MATEMATICA C^3

MATEMATICA DOLCE 1 - IPS

Testo per il primo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Istituti Professionali

Matematicamente.it

Edizione - 2016

Matematica C^3– Matematica dolce 1 - ips

COORDINATORI DEL PROGETTO Daniele Zambelli.

AUTORI Leonardo Aldegheri, Elisabetta Campana, Luciana Formenti, Michele Perini, Maria Antonietta Pollini, Nicola Sansonetto, Andrea Sellaroli, Daniele Zambelli .

HANNO COLLABORATO Alberto Bicego, Alberto Filippini .

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Daniele Zambelli .

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 3.0.1 del 27 giugno 2016.
Stampa 2016: giugno 2016.
ISBN 9788899988043

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Matematica dolce 1 - ips - 2016.
Codice ISBN: 9788899988043
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2016.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione v
Prefazione alla seconda edizione . . . vii
Prefazione all'edizione 2016 . . . vii

I Aritmetica e Algebra 1

1 Numeri naturali 3
1.1 L'origine dei numeri . . . 3
1.2 I numeri naturali . . . 4
1.3 Cosa sono . . . 4
1.4 Il sistema di numerazione decimale posizionale . . . 5
1.4.1 Rappresentazione geometrica . . . 6
1.5 Operazioni con i numeri naturali . . . 6
1.5.1 Proprietà delle operazioni . . . 6
1.5.2 Addizione in $\mathbb{N}$ . . . 7
1.5.3 Sottrazione in $\mathbb{N}$ . . . 7
1.5.4 Moltiplicazione in $\mathbb{N}$ . . . 8
1.5.5 Divisione in $\mathbb{N}$ . . . 9
1.5.6 Proprietà distributiva . . . 11
1.6 Potenza . . . 11
1.6.1 Proprietà delle potenze . . . 12
1.7 Espressioni numeriche . . . 13
1.7.1 Soluzione con grafo ad albero . . . 14
1.7.2 Metodo sequenziale . . . 16
1.8 Espressioni con un buco . . . 17
1.8.1 Soluzione con grafo ad albero . . . 17
1.8.2 Soluzione sequenziale . . . 20
1.9 Divisibilità e numeri primi . . . 21
1.9.1 Divisori, numeri primi, numeri composti . . . 22
1.10 Scomposizione in fattori primi . . . 25
1.10.1 Scomposizione con un grafo ad albero . . . 25
1.10.2 Scomposizione con un metodo sequenziale . . . 26
1.11 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo . . . 26
1.12 Esercizi . . . 29
1.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 29
1.12.2 Esercizi riepilogativi . . . 35

2 Numeri interi relativi 37

2.1 I numeri che precedono lo zero . . . 37
2.2 I numeri relativi e la retta . . . 38
2.3 Confronto di numeri relativi . . . 39
2.4 Le operazioni con i numeri relativi . . . 39
2.4.1 Addizione . . . 39
2.4.2 Sottrazione . . . 40
2.4.3 Somma algebrica . . . 41
2.4.4 Moltiplicazione . . . 41
2.4.5 Divisione . . . 42
2.4.6 Potenza di un numero relativo . . . 43
2.4.7 Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi . . . 43
2.5 Esercizi . . . 44
2.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 44
2.5.2 Esercizi riepilogativi . . . 48

3 Numeri razionali (e irrazionali) 53
3.1 Premessa storica . . . 53
3.2 Frazioni . . . 54
3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali . . . 57
3.4 La scrittura dei numeri razionali . . . 59
3.4.1 Numeri periodici particolari . . . 62
3.5 I numeri razionali e la retta . . . 62
3.6 Confronto tra numeri razionali . . . 63
3.7 Le operazioni con i numeri razionali . . . 64
3.7.1 Addizione . . . 64
3.7.2 Sottrazione di frazioni . . . 66
3.7.3 Moltiplicazione . . . 66
3.7.4 Operazione inversa e aritmetica dell'orologio . . . 67
3.7.5 Divisione . . . 68
3.8 Potenza di una frazione . . . 69
3.8.1 Potenza con esponente uguale a zero . . . 70
3.8.2 Potenza con esponente un numero intero negativo . . . 70
3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza . . . 70
3.9.1 Come trasformare un numero in notazione scientifica . . . 71
3.9.2 Ordine di grandezza . . . 73
3.10 Problemi con le frazioni . . . 73
3.10.1 Problemi diretti . . . 73
3.10.2 Problemi inversi . . . 74
3.11 Le percentuali . . . 74
3.11.1 Problemi con le percentuali . . . 75
3.11.2 Problemi con gli sconti . . . 75
3.12 Proporzioni . . . 76
3.12.1 Calcolo di un medio o un estremo incognito . . . 77
3.12.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali . . . 78
3.13 Espressioni con le frazioni . . . 80
3.14 La leggenda di Pitagora e la scoperta di un numero inquietante . . . 82
3.15 I numeri irrazionali . . . 83

3.16 Esercizi . . . 85
3.16.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 85
3.16.2 Esercizi riepilogativi . . . 102

4 Calcolo letterale **111**
4.1 Espressioni letterali e valori numerici . . . 111
4.1.1 Lettere per esprimere formule . . . 111
4.1.2 Lettere per descrivere schemi di calcolo . . . 111
4.1.3 Lettere per esprimere proprietà . . . 112
4.1.4 Valore numerico di un'espressione letterale . . . 112
4.1.5 Condizione di esistenza di un'espressione letterale . . . 113
4.2 I monomi . . . 114
4.2.1 Definizioni . . . 114
4.2.2 Valore di un monomio . . . 117
4.2.3 Moltiplicazione di monomi . . . 117
4.2.4 Potenza di un monomio . . . 118
4.2.5 Divisione di due monomi . . . 119
4.2.6 Addizione di due monomi . . . 120
4.2.7 Espressioni con i monomi . . . 121
4.2.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi . . . 123
4.3 Polinomi . . . 125
4.3.1 Definizioni fondamentali . . . 125
4.3.2 Somma algebrica di polinomi . . . 127
4.3.3 Prodotto di un polinomio per un monomio . . . 127
4.3.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio . . . 128
4.3.5 Prodotto di polinomi . . . 128
4.4 Prodotti notevoli . . . 129
4.4.1 Quadrato di un binomio . . . 129
4.4.2 Quadrato di un polinomio . . . 130
4.4.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza . . . 130
4.4.4 Cubo di un binomio . . . 131
4.4.5 Potenza n-esima di un binomio . . . 131
4.5 Esercizi . . . 133
4.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 133
4.5.2 Esercizi riepilogativi . . . 152

5 Divisibilità e scomposizione di polinomi **155**
5.1 Divisione tra polinomi . . . 155
5.1.1 Algoritmo di Euclide . . . 155
5.1.2 Regola di Ruffini . . . 158
5.1.3 Teorema di Ruffini . . . 161
5.2 Scomposizione in fattori . . . 162
5.2.1 Cosa vuol dire scomporre in fattori . . . 162
5.2.2 Raccoglimento fattore comune . . . 163
5.2.3 Raccoglimento parziale . . . 164
5.2.4 Riconoscimento di prodotti notevoli . . . 165
5.2.5 Altre tecniche di scomposizione . . . 169

5.2.6 Scomposizione mediante metodi combinati . . . 174
5.3 Esercizi . . . 178
5.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 178
5.3.2 Esercizi riepilogativi . . . 185

II Geometria **187**

6 Nozioni fondamentali **189**
6.1 Introduzione alla geometria razionale . . . 189
6.1.1 Breve nota storica . . . 189
6.1.2 Lo spazio fisico e la geometria . . . 190
6.2 Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni . . . 190
6.2.1 I teoremi . . . 191
6.2.2 Postulati e assiomi . . . 192
6.3 Prime definizioni . . . 197
6.3.1 Semirette e segmenti . . . 197
6.3.2 Semipiani e angoli . . . 200
6.4 Confronto e operazioni tra segmenti e angoli . . . 203
6.4.1 Premessa intuitiva . . . 203
6.4.2 La congruenza . . . 204
6.4.3 Costruzioni riga e compasso . . . 206
6.4.4 Confronto di segmenti . . . 207
6.4.5 Confronto di angoli . . . 208
6.4.6 Operazioni con i segmenti . . . 209
6.4.7 Operazioni con gli angoli . . . 211
6.4.8 Angoli particolari . . . 213
6.4.9 Perpendicolari e altre definizioni . . . 215
6.5 Poligoni e poligonale . . . 217
6.5.1 Poligono . . . 217
6.6 Esercizi . . . 221
6.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 221

7 Congruenza nei triangoli **231**
7.1 Definizioni relative ai triangoli . . . 231
7.2 Criteri di congruenza dei triangoli . . . 233
7.3 Teoremi del triangolo isoscele . . . 235
7.4 Esercizi . . . 239
7.4.1 Esercizi riepilogativi . . . 239

8 Il piano cartesiano **243**
8.1 Un po' di storia . . . 243
8.2 Asse cartesiano . . . 243
8.3 Piano cartesiano . . . 244
8.4 Problemi nel piano cartesiano . . . 246
8.4.1 Punto medio di un segmento . . . 246
8.4.2 Lunghezza di un segmento . . . 247

8.4.3 Area sottesa a un segmento . . . 248
8.4.4 Area di un triangolo . . . 250
8.5 Esercizi . . . 252
8.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 252
8.5.2 Esercizi riepilogativi . . . 252

III Relazioni e funzioni **255**

9 Insiemi **257**
9.1 Definizioni . . . 257
9.1.1 Elementi primitivi della teoria degli insiemi . . . 257
9.1.2 Insieme vuoto . . . 258
9.1.3 Cardinalità . . . 259
9.2 Rappresentazione degli insiemi . . . 259
9.2.1 Rappresentazione tabulare . . . 259
9.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica . . . 260
9.2.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn) . . . 261
9.3 Operazioni con gli insiemi . . . 261
9.3.1 Sottoinsieme . . . 261
9.3.2 Insieme delle parti . . . 263
9.3.3 Insieme unione . . . 264
9.3.4 Insieme intersezione . . . 265
9.3.5 Proprietà distributiva . . . 266
9.3.6 Insieme differenza . . . 266
9.3.7 Insieme complementare . . . 267
9.3.8 Leggi di De Morgan . . . 268
9.3.9 Prodotto cartesiano fra insiemi . . . 269
9.4 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema . . . 272
9.5 Esercizi . . . 275
9.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 275
9.5.2 Esercizi riepilogativi . . . 283

10 Identità, equazioni **291**
10.1 Identità ed equazioni . . . 291
10.1.1 Ricerca dell'insieme soluzione . . . 293
10.2 Prinicipi di equivalenza . . . 293
10.2.1 Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado . . . 294
10.3 Equazioni a coefficienti frazionari . . . 296
10.3.1 Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1 . . . 296
10.3.2 Equazioni in cui l'incognita scompare . . . 297
10.3.3 Riassunto . . . 297
10.4 Problemi di I grado in un'incognita . . . 298
10.4.1 Un po' di storia e qualche aneddoto . . . 298
10.5 Esercizi . . . 303
10.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 303
10.5.2 Problemi dalla realtà . . . 309

10.5.3 Problemi di geometria 311

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,
lui apprezza molto il progetto Matematica C^3
e penso che la tua versione gli possa far comodo
soprattutto per i primi anni del nostro serale.
Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C^3 *normale,*
ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,
promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane
(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.
In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C^3,
"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?
Buon lavoro,
Alice

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

Matematica C^3 Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica* C^3. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica* C^3.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica* C^3 in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica* C^3 ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli

Prefazione alla seconda edizione

Un anno di lavoro ha messo in luce alcuni errori che sono stati corretti, la nuova versione è scaricabile da:

`bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce_2ed`

e

`bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce_2ed`.

Ma, soprattutto, in questo anno è sorta una interessante opportunità: è stato finanziato un progetto per tradurre il testo in braille. Il lavoro sta procedendo e alcuni capitoli sono già stati tradotti. Quanto fatto lo si può trovare in:

`oer.veia.it`

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Prefazione all'edizione 2016

Cambia il modo di indicare le edizioni.

Ma soprattutto è cambiata l'organizzazione del materiale: ora tutto il progetto è contenuto in un unico repository.

Matematica Dolce, oltre ad essere un libro *libero* è anche *polimorfo*: ora è molto semplice creare nuovi libri partendo dal materiale presente nel repository. Già da quest'anno, oltre alla versione orientata ai licei non scientifici, sta prendendo vita una versione per gli istituti professionali. Il tutto è ospitato in:

`bitbucket.org/zambu/matematicadolce`

Quest'anno altri colleghi si sono uniti al progetto e un alunno ha fornito le immagini per le copertine.

