiacente.

10.33. In un rombo la somma delle diagonali misura 196 cm, un quarto della misura della diagonale maggiore supera di 4 cm la misura della diagonale minore. Trova perimetro, area e altezza del rombo. [328 cm, 2 880 cm^2, 35,15 cm]

10.34. In un trapezio rettangolo l'altezza è quadrupla della base minore e il lato obliquo è i 5/4 dell'altezza. Determina l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è 70 cm. [250 cm^2]

10.35. Il perimetro di un trapezio isoscele misura 124 cm e ciascun lato obliquo è lungo 30 cm. Determinane l'area e la misura della diagonale sapendo che una sua base è 7/25 dell'altra. [768 cm^2, 40 cm]

10.36. Determina l'area di un rettangolo sapendo che la misura della sua diagonale supera di 8 cm quella dell'altezza e che la differenza fra i 20/41 della diagonale ed i 2/3 dell'altezza è uguale ai 14/9 della stessa altezza.

10.37. Il perimetro di un rettangolo misura 29 cm ed i 2/11 della sua altezza sono uguali a 1/9 della base. Trovare l'area del rettangolo. [49,5 cm^2]

10.38. Determina il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è 8 cm e che la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è 4/3 dell'altezza data. [40 cm]

10.39. Determina la misura delle tre altezze del triangolo che ha i lati di 20 cm, 40 cm, 30 cm. (Suggerimento: Puoi ricorrere alla formula di Erone).

10.40. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è 2/3 dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

10.41. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è 3/5 dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

10.42. I lati del triangolo ABC hanno le misure seguenti $AB = 63$ cm, $BC = 60$ cm e $AC = 39$ cm; determina le misure delle tre relative altezze.

10.43. Determinare la misura di ciascun lato e l'area del triangolo isoscele avente il perimetro di 700 m, sapendo che la base e il lato obliquo sono in rapporto $\frac{16}{17}$. [224 m, 238 m, 23 520 m^2]

10.44. In un trapezio rettangolo, l'angolo che il lato obliquo forma con la base maggiore ha ampiezza 60° e la diagonale maggiore dimezza tale angolo; sapendo che la base minore misura 4 cm, calcolare il perimetro del trapezio. [$14 + 2\sqrt{3}$ cm]

10.45. Determina area e perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-1;7)$, $B(6;9/2)$, $C(4;-3)$ e $D(-4;3)$. [30,2, 53,75]

10.46. Determina area a perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(0;3)$, $B(3;6)$, $C(6;3)$ e $D(-4;3)$. Che quadrilatero è? [22,4; 19,5]

10.47. Determina l'area del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-8;5)$, $B(-2;11)$, $C(2;12)$ e $D(4;3)$. $[A = 14]$

10.48. Determina il quarto vertice D del trapezio $ABCD$ di area 9, sapendo che $A(-1;2)$, $B(5;2)$ e $C(3;4)$.

10.49. Determina il quarto vertice D del parallelogramma $ABCD$ con $A(-3;-1)$, $B(4;1)$ e $C(3;4)$. $[D(-4;2)]$

10.50. Verifica che il trapezio di vertici $A(-1;-1)$, $B(3;-2)$, $C\left(3;\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$ non è rettangolo. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

10.51. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$, $C(4;1)$ e $D(0;3)$ è un trapezio e calcolane l'altezza.

10.52. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-4;1)$, $B(5;-2)$, $C(3;2)$ e $D(0;3)$ è un trapezio isoscele. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

10.53 (Giochi di Archimede 2007)**.** $ABCD$ è un quadrato avente la diagonale lunga 2 cm e AEC è equilatero. Quanto vale l'area del quadrilatero $AECB$?

10.54 (Giochi d'Autunno 2011)**.** Nel parallelogramma $ABCD$ il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero $GEHF$, sapendo che $AB = 5$ cm e $BD = 2$ cm.

10.55 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?

10.56 (Giochi d'Autunno 2011)**.** In un parallelogramma di area 1 m^2 le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra. Inoltre uno degli angoli interni misura 60°. Quanto misura la diagonale minore?

10.57 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare ad AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?

10.58 (Giochi di Archimede 2005)**.** Dato un quadrato $ABCD$ si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato $EFGH$. Ripetiamo la stessa operazione per $EFGH$ e otteniamo un nuovo quadrato $A'B'C'D'$. Quanto vale il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di $A'B'C'D'$?

Trasformazioni geometriche piane 11

"La danza degli storni"
Foto di _Peck_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/

11.1 Generalità sulle trasformazioni geometriche piane

11.1.1 Introduzione e definizioni

> «C'è una cosa straordinaria da vedere a Roma in questa fine d'autunno ed è il cielo gremito d'uccelli. Il terrazzo del signor Palomar è un buon punto d'osservazione [...] Nell'aria viola del tramonto egli guarda affiorare da una parte del cielo un pulviscolo minutissimo, una nuvola d'ali che volano [...] Quando si pensa agli uccelli migratori ci si immagina di solito una formazione di volo molto ordinata e compatta [...] Quest'immagine non vale per gli storni, o almeno per questi storni autunnali nel cielo di Roma [...]»
>
> Da *Palomar* di Italo Calvino

Il volo degli storni disegna nel cielo figure in continua trasformazione, come si può vedere dalle foto riportate nelle figure 11.1 e 11.2.

FIGURA 11.1: *La danza degli storni* [1]

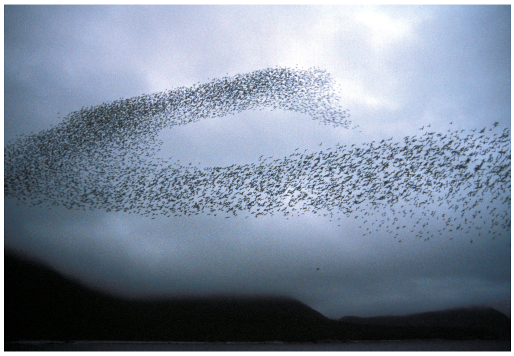


FIGURA 11.2: *Auklet flock, Shumagins 1986*[2]

Il concetto di trasformazione assume significati diversi a secondo dell'ambito in cui è definito: ad esempio in zoologia la trasformazione di un animale dallo stadio di larva allo stadio di adulto è più propriamente chiamata "metamorfosi". Ciò provoca un cambiamento totale del corpo del giovane e l'adulto quasi sempre avrà una forma molto differente da quella della larva (figura 11.3).

Il gioco del tangram (vedi pagina 188) si basa sulla capacità di passare da una figura ad un'altra senza che nessun pezzo del quadrato base venga tagliato o modificato nelle sue dimensioni: le figure che si ottengono (come quella riportata nella figura 11.4) hanno forme diverse, ma sono costituite dagli stessi pezzi. Possiamo dire che le une vengono trasformate nelle altre grazie alla nostra fantasia.

In geometria le trasformazioni sono particolari corrispondenze aventi come dominio e codominio il piano considerato come insieme di punti. Più precisamente si enuncia la seguente

Definizione 11.1. Si definisce *trasformazione geometrica piana* una corrispondenza biunivoca tra punti del piano.

[1] foto di _Peck_, http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/.
[2] foto di D. Dibenski, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Auklet_flock_Shumagins_1986.jpg.

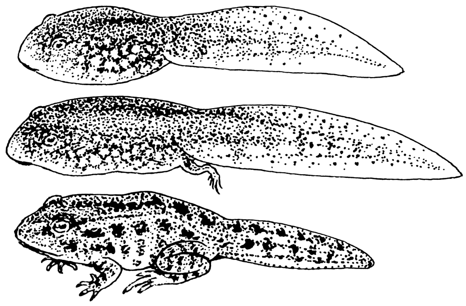


FIGURA 11.3: *Line art representation of w:Tadpole*[3]

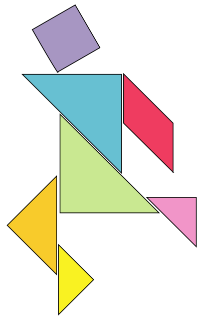


FIGURA 11.4: *Tangram-man*[4]

Attraverso una legge ben definita, una trasformazione geometrica piana associa ad un punto P del piano uno e un solo punto P' dello stesso piano e, viceversa, il punto P' risulta essere il corrispondente di un solo punto P del piano. Diciamo che P' è l'*immagine di* P nella trasformazione considerata.

Indicata con Φ la legge della corrispondenza che individua la trasformazione, per esprimere il legame tra P e P' scriveremo

$$\boxed{\Phi : P \rightarrow P'} \qquad \text{o anche} \qquad \boxed{P \stackrel{\Phi}{\rightarrow} P'}$$

e leggeremo: "Φ fa corrispondere al punto P il punto P'", oppure

$$\boxed{\Phi(P) = P'}$$

e leggeremo: "Φ di P è uguale a P'", scrittura che definisce la trasformazione geometrica come funzione del punto preso in considerazione.

La trasformazione Φ fa corrispondere ad una figura Ω del piano la figura Ω' costituita dalle immagini dei punti della figura iniziale. Ω' è detta dunque *immagine di* Ω *secondo* Φ, in formule $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ o anche $\Omega \stackrel{\Phi}{\rightarrow} \Omega'$ o ancora $\Phi(\Omega) = \Omega'$.

Le trasformazioni geometriche che studieremo sono tali da far corrispondere ad una retta r la retta r' individuata dai punti A' e B' immagini di due punti A e B scelti arbitrariamente su r. Tali trasformazioni sono chiamate *collineazioni*.

Definizione 11.2. Un punto P che coincide con la propria immagine P' è detto *punto unito* o *fisso* nella trasformazione Φ considerata.

Nel caso in cui tutti i punti del piano coincidono con la propria immagine, la trasformazione è detta *identità*.

Per descrivere una trasformazione geometrica è quindi necessario definire come si costruisce l'immagine di un qualunque punto del piano.

[3]immagine di Pearson Scott Foresman, `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tadpole_%28PSF%29.png`.
[4]immagine di Actam, `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangram-man.svg`.

Esempio 11.1. Consideriamo nel piano la seguente corrispondenza: fissato un punto K la corrispondenza S_K associa ad ogni punto P del piano il punto P' dello stesso piano tale che K risulti il punto medio del segmento PP'. S_K è una trasformazione geometrica?

La definizione è costruttiva:

$$P \overset{S_K}{\rightarrow} P' \wedge PK \cong KP', \quad A \overset{S_K}{\rightarrow} A' \wedge AK \cong KA'$$

Per dimostrare che la corrispondenza è una trasformazione geometrica dobbiamo verificare che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano: ogni punto ha un corrispondente secondo S_K e, viceversa, ogni punto è immagine di un solo punto del piano stesso. Il punto K è corrispondente di se stesso dunque è un punto unito della trasformazione, anzi è l'unico punto unito (figura 11.5).

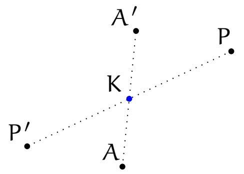


FIGURA 11.5: Esempio 11.1

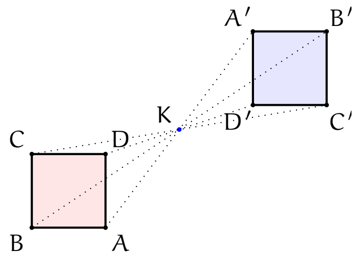


FIGURA 11.6: Esempio 11.1

Nella figura 11.6 è rappresentato come opera la trasformazione S_K se applicata ad un quadrato.

$$AK \cong KA', BK \cong KB', CK \cong KC', DK \cong KD'$$

$ABCD \overset{S_K}{\rightarrow} A'B'C'D'$ e i due quadrati hanno le stesse dimensioni.

Esempio 11.2. Definiamo la seguente trasformazione geometrica Φ sul generico punto P: dato un punto O, tracciamo la semiretta uscente da O e passante per P; il punto P', trasformato di P secondo Φ, è il punto della semiretta tale che $OP' = 2OP$.

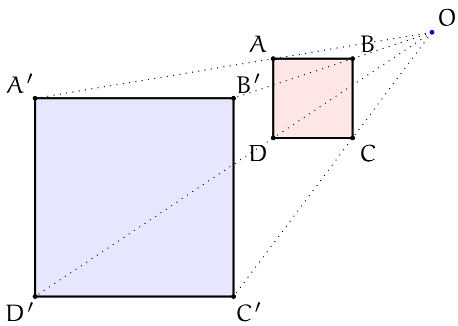


FIGURA 11.7: Esempio 11.2

Applicando questa trasformazione al quadrato ABCD (figura 11.7) quest'ultimo si trasforma in un altro quadrato ma le due figure non hanno le stesse dimensioni.

Si noti il fatto che esistono trasformazioni geometriche che mantengono invariate forma e dimensioni delle figure a cui sono applicate, altre che mantengono inalterate la forma ma non dimensioni ed altre ancora che non mantengono inalterata neppure la forma.

Definizione 11.3. Si chiamano *proprietà invarianti di una trasformazione* le caratteristiche che una figura e la sua corrispondente mantengono inalterate nella trasformazione.

Le principali caratteristiche che una trasformazione può lasciare inalterate sono: la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra segmenti, la misura della superficie, il parallelismo dei segmenti, l'orientamento dei punti del piano, la direzione delle rette, la forma, il numero di lati delle figure. In questo capitolo tratteremo solo delle trasformazioni che mantengono invariate sia la forma che le dimensioni delle figure.

Definizione 11.4. Si chiama *isometria* una trasformazione piana che associa a due punti distinti A e B del piano i punti A' e B' tali che AB e $A'B'$ risultano congruenti.

Solo il primo esempio, tra i precedenti, rappresenta una isometria. Per dimostrare che è una isometria dobbiamo dimostrare che segmenti corrispondenti sono congruenti. Consideriamo il segmento AP e il suo corrispondente $A'P'$; dimostriamo che $AP \cong A'P'$. Considero i triangoli AKP e $A'KP'$, hanno .... Lasciamo al lettore lo sviluppo della dimostrazione.

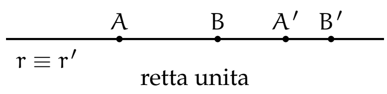
Riportiamo di seguito le proprietà di una isometria:

- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

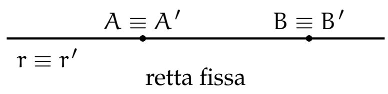
Definizione 11.5. In una isometria Σ, una *retta* è *unita* se coincide con la sua immagine, cioè ogni punto della retta data ha come corrispondente un punto della stessa retta. Nel caso in cui ogni punto di essa sia un punto unito, la retta è luogo di punti uniti e viene detta *retta fissa*.

caso la retta unita è luogo di punti uniti o *retta fissa*.

$$\left.\begin{array}{l} A \in r \ \wedge \ B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \ \wedge \ (B \to B') \\ A' \in r \ \wedge \ B' \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \ \wedge \ B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \ \wedge \ (B \to B') \\ A' \equiv A \ \wedge \ B' \equiv B \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



11.2 Le isometrie

Riprendiamo la definizione del paragrafo precedente: si chiama isometria una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che $AB \cong A'B'$.

Richiamiamo anche le proprietà:

- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Adesso ci proponiamo di studiare particolari isometrie.

11.2.1 La simmetria centrale

Definizione 11.6. Fissato nel piano un punto K, chiamiamo *simmetria centrale di centro* K (indicata col simbolo S_K) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che K risulti il punto medio del segmento PP'.

Con riga e compasso.

Procedura 11.1. *Costruzione con riga e compasso del simmetrico di un punto P rispetto ad un centro K:*

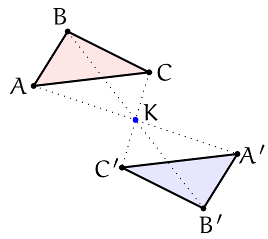
1. *Traccia il punto P.*
2. *Traccia il punto K.*
3. *Traccia la semiretta di origine P contenente K.*
4. *Traccia la circonferenza di centro K e passante per P.*
5. *Denomina P' il punto, diverso da P, di intersezione fra la semiretta e la circonferenza.*
6. *P' è il punto trasformato di P mediante la simmetria centrale di centro K.*

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: Il punto P e il centro della simmetria O
Costruisci il punto P' simmetrico di P rispetto ad O.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: Punto P e centro O
p_p = pyig.Point(2, 5, width=6, name="P")
p_o = pyig.Point(5, 3, width=6, name="O")
## Costruzione del Simmetrico rispetto a O
r_op = pyig.Line(p_o, p_p, width=1)     # retta OP
c_op = pyig.Circle(p_o, p_p, width=1)    # circ di centro O passante per P
p_p1 = pyig.Intersection(c_op, r_op, -1, width=6,
```

```
                              color="chocolate", name="P'") # P' cercato
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

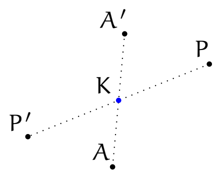
Per determinare l'immagine di un segmento è sufficiente determinare l'immagine dei suoi estremi. Nella figura a fianco è illustrato come agisce S_K su una qualunque figura piana: l'immagine del triangolo ABC è il triangolo $A'B'C'$ ottenuto determinando l'immagine di ciascuno dei suoi vertici.



Teorema 11.2. S_K *è una isometria.*

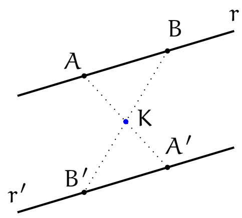
Ipotesi: $A \overset{S_K}{\to} A'$, $P \overset{S_K}{\to} P'$, $PK \cong P'K$, $AK \cong A'K$.
Tesi: $AP \cong A'P'$.

Fissato K, centro di simmetria, ... Lasciamo al lettore la dimostrazione (serviti della figura a fianco).



Teorema 11.3. *Rette corrispondenti in* S_K *sono parallele.*

Dimostrazione. Osserviamo che per determinare l'immagine r' di una retta r in $/S_K$ è sufficiente costruire l'immagine A' e B' di due suoi punti A e B. Per la costruzione effettuata si ha $AK \cong KA'$ e $BK \cong B'K$. Per il teorema 11.2 abbiamo $AKB \cong A'KB'$ dunque, in particolare, $A\widehat{B}K \cong A'\widehat{B'}K$. Questi sono angoli alterni interni delle rette r ed r' con trasversale BB', che pertanto risultano parallele. □



Gli elementi uniti

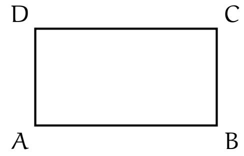
- l'unico punto unito è il centro di simmetria;
- sono unite tutte le rette passanti per il centro di simmetria.

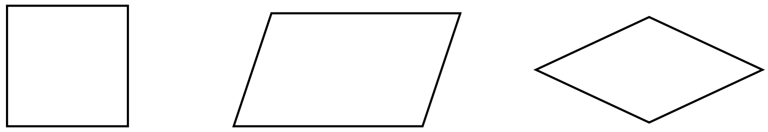
Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima proposizione.

Immaginate di percorrere il contorno di un triangolo ABC partendo dal vertice A procedendo in ordine alfabetico: state ruotando in senso orario o antiorario? . . . . . . In quale senso percorrete il contorno di $A'B'C'$ (triangolo trasformato di ABC secondo S_K) partendo da A'? . . . . . .

Questo fatto ci permette di concludere che S_K mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria diretta*.

Esempio 11.3. Nel rettangolo $ABCD$ indicate con O il punto di incontro delle diagonali; determinate l'immagine di $ABCD$ nella simmetria di centro O.





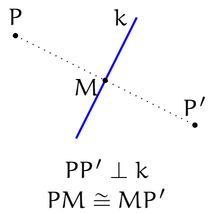
$S_O : ABCD \rightarrow \ldots\ldots$ pertanto il rettangolo è una *figura unita* nella simmetria avente come centro il punto di intersezione delle sue diagonali.

Vale la stessa affermazione per qualunque parallelogramma? Perché? $\ldots\ldots\ldots$

Definizione 11.7. Si dice che una figura F ha un *centro di simmetria* se esiste nel piano un punto K tale che nella simmetria di centro K, F coincide con la sua immagine F', ovvero F è unita in S_K.

11.2.2 La simmetria assiale

Ricordiamo la definizione 3.38 di asse di un segmento, «l'asse di un segmento AB è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio M» e studiamo una nuova corrispondenza tra punti del piano.



Definizione 11.8. Fissata nel piano una retta k, chiamiamo *simmetria assiale di asse* k (indicata col simbolo S_k) la corrispondenza, nel piano, che associa ad un punto P il punto P' tale che k risulti l'asse del segmento PP'.

Con riga e compasso.

Procedura 11.4. *Costruzione con riga e compasso del simmetrico di un punto P rispetto ad un asse k:*

1. *Traccia il punto P.*
2. *Traccia la retta k non passante per P.*
3. *Costruisci la perpendicolare per P alla retta k.*
4. *Denomina M il punto di intersezione fra la perpendicolare e la retta k.*
5. *Traccia la circonferenza di centro M e passante per P.*
6. *Denomina P' il punto, diverso da P, di intersezione fra la perpendicolare e la circonferenza.*
7. *P' è il punto trasformato di P mediante la simmetria assiale di asse k.*

In questo modo si otterrà una figura simile a quella a fianco.

Con la geometria interattiva.

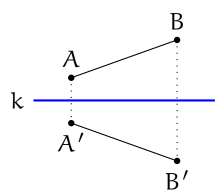
```
"""
Disegna: Il punto P e l'asse doi simmetria k.
Costruisci il punto P' simmetrico di P rispetto all'asse k.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: Punto P e centro O
p_p = pyig.Point(-4, 6, width=6, name="P")
r_k = pyig.Line(pyig.Point(-2, -7, width=6), pyig.Point(4, 12, width=6),
                color="dark green", name="k")
## Costruzione del Simmetrico rispetto a O
r_orth = pyig.Orthogonal(r_k, p_p, width=1)    # retta per P perpend. a k
p_h = pyig.Intersection(r_k, r_orth)
c_op = pyig.Circle(p_h, p_p, width=1)    # circ di centro O passante per P
p_p1 = pyig.Intersection(c_op, r_orth, -1, width=6,
                         color="chocolate", name="P'") # P' cercato
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Lasciamo al lettore le verifiche delle seguenti affermazioni circa gli elementi uniti di questa trasformazione S_k.

- ogni punto dell'asse k è unito;
- l'asse k è luogo di punti uniti, ossia è una retta fissa;
- sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse k;

Teorema 11.5. *La trasformazione S_k è una isometria.*

Strategia risolutiva: Dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento $A'B'$ tale che $A'B' \cong AB$; servitevi della figura a fianco per la dimostrazione, ma prima indicate ipotesi e tesi ($A'B' \cong AB$). Suggerimento: tracciate la distanza da A e da A' a BB' e dimostrate la congruenza dei triangoli ottenuti.

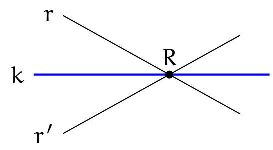


Teorema 11.6. *Se r è una retta del piano che interseca l'asse k in R allora la sua immagine r' in S_k passa per R. k risulta inoltre la bisettrice dell'angolo di vertice R avente come lati r ed r'.*

Ipotesi: k asse di simmetria, $R = r \cap k$.
Tesi: $R = r' \cap k$, $r\widehat{R}k \cong k\widehat{R}r'$.

Dimostrazione. Per costruire r' costruiamo i simmetrici in S_k di due punti scelti su r. Possiamo usare il punto R e poi un altro qualunque A. Si ottiene $S_k : R \to \ldots$ perché .... e $S_k : A \to \ldots$

Congiungendo i punti immagine si ottiene r'. Concludete .... E continuate dimostrando la seconda tesi richiesta. □

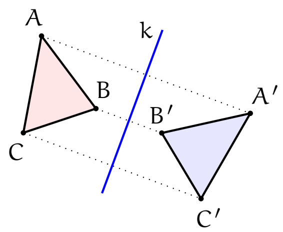


Teorema 11.7. *Se r è parallela all'asse di simmetria k allora lo è anche r'.*

Lasciamo la sua dimostrazione al lettore.

Considerate la figura a fianco. Percorrete il contorno del triangolo ABC seguendo l'ordine alfabetico delle lettere ai vertici: il percorso è stato in senso orario/antiorario? Cosa succede percorrendo il contorno del triangolo immagine $A'B'C'$ secondo S_k?

Questo fatto ci permette di concludere che S_k non mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria invertente*.

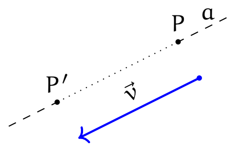


11.2.3 La traslazione

Definizione 11.9. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama *traslazione di vettore* $\vec{v}$ (indicata con $T_{\vec{v}}$) la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\overrightarrow{PP'} \equiv \vec{v}$.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:

1. fissate un vettore $\vec{v}$;
2. prendete un punto P del piano;
3. da P tracciate la retta a avente la stessa direzione di $\vec{v}$;
4. su a fissate il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$.



Con riga e compasso.

Procedura 11.8. *Costruzione con riga e compasso del traslato di un punto P nella traslazione di vettore $\vec{v}$:*

1. *Traccia il punto P.*
2. *Traccia il vettore $\vec{v}$.*
3. *Costruisci la retta passante per P e parallela al vettore $\vec{v}$: denominala r.*
4. *Traccia la circonferenza di centro P e di raggio congruente al segmento del vettore $\vec{v}$.*
5. *Individua, fra i punti di intersezione della retta r con la circonferenza, quello per il quale il segmento orientato AA′ risulti concorde al vettore $\vec{v}$: denominalo P′*

Il punto P' così determinato è l'immagine di P nella traslazione di vettore $\vec{v}$, cioè $T_{\vec{v}} : P \to P'$.

Con la geometria interattiva.