Per quanto riguarda i contenuti, riporto i principali cambiamenti:

- la geometria è stata inserita nel testo di matematica;
- nel terzo volume è stato inserito un capitolo che introduce ai numeri Iperreali;
- è stata riscritta la parte di linguaggio di programmazione per la geometria interattiva;
- è stato aggiunto il quarto volume.

Abbiamo svolto un gran lavoro, ora è il momento di usarlo.

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Aritmetica e Algebra I

“One door, one key. . . ”
Foto di Silv3rFoX
http://www.flickr.com/photos/12030514@N08/2272118558/

Numeri naturali 1

1.1 L'origine dei numeri

L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana. Sono stati ritrovati reperti fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto "Osso di Ishango" (figura 1.1) [1] in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20 000 a.C. e il 18 000 a.C.

Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. È possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

FIGURA 1.1: Osso di Ishango

Sappiamo per certo che circa 6 000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:

𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺

I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero. I simboli sono I $=$ 1, V $=$ 5, X $=$ 10, L $=$ 50, C $=$ 100, D $=$ 500, M $=$ 1000. Il numero MM rappresenta $1000+1000 = 2000$; il numero VI rappresenta $5+1=6$, mentre il numero IV rappresenta $5-1=4$.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango

1.2 I numeri naturali

I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.

Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a sé stante, un oggetto astratto di tipo matematico.

Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto *cardinale* del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto *ordinale*), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo, ...

Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa sono i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

1.3 Cosa sono

I numeri naturali sono alla base dell'aritmetica, tutti gli altri numeri si possono costruire a partire da questi. Chiederci cosa sono i numeri naturali non è una domanda da poco, è domandarsi che cosa sono quegli oggetti su cui poggia una gran parte della matematica.

Per definire i numeri naturali dobbiamo partire da alcuni *concetti primitivi*. I concetti primitivi sono dei concetti che decidiamo di non definire e che siamo tutti d'accordo di ritenere conosciuti.

I concetti primitivi per definire i numeri naturali sono:

- lo zero;
- il successore di un numero.

Lo *zero* è il numero che serve per contare gli elementi di un insieme con il minore numero di elementi possibile: l'insieme vuoto.

Il *successore* di un numero naturale n è quel numero che viene subito dopo n.

Quindi se siamo d'accordo su questi due concetti di base, possiamo definire i numeri naturali come un insieme nel quale valgono le seguenti proprietà:

1. Zero è un numero naturale.
2. Per ogni numero naturale, anche il suo successore è un numero naturale.
3. Numeri diversi hanno successori diversi.
4. Lo zero non è successore di nessun numero naturale.
5. Se una proprietà vale per lo zero e, valendo per un numero naturale qualsiasi, vale anche per il suo successore allora vale per ogni numero naturale.

In pratica i numeri naturali sono la sequenza:

zero, uno, due, tre, ... centoventitre, centoventiquattro, ...

Un modo comodo per esprimere qualunque numero naturale è usare dei segni appositi, le cifre, e un sistema per rappresentarli:

0, 1, 2, 3, ... 123, 124, ...

1.4 Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre*. Un numero non è altro che una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.

Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere (figura 1.2) con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell'asta a sinistra e vuoto la prima asta: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10.

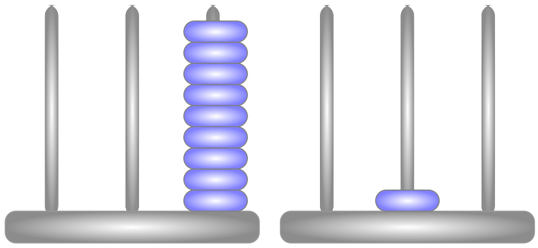


FIGURA 1.2: Il pallottoliere

I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10. Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora a sinistra ponendo uno zero nel posto lasciato vuoto. Questo metodo può essere ripetuto per rappresentare tutti i numeri che risultino potenza di dieci, ovvero dieci, cento, mille…

Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

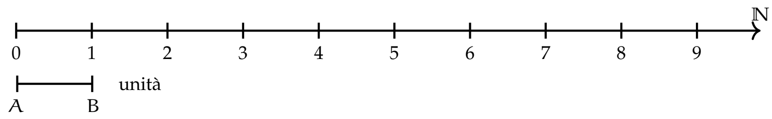
Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$.

Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è:

- *decimale* o a base dieci, perché usiamo dieci segni (cifre) per scrivere i numeri;
- *posizionale* perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

1.4.1 Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di *disuguaglianza* ($\leqslant$ si legge "minore o uguale di") o *disuguaglianza stretta* ($<$ si legge "minore di"). Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi.

Legge 1.1 (di tricotomia)**.** *Dati due numeri naturali n, m vale sempre una delle seguenti tre relazioni:* $n > m$, $n < m$, $n = m$.

1.5 Operazioni con i numeri naturali

Le operazioni matematiche sono delle regole che associano ad alcuni oggetti matematici, gli *operandi*, un altro oggetto matematico, il *risultato*.

Di seguito riprendiamo rapidamente le prime cinque operazioni aritmetiche nei numeri naturali.

1.5.1 Proprietà delle operazioni

Prima ancora di affrontare le operazioni aritmetiche con i numeri naturali, vediamo le proprietà delle operazioni in generale. *In generale* vuol dire che ora non stiamo a precisare né di quale insieme numerico parliamo, né di quale operazione. Quindi useremo delle lettere per indicare operandi e risultato mentre, per l'operazione, useremo un simbolo diverso da quelli delle quattro operazioni. Diremo che:

- Un'operazione si dice *legge di composizione interna* se il risultato appartiene allo stesso insieme degli operandi.
- Un'operazione gode della proprietà *commutativa* se $a \star b = b \star a$
- Un'operazione gode della proprietà *associativa* se $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- Un'operazione possiede un *elemento neutro* se $a \star u = u \star a = a$
- Un'operazione possiede elemento *inverso* se per ogni elemento a dell'insieme, esiste un elemento a' dell'insieme per cui $a \star a' = a' \star a = u$ dove u è l'elemento neutro.

Vediamo ora alcune operazioni con i numeri naturali e le loro proprietà.

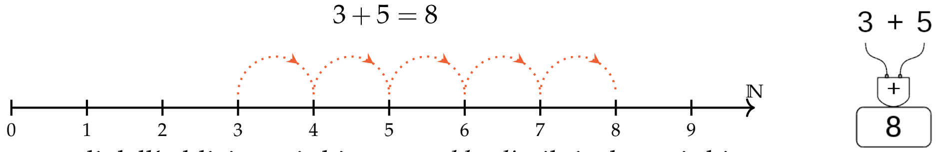
1.5.2 Addizione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

Definizione 1.1. Dati due numeri naturali n e m, l'*addizione* associa un terzo numero s, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi m volte. Si scrive $n + m = s$.

Ad esempio: sommare 5 a 3 significa partire da 3 e spostarsi verso il successivo per 5 volte.

$3 + 5 = 8$



Gli operandi dell'addizione si chiamano *addendi* e il risultato si chiama *somma*.

❑ **Osservazione** Per definire l'addizione abbiamo utilizzato il concetto di successore.

Proprietà

Per come è definita, e dato che i numeri naturali non hanno un limite superiore, l'addizione tra due numeri naturali qualsiasi è sempre un numero naturale. Si dice che è una *legge di composizione interna*.

Nei numeri naturali l'addizione presenta le seguenti proprietà:

- *Commutativa*: $a + b = b + a$
- *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- *Elemento neutro* $a + 0 = 0 + a = a$

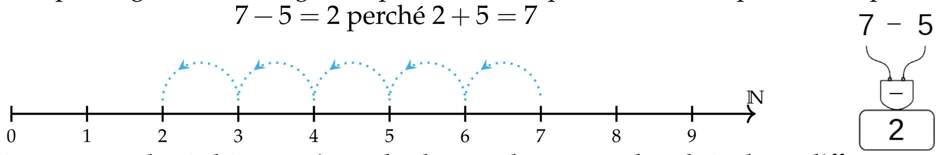
1.5.3 Sottrazione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di sottrazione come segue:

Definizione 1.2. Dati due numeri naturali m e n, la sottrazione associa un terzo numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad n dà come somma m. Si scrive $m - n = d$.

Ad esempio: togliere 5 da 7 significa partire da 7 e spostarsi verso il precedente per 5 volte.

$7 - 5 = 2$ perché $2 + 5 = 7$

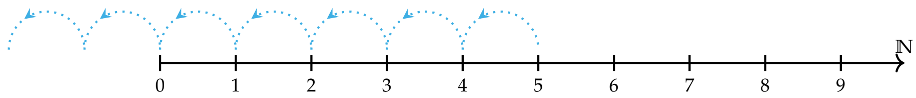


Il primo operando si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo* e il risultato *differenza*.

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

Se al concetto di successivo aggiungiamo anche quello di precedente, possiamo definire la sottrazione anche in un altro modo. Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.

Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti se partendo dal 5 andiamo indietro di 7 posizioni usciamo dalla semiretta dei numeri naturali.



Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ è possibile solo se $b \leqslant a$.

❑ **Osservazione** Nella definizione di sottrazione abbiamo usato l'operazione di addizione.

Proprietà

Dato che non dà sempre un risultato, la sottrazione non è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a - 0 = a$, ma in generale non si può fare $0 - a$.

L'unica proprietà interessante della sottrazione è la proprietà

- *Invariantiva*: $a - b = (a \mp c) - (b \mp c)$

Cioè:

Definizione 1.3. aggiungendo o togliendo ad entrambi i termini di una sottrazione la stessa quantità la differenza non cambia.

1.5.4 Moltiplicazione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di moltiplicazione come segue:

Definizione 1.4. Dati due numeri naturali m, n, l'operazione di *moltiplicazione* associa un terzo numero p che si ottiene sommando n addendi tutti uguali a m:

$$m \times n = \underbrace{m + m + \dots + m}_{nvolte} = p$$

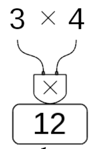
Ma questa definizione è sensata solo nel caso n sia maggiore di 1. Quindi dobbiamo completarla:

Definizione 1.5.

$$m \times n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ m & \text{se} \quad n = 1 \\ \underbrace{m + m + \dots + m}_{\text{n volte}} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

Ad esempio: moltiplicare 3 per 4 volte significa partire da 0 e aggiungere 3 per 4 volte.

$$3 \cdot 4 = 12$$



Gli operandi della moltiplicazione si chiamano *fattori* e il risultato si chiama *prodotto*.

❑ **Osservazione** Anche per definire la moltiplicazione abbiamo utilizzato l'addizione.

Proprietà

Dato che per eseguire una moltiplicazione ripeto delle addizioni, anche il prodotto di due numeri naturali qualsiasi è sempre un numero naturale. Si dice che la moltiplicazione è una *legge di composizione interna*.

Nei numeri naturali la moltiplicazione presenta le seguenti proprietà:

- *Commutativa*: $a \cdot b = b \cdot a$
- *Associativa*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Elemento neutro* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Un'altra importante proprietà che utilizzeremo spesso anche in seguito è la:

Legge 1.2 (Annullamento del Prodotto). *Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo.*

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \textit{ oppure } b = 0.$$

Questa legge dice che se il risultato di una moltiplicazione è zero di sicuro almeno uno dei fattori deve essere zero. Attenzione: questa proprietà non vale per tutti gli insiemi numerici in cui è definita la moltiplicazione.

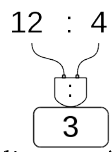
1.5.5 Divisione in $\mathbb{N}$

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di divisione come segue:

Definizione 1.6. Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, la divisione associa un terzo numero naturale q, se esiste, che moltiplicato per ad n dà come prodotto m. Si scrive $n : m = q$.

Ad esempio: dividere 12 per 4 significa trovare quante volte il numero 4 è contenuto nel numero 12.

$$12 : 4 = 3 \text{ perché } 3 \cdot 4 = 12$$



Il primo operando si chiama *dividendo* e il secondo *divisore*, il risultato di dice *quoziente esatto*.

Non sempre si può effettuare la divisione nei numeri naturali ad esempio: $10 : 4 =$ non è un numero naturale.

Se esiste il quoziente esatto tra i numeri m e n, si dice che:

- n è *divisore* di m;
- m è *divisibile* per n;
- m è *multiplo* di n

Esempio 1.1. $12 : 3 = 4$ perché $4 \times 3 = 12$. Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.