```
"""
Disegna: Il punto P e il vettore v.
Costruisci il punto P' traslato di P di vettore v.
"""
# lettura delle librerie
import pyig

# programma principale
ip = pyig.InteractivePlane()
## Dati: Punto P e centro O
p_p = pyig.Point(-4, 6, width=6, name="P")
s_v = pyig.Vector(pyig.Point(-11, 13, width=6), pyig.Point(-2, 11, width=6),
                  color="dark green", name="v")
## Costruzione del Simmetrico rispetto a O
r_par = pyig.Parallel(s_v, p_p, width=1)    # retta per P parallela a v
c_ov = pyig.Circle(p_p, s_v, width=1)       # circ di centro O e raggio v
p_p1 = pyig.Intersection(c_ov, r_par, +1, width=6,
                         color="chocolate", name="P'") # P' cercato
## attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Gli elementi uniti

- «Nella traslazione non ci sono punti uniti».
- «Una retta parallela al vettore che individua la traslazione è unita».

Lasciamo al lettore la verifica delle proposizioni enunciate.

Teorema 11.9. *La trasformazione $T_{\vec{v}}$ è una isometria.*

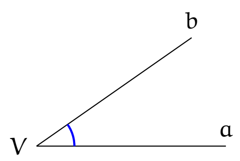
Strategia risolutiva: dimostrate che l'immagine di un segmento AB è un segmento $A'B'$ tale che $AB \cong A'B'$.

Teorema 11.10. *Se r ed r' sono due rette corrispondenti in $T_{\vec{v}}$, allora sono parallele.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione del teorema.

11.2.4 La rotazione

Fissiamo nel piano un angolo convesso di vertice V e lati a e b; se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo muovendoci in senso antiorario; considerando l'angolo concavo di vertice V e lati a e b se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo concavo muovendoci in senso orario.



Definizione 11.10. Un *angolo* si dice *orientato* quando viene fissato un ordine tra i suoi lati, ad esempio l'ordine alfabetico. Se per andare dal primo lato al secondo ci muoviamo in senso antiorario diciamo che l'angolo è positivo, al contrario avremo un angolo negativo.

Esempio 11.4. Nella figura 11.8 sono disegnati alcuni angoli i cui lati seguono l'ordine alfabetico.

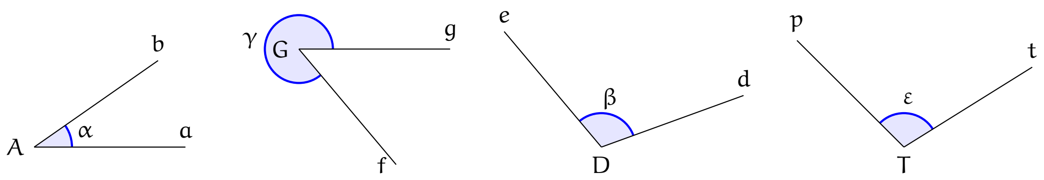


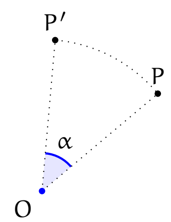
FIGURA 11.8: Esempio 11.4

- Angolo di vertice A e lati a e b: a raggiunge b percorrendo l'angolo α in senso antiorario quindi diciamo che α è positivo.
- Angolo di vertice G e lati f e g: f raggiunge g percorrendo l'angolo γ in senso orario quindi diciamo che γ è negativo.
- Angolo di vertice D e lati d ed e: ....
- Angolo di vertice T e lati p e t: ....

Definizione 11.11. Fissato un punto O e un angolo orientato α, chiamiamo *rotazione di centro* O *e ampiezza* α, $R_{O,\alpha}$, la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che $OP \cong OP'$ e $P\widehat{O}P' = \alpha$.

Fissato l'angolo orientato α, il punto O centro della rotazione, l'immagine del punto P si determina con i seguenti passi:

1. congiungiamo O con P;
2. tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OP;
3. costruiamo, con vertice in O, l'angolo α;
4. P' è il punto di intersezione della circonferenza con il secondo lato dell'angolo α.



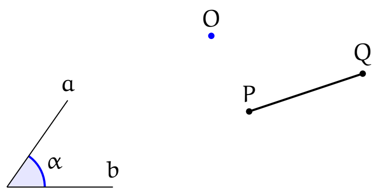
Gli elementi uniti

- «Il centro è l'unico punto unito».
- «Sono unite tutte le circonferenze aventi il centro nel centro di rotazione».

Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato.

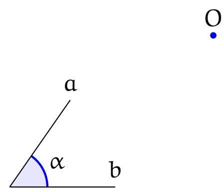
Teorema 11.11. *La rotazione è una isometria.*

Per dimostrare il teorema proposto, servitevi della figura a lato, nella quale è segnato il centro di rotazione O, l'angolo orientato α (a è il primo lato) e un segmento PQ. Strategia risolutiva: costruite l'immagine $P'Q'$ nella rotazione assegnata.
Ipotesi: ....
Tesi: ....
Dimostrazione. ....



Teorema 11.12. *La rotazione è una isometria diretta.*

Ricordate che per questa dimostrazione basta costruire l'immagine di una figura e verificare che viene mantenuto il verso di percorrenza del contorno. Vi proponiamo, nella figura a lato, il centro e l'angolo di rotazione; disegnate una figura geometrica, costruite la sua immagine e concludete.



11.3 Composizione di isometrie

11.3.1 Composizione di isometrie di tipo diverso

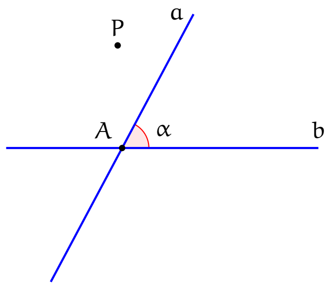
Definizione 11.12. Chiamiamo *composizione di due isometrie* Φ_1 *e* Φ_2 l'isometria $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ (e leggiamo "Φ_2 composta con Φ_1"), che associa ad un qualunque punto P del piano il punto P'' ottenuto determinando prima l'immagine P' di P in Φ_1 e di seguito l'immagine P'' di P' in Φ_2. In formula: $\Phi(P) = \Phi_1 \circ \Phi_2 : P \overset{\Phi_1}{\to} P' \overset{\Phi_2}{\to} P''$.

In generale, la composizione di isometrie non è commutativa, cioè $\Phi_1 \circ \Phi_2 \neq \Phi_2 \circ \Phi_1$.

11.3.2 Composizione di isometrie dello stesso tipo

Esempio 11.5. Servendovi della figura a fianco

- Determinate l'immagine del punto P nell'isometria ottenuta componendo due simmetrie con assi incidenti $P \overset{S_a}{\to} P' \overset{S_b}{\to} P''$.
- Verificate che la composizione non è commutativa determinando $P \overset{S_b}{\to} P'_1 \overset{S_a}{\to} P''_1$.
- Dimostrate che $AP \cong AP' \cong AP'' \cong AP'_1 \cong AP''_1$.
- Dimostrate che i punti P, P', P'', P'_1 e P''_1 stanno su una stessa circonferenza di centro A.
- Dimostrate che $P\widehat{A}P'' = 2 \cdot \alpha$.



Conclusione: la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti nel punto A è la rotazione di centro A e angolo orientato $2 \cdot \alpha$; i punti corrispondenti appartengono ad una circonferenza di centro A e raggio AP, dove P è il punto considerato. La composizione in esame non è commutativa.

Si possono dimostrare le seguenti proprietà, che riprenderemo nella parte successiva, in cui descriveremo le trasformazioni geometriche in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Proposzione 11.13. *La composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari in* K *è la simmetria centrale di centro* K.

Proposzione 11.14. *La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore avente direzione perpendicolare ai due assi di simmetria e modulo uguale al doppio della distanza tra gli stessi assi.*

Proposzione 11.15. *La composizione di due simmetrie centrali, di centro rispettivamente* O_1 *e* O_2, *è una traslazione di vettore avente la direzione della retta* O_1O_2 *e modulo uguale al doppio della distanza tra* O_1 *e* O_2.

11.3.3 Isometria inversa

Sappiamo che dalla composizione di due isometrie si ottiene una isometria e in generale componendo due trasformazioni geometriche si ottiene una trasformazione geometrica, ossia una corrispondenza biunivoca tra punti del piano. Consideriamo il caso di due trasformazioni Ψ_1 e Ψ_2 tali che per ogni punto P del piano risulti

$$\Psi_1 \circ \Psi_2(P) = \Psi_2 \circ \Psi_1(P) = P$$

cioè che l'immagine di un qualunque punto P nella trasformazione composta coincida con P stesso. In tal caso la trasformazione composta è la trasformazione *identità* I che, per definizione, trasforma ogni punto in se stesso

$$I(P) = P \quad \forall P.$$

Quindi

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = I.$$

Definizione 11.13. Si chiama *trasformazione inversa* di una trasformazione Ψ la trasformazione che composta con Ψ, a destra o a sinistra, dà origine all'identità e la indicheremo con Ψ^{-1}; in simboli: $\Psi \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Psi = I$.

Definizione 11.14. Una trasformazione che coincide con la sua inversa è detta *involutoria*.

Descrizione analitica di una trasformazione geometrica

Se il piano è dotato di un riferimento cartesiano ortogonale, la legge della trasformazione geometrica piana lega le coordinate di un punto e quelle del suo corrispondente mediante equazioni o sistemi di equazioni.

Definizione 11.15. Chiamiamo *equazione della trasformazione* l'insieme delle espressioni algebriche che indicano come si passa dalle coordinate di un generico punto P a quelle della sua immagine P'.

Esempio 11.6. La corrispondenza Φ associa ad un punto P del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale il punto P' secondo la seguente legge: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-2x_P; x_P - y_P)$. La corrispondenza assegnata è una trasformazione geometrica piana?

Strategia risolutiva: scegliamo un punto del piano: $P(\ldots;\ldots)$ e determiniamo $P'(\ldots;\ldots)$; scegliamo un punto $Q'(\ldots;\ldots)$ e determiniamo la controimmagine $Q(\ldots;\ldots)$. posso affermare che la corrispondenza è biunivoca perché .... e quindi posso affermare che è una trasformazione geometrica.

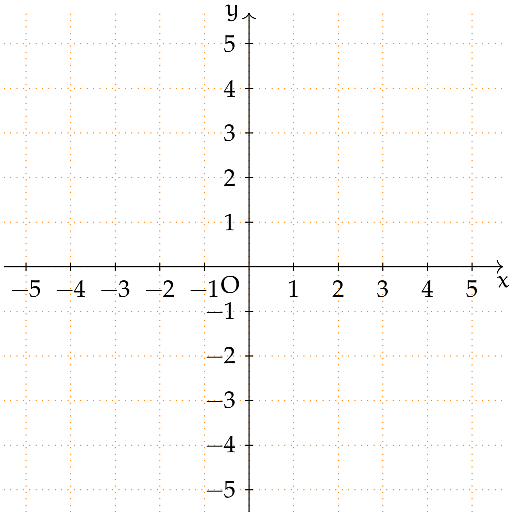


FIGURA 11.9: Esempio 11.6

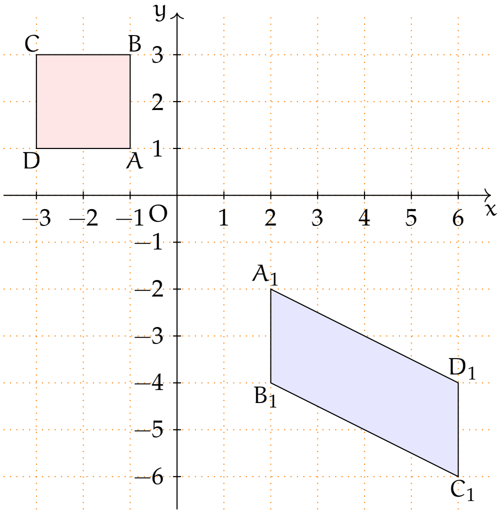


FIGURA 11.10: Esempio 11.6

Applichiamo la stessa trasformazione al quadrato di vertici $A(-1;1)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$, $D(-3;1)$ (figura 11.10).

La trasformazione fa corrispondere al quadrato $ABCD$ il parallelogramma $A_1B_1C_1D_1$ di coordinate $A_1(2;-2)$, $B_1(2;-4)$, $C_1(6;-6)$ e $D_1(6;-4)$. Essa ha cambiato la natura della figura geometrica di partenza, ma ha mantenuto il parallelismo tra i lati: $AB \parallel CD \xrightarrow{S_K} A_1B_1 \parallel C_1D_1$, dove $A_1B_1 = \Phi(AB)$ e $C_1D_1 = \Phi(CD)$.

Descrizione analitica di una simmetria assiale

Definizione 11.16. Fissata nel riferimento cartesiano ortogonale una retta k, chiamiamo *equazione della simmetria assiale di asse* k (S_k) le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Limitiamo la ricerca dell'equazione della simmetria assiale fissando come asse particolari rette; proseguendo negli studi saprete determinare l'equazione di una simmetria assiale il cui asse è una qualunque retta del piano cartesiano.

Simmetria rispetto agli assi coordinati

Esempio 11.7. Studiare la corrispondenza tra punti del piano cartesiano espressa dal seguente predicato: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(x_P; -y_P)$.

Completate la tabella:

x	y	x'	y'
-3	1		
0	-2		
1	0		
4	5		

e rappresentate nel riferimento cartesiano ciascun punto e il suo corrispondente.

Completate: $\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$.

Motivate la verità delle seguenti proposizioni:
«Ogni punto del piano ha un unico corrispondente» . . . .
«Di ogni punto del piano si può determinare la controimmagine» . . . .
«La corrispondenza Φ è una trasformazione geometrica» . . . .
«I punti dell'asse x sono uniti» . . . .
«La corrispondenza Φ è una isometria» . . . .

L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ascissa e ordinata opposta è la *simmetria assiale di asse* x, S_x, di equazione

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

Ripetete il procedimento seguito nell'esempio precedente studiando la corrispondenza $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-x_P; y_P)$ e constatate che l'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa . . . . e . . . . opposta è la *simmetria assiale di asse* . . . , $S_{\dots}$, di equazione

$$\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \dots\dots \end{cases}.$$

Simmetria rispetto ad una retta parallela agli assi cartesiani

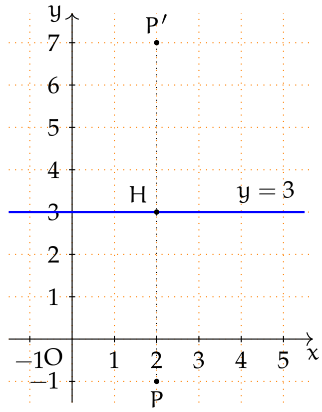
---

Esempio 11.8. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse x di equazione $y = 3$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=3}$ avente come asse tale retta.

Determiniamo l'immagine di $P(2; -1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $y = 3$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(2; 3)$; l'immagine di P è $P'(2; y')$ ed è tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |y_H - y_P| = |y_{P'} - y_H| \Rightarrow 3 - (-1) = y_{P'} - 3 \Rightarrow y_{P'} = 7.$$

Quindi $S_{y=3} : P(2; -1) \to P'(2; 7)$.



Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-1;0)$ e completate:

$$S_{y=3} : \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse x di equazione $y = a$. Sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x';y')$ la sua immagine in $S_{y=a}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio precedente possiamo scrivere:

$$|y-a| = |y'-a|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene

$$y - a = -y' + a \Rightarrow y' = -y + 2a;$$

concludendo

$$S_{y=a} : P(x;y) \to P'(x; -y+2a)$$

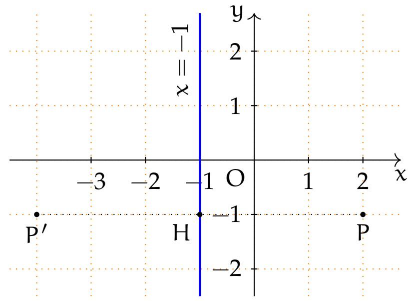
o anche

$$S_{y=a} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2a \end{cases}.$$

Verificate, con l'applicazione dell'equazione trovata, i risultati dell'esercizio precedente.

Esempio 11.9. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse y di equazione $x = -1$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{x=-1}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di $P(2;-1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $x = -1$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(-1;-1)$; l'immagine di P è $P'(x';-1)$ tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |x_P - x_H| = |x_H - x_{P'}| \Rightarrow |2-(-1)| = |-1-x_{P'}| \Rightarrow x_{P'} = -4.$$



Quindi $S_{x=-1}: P(2;-1) \to P'(-4;-1)$.

Ripetendo il procedimento, determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(-3;-2)$, $C(2;0)$ e completate:

$$S_{x=-1}: \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse y di equazione $x = b$; sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x':y')$ la sua immagine in $S_{x=b}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere

$$|x-b| = |b-x'|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse $x = b$ si ottiene

$$x - b = -x' + b :\Rightarrow\ x' = -x + 2b;$$

concludendo

$$S_{x=b}: P(x;y) \to P'(-x+2b;y)$$

o anche

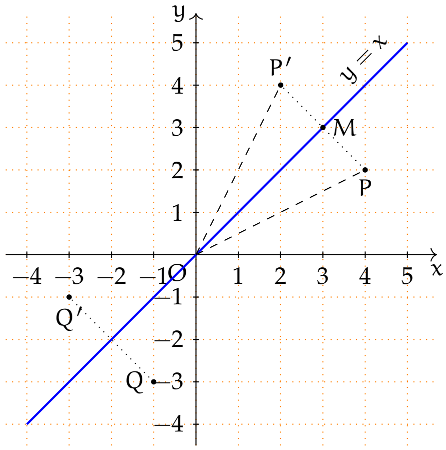
$$S_{x=b}: \begin{cases} x' = -x + 2b \\ y' = y \end{cases}.$$

Simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

Esempio 11.10. Determinate il punto medio M del segmento avente per estremi i punti $P(4;2)$ e $P'(2;4)$ e verificate che il triangolo POP' è isoscele sulla base PP'. La retta OM è l'asse di simmetria del triangolo considerato?

Considerate un'altra coppia di punti $Q(-1;-3)$ e $Q'(-3;-1)$ e ripetete le richieste precedenti. L'asse OM è la bisettrice del I°-III° quadrante, di equazione $y = x$.

Generalizziamo: verificate che due punti $P(x_P;y_P)$ e $P'(y_P;x_P)$ sono equidistanti dall'origine del riferimento e che il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta $y = x$.



La simmetria assiale avente come asse la bisettrice del I°-III° quadrante, indicata con S_{b1}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(y_P; x_P)$ ottenuto scambiando le coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b1}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} .$$

Tracciata nel riferimento la retta $y = -x$, dopo aver verificato che è la bisettrice del II°-IV° quadrante, possiamo constatare che la simmetria assiale avente come asse la bisettrice II°-IV° quadrante, indicata con S_{b2}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(-y_P; -x_P)$ ottenuto scambiando l'opposto delle coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b2}: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} .$$

11.3.4 Descrizione analitica di una simmetria centrale

Definizione 11.17. Fissate le coordinate del centro di simmetria, chiamiamo *equazione di una simmetria centrale* le relazioni che legano le coordinate del generico punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Sia $K(x_K; y_K)$ il centro di simmetria e $P(x; y)$ il generico punto di cui vogliamo determinare il corrispondente $P'(x'; y')$. Ricordiamo la definizione di simmetria centrale: K risulta il punto medio di PP'. Sappiamo che le coordinate del punto medio M di un segmento AB si ottengono dalle coordinate dei suoi estremi $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$; nel nostro caso si dovrà dunque avere $x_K = \frac{x + x'}{2}$ e $y_K = \frac{y + y'}{2}$, da cui possiamo ricavare l'equazione cercata: le coordinate del punto immagine $P'(x'; y')$ sono date dall'equazione

$$\begin{cases} x' = 2x_K - x \\ y' = 2y_K - y \end{cases} .$$

Esempio 11.11. Determinare il simmetrico di $P(-1;3)$ nella simmetria centrale di centro $K(1;-1)$.

Riportiamo K e P nel riferimento cartesiano ortogonale e scriviamo l'equazione della simmetria

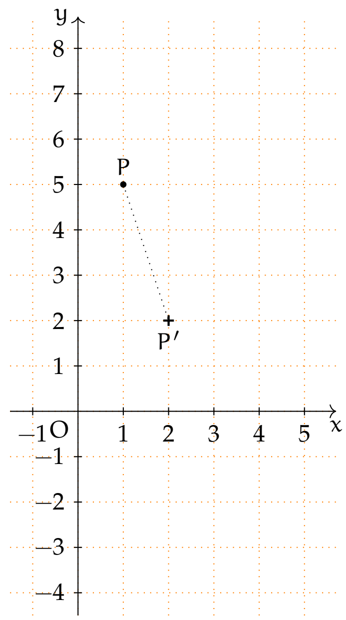
$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -2 - y \end{cases} .$$

Determiniamo le coordinate di P': $x' = 2 + 1 = 3$ e $y' = -2 - 3 = -5$. Quindi $P'(3;-5)$.

Descrizione analitica di una traslazione

Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro, C, sottostante, i punti sono rappresentati con il simbolo "+". Studiamo la corrispondenza $T_{\vec{v}}$ tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge

$$P(x_P; y_P) \in D \xrightarrow{T_{\vec{v}}} P'(x_P + 1; y_P + (-3)) \in C.$$



Se $P(1;5)$ è un punto di D il suo corrispondente è $P'(2;2)$. Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2)$, $H(-1;8)$, $K(3;3)$ e $V(4;-1)$.

Congiungete ciascun punto F, H, K e V con il proprio corrispondente F', H', K' e V'. I vettori $\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{HH'}$, $\overrightarrow{KK'}$ e $\overrightarrow{VV'}$ sono equipollenti?

Rispondente alle seguenti domande

- È vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
- È vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
- Si può affermare che è biunivoca?
- Di quale punto è immagine il punto $S'(0;-4)$?
- È vero che la trasformazione è una isometria?

Possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è una isometria completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$ pertanto è una traslazione.

Definizione 11.18. Fissato nel riferimento cartesiano ortogonale un vettore $\vec{v}(a;b)$, chiamiamo *equazione della traslazione di vettore* $\vec{v}(a;b)$, $T(a;b)$, le relazioni che legano le coordinate di un generico punto P con quelle della sua immagine P'.

Siano $(x;y)$ le coordinate del punto P e $(x';y')$ quelle della sua immagine P'. L'equazione della traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ è

$$T(a;b) : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Descrizione analitica della composizione di trasformazioni geometriche

beginexrig

Esempio 11.12. Riferendovi alla figura 11.11, completate:

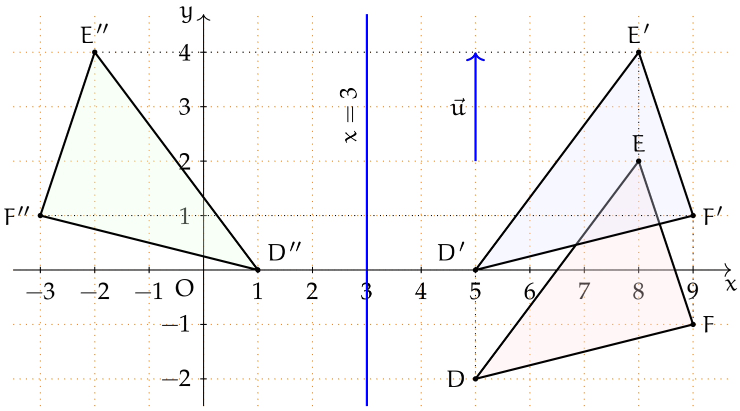


FIGURA 11.11: Esempio 11.12

Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati il triangolo DEF avente i vertici di coordinate $D(\ldots;\ldots)$, $E(\ldots;\ldots)$ ed $F(\ldots;\ldots)$ e il vettore $\vec{u}$ di componenti $(\ldots;\ldots)$.

Con la traslazione di vettore $\vec{u}$ si ha $DEF \xrightarrow{T_{\vec{u}}} \ldots\ldots\ldots$ e $DEF \cong D'E'F'$ essendo la traslazione una isometria.

Nella simmetria assiale $S_{x=3}$ si ha $D'E'F' \xrightarrow{S_{x=3}} \ldots\ldots\ldots$ e $D'E'F' \cong D''E''F''$ essendo la simmetria assiale una isometria.

Completate con le coordinate dei punti

$$\left.\begin{array}{l} D(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} D'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} D''(\ldots;\ldots) \\ E(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} E'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} E''(\ldots;\ldots) \\ F(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} F'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} F''(\ldots;\ldots) \end{array}\right\} \Rightarrow DEF \xrightarrow{T_{\vec{u}}} D'E'F' \xrightarrow{S_{x=3}} D''E''F''$$

e $DEF \cong D''E''F''$ per la proprietà transitiva della congruenza.