Esempio 1.2. 20 è divisibile per 4 perché $20 : 4 = 5$

Esempio 1.3. 7 è divisore di 35 perché $35 : 7 = 5$

Esempio 1.4. 6 è multiplo di 3 perché $6 = 2 \times 3$

Esempio 1.5. 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5.

❑ **Osservazione** Nella definizione di quoziente abbiamo richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti, se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero. Per esempio, nella divisione $5 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dia 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0. Invece nella divisione $0 : 0$ un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.

Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è *impossibile*; mentre la divisione $0 : 0$ è *indeterminata*.

❑ **Osservazione** Nella definizione di divisione abbiamo usato l'operazione di moltiplicazione che a sua volta usava l'addizione.

Proprietà

Dato che non dà sempre un risultato, la divisione non è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a : 1 = a$, ma in generale non si può fare $1 : a$.

L'unica proprietà interessante della divisione è la proprietà

- *Invariantiva*: $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) = (a : c) : (b : c)$ se $c \neq 0$

Cioè:

Definizione 1.7. Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una divisione per la stessa quantità, **diversa da zero**, il quoziente non cambia.

1.5.6 Proprietà distributiva

Oltre alle proprietà valide per le singole operazioni, ce n'è una che riguarda due operazioni contemporaneamente, è la proprietà *distributiva*.

Proprietà distributiva della moltiplicazione

Rispetto all'addizione Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad 3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad (2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$

Rispetto alla sottrazione In maniera analoga:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \qquad 6 \cdot (10 - 4) = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 4$$
$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \qquad (2 - 4) \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6$$

Proprietà distributiva della divisione

Rispetto all'addizione Solo se le somme sono a sinistra:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d \qquad (20 + 10 + 5) : 5 = 20 : 5 + 10 : 5 + 5 : 5 = 7$$

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra: $120 : (3 + 5)$. Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120 : 8 = 15$. Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120 : 3 + 120 : 5 = 40 + 24 = 64$. Il risultato corretto è il *primo*.

Rispetto alla sottrazione Solo se la sottrazione è a sinistra:

$$(a - b) : c = a : c - b : c \qquad (20 - 10) : 5 = 20 : 5 - 10 : 5 = 4 - 2 = 2$$

Se, però, la sottrazione è a destra:

$$120 : (5 - 3) = 120 : 2 = 60 \neq 120 : 5 - 120 : 3 = 24 - 40 = \text{ non si può fare.}$$

1.6 Potenza

La *potenza* di un numero naturale è una moltiplicazione che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 1.8. Dati due numeri naturali b, e, l'operazione di *potenza* associa un terzo numero p che si ottiene moltiplicando e fattori tutti uguali a b:

$$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{\text{e volte}} = p$$

Ma questa definizione è sensata solo nel caso e sia maggiore di 1. Quindi dobbiamo completarla:

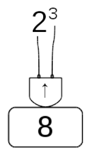
Definizione 1.9.

$$b^e = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad e = 0 \text{ e } b \neq 0 \\ b & \text{se} \quad e = 1 \\ \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{e volte} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

esponente

$$2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ volte}} = 8$$

base potenza



Il primo operando si chiama *base*, il secondo *esponente* e il risultato si chiama *potenza*. Da osservare che 0^0 non ha significato.

1.6.1 Proprietà delle potenze

I Il prodotto di più potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad 2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}.$$

II Il quoziente di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}} \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} \tag{1.1}$$

$$= \underbrace{(a : a) \cdot (a : a) \cdot \ldots \cdot (a : a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-m \text{ volte}} \tag{1.2}$$

$$= a^{n-m}. \tag{1.3}$$

Il passaggio dalla (1.1) alla (1.2) avviene per la proprietà invariantiva della divisione.

III La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}} \qquad\qquad (6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ volte}} = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}}}^{m \text{ volte}} = a^{n \cdot m}.$$

IV Il prodotto di più potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \qquad\qquad (2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n.$$

V Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n} \qquad\qquad (4 : 2)^8 = 4^8 : 2^8.$$

Le definizioni dei casi particolari di potenze si giustificano nel seguente modo:

$$a^0 = a^{5-5} = a^5 : a^5 = 1,$$
$$a^1 = a^{5-4} = a^5 : a^4 = a.$$

Alla potenza 0^0 non si assegna alcun valore perché applicando la definizione di a^0 si dovrebbe ottenere 1; applicando la definizione 0^a si dovrebbe ottenere 0, ma non è accettabile che il risultato dipenda da una scelta arbitraria della regola da usare.

1.7 Espressioni numeriche

Spesso in matematica abbiamo a che fare con più operazioni combinate assieme. In questo caso parliamo di espressioni:

Definizione 1.10. Un'espressione aritmetica è una successione di operazioni.

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio «Luca ha detto Mario è stato promosso» può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura: scrivendo «Luca, ha detto Mario, è stato promosso» significa che è stato promosso Luca; scrivendo «Luca ha detto: Mario è stato promosso» significa che è stato promosso Mario.

Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire, dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni. Per esempio, l'espressione $7 + 5 \cdot 2$ può valere 24 oppure 14, infatti: eseguendo le operazioni da sinistra a destra (associatività a sinistra) otteniamo 24 (vedi figura 1.3), mentre eseguendo prima la moltiplicazione (precedenza algebrica) otteniamo 17 (vedi figura 1.4).

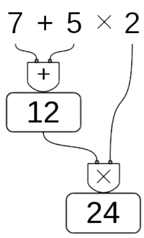


FIGURA 1.3: Da sinistra a destra.

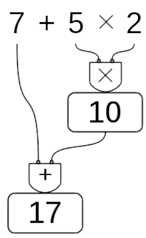


FIGURA 1.4: Precedenza alle moltiplicazioni.

❑ **Osservazione** Alcune calcolatrici, quelle "aritmetiche" svolgono le operazioni man mano che sono inserite, si dice che applicano *l'associatività a sinistra*. Altre, le calcolatrici "scientifiche" seguono le regole dell'algebra. Esegui la seguente sequenza di operazioni sulla tua calcolatrice (le barre verticali separano i diversi tasti da premere):

| 7 | + | 5 | × | 2 | = |

Osserva il risultato e confrontalo poi con quello ottenuto dai tuoi compagni. Diverse calcolatrici possono fornire risultati diversi. Per eliminare queste ambiguità sono state fissate le tre regole della precedenza algebrica:

1. prima si svolgono le espressioni nelle parentesi più interne;
2. in una espressione senza parentesi si svolgono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, poi addizioni e sottrazioni;
3. le operazioni con la stessa precedenza si svolgono da sinistra verso destra.

1.7.1 Soluzione con grafo ad albero

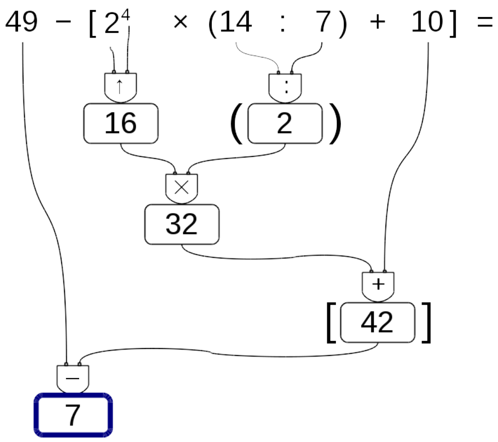
Risolviamo le espressioni con i numeri naturali usando grafi ad albero; gli operandi sono le foglie dell'albero, il risultato è la radice. Costruiamo il grafo tenendo conto delle seguenti indicazioni:

Procedura 1.3. *Per risolvere un'espressione usando un grafo:*

1. *in ogni nodo viene riportata l'operazione eseguita e il risultato;*
2. *costruiamo l'albero disegnando ogni nodo esattamente sotto l'operazione corrispondente;*
3. *disegniamo le parentesi attorno al nodo che contiene il risultato di tutta un'espressione racchiusa tra parentesi.*

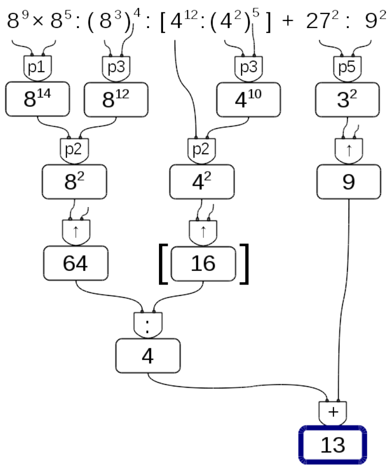
Vediamo, con un esempio, come fare.

Esempio 1.6. $49 - [2^4 \times (14:7) + 10] =$



Esempio 1.7. $8^9 \times 8^5 : (8^3)^4 : [4^{12} : (4^2)^5] + 27^2 : 9^2 =$

Se per risolvere un'espressione dobbiamo utilizzare le proprietà delle potenze, al posto del simbolo di operazione scriveremo le sigle "p1", "p2", ... per indicare l'uso della prima, seconda, ... proprietà.



1.7.2 Metodo sequenziale

In alcuni casi può non essere comodo, o praticabile, l'uso di un grafo ad albero per risolvere espressioni vediamo allora il metodo sequenziale che prevede di copiare tutta o in parte l'espressione rendendola via via più semplice. Possiamo applicare le seguenti indicazioni:

Procedura 1.4. *Per risolvere un'espressione in modo sequenziale:*

1. *scorriamo tutta l'espressione da sinistra a destra e sottolineiamo tutte le operazioni che si possono eseguire;*
2. *riscriviamo l'espressione sostituendo alle operazioni sottolineate, nel passo precedente, i loro risultati.*

Partiamo da una nuova espressione:
$2+6\times 2\div\left[(4-2)\times 3^2-3\times 5\right]+\left(5^2+2^3\right)\div 3=$
Scorrendo l'espressione vediamo che l'operazione $2+6$ è seguita da una moltiplicazione; poiché la moltiplicazione ha la precedenza sull'addizione, non possiamo eseguire $2+6$. La prossima espressione che incontriamo è 6×2 dato che è seguita da una divisione possiamo eseguirla e quindi la sottolineiamo. Procediamo così sottolineando tutte le operazioni che possiamo eseguire, a questo punto della soluzione, rispettando le precedenze algebriche:
$2+\underline{6\times 2}\div\left[\underline{(4-2)}\times\underline{3^2}-\underline{3\times 5}\right]+\left(\underline{5^2}+\underline{2^3}\right)\div 3=$
Ora ricopiamo l'espressione sostituendo al posto delle operazioni sottolineate il loro risultato:
$=2+12\div[2\times 9-15]+(25+8)\div 3=$
Otteniamo così un'espressione a cui applicare nuovamente i due passi precedenti fino ad averla ridotta ad un numero.
Sottolineo:
$=2+12\div[\underline{2\times 9}-15]+\underline{(25+8)}\div 3=$
Eseguo:
$=2+12\div[18-15]+33\div 3=$
Sottolineo:
$=2+12\div\underline{[18-15]}+\underline{33\div 3}=$
Eseguo:
$=2+12\div 3+11=$
Sottolineo:
$=2+\underline{12\div 3}+11=$
Eseguo:
$=2+4+11=$
Sottolineo:
$=\underline{2+4}+11=$
Eseguo:
$=6+11=17$
Nell'ultimo passaggio, essendo rimasta una sola operazione, è inutile sottolinearla. Avremmo anche potuto risolvere con un passaggio in meno calcolando assieme le due addizioni:
$=2+4+11=17$

1.8 Espressioni con un buco

A volte potrà succedere che, nell'espressione, manchi un numero. Conoscendo il risultato possiamo trovare il numero mancante.

1.8.1 Soluzione con grafo ad albero

Procedura 1.5. *Per trovare l'operando mancante usando il grafo ad albero:*

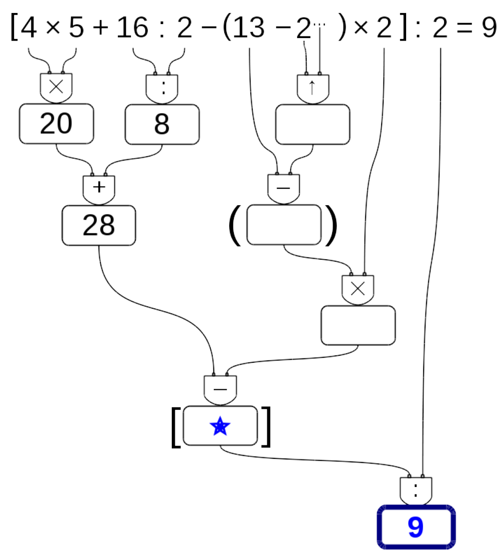
1. *costruiamo il grafo risolutivo senza eseguire operazioni;*
2. *eseguiamo tutte le operazioni possibili;*
3. *scriviamo il risultato nella radice;*
4. *con un colore diverso completiamo il grafo risalendo fino al numero mancante.*

Vediamo, con qualche esempio, come fare.