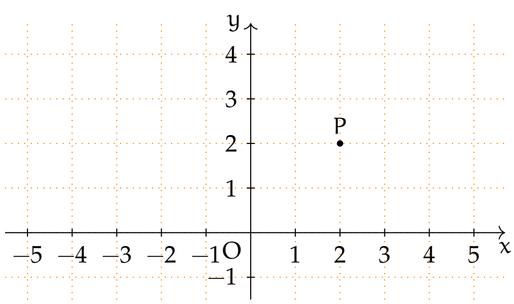
Riprendendo l'esempio precedente concludiamo $DEF \xrightarrow{S_{x=3}\circ T_{\vec{u}}} D''E''F''$.

Se, utilizzando l'esempio precedente volete verificare che $S_{x=3} \circ T_{\vec{u}} \neq T_{\vec{u}} \circ S_{x=3}$, troverete un risultato che sembra contraddire quanto affermato; è però sufficiente trovare un controesempio per convincerci della verità della proposizione sopra enunciata.

Controesempio Determinate l'immagine del punto $P(2;2)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$ essendo $\vec{u}(3;2)$. Quindi confrontatela con l'immagine dello stesso punto in $T_{\vec{u}} \circ S_y$.

Tracciate il vettore $\vec{u}(3;2)$ e completate

$$P(2;2) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_y} P''(\ldots;\ldots)$$



$P(2;2) \overset{S_y}{\to} P'(\dots;\dots) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} P''(\dots;\dots)$

Concludete: la composizione di isometrie non è . . . . , infatti si ha $S_y \circ T_{\vec{u}} \dots T_{\vec{u}} \circ S_y$.

Possiamo determinare l'equazione che lega le coordinate del punto iniziale con quelle della sua immagine nell'isometria ottenuta dalla composizione? Procediamo per passi:

I passo: scriviamo l'equazione della traslazione

$$T_{\vec{u}} = \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

e della simmetria rispetto all'asse y

$$S_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} .$$

II passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$:

$$P(x_P; y_P) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} P'(x_P + 3; y_P + 2) \overset{S_y}{\to} P''(-x_P - 3; y_P + 2) \Rightarrow S_y \circ T_{\vec{u}} : \begin{cases} x'' = -x_P - 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

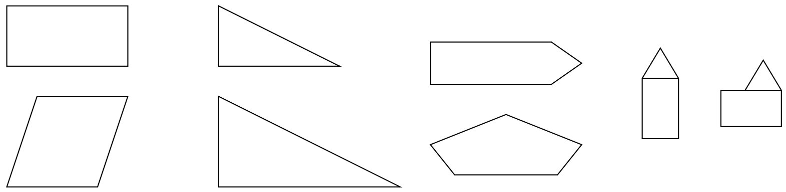
III passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $T_{\vec{u}} \circ S_y$:

$$P(x_P; y_P) \overset{S_y}{\to} P'(-x_P; y_P) \overset{T_{\vec{u}}}{\to} P''(-x_P + 3; y_P + 2) \Rightarrow T_{\vec{u}} \circ S_y : \begin{cases} x'' = -x_P + 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

Dunque confermiamo la non commutatività dell'operazione di composizione delle isometrie.

11.4 Esercizi

11.4.1 Esercizi riepilogativi - senza l'applicazione del sistema di riferimento cartesiano



(a) (b) (c) (d)

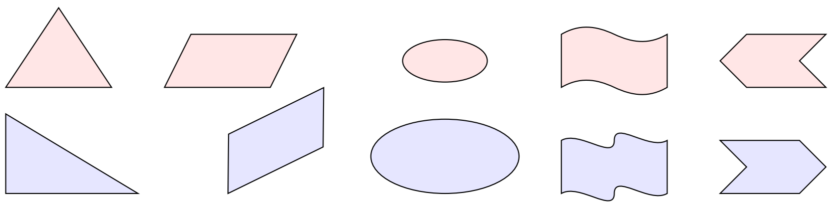
FIGURA 11.12: Esercizio **??**

11.1. Si sa che una trasformazione geometrica muta un quadrato in un rombo; gli invarianti di questa trasformazione sono:

a) il parallelismo dei lati e l'ampiezza degli angoli;
b) l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati;
c) solo il parallelismo dei lati;
d) il parallelismo dei lati e la perpendicolarità delle diagonali.

[d]

11.2. Quali coppie rappresentate nella figura 11.13 sono formate da figure corrispondenti in una isometria? [b, e]



(a) (b) (c) (d) (d)

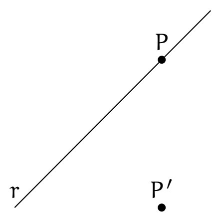
FIGURA 11.13: Esercizio 11.2

11.3. Presi nel piano due punti T e T' è vero che possiamo sempre individuare la simmetria centrale in cui T' è immagine di T?

11.4. Come dobbiamo scegliere due segmenti affinché sia possibile determinare una simmetria centrale in cui essi siano corrispondenti?

11.5. Nel piano sono assegnati i punti T e T' corrispondenti in una simmetria assiale. Come potete determinare l'asse di simmetria? [Falso]

11.6. Nel piano è assegnata la retta r e un suo punto P e un punto P' non appartenente ad r. Costruisci la retta r' immagine di r nella simmetria assiale che fa corrispondere al punto P il punto P'.



11.7. Costruite l'immagine di ciascun triangolo ABC della figura 11.14 nella simmetria avente come asse la retta del lato AC.

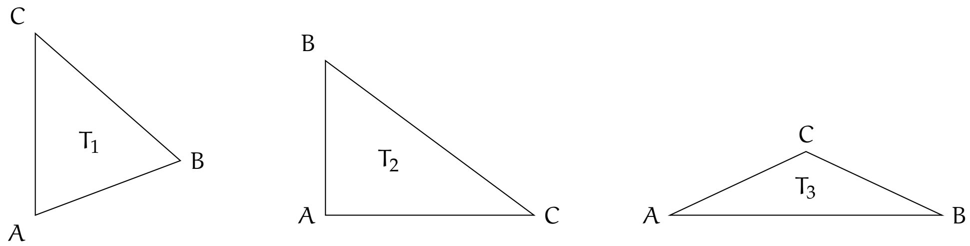


FIGURA 11.14: Esercizio 11.7

11.8. Nel triangolo isoscele ABC di base BC considerate la retta r passante per A e perpendicolare a BC; costruite l'immagine di ABC nella simmetria di asse r. Stabilite quale proposizione è vera:

a) il triangolo è fisso nella simmetria considerata;
b) il triangolo è unito nella simmetria considerata.

11.9. Assegnato il quadrato $ABCD$, determinate la sua immagine nella simmetria avente come asse la retta della diagonale AC. Stabilite quale proposizione è vera:

a) il quadrato è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrato è unito nella simmetria considerata.

11.10. Motivate la verità delle proposizioni
p_1: «il quadrato possiede 4 assi di simmetria»,
p_2: «il triangolo equilatero possiede 3 assi di simmetria».

11.11. Dimostrate che la retta di un diametro è asse di simmetria per la circonferenza. Potete concludere che la circonferenza possiede infiniti assi di simmetria?

11.12. Tra i trapezi ne trovate uno avente un asse di simmetria? Qual è l'asse di simmetria?

11.13. Quali lettere dell'alfabeto, tra quelle proposte a fianco, hanno un asse di simmetria?

ABC
DEF

11.14. Le due rette tracciate sono assi di simmetria del rettangolo in grigio a fianco e pertanto lo sono anche per l'immagine in esso contenuta. Vero o falso?

11.15. Perché la retta che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele non è un suo asse di simmetria?

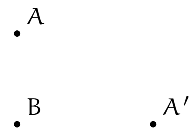
11.16. Quale tra le seguenti caratteristiche è invariante in una simmetria assiale?

a) la posizione della figura;
b) la direzione della retta;
c) il parallelismo;
d) l'orientamento dei punti;
e) dipende dall'asse di simmetria.

11.17. I segmenti AB e $A'B'$ si corrispondono nella simmetria di asse r; sapendo che $ABB'A'$ è un rettangolo, quale proposizione è vera?

a) AB è perpendicolare ad r;
b) AB è parallelo ad r;
c) AB appartiene ad r;
d) AB è obliquo rispetto ad r e $AB \cap r = H$.

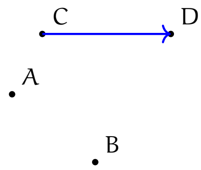
11.18. Nel piano sono assegnati i tre punti A, B e A' dei quali il punto A' è immagine di A in una traslazione. Dopo aver determinato il vettore della traslazione costruite l'immagine del triangolo ABA'.



11.19. Determinate l'immagine del parallelogrammo $ABCD$ nella traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$.

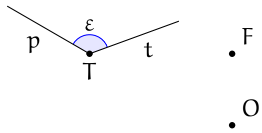
11.20. Dati due punti distinti A e B e il vettore $\overrightarrow{CD}$ della figura a fianco, detti A' e B' i punti immagine di A e B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CD}$, rispondete alle domande:

a) Di che natura è il quadrilatero $ABB'A'$?
b) Può succedere che il quadrilatero in questione sia un rettangolo? E un rombo?
c) Cosa succede se AB è parallelo al vettore $\overrightarrow{CD}$?



11.21. Come dobbiamo assegnare due segmenti AB e $A'B'$ affinché siano corrispondenti in una traslazione? È unica la traslazione che associa ad AB il segmento $A'B'$?

11.22. Prendete in considerazione l'angolo ε di vertice T della figura a fianco. Sia O il centro di rotazione e F un punto del piano di cui si vuole determinare l'immagine. Costruite F' seguendo i passi illustrati immediatamente dopo la definizione 11.11 a pagina 218.

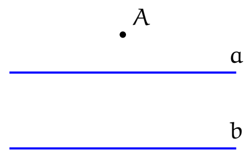


11.23. Costruite l'immagine del quadrato $ABCD$ nella rotazione di $+90°$ avente come centro di simmetria il vertice B. Fissate i punti medi M ed N rispettivamente di AB e di CD; dove si trovano le rispettive immagini?

11.24. Costruite l'immagine $A'B'C'$ del triangolo equilatero ABC nella rotazione di centro B e ampiezza $-120°$. Dimostrate che C, B ed A' sono allineati e che ABC' è un triangolo equilatero congruente a quello dato.

11.25. Giustificate la verità della proposizione: «La simmetria centrale di centro K è una rotazione di $180°$».

11.26. Determinate l'immagine del punto A nell'isometria $\Delta = S_b \circ S_a$ essendo a e b le rette parallele segnate nella figura a fianco e A il punto dato. Dimostrate che $\overline{AA''} = 2 \cdot d$ essendo d la distanza tra le rette a e b. Fissate arbitrariamente un altro punto B non appartenente ad alcuna delle rette date e determinate la sua immagine B'' nell'isometria Δ. È vero che $\overline{AA''} = \overline{BB''}$ e $\overline{AA''} \parallel \overline{BB''}$? Potete concludere che l'isometria Δ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$?



11.27. Facendo riferimento all'esercizio 11.26, verificate che la traslazione $\Delta_1 = S_a \circ S_b$ è caratterizzata da un vettore avente modulo e direzione uguali al vettore $\overrightarrow{AA''}$ ma verso opposto.

11.28. Verificate che:

a) l'inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ è la traslazione di vettore $-\vec{v}$;
b) l'inversa di una rotazione di centro O e angolo α è la rotazione di centro O e angolo $-\alpha$.

11.29. Verificate che le simmetrie (centrale e assiale) hanno se stesse come isometria inversa, ossia $(S_K)^{-1} = S_K$ e $(S_r)^{-1} = S_r$.

11.30. La proposizione «la simmetria centrale è la composizione di due simmetrie assiali» è:

a) sempre vera;
b) vera se i due assi sono incidenti;
c) mai vera;
d) vera se i due assi sono perpendicolari;
e) vera se i due assi sono paralleli.

11.31. Stabilite il valore di verità delle proposizioni:

a) Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale [V] [F]
b) Componendo due traslazioni si ottiene una traslazione [V] [F]
c) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale [V] [F]
d) Componendo due simmetrie assiali di assi incidenti si ottiene una rotazione [V] [F]
e) Componendo due rotazioni si ottiene una rotazione [V] [F]
f) L'identità si ottiene componendo una isometria con sé stessa [V] [F]
g) L'inversa di una traslazione è la stessa traslazione [V] [F]
h) Componendo una simmetria centrale con una rotazione si ottiene l'identità [V] [F]
i) Componendo una simmetria centrale di centro H con la simmetria assiale avente come asse una retta passante per H si ottiene sempre l'identità [V] [F]

11.32. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) In una isometria vi è almeno un elemento unito [V] [F]
b) Nella simmetria centrale vi sono infinite rette unite, ma solamente un punto unito [V] [F]
c) In ogni triangolo vi è almeno un asse di simmetria [V] [F]
d) Qualche quadrilatero ha un centro di simmetria [V] [F]

e) Il triangolo equilatero ha un centro di simmetria V F

f) Il rombo è l'unico quadrilatero avente due assi di simmetria V F

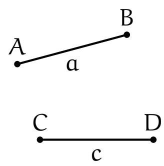
g) Tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore della traslazione sono rette unite V F

h) Solo la simmetria assiale è una isometria invertente V F

i) Rette parallele hanno come immagine in una isometria rette parallele V F

j) In una isometria una retta è sempre parallela alla sua immagine V F

11.33. I due segmenti della figura a fianco possono essere corrispondenti in una simmetria centrale?



11.34. Costruite l'immagine di un triangolo rettangolo ABC (non isoscele) di ipotenusa BC

a) in ciascuna delle simmetrie S_A, S_B e S_C;

b) nella simmetria S_M essendo M il punto medio dell'ipotenusa;

c) in ciascuna delle simmetrie aventi come assi le rette dei lati.

11.35. Nel piano è assegnato il punto C e il vettore $\vec{v}$ (figura a lato); costruite l'immagine del punto P nell'isometria $T_{\vec{v}} \circ S_C$ e anche l'immagine dello stesso punto P nell'isometria $S_C \circ T_{\vec{v}}$. Determinate l'equazione di $\Phi_1 = T_{\vec{v}} \circ S_C$ e di $\Phi_2 = S_C \circ T_{\vec{v}}$.

11.4.2 Esercizi riepilogativi - con l'applicazione del sistema di riferimento cartesiano

11.36. Sappiamo che $S_K : P\left(\frac{3}{5};0\right) \to P'\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$, determinate il centro K della simmetria.

11.37. Il segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(2;-4)$ in S_O, essendo O l'origine del riferimento cartesiano ortogonale

a) ha tutti i suoi punti fissi;

b) ha un solo punto fisso;

c) ha fissi solo gli estremi;

d) ha fissi tutti i punti interni ma non gli estremi;

e) non ha punti fissi.

11.38. Sono assegnati i punti $A(-5;0)$, $B(0;5)$ e $C(1;-1)$; determinate le coordinate dei vertici $A'B'C'$ del triangolo immagine di ABC nella simmetria avente come centro il punto medio M del lato AC.

11.39. I punti $A(1;5)$, $B(-2;2)$ e $C(0;-4)$ sono tre vertici di un parallelogramma. Determinate le coordinate del quarto vertice. Indicate con M il punto di incontro delle diagonali; in S_M il parallelogramma $ABCD$ è fisso o unito? Perché?

11.40. Il centro della simmetria che associa al triangolo di vertici $A(0;4)$, $B(-2;1)$ e $C(1;5)$ il triangolo di vertici $A'(2;-2)$, $B'(4;1)$ e $C'(1;-3)$ è

a) $K(-1;1)$;
b) $K(1;-1)$;
c) $K(1;1)$;
d) $K(-1;-1)$.

11.41. Determinate l'immagine M' del punto medio M del segmento AB di estremi $A(0;5)$ e $B(-4;1)$ in S_O (O è l'origine del riferimento cartesiano). È vero che $BM'A$ è isoscele sulla base AB?

11.42. Determinate la natura del quadrilatero $ABA'B$ che si ottiene congiungendo nell'ordine i punti $A(-1;1)$, $B(-4;-5)$, A' e B' rispettivamente simmetrici di A e B in S_O. Determinate la misura delle sue diagonali.

11.43. In S_x (simmetria assiale rispetto all'asse x) il segmento AB di estremi $A(3;2)$ e $B(3;-2)$

a) è unito, luogo di punti uniti;
b) non ha punti fissi;
c) ha tutti i suoi punti uniti tranne A e B;
d) ha un solo punto fisso;
e) ha solo A e B fissi.

11.44. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse x è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

11.45. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse y è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

11.46. Nella simmetria S_{b1} la retta $y = -x$ è fissa o unita?

11.47. Motivate la verità della seguente proposizione: «nella simmetria S_{b2} l'immagine dell'asse x è l'asse y». Viene mantenuto l'orientamento dell'asse x? Completate: S_{b2} : $(\text{asse } x) \to (\text{asse } \ldots)$ e $(\text{asse } y) \to (\ldots\ldots)$ Analogamente: S_{b1} : $(\text{asse } x) \to (\text{asse } \ldots)$ e $(\text{asse } y) \to (\ldots\ldots)$

11.48. Dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(4;4)$ e $D(1;3)$ trovate il suo corrispondente in S_{b1}. Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

a) il quadrilatero è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrilatero è unito nella simmetria considerata.

11.49. Nel piano cartesiano sono assegnati i punti $A(0;3)$, $B(-2;0)$ e $C(-1;-3)$.

a) Determinate i punti A', B' e C' immagine in S_{b2}.
b) Calcolate l'area del quadrilatero $A'B'C'O$, essendo O l'origine del riferimento.
c) Motivate la verità della proposizione: «i segmenti AB e $A'B'$ si incontrano in un punto P della bisettrice del II°-IV° quadrante».
d) È vero che $AP'B$ è congruente a PAB'?

11.50. Sono assegnate le simmetrie

$$S_1 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad ; \quad S_2 : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad ; \quad S_3 : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases} \quad ; \quad S_4 : \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = 3 - y \end{cases}$$

Usando qualche punto scelto arbitrariamente riconosci ciascuna di esse e completa la tabella sottostante:

Simmetria	Tipo	Centro (coordinate)	Asse (equazione)
S_1	....	......	....
S_2	....	......	....
S_3	....	......	....
S_4	....	......	....

11.51. Un segmento unito in S_{b2} è

a) un segmento perpendicolare alla bisettrice del I°-III° quadrante;
b) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante nel suo punto medio;
c) un segmento parallelo alla bisettrice del I°-III° quadrante;
d) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante;
e) un segmento avente il suo punto medio appartenente alla bisettrice del II°-IV° quadrante.

11.52. Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto $P(-4;2)$. Determinate il punto P' immagine nella traslazione $T(3;-1): \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+(-1) \end{cases}$.

Strategia risolutiva:

1. individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\dots;\dots)$;
2. tracciate il vettore nel riferimento cartesiano;
3. determinate le coordinate di P': $P'(\dots;\dots)$.

Completate: $\overrightarrow{PP'}$ è .... a $\vec{w}$; questo significa che i due vettori hanno .... direzione (cioè sono ....), stesso .... e .... intensità.

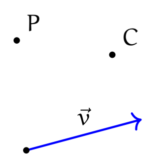
11.53. Dopo aver determinato l'equazione della traslazione in cui $A'(0;-2)$ è l'immagine di $A(3;2)$, determinate il perimetro del triangolo $AO'A'$ essendo O' il corrispondente di $O(0;0)$ nella traslazione trovata.

11.54. Verificate che il punto medio M del segmento PQ di estremi $P(-1;4)$ e $Q(5;0)$ ha come immagine in $T(3;-1)$ il punto medio M' del segmento $P'Q'$.

11.55. Applica la traslazione di equazione $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$ al segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(3;3)$.

11.56. Determinate l'immagine del triangolo di vertici $A(0;2)$, $B(-3;2)$ e $C(0;5)$ nella traslazione $T(4;1)$. Calcolatene quindi perimetro e area.

11.57. Determinate l'equazione della traslazione di vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ assegnati dalla figura **??**. Determinate inoltre l'immagine del poligono di vertici $H(-1;1)$, $K(0;-2)$, $L(3;0)$ ed $F(1;2)$.



11.58. Sono assegnati il punto $C(-4;3)$, la retta $x=1$ e il punto $P(0;5)$. Determinate l'immagine P'' di P nell'isometria $\Delta = S_C \circ S_{x=1}$ e l'immagine P^* di P nell'isometria $\Delta = S_{x=1} \circ S_C$. È vero che P'' e P^* si corrispondono nella simmetria S_y? Determinate l'area del triangolo $PP''P^*$.

11.59. Nel piano dotato di riferimento cartesiano è tracciata la bisettrice del I e III quadrante e la retta $y=1$. Completate le osservazioni seguenti:

a) il punto di intersezione K ha coordinate $K(\ldots;\ldots)$;
b) l'angolo delle due rette è di $\ldots°$.

Scrivete l'equazione della simmetria avente come asse la bisettrice: $S_{b1}\begin{cases} x' = \ldots \\ y' = \ldots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria di asse la retta $y=1$: $S_{y=1}\begin{cases} x' = \ldots \\ y' = \ldots \end{cases}$.

Determinate le coordinate del punto P'' immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega = S_{b1} \circ S_{y=1}$ e scrivete l'equazione di Ω. Concludete: Ω è la rotazione di centro $\ldots$ e angolo $\ldots$ (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

Determinate le coordinate del punto P^* immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega^* = S_{y=1} \circ S_{b1}$ e scrivete l'equazione di Ω^*. Concludete: Ω^* è la rotazione di centro $\ldots$ e angolo $\ldots$ (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

11.60. Determinate l'equazione della isometria $J = S_{b1} \circ S_{x=4}$ e stabilite se esiste qualche elemento unito. Come cambia l'equazione dell'isometria $J^* = S_{x=4} \circ S_{b1}$ rispetto alla precedente? Sia J che J^* sono rotazioni: determinate centro e angolo (con segno) di ognuna di esse. A questo scopo potete utilizzare il punto $P(2;4)$ o un punto arbitrariamente scelto.

11.61. Determinate i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ delle traslazioni $T_{\vec{u}}\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases}$ e $T_{\vec{v}}\begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y-1 \end{cases}$ e il vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. Verificate che $T_{\vec{s}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$. Cosa otteniamo dalla composizione $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$? Sapresti darne la motivazione? Concludete: componendo due traslazioni si ottiene ……

11.62. Nel riferimento cartesiano ortogonale Oxy è assegnato il punto $O_1(2;1)$; scrivete l'equazione della simmetria centrale di centro O $S_O\begin{cases} x' = \ldots \\ y' = \ldots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria centrale di centro O_1 $S_{O_1}\begin{cases} x' = \ldots \\ y' = \ldots \end{cases}$. Determinate l'immagine P'' del punto $P(1;2)$ nell'isometria $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ di cui avrete scritto l'equazione e determinate $\overline{PP''}$. Determinate Q'' immagine di $Q\left(\frac{1}{2};-1\right)$ nell'isometria Σ e determinate $\overline{QQ''}$. Potete affermare che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''}$? Verificate che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''} \equiv 2 \cdot \overrightarrow{O_1O}$. È vero che $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ e $\Sigma_1 = S_{O_1} \circ S_O$ sono la stessa isometria?

11.63. L'equazione $\begin{cases} x' = 4-x \\ y' = y \end{cases}$ descrive:

a) la simmetria assiale di asse y;
b) la simmetria assiale di asse la retta $x=4$;

c) la traslazione di vettore $\vec{v}(4;0)$;
d) la simmetria assiale di asse $x = 2$;
e) la simmetria centrale di centro $C(4;0)$.

11.64. La trasformazione $\Sigma \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = 2x \end{cases}$ è un'isometria?

11.65. Il segmento di estremi $A(3;4)$ e $B(3;-2)$ ha come simmetrico il segmento di estremi $A'(3;2)$ e $B'(5;2)$; è stata eseguita:

a) la simmetria assiale di asse la retta $x = 4$;
b) la simmetria S_{b2};
c) la simmetria S_{b1};
d) la simmetria assiale di asse la retta $x = 3$;
e) la simmetria $S_{y=3}$.

11.66. Comporre due traslazioni di vettori $\vec{v_1}(2;3)$ e $\vec{v_2}(3;6)$ applicandole al triangolo ABC con $A(-2;-1)$, $B(-1;-2)$ e $C(-4;-3)$.

11.67. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(-2;6)$ e $B(-3;3)$ nella simmetria di asse $x = -1$. Applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $x = 4$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi paralleli tra loro, trova le nuove coordinate dei due punti A e B.

11.68. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(1;-6)$ e $B(4;3)$ nella simmetria di asse $x = 2$, applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $y = 1$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari tra loro, determina le nuove coordinate dei due punti A e B.

11.69. Sono assegnate le simmetrie assiali

$$S_1 \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = y \end{cases}$$

a) Individuate l'asse di simmetria di ciascuna di esse, rappresentate nel riferimento cartesiano ortogonale i rispettivi assi indicandoli con s_1, s_2, s_3 e s_4; completate e riproducete nello stesso riferimento

$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{S_1} P_1(\ldots;\ldots) \qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{S_2} P_2(\ldots;\ldots)$$
$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{S_3} P_3(\ldots;\ldots) \qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{S_4} P_4(\ldots;\ldots)$$

b) Siano A, B, C e D i punti $A = s_4 \cap s_3$, $B = s_4 \cap s_1$, $C = s_1 \cap s_3$ e $D = s_2 \cap s_1$; dimostrate che i triangoli ABC e CDE sono rettangoli isosceli e che i lati dell'uno sono il quadruplo di quelli dell'altro.
c) Determinate il rapporto tra i loro perimetri e tra le loro aree.