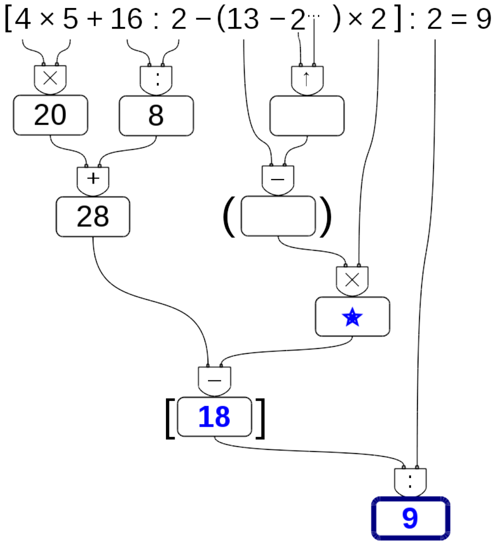
Esempio 1.8. Nella seguente espressione manca un esponente:

$[4 \times 5 + 16 : 2 - (13 - 2^{\cdots}) \times 2] : 2 = 9$

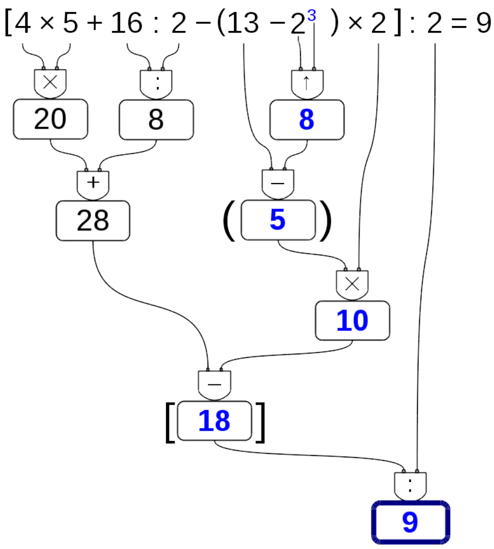
Costruiamo il grafo risolutivo vuoto, eseguiamo tutte le operazioni possibili. Ora, usando un colore diverso, scriviamo nella radice il risultato dell'espressione.



Ora poniamo attenzione al nodo vuoto che precede il risultato, il nodo contrassegnato dalla stella. Dobbiamo trovare il numero che diviso per 2 dia come risultato 9. È facile: il numero cercato è 18. Scriviamo allora 18 in questo nodo e poniamo l'attenzione a quello che lo precede.



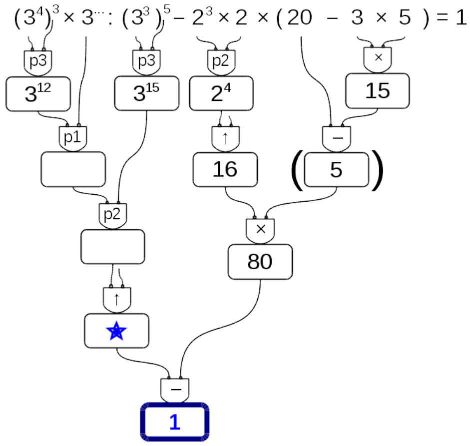
Ora dobbiamo trovare quel numero che tolto da 28 dia come risultato 18. Anche questo è facile da trovare: è 10. Lo scriviamo e ci spostiamo sul nodo precedente. Procedendo in questo modo possiamo risalire fino al dato mancante:



Esempio 1.9. Se c'è un "buco" in una espressione da risolvere con le proprietà delle potenze, si procede allo stesso modo:

$(3^4)^3 \times 3^{\cdots} : (3^3)^5 - 2^3 \times 2 \times (20 - 3 \times 5) = 1$

Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo. Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione, e poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede.

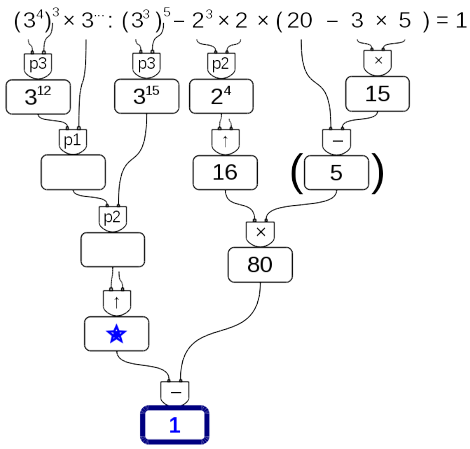


È facile individuare i valori mancanti:

- questo numero meno ottanta deve dare come risultato uno: il numero cercato è 81;
- nel nodo precedente: qui ci va una potenza che deve dare come risultato 81, potrebbe essere 9^2 o 3^4, ma dato che sopra posso usare le proprietà delle potenze con base 3, conviene usare 3^4;
- nel nodo precedente: questo esponente meno quindici deve dare come risultato quattro, l'esponente qui deve essere 19;
- e infine: dodici sommato a questo esponente deve dare come risultato diciannove: il valore mancante è quindi: 7.

Esempio 1.10. Prova a risolvere questa:
$(3^4)^3 \times 3^{\cdots} : (3^3)^5 - 2^3 \times 2 \times (20 - 3 \times 5) = 1$

Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo. Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione, e poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede.



È facile individuare i valori mancanti:

- questo numero meno ottanta deve dare come risultato uno: il numero cercato è 81;
- nel nodo precedente: qui ci va una potenza che deve dare come risultato 81, potrebbe essere 9^2 o 3^4, ma dato che sopra posso usare le proprietà delle potenze con base 3, conviene usare 3^4;
- nel nodo precedente: questo esponente meno quindici deve dare come risultato quattro, l'esponente qui deve essere 19;
- e infine: dodici sommato a questo esponente deve dare come risultato diciannove: il valore mancante è quindi: 7.

1.8.2 Soluzione sequenziale

Procedura 1.6. *Per trovare l'operando mancante usando il metodo sequenziale:*

1. *risolviamo l'espressione lasciando il buco ogni volta che dobbiamo eseguire un'operazione tra un numero e un buco;*
2. *scriviamo il risultato dopo l'ultima operazione;*
3. *con un colore diverso risaliamo dalla soluzione al dato mancante chiudendo man mano tutti i buchi.*

Vediamo, con qualche esempio, come fare.

Esempio 1.11. $[4 \times 5 + 16 \div 2 - (13 - 2^{\cdots}) \times 2] \div 2 = 9$

Come al solito iniziamo sottolineando tutte le operazioni che dobbiamo eseguire a questo punto:

$[\underline{4 \times 5} + \underline{16 \div 2} - (13 - \underline{2^{\cdots}}) \times 2] \div 2 = 9$

Ora, sostituiamo tutte le operazioni sottolineate con il loro risultato, tutte tranne l'operazione che contiene il buco: il suo risultato sarà un buco:

$[20 + 8 - (13 - \ldots) \times 2] \div 2 = 9$

procediamo sottolineando e eseguendo:

$\Big[\underline{20 + 8} - \underline{(13 - \ldots)} \times 2\Big] \div 2 = 9$

$[28 - \underline{\ldots \times 2}] \div 2 = 9$

$\underline{[28 - \ldots]} \div 2 = 9$

$\underline{\ldots \div 2} = 9$

Ora possiamo risalire: cambiamo colore e...

- il numero che diviso per 2 dà 9 è 18;
- il numero che tolto da 20 dà 18 + 10;
- il numero che moltiplicato per 2 dà 10 è 5;
- ...

E così arriviamo a scoprire che il dato mancante è: ....

Esempio 1.12. Possiamo anche risolvere espressioni con il buco dove bisogna applicare le proprietà delle potenze:

$\left(3^4\right)^3 \cdot 3^{\cdots} \div \left(3^3\right)^5 - 2^3 \cdot 2 \cdot (20 - 3 \cdot 5) = 1$

$\underline{\left(3^4\right)^3} \cdot 3^{\cdots} \div \underline{\left(3^3\right)^5} - \underline{2^3 \cdot 2} \cdot (20 - \underline{3 \cdot 5}) =$

$\underline{3^{12} \cdot 3^{\cdots}} \div 3^{15} - \underline{2^4} \cdot \underline{(20 - 15)} =$

$\underline{3^{\cdots}} \div 3^{15} - \underline{16 \cdot 5} =$
$\underline{3^{\cdots}} - 80 =$
$\underline{\ldots - 80} =$
1
La risalita non dovrebbe creare problemi.

1.9 Divisibilità e numeri primi

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile.

❑ **Osservazione** In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri, m e n, è possibile solo se m è multiplo di n.

Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto. La *divisione con resto* è un'operazione che dà due risultati: il *quoziente* e il *resto*.

Definizione 1.11. Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, possiamo sempre trovare due numeri q e r con $0 \leqslant r < n$ tali che:

$$m = n \cdot q + r$$

q si dice *quoziente* e r si dice *resto* della divisione.

Esempio 1.13. Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \times 3 = 21$, mentre $7 \times 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $3 \times 7 + 4 = 25$).

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} \rightarrow 25 & 7 \leftarrow \text{divisore} \\ \cline{2-2} 21 & 3 \leftarrow \text{quoziente} \\ \cline{1-1} \text{resto} \rightarrow 4 & \end{array}$$

Esempio 1.14. Alcune semplici divisioni con il resto:

$0 : 2 =$ quoziente=0 e resto=0 $1 : 2 =$ quoziente=0 e resto=1
$3 : 0 =$ non si può fare $7 : 2 =$ quoziente=3 e resto=1

Un'operazione che dà due risultati a volte è scomoda quindi i matematici hanno ricavato, dalla divisione con resto, due nuove operazioni: la *divisione intera* e il *modulo*.

Definizione 1.12. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, la *divisione intera* $n \operatorname{div} m$ è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha

$$q \times m \leqslant n$$

Esempio 1.15. Alcune semplici divisioni intere:

$0 \operatorname{div} 5 = 0$ $\quad$ $3 \operatorname{div} 5 = 0$
$9 \operatorname{div} 2 = 4$ $\quad$ $3 \operatorname{div}\ 0 =$ non si può fare.

Definizione 1.13. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra n e m si chiama *modulo* di n rispetto a m e viene indicata con $n \bmod m$.

Esempio 1.16. Alcuni esempi di modulo:

$3 \bmod 0 =$ non si può fare $\quad$ $10 \bmod 5 = 0$
$0 \bmod 5 = 0$ $\quad$ $3 \bmod 5 = 3$
$9 \bmod 5 = 4$ $\quad$ $11 \bmod 5 = 1$.

Ripassiamo l'algoritmo della divisione intera per numeri a più cifre; questo algoritmo risulterà particolarmente utile nel seguito.

$$\begin{array}{rrrr|rr}
 & 3 & 2 & 7 & 2 & 3 \\ \cline{5-6}
- & 2 & 3 & \downarrow & 1 & 4 \\ \cline{2-3}
 & & 9 & 7 & & \\
 & - & 9 & 2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 & &
\end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 1 & 3 & 2 & 9 & 1 & 0 & 7 \\ \cline{6-8}
- & 1 & 0 & 7 & \downarrow & 1 & 2 & \\ \cline{2-4}
 & & 2 & 5 & 9 & & & \\
 & - & 2 & 1 & 4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 4 & 5 & & &
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
 & 1 & 2 & 5 & 9 & 4 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ \cline{8-10}
- & 1 & 1 & 9 & 7 & \downarrow & & 7 & 3 & 6 \\ \cline{2-5}
 & & & 6 & 2 & 4 & & & & \\
 & & - & 5 & 1 & 3 & \downarrow & & & \\ \cline{4-6}
 & & & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\
 & & - & 1 & 0 & 2 & 6 & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 8 & 7 & & &
\end{array}$$

(c)

a) 327 : 23 = quoziente 14 e resto 5;
b) 1329 : 107 =quoziente 12 e resto 45;
c) 125943 : 171 = quoziente 736 e resto 87.

1.9.1 Divisori, numeri primi, numeri composti

Precisiamo il significato di *divisore* con la seguente definizione:

Definizione 1.14. Il numero n si dice divisore di m se, nella divisione intera, $m : n$ dà come resto 0.

Prima di proseguire, disegna nel quaderno la seguente tabella e completala. Nella prima colonna scrivi i numeri fino al 50, nella seconda scrivi tutti i divisori di quel numero ordinati dal minore al maggiore, nella terza scrivi quanti sono i divisori.

a) Quale sarà il prossimo numero con un numero dispari di divisori? (*facile*)
b) Quale sarà il prossimo numero con esattamente 2 divisori? (*impossibile?*)

TABELLA 1.1: Divisori dei primi numeri naturali

numero	divisori	numero di divisori
0	tutti i numeri naturali	∞
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6		
7		
8		
9		
10		
11		
...		

Guardando la tabella dei divisori si può osservare che ogni numero è divisibile per 1 e per se stesso. Poi può avere altri divisori, questi altri divisori si chiamano divisori propri.

Definizione 1.15. Chiamiamo *divisore proprio* di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Per quanto riguarda il numero dei divisori possiamo anche osservare che due numeri sono particolari:

- *zero* è divisibile per ogni numero naturale perché quando dividiamo 0 per un qualunque numero otteniamo come resto 0.
- *uno* ha un solo divisore.

Dopo queste osservazioni possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 1.16. Un numero $p > 1$ si dice *primo* se ha esattamente due divisori.

Definizione 1.17. Un numero $p > 1$ si dice *quadrato* se ha un numero dispari di divisori.

Definizione 1.18. Un numero $p > 1$ si dice *composto* se ha più di due, ma non infiniti, divisori.

Nella tabella dei divisori evidenzia i numeri primi e con un colore diverso i numeri quadrati.

❑ **Osservazione** 2 è l'unico numero primo pari.

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

Teorema 1.7 (di Euclide)**.** *I numeri primi sono infiniti.*

Euclide ci ha fatto vedere come sia possibile costruire numeri primi comunque grandi. Dato un numero primo, è sempre possibile costruirne uno più grande.

❑ **Osservazione** Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.

Criteri di divisibilità

Per vedere se un numero divide un altro *basta* eseguire la divisione e osservare se si ottiene un resto uguale a zero. Ma questo non sempre è comodo da fare, i matematici hanno scoperto dei trucchi per capire se un numero divide un altro senza dover eseguire la divisione: sono i *criteri di divisibilità*. Di seguito sono riportati i criteri relativi ai primi numeri naturali.

Divisibilità per 0 Nessun numero è divisibile per 0.

Divisibilità per 1 Tutti i numeri sono divisibili per 1.

Divisibilità per 2 0, 2, 4, 6, 8 sono divisibili per 2 e un numero è divisibile per 2 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 2.

Divisibilità per 3 0, 3, 6, 9 sono divisibili per 3, e un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero è divisibile per 3.

Divisibilità per 4 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 . . . sono divisibili per 4 e un numero è divisibile per 4 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 2 cifre, è divisibile per 4.

Divisibilità per 5 0, 5 sono divisibili per 5 e un numero è divisibile per 5 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 5.

Divisibilità per 6 Un numero è divisibile per 6 se è divisibile per 2 e per 3.

Divisibilità per 7 0, 7 sono divisibili per 7 e un numero maggiore di 10 è divisibile per 7 se la differenza, in valore assoluto, fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è divisibile per 7.

Il numero 252 è divisibile per 7, infatti $|25 - 2 \cdot 2| = 21$ è multiplo di 7.

Il numero 887 non è divisibile per 7, infatti $|88 - 2 \cdot 7| = 74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 8 0, 8, 16, 24, 32, . . . sono divisibili per 8 e un numero è divisibile per 8 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 3 cifre, è divisibile per 8.

Divisibilità per 9 0, 9 sono divisibili per 9, e un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero è divisibile per 9.

Divisibilità per 10 0 è divisibile per 10 e un numero è divisibile per 10 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 10.

Divisibilità per 11 0 è divisibile per 11 e un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è un numero divisibile per 11.

Il numero 253 è divisibile per 11, infatti $|5-(2+3)| = 0$;

Il numero 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)| = 7$.

Divisibilità per 12 Un numero è divisibile per 12 se è divisibile per 3 e per 4.

Divisibilità per un numero qualunque Un numero a è divisibile per un numero d se e solo se $a - n \cdot d$ è divisibile per d (dove n è un numero naturale qualsiasi).

Il numero 253 è divisibile per 23 perché $253 - 10 \cdot 23 = 253 - 230 = 23$ che è divisibile per 23.

Il numero 1894 è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $1894 - 100 \cdot 17 = 1894 - 1700 = 194$ che è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $194 - 10 \cdot 17 = 194 - 170 = 24$. Poiché 24 non è divisibile per 17 non lo sarà neppure 1894.

1.10 Scomposizione in fattori primi

Scomporre in fattori un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

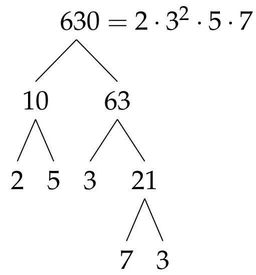
Teorema 1.8 (Teorema fondamentale dell'Aritmetica). *Ogni numero naturale* $n > 1$ *si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.*

Per scomporre in fattori primi un numero, per prima cosa lo scomponiamo in due fattori, senza preoccuparci che siano primi, poi scomponiamo i fattori non primi fino ad ottenere solo fattori primi.

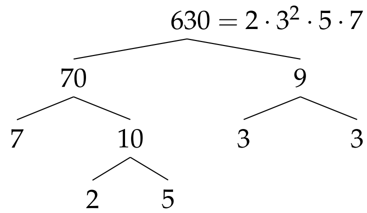
1.10.1 Scomposizione con un grafo ad albero

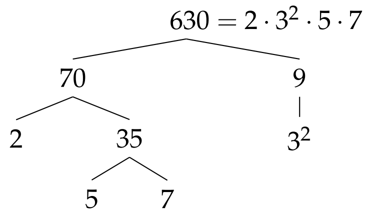
Anche per scomporre numeri possiamo usare un grafo ad albero come è illustrato negli esempi seguenti.

Esempio 1.17. Scomporre in fattori primi il numero 630.



In generale, un numero può essere scomposto in fattori seguendo percorsi diversi. Per esempio, 630 può essere scomposto attraverso questi alberi diversi:





Qualunque strada si segua per scomporre un numero in fattori primi otterremo sempre lo stesso risultato.

1.10.2 Scomposizione con un metodo sequenziale

Possiamo anche usare un metodo sequenziale: Sottolinea e scomponi.

Esempio 1.18. Scomporre in fattori primi il numero 1260.

$\underline{1260} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$\underline{10} \cdot \underline{126}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{63}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \underline{9}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3^2$

1.11 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Definizione 1.19. Il *massimo comune divisore* di numeri naturali a e b è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b e si indica con $\text{MCD}(a, b)$,.

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e 12:

$$\begin{aligned} &\text{divisori di } 18: \quad && 1,\ 2,\ 3,\ 6\,9,,\ 18; \\ &\text{divisori di } 12: \quad && 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12. \end{aligned}$$

I divisori comuni sono 1, 2, 6, il più grande è 6, quindi: $\text{MCD}(18, 12) = 6$.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.9. *Calcolo del* MCD *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con l'esponente minore .

Esempio 1.19. Calcolare $\text{MCD}(60, 48, 36)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$. I fattori comuni sono 2 e 3, il 2 compare con l'esponente minimo 2; il 3 compare con esponente minimo 1.

Pertanto $\text{MCD}(60, 48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Esempio 1.20. Calcolare $\text{MCD}(60, 120, 90)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. I fattori in comune sono 2, 3, 5. L'esponente minino è 1 per tutti.

Pertanto $\text{MCD}(60, 120, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Definizione 1.20. Due numeri a e b si dicono *primi tra loro* o *coprimi* se $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio 1.21. Numeri primi tra loro:

- 12 e 25 sono primi tra loro. Infatti il $\text{MCD}(12, 25) = 1$ dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $25 = 5^2$;
- 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35 = 5 \times 7$, $16 = 2^4$. I due numeri non hanno divisori comuni e il loro $\text{MCD} = 1$;
- 11 e 19 sono primi tra loro infatti il $\text{MCD}(11, 19) = 1$ dato che 11 e 19 sono numeri primi;
- 12 e 15 non sono primi tra di loro in quanto hanno 3 come divisore comune.

Definizione 1.21. Il *minimo comune multiplo* di due numeri naturali a e b è il più piccolo tra tutti i multipli comuni ad a e b e si indica con $\text{mcm}(a, b)$.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri:

$$\begin{aligned} \text{multipli di } 6: &\quad 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60, \ldots; \\ \text{multipli di } 15: &\quad 15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90, \ldots \end{aligned}$$

Sono multipli comuni 30, 60, 90,... Il più piccolo dei multipli comuni è 30.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.10. *Calcolo del* mcm *di due o più numeri naturali:*

a) *si scompongono i numeri in fattori primi;*
b) *si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore .*

Esempio 1.22. Calcolare il $\text{mcm}(60, 48, 36)$.

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono sono: $2^4,\ 3^2,\ 5$.

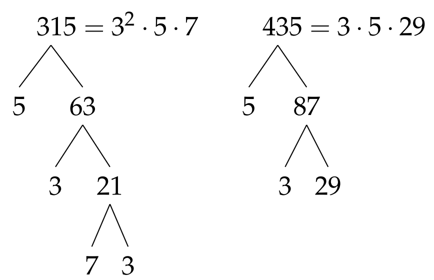
Il mcm è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

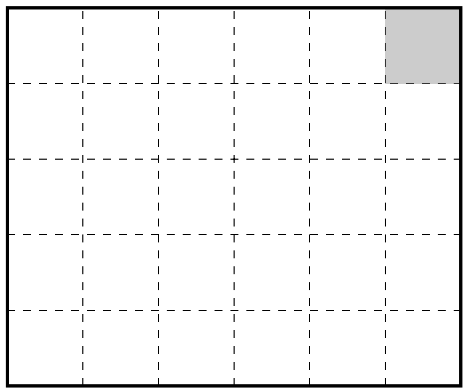
Esempio 1.23. Calcolare il $\text{mcm}(20, 24, 450)$.

Scomponendo in fattori si ha: $20 = 2^2 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Esempio 1.24. Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315cm per 435cm con mattonelle quadrate le più grandi possibile, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.





La soluzione del problema è data quindi dal $\text{MCD}(315, 435) = 3 \cdot 5 = 15$. Le mattonelle devono avere il lato di 15cm. Ci vogliono $435 : 15 = 29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435cm e $315 : 15 = 21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315cm. In tutto occorrono $29 \cdot 21 = 609$ mattonelle.

1.12 Esercizi

1.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.5 Operazioni con i numeri naturali

1.1. Rispondi alle seguenti domande:

a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

1.2. Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) $7 - \ldots = 1$
b) $3 - 3 = \ldots$
c) $5 - 6 = \ldots$
d) $3 - \ldots = 9$
e) $15 : 5 = \ldots$
f) $18 : \ldots = 3$
g) $\ldots : 4 = 5$
h) $12 : 9 = \ldots$

1.3. Vero o falso?

a) $5 : 0 = 0$ V F
b) $0 : 5 = 0$ V F
c) $5 : 5 = 0$ V F
d) $1 : 0 = 1$ V F
e) $0 : 1 = 0$ V F
f) $0 : 0 = 0$ V F
g) $1 : 1 = 1$ V F
h) $1 : 5 = 1$ V F
i) $4 : 0 = 0$ V F

1.4. Se è vero che $p = n \times m$, quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F
b) p è multiplo di m V F
c) m è multiplo di p V F
d) m è multiplo di n V F
e) p è divisibile per m V F
f) m è divisibile per n V F
g) p è divisore di m V F
h) n è multiplo di m V F

1.5. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F
b) 3 è un divisore di 6 V F
c) 8 è un multiplo di 2 V F
d) 5 è divisibile per 10 V F

1.6. Esegui le seguenti operazioni:

a) $18 \text{ div } 3 = \ldots$
b) $18 \bmod 3 = \ldots$
c) $20 \text{ div } 3 = \ldots$
d) $20 \bmod 3 = \ldots$
e) $185 \text{ div } 7 = \ldots$
f) $185 \bmod 7 = \ldots$
g) $97 \text{ div } 5 = \ldots$
h) $97 \bmod 5 = \ldots$
i) $240 \text{ div } 12 = \ldots$
j) $240 \bmod 12 = \ldots$
k) $700 \text{ div } 8 = \ldots$
l) $700 \bmod 8 = \ldots$