12 Trasformazioni geometriche nel piano

12.1 Caratteri generali

Nei prossimi capitoli studieremo alcune trasformazioni geometriche nel piano.
Delle trasformazioni cercheremo di capire:

1. se cambiano la forma o le dimensioni delle figure che trasformano;
2. se esistono delle figure che non si modificano nella trasformazione, cioè se la trasformazione ha degli elementi uniti;
3. alcune trasformazioni particolari;
4. le equazioni della trasformazione.

In questo testo propongo l'uso del linguaggio di programmazione Python con la libreria per la geometria interattiva pyig. Basta ricopiare i programmi che sono scritti per avere un ambiente interattivo da esplorare. Ovviamente la parte più divertente è apportare modifiche e variazioni, dopo aver verificato il funzionamento di quelli originali. In questo modo si possono esplorare anche le potenzialità del linguaggio.

Prima di affrontare questi argomenti è bene aver seguito il percorso proposto nel capitolo sull'informatica relativo all'uso della geometria interattiva.

Nulla vieta che le attività proposte in questo capitolo siano eseguite con un qualunque altro software di geometria.

12.1.1 Strumenti di pyig

Per esplorare le trasformazioni nel piano useremo i seguenti strumenti della geometria interattiva con Python:

- Point(x, y) crea un punto con date coordinate.
- Line(p0, p1) crea una retta passante per p0 e p1.
- Parallel(retta, punto) crea una retta parallela a retta passante per punto.
- Orthogonal(retta, punto) crea una retta perpendicolare a retta passante per punto.
- PointOn(oggetto, parametro) crea un punto fissato su oggetto nella posizione definita da parametro.
- Segment(p0, p1) crea un segmento di estremi p0 e p1.
- MidPoint(segmento) crea il punto medio di segmento.
- ConstrainedPoint(object, parameter) crea un punto vincolato a oggetto nella posizione iniziale definita da parametro.
- Polygon(vertici) crea un poligono data una sequenza di punti.
- Circle(centro, punto) crea una circonferenza di centro centro, passante per punto.
- <poligono>.vertices contiene la lista dei vertici del poligono.
- <segmento>.length() restituisce la lunghezza di un segmento.
- <oggetto>.coords() restituisce le coordinate di oggetto.
- VarText(x, y, stringa, variabili) crea un testo variabile nella posizione x, y.

Se ci sono dei dubbi sul loro significato conviene dare un'occhiata alla parte sull'informatica o al manuale di `pygraph`.

12.2 Traslazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una traslazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una traslazione.
3. Cosa dice l'algebra sulle traslazioni.

12.2.1 Definizione

Nella geometria euclidea, una traslazione è una trasformazione che sposta, di una distanza fissa, tutti i punti nella stessa direzione.

In altre parole, dato un vettore, diremo che un punto P' è il traslato del punto P se il segmento PP' ha la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del vettore.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e un vettore, costruisce il traslato del punto rispetto al vettore. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = traslapunto(p_0, traslazione)
```

Ovviamente p_0 e traslazione dovranno essere rispettivamente un punto e un vettore creati precedentemente. Dopo la chiamata, p_1 conterrà il riferimento al traslato di p_0 della quantità indicata da vettore. Un frammento completo di programma potrebbe essere:

```
# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A, il suo traslato
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
```

La funzione traslapunto(punto, traslazione) dovrà:

1. Creare una retta invisibile parallela a `traslazione` passante per punto.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione +1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una nostra cartella, con il nome trasla01_proprieta.py. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la data, il tuo nome e un titolo (ad esempio: Traslazioni: proprieta').

Scrivi ora un programma che disegni un vettore, un punto e il suo traslato.
Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato e il vettore AA'
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto A′ deve rimanere sempre il traslato di A secondo il vettore dato. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

12.2.2 Proprietà

Crea il vettore AA′, con spessore 1. Esegui il programma e muovi il punto A: cosa puoi dire del segmento AA′?

. . . .

Costruisci ora un nuovo punto B, il suo traslato B′ e il vettore BB′ (spessore 1).

Costruisci i segmenti AB e A′B′ (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di AB e A′B′ usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . .

Puoi formulare la congettura: A′B′ è congruente ad AB e prova a dimostrarla.

. . . .

. . . .

. . . .

Costruisci un punto P vincolato al segmento AB e il suo traslato P′:

```
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color='green', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6, color='green', name="P'")
```

Muovi il punto P, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto C il suo simmetrico C′, costruisci il poligono ABC e il poligono A′B′C′. Cosa si può concludere circa i triangoli ABC e A′B′C′?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo ABC e del suo trasformato A′B′C′?

. . . .

Riassumendo

- La traslazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La traslazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo traslato appartiene al traslato del segmento.
- Il programma completo:

```
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# Punto B, B', il vettore BB' e il punto medio
b_0 = ig.Point(-7, 0, width=6, name="B")
b_1 = traslapunto(b_0, trasl, width=6, name="A'")
```

```
v_b = ig.Vector(b_0, b_1, width=1)

# Segmento AB e A'B'
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color='olive drab', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6,
                  color='olive drab', name="P'")

# Punto C, C' e i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(1, 5, width=6, name="B")
c_1 = traslapunto(c_0, trasl, width=6, name="A'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

12.2.3 Elementi uniti

Un elemento unito è un oggetto geometrico che viene trasformato in se stesso da una trasformazione.

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: trasla02_elementiuniti.py e scrivi funzione traslapunto(punto, traslazione, **kargs) che restituisce il traslato di un punto. Nel programma principale crea un punto e il suo traslato. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Traslazioni: elementi uniti

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')
```

```

# Punto A e il suo traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sono pochi gli elementi uniti in una traslazione, solo le rette parallele al vettore traslazione. Crea:

- una retta con uno spessore maggiore passante per A e parallela al vettore traslazione.
- una retta con uno spessore minore e di un altro colore passante per A' e parallela al vettore traslazione.

Qualunque sia la traslazione e qualunque sia il punto A, ottieni due rette sovrapposte: cioè r' coincide con r.

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una traslazione, sono elementi uniti solo:
  - le rette . . . .

12.2.4 Equazioni delle traslazioni

Un vettore è completamente determinato dalla differenza delle coordinate tra il punto iniziale e il punto finale di un segmento orientato.

Avvia una nuova finestra di editor e salvarla con il nome: trasla03_equazioni.py. In questa finestra ricopia il seguente programma:

```
# Traslazioni: equazioni

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
v = ig.Vector(ig.Point(0, 0, width=6),
              ig.Point(4, 3, width=6), name='t')

```

```python
# Quattro punti
a_0 = ig.Point(−5, 6, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(3, 6, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(−6, −7, width=6, name="C")
d_0 = ig.Point(7, −4, width=6, name="D")

# Lista con quattro punti
punti = [a_0, b_0, c_0, d_0]

# Vettore v applicato a tutti i punti
for punto in punti:
    v_p = ig.Vector(punto, v)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, correggi eventuali errori. Quanti vettori vedi?

Il programma produce complessivamente cinque segmenti orientati, ma questi rappresentano un solo vettore.

È un po' come le cinque frazioni seguenti:

$$\frac{9}{15}; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{18}{30}; \quad \frac{6}{10}; \quad \frac{30}{50};$$

rappresentano un solo numero razionale.

Nel programma principale crea un punto $P(5, -1)$, il suo traslato e aggiungi alcune istruzioni che visualizzino le componenti del vettore v e le coordinate del punto P e P':

```python
# Relazione tra componenti della traslazione e
# coordinate del punto traslato
p_0 = ig.Point(5, 5, width=6, name="P")
p_1 = traslapunto(a_0, v, width=6, name="P'")

ig.VarText(−7, −10, "v = {}", v.components())
ig.VarText(−7, −11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(−7, −12, "P' = {}", p_1.coords())
```

Modifica il vettore v e completa la seguente tabella lasciando fisso il punto $P(5, -1)$:

traslazione	Traslato di P
v (4; 3)	P'(. . . . . ; . . . . .)
v (1; -4)	P'(. . . . . ; . . . . .)
v (. . ; . .)	P'(. . . ; . . .)
v (a; b)	P'(. . . . . ; . . . . .)

Nella traslazione di componenti (a, b): l'ascissa del generico punto P' traslato di P è . . . . ; l'ordinata del generico punto P', è . . . .

La traslazione si può tradurre nel sistema di equazioni: $\tau \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Riassumendo

➡ L'equazione della traslazione di vettore $v(a; b)$ è:

$$\tau \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Prova tu
Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una traslazione è
2. In una traslazione figure corrispondenti sono
3. In una traslazione sono unite
4. Le equazioni della traslazione di componenti $(a; b)$ è:

12.3 Simmetria assiale

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una simmetria assiale e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una simmetria assiale.
3. Cosa sono gli assi di simmetria in un poligono.
4. Cosa dice l'algebra sulle simmetrie assiali.

12.3.1 Definizione

Una simmetria assiale di asse asse è una trasformazione che manda un punto P in un punto P' appartenente alla retta perpendicolare all'asse di simmetria in modo tale che la distanza di P dall'asse sia uguale alla distanza di P' dall'asse.

In altre parole, un punto P' è simmetrico del punto P rispetto alla retta asse se il segmento PP' è perpendicolare a asse e asse taglia a metà il segmento PP'.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e una retta, costruisce il simmetrico del punto rispetto alla retta. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = simmpunto(p_0, asse)
```

Ovviamente p_0 e asse dovranno essere rispettivamente un punto e una retta creati precedentemente. Dopo la chiamata, p_1 conterrà il riferimento al simmetrico di p_0 rispetto a asse.

La funzione simmpunto(punto, asse) dovrà:

1. Creare una retta invisibile ortogonale a asse passante per punto.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione -1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def simmpunto(punto, asse, **kargs):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kargs)
```

La funzione proposta nel programma a fine capitolo è un po' più concisa e, in più, usa una particolare sintassi di Python che permette di passare un numero variabile di parametri definiti per chiave.

In questo modo si possono effettuare chiamate di questo tipo:

```
a_1 = simmpunto(a_0, asse, name="A'")
b_1 = simmpunto(a_0, asse, name="B'", color="navy")
c_1 = simmpunto(a_0, asse, name="C'", width=7)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome simass01_proprieta.py. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Simmetrie assiali

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo punto simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto A′ deve rimanere sempre simmetrico di A. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

12.3.2 Proprietà

Crea il segmento AA′, con spessore 1, e costruisci il punto medio M. Esegui il programma e muovi il punto A: cosa puoi dire del segmento AA′ e del suo punto medio?

. . . .

Costruisci ora un nuovo punto B dalla stessa parte di A e il suo simmetrico B′ rispetto alla retta asse, costruisci il segmento BB′ (spessore 1) e il suo punto medio chiamandolo N. Puoi prevedere il comportamento di N?

. . . .

Costruisci i segmenti AB e A′B′ (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di AB e A′B′ usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a, b, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a1, b1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . .

Puoi formulare la congettura: A′B′ è congruente ad AB. Aggiungi i due segmenti: MB e MB′ e prova a dimostrarla.

. . . .
. . . .
. . . .

Costruisci un punto P vincolato al segmento AB e il suo simmetrico P′:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color='olive drab', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color='olive drab', name="P'")
```

Muovi il punto P, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto C dalla stessa parte di A e B rispetto a asse e il suo simmetrico C′, costruisci il poligono ABC, e il poligono A′B′C′. Cosa si può concludere circa i triangoli ABC e A′B′C′?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo ABC e del suo trasformato A′B′C′?

. . . .

Riassumendo

- La simmetria assiale è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La simmetria assiale inverte il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo simmetrico appartiene al simmetrico del segmento.
- Il programma completo:

```
# Simmetrie assiali: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
```

```
                  ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")
# Il segmento AA' e il punto medio
sa =ig.Segment(a_0, a_1, width=1)
m = ig.MidPoint(sa, width=6, color=\'red\', name="M")

# Punto B, il suo punto simmetrico
b_0 = ig.Point(-7, 3, width=6, name="B")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B'")
# Il segmento BB' e il punto medio
sb =ig.Segment(b_0, b_1, width=1)
n = ig.MidPoint(sb, width=6, color=\'red\', name="N")

# Segmento AB e A'B'
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", ab.length())
mb =ig.Segment(m, b_0, width=1)
mb1 =ig.Segment(m, b_1, width=1)

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color=\'olive drab\', name="P")
p_11 = simmpunto(p_0, asse, width=6,
                 color=\'olive drab\', name="P'")

# Punto C, il suo punto simmetrico, i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(-10, 5, width=6, name="B")
c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0),
           width=4, color='violet', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1),
           width=4, color='violet', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

12.3.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: simmass02_elementiuniti.py e scrivi la funzione simmpunto(punto, asse, **kags) che restituisce il simmetrico di un punto rispetto a una retta. Nel programma principale crea tre punti e i loro simmetrici. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Simmetrie assiali: elementi uniti

```

```
# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, B, C e i loro simmetrici A', B', C'
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(-7, 3, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(-9, 6, width=6, name="C")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B'")
c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sposta uno dei punti sulla retta asse. Cosa osservi?