1.7. Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice

a) 311 : 22
b) 429 : 37
c) 512 : 31
d) 629 : 43
e) 755 : 53
f) 894 : 61
g) 968 : 45
h) 991 : 13
i) 1232 : 123
j) 2324 : 107
k) 3435 : 201
l) 4457 : 96
m) 5567 : 297
n) 6743 : 311
o) 7879 : 201
p) 8967 : 44
q) 13455 : 198
r) 22334 : 212
s) 45647 : 721
t) 67649 : 128

1.8. Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) $33 : 11 = 11 : 33$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $8 - 4 = 4 - 8$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 - 9) \cdot 4$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ proprietà .... $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.9. Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$, verifica se è:

a) commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$
b) associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
c) 0 è elemento neutro

1.6 Potenza

1.10. Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\cdots+\cdots+\cdots} = 3^{\cdots}$
b) $3^4 : 3^2 = 3^{\cdots-\cdots} = 3^{\cdots}$
c) $(3 : 7)^5 = 3^{\cdots} : 7^{\cdots}$
d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\cdots}$
e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\cdots}$
f) $(2^6)^2 = 2^{\cdots\cdot\cdots} = 2^{\cdots}$
g) $(18^6) : (9^6) = (\ldots\ldots)^{\cdots} = 2^{\cdots}$
h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : [(5^2)^3]^6 = \ldots\ldots\ldots = 5^{\cdots}$

1.11 (*). Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ $[6^6]$
b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ $[5^4]$
c) $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$ $[1]$
d) $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$ $[6^3]$

1.12. Calcola:

a) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$
b) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^1$
c) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$
d) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$

1.13. Completa, applicando le proprietà delle potenze:

a) $7^4 \cdot 7^{\cdots} = 7^5$
b) $3^9 \cdot 5^9 = (\ldots\ldots)^9$
c) $5^{15} : 5^{\cdots} = 5^5$
d) $(\ldots\ldots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$
e) $8^4 : 2^4 = 2^{\cdots}$
f) $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{\cdots}$
g) $20^7 : 20^0 = 20^{\cdots}$
h) $(\ldots^3)^4 = 1$
i) $(7^3) \cdot 7^{\cdots} = 7^{14}$

1.14. Il risultato di $3^5 + 5^3$ è: $\boxed{A}$ 368 $\boxed{B}$ $(3 + 5)^5$ $\boxed{C}$ $15 + 15$ $\boxed{D}$ 8^8

1.15. Il risultato di $(73 + 27)^2$ è: $\boxed{A}$ 200 $\boxed{B}$ $73^2 + 27^2$ $\boxed{C}$ 10^4 $\boxed{D}$ 1000

1.7 Espressioni numeriche

1.16. Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine

a) $15+7-2$	e) $12-2\times 2$	i) $2+2^2+3$	m) $(3^2)^3-3^2$
b) $16-4+2$	f) $10-5\times 2$	j) $4\times 2^3+1$	n) 2^4+2^3
c) $18-8-4$	g) $20\times 4:5$	k) $2^4:2-4$	o) $2^3\times 3^2$
d) $16\times 2-2$	h) $16:4\times 2$	l) $(1+2)^3-2^3$	p) $3^3:3^2\times 3^2$

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

1.17. $2^2+3^2\cdot 5^2-3\cdot 2^4+7\cdot 5^2-2^3\cdot 5^2-2^2\cdot 3^3$ [48]

1.18. $2^2\cdot[(2^2\cdot 3:3+5\cdot 2^2):(2\cdot 3)+1^3]$ [20]

1.19. $10^1+(2+11-3^2)^2-(2^2+4^2+6)$ [0]

1.20. $2^1+3^2+4^2-5^2-4^0$ [1]

1.21. $24:(3\cdot 2^2)+2^2\cdot(3^2+3^0-2^3)$ [10]

1.22. $5+2\cdot[5+2\cdot(2^2+5):3-3^2]-2\cdot 3$ [3]

1.23. $(5^2+3^2-1):3+(3^3+1):7$ [15]

1.24. $(3\cdot 4+2^3\cdot 2+7\cdot 6):10\cdot 3-2^2\cdot 5$ [1]

1.25. $3^2+4^2+2\cdot 3+(7+2):9+(27-2):5$ [37]

1.26. $(3^3+3^2+3^1+3^0-10):6+6^2:6$ [11]

1.27. $\{[(2^6-2^5-2^4-2^3):2^2+1]^3\cdot 2-24\}^2+3$ [903]

1.28. $\{16:(6^2-10\cdot 2)+[(7\cdot 3+3^3\cdot 3-2)^2:10^3]:(7^2-11\cdot 4)-2\}^5$ [1]

1.29. $[(2^2\cdot 2^5):(2\cdot 2^3)]^2$ [64]

1.30. $(2^2\cdot 2)^2:(5\cdot 2^2-2^2)+[7^2:(5^2-3^2\cdot 2)+13^3:13^2]:2^2+(7^4\cdot 7^2)^0-3^2$ [1]

1.31. $[13^6\cdot(13^5:13)]^2:[13^{13}:(13^2\cdot 13^3)^2]^6$ [169]

1.32. $(3\cdot 5-2^2\cdot 2)\cdot 3^2+3^3\cdot 2^2-7\cdot 3^2$ [108]

1.33. $[(3^4)^3:3^{10}]^5:3^9+(5^4)^3:5^{10}-2^2\cdot 7^1$ [0]

1.34. $[(7^4\cdot 2^4\cdot 9^4):(7^2\cdot 2^2\cdot 9^2)]^4:(504^8:4^8)$ [1]

1.35. $(13\cdot 3^3-2^6\cdot 5)^2:31+[(6-5)^6+(2^2+3^2-2^1)]:(2^4:2^2)$ [28]

1.36. $(2^4-5^2:5\cdot 3):1+(2\cdot 3\cdot 6-2^2\cdot 3^2)+2^2\cdot 3^2:[2^3\cdot 3+2^2\cdot 3\cdot(2^3-7)]$ [2]

1.37. $25:5+(8^2-15\cdot 3-2^3)-27:(4^2+3-10)$ [13]

1.38. $\{[(2^6\cdot 2^4:2^8):2^2+1]^3:2^2\}^0$ [1]

1.39. $[(5^2)^3 \cdot 5^4] : [5^4 \cdot (5^2)^2]$ [25]

1.40. $[(3^2 \cdot 3^4) \cdot (3^2 \cdot 3)]^2 : 3^{16}$ [9]

1.41. $1^3 + (2^2)^3 : (5 - 4 + 1)^4 + [7^2 : (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 13^4 : 13^3] : 2^2 + 1^5$ [11]

1.42. $2^2 + \{[7 \cdot (5^3 : 5^2 \cdot 3^0 + 5^1) + (3^5 : 3^2 + 3)] : (5^4 : 5^2) - 2^2\} - [2^3 \cdot 5 : (2 \cdot 5)]^3 : 2^4$ [0]

1.8 Espressioni con un buco

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

1.43. $8^2 - 3^{\cdots} \cdot 5 + (2^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 9) : 4^2 + 3^0$ [20]

1.44. $(7^2 - 2 \cdot 5 + 15 : 3) : 4 + (3 \cdot 2^2 + 3^{\cdots} - 4^2)^2$ [36]

1.45. $5^1 + (\ldots^2 - 5 \cdot 3^2 - 2^3) - 3^3 : (4^2 + 3 - 10)$ [13]

1.46. $2^2 + 3^{\cdots} + 5^2 - 2 \cdot 3 - 8 \cdot 4$ [0]

1.47. $(5^2 - 3^2) : 2^2 + 9^{\cdots} \cdot 8^2 : 8^1$ [12]

1.48. $(2^3 + 2^4) : 2 + \ldots \cdot 3 - 2^2 \cdot 5$ [31]

1.49. $[(7^5 \cdot 7^{\cdots}) : (7^4)^3] : 7^2$ [1]

1.50. $(1^5 + 1^6 + 1^8 + 1^{10}) \cdot 4 - 2^{\cdots}$ [0]

1.51. $81 : 3^2 + 32 : 2^2 + \ldots : 5^2 - (4 \cdot 2 - 2^3) : 3$ [19]

1.52. $\{[(2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3) : 4 + \ldots] \cdot 8 - 24\} + 3$ [3]

1.53. $3 \cdot 2 + (2^{\cdots} : 2^2 + 3^2 : 3) \cdot 5 - (6 : 2 + 44 : 4) : 7$ [29]

1.54. $\{5 \cdot 16 - (6^2 - 2^4) - [(3^2 - \ldots^2) \cdot 10 - 5]\} - [(2^2 \cdot 5 + 2^3) : (3^3 - 5^2)]$ [1]

1.55. $[2 + 15 : (2^3 \cdot 5 - 3^3 + 2)]^4 : 3 \cdot 2 - 2 \cdot^{(} \ldots - 5 \cdot 12 : 3)^2$ [4]

1.56. $5^2 : 5 \cdot [(3 \cdot 5^2 + 4 : 2) : 7 - 2 \cdot 5]^2 + 2^{\cdots} : 2^2 - 5^2 : 5$ [8]

1.57. $12^{10} : 12^9 + 3^2 \cdot 6^2 : 6^2 + 12^2 : (5 \cdot 2^2 - 19) - (5^4)^{\cdots} : 5^{10}$ [140]

1.58. $(2^2)^3 + (22 - 5 \cdot 4)^2 + \ldots^2 - 4^2 \cdot 5$ [69]

1.59. $(3^5)^3 : 3^{13} + 3^{10} : 3^9 + 9^5 \cdot 9^{\cdots} \cdot 9^4 : 9^{16}$ [13]

1.60. $3^3 \cdot 3^7 \cdot 3^2 : (3^6 \cdot 3^6) + 5^2 - [6^2 + 2^2 + 2 \cdot 50 - (2^3 \cdot \ldots)] : 10^2$ [25]

1.61. $(2 \cdot 5)^3 : 5^3 - (2^{\cdots} : 2^2) \cdot \{(6 - 2^2) \cdot [6 - 5^0 - (2^4 : 2^2)]\}$ [4]

1.62. $2^2 \cdot 2^6 : 2^5 : 2 + 2^6 : (2^{\cdots} \cdot 2^2) - 2^9 : 2^7 + (6^2 \cdot 2^2) : 18 + 7^3 : 7^2$ [16]

1.63. $1^4 + (21 + \ldots - 3^3)^2 - (2^2 + 4^2 + 6)$ [0]

1.64. $(2^4)^5 : 2^19 + (4^{\cdots})^8 : 4^{47}$ [6]

1.65. $[(7^5 \cdot 7^{\cdots})] : [(7^3)^4] : 7^2$ [1]

1.66. $(2 \cdot 2^{\cdots} \cdot 2^3 \cdot 2^4) : 2^9 + (3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7) : 3^{14}$ [4]

1.67. $\{[(3^3 \cdot 3^4)^2 : 3^6] : 3^{\cdots} - 2 \cdot 3^2\} : 3 + \{[(5^2 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2) : 10]^2 + 1\} : 5$ [5]

1.68. $1 + \{24^4 : 8^4 - 5^2 \cdot 2 : [2 + 2^4 : (2^3 - 2 \cdot 3)]\} : \{[20^{\cdots} : (2 \cdot 10)^6 - 2^2 \cdot 5^2] : 10^2 + 1\}$ [20]

1.9.1 Criteri di divisibilità

1.69 (Crivello di Eratostene). Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.9.1 Criteri di divisibilità

1.70. Per quali numeri sono divisibili? Segna i divisori con una crocetta

a) 1320 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b) 2344 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c) 84 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d) 1255 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e) 165 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f) 720 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g) 792 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h) 462 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1.10 Scomposizione in fattori primi

1.71. I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi

a) $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$
b) $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$
c) $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$
d) $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$
e) $17 = 17 \cdot 1$
f) $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$
g) $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6$
h) $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$
i) $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25$
j) $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$

1.72. Rispondi alle domande:

a) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
c) quando un numero è scomposto in fattori primi?

1.73. Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi

a) a e b sono due numeri primi
b) a e b sono due numeri primi tra di loro

Fai degli esempi che mettano in evidenza la differenza descritta

1.74 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 52	c) 72	e) 105	g) 135	i) 225
b) 60	d) 81	f) 120	h) 180	j) 525

1.75 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 675	c) 1900	e) 4050	g) 12150	i) 85050
b) 715	d) 1078	f) 4536	h) 15246	j) 138600

$3^3 \cdot 2^5$	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$	$2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$3 \cdot 5 \cdot 47$	$2 \cdot 7^2 \cdot 11$	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

1.11 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

1.76. Applicando la definizione 1.11 trova il MCD tra i numeri 54 e 132

1.77. Calcola MCD e mcm dei numeri 180, 72, 90
Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$\text{MCD} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = \dots$; $\text{mcm} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} \cdot 5^{\cdots} = \dots$

1.78 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 15; 5; 10	d) 5; 6; 8	g) 6; 8; 12	j) 16; 18; 32
b) 2; 4; 8	e) 24; 12; 16	h) 50; 120; 180	k) 30; 60; 27
c) 2; 1; 4	f) 6; 16; 26	i) 20; 40; 60	l) 45; 15; 35

1.79 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 24; 12; 16	d) 12; 14; 15	g) 15; 18; 21	j) 100; 120; 150
b) 6; 4; 10	e) 3; 4; 5	h) 12; 14; 15	k) 44; 66; 12
c) 5; 4; 10	f) 6; 8; 12	i) 15; 18; 24	l) 24; 14; 40

1.80 (*). Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme? [3h]

1.81 (*). Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano? [90g]

1.82. Disponendo di 56 penne, 70matite e 63 gomme, quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?

1.83. Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederele di nuovo tutte e tre nello stesso anno?

1.12.2 Esercizi riepilogativi

1.84. Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?

a) $5+3-1$	d) $7+2-10$	g) $3\cdot 4-12$	j) $27:9:3$
b) $6+4-10$	e) $2\cdot 5:5$	h) $12:4-4$	k) $18:2-9$
c) $5-6+1$	f) $2\cdot 3:4$	i) $11:3+2$	l) $10-1:3$

1.85. Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale

a) $5:5=\dots$	e) $10:2=\dots$	i) $10:5=\dots$	m) $0\cdot 0=\dots$
b) $5:0=\dots$	f) $0:5=\dots$	j) $1:5=\dots$	n) $1\cdot 0=\dots$
c) $1\cdot 5=\dots$	g) $5\cdot 1=\dots$	k) $0\cdot 5=\dots$	o) $1:0=\dots$
d) $1-1=\dots$	h) $0:0=\dots$	l) $5:1=\dots$	p) $1:1=\dots$

1.86. Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato

$$2+5\cdot 3+2=35 \quad 2+5\cdot 3+2=27$$

1.87 (*). Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato:

a) aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4
b) sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27
c) moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8
d) al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5
e) sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2
f) moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2
g) sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4
h) il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2
i) la somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2
j) la differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5

a) 36, b) 18, c) 126, d) 2, e) 26, f) 30

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1.88. $(13+3\cdot 5^2:3+15+19):(3\cdot 2^2)+(2^3-2^2-2)\cdot 170^0$ [7]

1.89. $5^1+2\cdot(4^2+2\cdot 7-15)-(7^2-5^2-4^2)\cdot 2^2+7$ [10]

1.90. $[2^4+(2^5:2^4+2\cdot 3)\cdot 2^2]:2^3+10-4^2+3^3:3^2$ [3]

1.91. $[(9^2-7^2):(3^2-1)+(8^2-5^2):(3^2+2^2)]\cdot 5$ [35]

1.92. $[(3^2\cdot 2^3-2\cdot 5^2+2^{11}:2^4):(3\cdot 5)-2]:(4^2-2^3)$ [1]

1.93. $2^{10}:2^8+3^2-2^2\cdot 3^0+4^2-2^3$ [17]

1.94. $[5+2^2\cdot 3^2-5\cdot(2^4-2^2-2^2+3^2-27:3)]\cdot 3^0\cdot 3^2$ [9]

Calcola il valore mancante nelle seguenti espressioni:

1.95. $35^4:\{24^2:[19^3:(3^2\cdot 2+4^{\cdots})^2+5]^2+2^17\}^3$ [35]

1.96. $(13+2^2+75:\ldots+2\cdot 3^2):(3\cdot 2^2)+(2^3-2^2-2)\cdot 17^0$ [8]

1.97. $35:7+13\cdot 2^2-\ldots:2^3-11\cdot 3-84:7$ [0]

1.98. $(15:3+7^2-2\cdot 5):4+[(3\cdot 2^2)+\ldots^2-4^2]^2$ [36]

1.99. $(5^2-3^2\cdot 2):7+(\ldots^2-4^3):(3^0+3+3^2)$ [1]

1.100. $[(2^{\cdots}\cdot 7+3^3\cdot 2^2):11]:(2^3\cdot 15-10^2)+(52:13):2$ [3]

1.101. $3^7:3^5+8^2+2^{\cdots}\cdot 2^7:2^{11}$ [75]

1.102. $[(\ldots+5\cdot 2-2\cdot 11)\cdot 2^2+(3^2-2^3)]\cdot(8^2-7\cdot 9)$ [1]

1.103. In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

1.104. Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

1.105. In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?

1.106. Un palazzo è costituito da 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?

1.107. Spiega brevemente il significato delle seguenti parole:

a) numero primo
b) numero dispari
c) multiplo
d) cifra

1.108. Rispondi brevemente alle seguenti domande:

a) cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
c) cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

2 Numeri interi relativi

2.1 I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5-12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di € 12 000 pur avendo soltanto risparmi in banca di soli € 5 000. In questo caso si tratta di togliere dai € 5 000 i € 12 000 che servono per acquistare l'auto: materialmente non è possibile e si ricorre a un prestito.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi». Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: «il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero», altri «domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero» e altri ancora «la temperatura sarà di -1 grado».

Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero $-10\,916$ e l'altezza del monte Everest con il numero $+8\,855$ (figura 2.1).

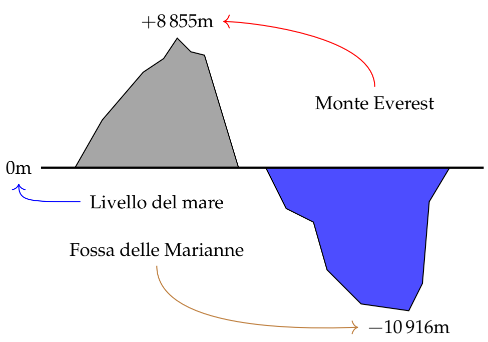


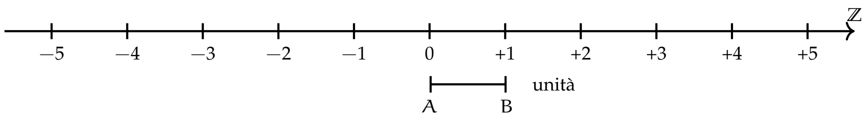
FIGURA 2.1: Il monte Everest e la fossa delle Marianne.

Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i numeri interi relativi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno "+" se sono numeri maggiori di 0 e dal segno "−" se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si costruisce raddoppiando i numeri naturali $\mathbb{N}$ e facendo precedere ciascun numero dal segno "+" o "−", ad eccezione dello 0, al quale non si attribuisce segno.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0,+1,+2,+3,+4,+5,\ldots\}$$

2.2 I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi con segno positivo si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, l'insieme dei soli numeri interi negativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

Definizione 2.1. Due numeri relativi si dicono *concordi*, se hanno lo stesso segno; si dicono *discordi* se hanno segni opposti.

Esempio 2.1. Concordi-discordi.

$+3$ e $+5$ sono concordi; $+3$ e -5 sono discordi; -5 e -2 sono concordi.

Definizione 2.2. Il *valore assoluto* di un numero relativo è il numero senza il segno; quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali ($|\,|$). In linguaggio matematico:

$$|a| = a, \text{ se } a \geqslant 0, \qquad |a| = -a, \text{ se } a < 0.$$

Esempio 2.2. Valore assoluto.

$|+2| = 2 \qquad |-5| = 5 \qquad |-73| = 73 \qquad |+13| = 13$

Definizione 2.3. Due numeri interi relativi sono *uguali* se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono *opposti* se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti $+3 e -3 \quad +5 e -5 \quad +19 e -19$.

❑ **Osservazione** Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno "+". Per esempio si può scrivere indifferentemente $+1$ o 1, $+12$ o semplicemente 12.

2.3 Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare:

a) ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
b) tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
c) ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
d) tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
e) 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

Per indicare che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo “$>$”; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo “$<$”.

Esempio 2.3. Confronto di numeri relativi.

- ➡ $+4 > +2$: i numeri sono positivi, il maggiore è $+4$ perché ha valore assoluto maggiore;
- ➡ $-1 > -3$: i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore;
- ➡ $+4 > -2$: il numero positivo è maggiore del numero negativo;
- ➡ $+4 > 0$: ogni numero positivo è maggiore di 0;
- ➡ $0 > -2$: ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

2.4.1 Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione $(+)$ è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno “+” al significato che esso ha. Almeno all'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2) + (+5)$ per indicare la somma tra i numeri $+2$ e $+5$.

L'addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.

La *somma di due numeri relativi concordi* è il numero che ha per valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempio 2.4. $(+3) + (+5) = \ldots$: i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è "+", i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8. Pertanto $(+3) + (+5) = +8$

Esempio 2.5. $(-2) + (-5) = \ldots$: i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è "$-$". Pertanto

$$(-2) + (-5) = -7.$$

La *somma di due numeri relativi discordi* è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

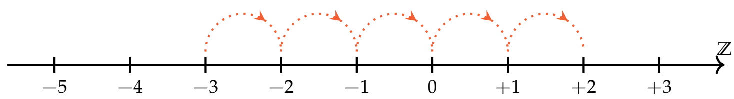
Esempio 2.6. $(-5) + (+2) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo. In definitiva $(-5) + (+2) = -3$

Esempio 2.7. $(+5) + (-2) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è $+5$, pertanto il risultato ha lo stesso segno di $+5$, cioè è positivo. In definitiva $(-5) + (-2) = +3$

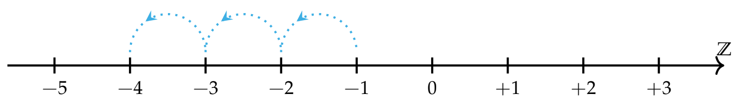
Esempio 2.8. $(+3) + (-7) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo. In definitiva $(+3) + (-7) = -4$

L'addizione si può rappresentare nella retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicata dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

$$(-3) + (+5) = 2$$



$$(-1) + (-3) = -4$$



2.4.2 Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.

Esempio 2.9. Sottrazione di numeri relativi.

a) $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$
b) $(+1) - (+3) = (+1) + (-3) = -2$

Cambio la sottrazione in addizione

$$(+2) \; - \; (+3) \; = \; (+2) \; + \; (-3)$$

Cambio il numero $+3$ con il suo opposto -3

FIGURA 2.2: Esempio 2.9.a.

c) $(-2) - (-1) = (-2) + (+1) = -1$
d) $(+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10$
e) $(-5) - (+5) = (-5) + (-5) = -10$

2.4.3 Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno "+" dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama somma algebrica.

Esempio 2.10. $(+1) + (-2) = -1$: se omettiamo il segno di addizione $(+)$ e le parentesi otteniamo $1 - 2$.

Esempio 2.11. $(+1) - (+3) = -2$: si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1) + (-3)$ omettendo il segno di addizione $(+)$ ed eliminando le parentesi si ottiene $1 - 3$

Esempio 2.12. $(-1) + (+2) + (-3) + (+2) + (-7) + (-5) = -12$: si scrive in modo sintetico

$$-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5.$$

La somma algebrica gode delle proprietà associativa e commutativa, pertanto per sommare più numeri relativi si può procedere senza necessariamente rispettare l'ordine in cui sono scritti. Per esempio per calcolare il risultato di $-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5$ si possono prima sommare tra di loro i numeri positivi e $+2 + 2 = +4$ e poi tra di loro i numeri negativi $-1 - 3 - 7 - 5 = -16$. Quindi $+4 - 16 = -12$.

2.4.4 Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano fattori i due numeri e prodotto il risultato dell'operazione.

Il *prodotto di due numeri interi relativi* è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno "+" se i fattori sono concordi, il segno "−" se i fattori sono discordi.

Esempio 2.13. $(+3) \cdot (-2) = -6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Esempio 2.14. $(-2) \cdot (-3) = +6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.

Esempio 2.15. $(+5) \cdot (+3) = +15$: il numero 15 si ottiene da $5 \cdot 3$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.

Esempio 2.16. $(-1) \cdot (+2) = -2$: il numero 2 si ottiene da $1 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.

Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

$$
\begin{array}{c|cc}
\cdot & + & - \\
\hline
+ & + & - \\
- & - & +
\end{array}
$$

Perché meno per meno fa più; una possibile spiegazione.

$$0 = 0 \cdot (-2) = (-3+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (-2) = (-3)(-2) - 6.$$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3) \cdot (-2)$ affinché il numero ottenuto sommato a -6 dia 0? Evidentemente il numero $+6$.

Esempio 2.17. $(+3) \cdot (+2) \cdot (-2) = -12$:
il risultato è negativo perché vi è un solo segno "$-$" tra i fattori.

Esempio 2.18. $(-2) \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) = +60$:
il risultato è positivo perché ci sono quattro segni "$-$".

Esempio 2.19. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+2) \cdot (-3) = -72$:
il risultato è negativo poiché ci sono cinque "$-$".

2.4.5 Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno "$+$" se i numeri da dividere sono concordi, il segno "$-$" se i numeri sono discordi.

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempio 2.20. $(+8) : (+2) = +4$:
il risultato è 4 perché $8 : 2 = 4$, il segno è "$+$" perché sono concordi.

Esempio 2.21. $(+9) : (-3) = -3$:
il risultato è 3 perché $9 : 3 = 3$, il segno è "$-$" perché sono discordi.

Esempio 2.22. $(-12) : (-4) = +3$:
il risultato è 3 poiché $12 : 4 = 3$, il segno è "$+$" perché sono concordi.

2.4.6 Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempio 2.23. Potenze di numeri relativi.

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- $(-2)^4 = +16$
- $(-2)^5 = -32$
- $(-1)^6 = +1$
- $(-1)^7 = -1$

Ricordiamo che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0, \qquad a^1 = a.$$

Esempio 2.24. Potenze di numeri relativi, con esponente 0 o 1.

$$(-3)^0 = 1, \qquad (+5)^0 = 1, \qquad (-2)^1 = -2, \qquad (+7)^1 = +7$$

2.4.7 Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Le operazioni nei numeri relativi mantengono tutte le proprietà che hanno nell'insieme dei numeri naturali, inoltre vale la seguente proprietà:

Elemento inverso rispetto all'addizione

Ogni numero intero ha un inverso rispetto all'addizione, cioè per ogni intero esiste un altro intero che sommato al primo dà come risultato l'elemento neutro dell'addizione:
$a + (-a) = 0$; $\quad 147 + (-147) = 0$

2.5 Esercizi

2.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

2.3 Confronto di numeri relativi

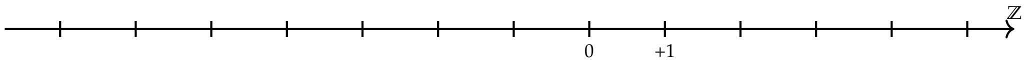
2.1. Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

$$+11 \qquad -3 \qquad 0 \qquad +2 \qquad -5 \qquad -7 \qquad +1$$

2.2. Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

$$-5 \qquad -2 \qquad +3 \qquad -1 \qquad 0 \qquad +7 \qquad -9 \qquad +13 \qquad -21$$

2.3. Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi$-3; +2; +5; -7; -5; -1; +3$



2.4. Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto.

a) $|+3| = \dots$
b) $|-5| = \dots$
c) $|-1| = \dots$
d) $|+10| = \dots$
e) $|-11| = \dots$
f) $|+7| = \dots$

2.5. Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra “>” e “(<)”.

a) $-5 \dots -2$
b) $-3 \dots +5$
c) $-2 \dots +2$
d) $-5 \dots 0$
e) $-3 \dots -5$
f) $-1 \dots +1$
g) $+3 \dots -3$
h) $-1 \dots -5$
i) $0 \dots +1$
j) $+3 \dots 0$
k) $0 \dots -2$
l) $+7 \dots +2$
m) $-11 \dots -101$
n) $+100 \dots -99$
o) $-101 \dots +110$

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

2.6. Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi.

a) $(+3) + (+2) =$
b) $(-5) + (-5) =$
c) $(-3) + (+5) =$
d) $(+12) + (+2) =$
e) $(-2) + (-3) =$
f) $(-3) + (+13) =$
g) $(+10) + (-5) =$
h) $(+1) + (+1) =$
i) $(-10) + 0 =$
j) $(-4) + (+4) =$
k) $(+7) + (-6) =$
l) $(-9) + (-3) =$
m) $(-101) + (+2) =$
n) $0 + (-9) =$
o) $(-10) + (+10) =$

2.7. Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto.

a) $+3 \to \dots$
b) $-2 \to \dots$
c) $+1 \to \dots$
d) $-11 \to \dots$
e) $-3 \to \dots$
f) $+5 \to \dots$

2.8. Completa la seguente tabella.

a	+1	−2	0	+2	−3	+3	−1	+4	−5	−10
b	0	−2	−3	+1	−5	−3	−10	−5	+4	+4
a + b										

2.9. Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi.

a) $(-1)-(+2)=$
b) $(-5)-(+3)=$
c) $(-2)-(+5)=$
d) $(+12)-(+2)=$
e) $(+1)-(-3)=$
f) $(-3)-(+1)=$
g) $(+11)-(-5)=$
h) $(+21)-(+11)=$
i) $(-1)-0=$
j) $(-3)-(+4)=$
k) $(+7)-(-2)=$
l) $(-3)-(-3)=$
m) $0-(-11)=$
n) $(-6)-(-6)=$
o) $(+5)-(-5)=$

2.10. Completa la seguente tabella.

a	-2	-2	-3	$+2$	-10	$+3$	-1	-7	$+8$	-9
b	0	-3	-3	-5	-5	-1	-10	-5	$+8$	$+4$
$a-b$										

2.11. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$a-(b+c)$										

2.12. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	$+2$	-2	-3	$+4$	-5	-1	$+6$	-7	$+10$
b	-1	0	-3	-2	$+4$	-2	$+1$	-4	-3	$+4$
c	0	-1	$+1$	-2	$+3$	-3	$+4$	-5	$+5$	-6
$a-(b+c)$										
$a-b+c$										
$a-b-c$										

2.13. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$
b	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$	-3	$+3$
$a+b$										
$-a+b$										
$-a-b$										
$-(a+b)$										
$-(a-b)$										
$-(-a+b)$										

2.14. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $+3-1=+\ldots$
b) $+2-3=-\ldots$
c) $-5+2=-\ldots$
d) $-2+2=\ldots\ldots$
e) $-5-2=\ldots 7$
f) $-3+5=\ldots 2$
g) $+8-0=\ldots\ldots$
h) $-9+0=\ldots\ldots$
i) $0-5=\ldots\ldots$

j) $+1-1=\dots\dots$
k) $-2-2=\dots\dots$
l) $+9-3=\dots 6$
m) $+7-6=+\dots$
n) $-101+9=-\dots$
o) $-10+5=\dots\ 5$

2.15. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $-5-2=$
b) $+3-4=$
c) $-1+2=$
d) $-3+4=$
e) $-6+7=$
f) $-1-9=$
g) $+8-7=$
h) $+2-1=$
i) $-6+2=$
j) $+5-2=$
k) $+4-3=$
l) $+4+1=$
m) $+4-6=$
n) $-10+5=$
o) $-16-4=$
p) $-3-9=$
q) $+14-7=$
r) $-10-10=$

2.16. Calcola i seguenti prodotti.

a) $(+3)\cdot(-2)=-\dots$
b) $(-5)\cdot(-2)=+\dots$
c) $(+2)\cdot(+4)=\dots 8$
d) $(+1)\cdot(-1)=\dots 1$
e) $(+3)\cdot 0=\dots\dots$
f) $(-2)\cdot(-2)=\dots\dots$
g) $0\cdot(-3)=\dots\dots$
h) $(-2)\cdot(+2)=\dots\dots$
i) $(+10)\cdot(-1)=\dots$

2.17. Esegui le seguenti moltiplicazioni.

a) $(+3)\cdot(+1)=$
b) $(+1)\cdot(-2)=$
c) $(+3)\cdot(-3)=$
d) $(-5)\cdot(-1)=$
e) $(+3)\cdot(-3)=$
f) $(-2)\cdot(+5)=$
g) $(-1)\cdot(-7)=$
h) $(+3)\cdot(+11)=$
i) $(+1)\cdot(-10)=$
j) $(-4)\cdot(+3)=$
k) $(+5)\cdot(-6)=$
l) $(-3)\cdot(-2)=$

2.18. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
$a\cdot b$										

2.19. Esegui le seguenti divisioni.

a) $(+4):(+2)=$
b) $(+5):(-1)=$
c) $(+6):(+2)=$
d) $(+8):(-2)=$
e) $(-8):(+4)=$
f) $(-4):(+2)=$
g) $(-10):(+5)=$
h) $(+10):(-2)=$
i) $(-12):(+6)=$
j) $(-12):(+4)=$
k) $(+12):(-3)=$
l) $(-12):(+1)=$

2.20. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+12$	-6	$+20$	-10	-5	-21	-16	$+8$	-32
b	$+1$	-3	-2	-1	-5	$+1$	-7	-2	-4	-4
$a:b$										

2.21. Completa la seguente tabella.

a	0	+2	+1	−4	−6	−8	+10	+12	−14	−16
b	+1	−1	−1	+2	−3	+2	−5	−6	−7	+8
$a : b$										
$-a : b$										
$-(a : b)$										
$a : (-b)$										

2.22. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $(+3)^2 =$
b) $(-1)^2 =$
c) $(+1)^3 =$
d) $(-2)^2 =$
e) $(-2)^3 =$
f) $(+2)^3 =$
g) $(-3)^2 =$
h) $(-3)^3 =$
i) $(-4)^1 =$
j) $(+4)^1 =$
k) $(-4)^2 =$
l) $(-2)^4 =$
m) $(-3)^0 =$
n) $(-1)^5 =$
o) $(-2)^4 =$

2.23. Applica le proprietà delle potenze.

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{\cdots}$
b) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\cdots}$
c) $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)^{\cdots}$
d) $(-10)^2 \cdot (-5)^2 = (\ldots\ldots)^2$
e) $(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)^{\cdots}$
f) $(-7)^3 : (-7)^3 = (-7)^{\cdots}$
g) $(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{\cdots}$
h) $(-6)^4 : (+2)^4 = (\ldots\ldots)^4$
i) $\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{\cdots}$
j) $\left[(-5)^2\right]^3 = (+5)^{\cdots}$
k) $(-3)^3 \cdot (+3)^3 = \ldots$
l) $(-8)^2 : (-4)^2 = \ldots$
m) $\left[(-7)^2\right]^3 : (-7)^3 = \ldots$
n) $\left[(-3)^3\right]^2 : (-3)^4 = \ldots$

2.24. Completa la seguente tabella.

a	−2	+1	+2	−1	+3	−3	−4	−2	+2	−3
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5	2
a^b										

2.25. Completa la seguente tabella.

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−12
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4	−8
$(a-b)^2$										

2.26. Completa la seguente tabella.

a	−1	−2	+3	0	+1	+2	−4	+5	−5	−3
a^2										
$-a^2$										
$-(-a)^2$										

2.27. Completa la seguente tabella.

a	-2	-3	$+3$	-1	0	-2	-4	-3	$+4$	$+5$
b	0	$+1$	-1	-2	$+2$	-3	$+2$	-2	-3	-5
$a \cdot b$										
$-a \cdot b$										
$(-a) \cdot (-b)$										
$-a^2 \cdot b$										

2.28. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$(a+b) \cdot c$										

2.29. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+12$	-6	$+20$	-10	-5	-21	-16	$+8$	-12
b	$+1$	-3	-2	-1	-5	$+1$	$+19$	-14	-4	-8
$(a+b)(a-b)$										

2.30. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	0	-1	$+2$	-2	0	$+3$	-3	$+4$	-10
b	$+2$	0	$+1$	-1	-2	-3	$+2$	$+3$	$+4$	$+8$
c	$+3$	$+1$	$+1$	-2	-2	$+3$	-2	0	0	$+2$
$-2a+(b-c)$										

2.5.2 Esercizi riepilogativi

2.31. In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

a) misurare la temperatura;
b) contare le persone;
c) esprimere la data di nascita di un personaggio storico;
d) esprimere l'età di un personaggio storico;
e) indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente;
f) indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari.

2.32. La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.33. La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.34. Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile):

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.35. Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.36. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) ogni numero relativo è minore di zero V F
b) la somma di due numeri discordi è zero V F
c) il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo V F
d) la somma di due numeri opposti è nulla V F
e) il quoziente di due numeri opposti è l'unità V F
f) il quoziente di due numeri concordi è positivo V F
g) il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato V F
h) il doppio di un numero intero negativo è positivo V F
i) la somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo V F
j) il quadrato dell'opposto di un intero è uguale all'opposto del suo quadrato V F

2.37. Inserisci l'operazione corretta per ottenere il risultato.

a) $(+2)\dots(-1) = -2$
b) $(-10)\dots(+5) = -2$
c) $(-18)\dots(-