. . . .

In una trasformazione geometrica un punto viene detto *unito* se, trasformato, corrisponde a se stesso. Puoi concludere che:

. . . .

In generale, in una trasformazione geometrica, una figura viene detta *unita* quando è trasformata in se stessa (anche se non ogni suo punto è unito).

Un segmento che ha gli estremi su asse è . . . . rispetto alla simmetria e è costituito da . . . .

Costruisci un triangolo ABC e il suo simmetrico A'B'C'. Muovi i punti ABC in modo che il triangolo simmetrico si sovrapponga al triangolo A'B'C'. Come deve essere il triangolo ABC per essere unito rispetto alla simmetria?

. . . .

Costruisci e descrivi altri elementi uniti rispetto alla simmetria.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

. . . .
. . . .

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una simmetria assiale sono elementi uniti:
  - i punti . . . .
  - i segmenti . . . .
  - le rette . . . .
  - le circonferenze . . . .
  - i triangoli . . . .
  - i poligoni . . . .

12.3.4 Poligoni simmetrici

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: simass03_poligoni.py. Scrivi la solita funzione simmpunto.

Scrivi una funzione che, dati centro, vertice e `numlati`, costruisca il poligono regolare. Lo schema potrebbe essere:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circonferenza su cui sono disposti i vertici non visibile
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    # crea la lista dei vertici che contiene quello dato come argomento
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Scrivi la funzione che, dati poligono e asse, costruisca il poligono simmetrico. Lo schema potrebbe essere:

```
def simmpoli(poligono, asse, **params):
    """Restituisce il simmetrico di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici del poligono simmetrico
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il simmetrico e
    # aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- crea il punto O di coordinate (6, 3);
- l'asse passante per quel punto e il punto (6, 7);
- il triangolo equilatero di centro O e passante per (4, 3), usa la funzione polreg;
- il simmetrico del triangolo (usa la funzione simmpoli).

Una figura è simmetrica rispetto ad un *asse* se resta unita nella simmetria.

Agendo con il mouse, muovi la retta asse facendo in modo che il triangolo trasformato si sovrapponga al triangolo originale.

Sono tre e sono quelle in cui l'asse passa per . . . .

. . . .

Ripeti le operazioni precedenti disegnando un quadrato nel secondo quadrante, un pentagono regolare nel terzo e un esagono regolare nel quarto, sempre con un asse di simmetria passante per il centro. Cosa puoi osservare?

. . . .

. . . .

. . . .

Riassumendo

- Una figura si dice simmetrica se esiste una simmetria che la trasforma in se stessa.
- Una figura può avere più assi di simmetria.
- I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria quante sono i lati del poligono.
- La funzione polreg(centro, vertice, numlati, **kargs) può essere realizzata in questo modo:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circ. su cui sono disposti i vertici non visibile
    circ = ig.Circle(centro, vertice, visible=False)
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    arco=2./numlati
    # crea la lista dei vertici che contiene l'argomento vertice
    vertici=[vertice]
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    for cont in range(1, numlati):
        vertici.append(ig.PointOn(circ, cont*arco))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici, **kargs)
```

- La funzione simmpoli(poligono, asse, **kargs) può essere realizzata in questo modo:

```
def simmpoli(poligono, asse, **kargs):
    """Restituisce il simm. di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici
    # del poligono simmetrico
    vertici_simm=[]
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il
    # simmetrico e aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    for vertice in poligono.vertices:
        vertici_simm.append(simmpunto(vertice, asse))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici_simm, **kargs)
```

12.3.5 Equazioni di alcune simmetrie assiali

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: simmas04_equazioni.py. Scrivi la solita funzione simmpunto.

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;

- una retta x sovrapposta all'asse x;
- una retta y sovrapposta all'asse y;
- un punto P e visualizza le sue coordinate;
- il punto P′ simmetrico di P rispetto all'asse x e visualizza le sue coordinate;
- il punto P′′ simmetrico di P rispetto all'asse y e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto P in varie posizioni e completa la seguente tabella:

punto	simmetrico rispetto asse x	simmetrico rispetto asse y
A (-4; 3)	A′(. . . . . ; . . . . .)	A′′(. . . . . ; . . . . .)
B (1; -4)	B′(. . . . . ; . . . . .)	B′′(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C′(. . . . . ; . . . . .)	C′′(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P′(. . . . . ; . . . . .)	P′′(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto all'asse delle x: l'ascissa del generico punto P' simmetrico di P è . . . . all'ascissa di P; l'ordinata del generico punto P', è . . . . all'ordinata di P.

La simmetria rispetto all'asse x si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=0}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Nella simmetria rispetto all'asse delle y:

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto all'asse y si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=0}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica il programma in modo che gli assi di simmetria coincidano con le bisettrici dei quadranti, muovi il punto P e completa la seguente tabella:

punto	simm. bis. I quadrante	simm. bis. II quadrante
A (-7; 3)	A′(. . . . . ; . . . . .)	A′′(. . . . . ; . . . . .)
B (5; -2)	B′(. . . . . ; . . . . .)	B′′(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C′(. . . . . ; . . . . .)	C′′(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P′(. . . . . ; . . . . .)	P′′(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante: l'ascissa del generico punto P', simmetrico di P è . . . . P; l'ordinata del generico punto P', è . . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante:

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=-x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica la funzione test in modo che gli assi di simmetria siano le rette di equazioni: $x = 3$ e $y = 4$. Muovi il punto P e completa la seguente tabella:

punto	simm. x = 3	simm. rispetto a y = 4
A (-6; 3)	A′(. . . . . ; . . . . .)	A′′(. . . . . ; . . . . .)
B (4; -2)	B′(. . . . . ; . . . . .)	B′′(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C′(. . . . . ; . . . . .)	C′′(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P′(. . . . . ; . . . . .)	P′′(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto alla retta x=3: l'ascissa del generico punto P', simmetrico di P è . . . . P; l'ordinata del generico punto P', è . . . .

La simmetria rispetto alla retta x=3 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=3} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta x=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=k} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . .

. . . .

Nella simmetria rispetto alla retta y=4

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto alla retta y=4 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=4} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta y=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=k} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . .

. . . .

Riassumendo

- Certe simmetrie assiali possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.
  - $\sigma_{y=0} \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
  - $\sigma_{x=0} \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
  - $\sigma_{y=x} \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
  - $\sigma_{y=-x} \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$
  - $\sigma_{x=k} \begin{cases} x' = -x + 2k \\ y' = y \end{cases}$
  - $\sigma_{y=k} \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2k \end{cases}$

Prova tu

Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una simmetria assiale (s.a.) è

2. In una s.a. figure corrispondenti sono
3. In una s.a.:
   a) sono punti uniti
   b) sono rette unite
   c) sono segmenti uniti
   d) esiste una retta formata da tutti punti uniti, è:
4. I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria ...
5. Assi di simmetria...
   a) il cerchio ha
   b) il rettangolo ha
   c) il rombo ha
   d) il triangolo isoscele ha
   e) il trapezio isoscele ha
   f) Un parallelogramma che non sia rombo o rettangolo
6. Le equazioni della s.a.
   a) rispetto all'asse x
   b) rispetto all'asse y
   c) rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
   d) rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante

12.4 Rotazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una rotazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una rotazione.
3. Cosa sono le rotazione di un poligono regolare.
4. Cosa dice l'algebra sulle rotazioni.

12.4.1 Definizione

Una rotazione rispetto a un centro O è una trasformazione che fa ruotare attorno a O, ogni punto del piano di uno stesso angolo,

Una rotazione è determinata dal centro e dall'angolo.

La funzione principale è quella che dato un *punto*, un *centro* e un *angolo* costruisce la rotazione del punto. Per cui:

```
p_1 = RuotaPunto(punto, centro, angolo)
```

Ovviamente punto, centro e angolo dovranno essere rispettivamente il punto da trasformare, il centro di rotazione e l'angolo di rotazione creati precedentemente. Dopo la chiamata, p_1 conterrà il riferimento al punto immagine di p_0 nella rotazione.

La funzione RuotaPunto(punto, centro, ang) dovrà:

1. creare una semiretta invisibile passante per centro e p_0;
2. su questa semiretta riportare l'angolo;
3. intersecare questa semiretta con una circonferenza centrata in centro e passante per p_0;

4. dare come risultato questa intersezione.

Una possibile soluzione:

```
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome rota01_proprieta.py. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# Rotazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e il suo punto ruotato
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto A′ deve corrispondere al punto A nella rotazione. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle rotazioni.

12.4.2 Proprietà

Cambia l'angolo di rotazione, cosa avviene quando è di 360°?

. . . .

Quando l'angolo di rotazione è un multiplo di 360° la rotazione diventa una particolare trasformazione: l'*identità*.

Costruisci ora un nuovo punto B e B′, il suo trasformato nella rotazione. Poi crea i segmenti AB e A′B′ e visualizzane la misura. Puoi formulare la congettura: A′B′ è congruente ad AB. Prova a dimostrarla.

. . . .

. . . .

. . . .

Costruisci un punto P vincolato al segmento AB e il suo simmetrico P′:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color=\'olive drab\', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color=\'olive drab\', name="P'")
```

Muovi il punto P, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto C e C′, costruisci il poligono ABC, e il poligono A′B′C′. Cosa si può concludere circa i triangoli ABC e A′B′C′?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo ABC e del suo trasformato A′B′C′?

. . . .

Riassumendo

- La rotazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La rotazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo ruotato appartiene al ruotato del segmento.
- Il programma completo:

```python
# Rotazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

```

```
# # Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e A'
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A'")

# Punto B e B'
b_0 = ig.Point(7, 3, width=6, name="B")
b_1 = ruotapunto(b_0, centro, angolo, width=6, name="B'")

# I segmenti AB, A'B' e le loro misure
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", a1b1.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color='olive drab', name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6,
                 color='olive drab', name="P'")

# Punto C, C', i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(-1, 1, width=6, name="B")
c_1 = ruotapunto(c_0, centro, angolo, width=6, name="C'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4, color='navy', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4, color='navy', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

12.4.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvalo con il nome: rota02_elementiuniti.py e scrivi funzione ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs) che restituisce il corrispondente di un punto nella rotazione. Questa volta fa le linee di costruzione invisibili.

Quali sono gli elementi uniti di una rotazione?

. . . .

. . . .

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una rotazione sono elementi uniti:

- il punto . . . .
- le circonferenze . . . .

12.4.4 Equazioni di alcune rotazioni

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: rota03_equazioni.py. Scrivi la solita funzione ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs).

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- il centro di rotazione nell'origine degli assi;
- l'angolo di rotazione di 90°;
- un punto P e visualizza le sue coordinate;
- il punto P′ e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto P in varie posizioni e completa la seguente tabella:

punto P	punto P′
A (-4; 3)	A′(. . . . . ; . . . . .)
B (1; -4)	B′(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C′(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P′(. . . . . ; . . . . .)

Nella rotazione di 90° con centro nell'origine degli assi: l'ascissa del generico punto P′ è . . . . ; l'ordinata del generico punto P′, è . . . .

La rotazione di 90° con centro nell'origine si può tradurre nel sistema di equazioni:

$$\rho_{90} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

In modo analogo esplora le rotazioni di 180°, 270° e 360°.

. . . .
. . . .
. . . .

Riassumendo

- il programma per studiare le rotazioni di 90° può essere fatto così:

```
# Rotazioni: equazioni della rotazione

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, visible=False)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(visible=False)
    circ = ig.Circle(centro, punto, visible=False)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()
```

```

# Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(0, 0, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 12, visible=False), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto P e P' e le loro coordinate
p_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6, name="P'")
ig.VarText(-7, -11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(-7, -12, "P' = {}", p_1.coords())

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

- Certe rotazioni possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.
  - $\rho_{90}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{180}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{270}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{360}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Prova tu
Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una rotazione è
2. In una rotazione figure corrispondenti sono
3. In una rotazione:
   a) sono punti uniti
   b) sono circonferenze unite
4. Le equazioni di alcune rotazioni sono: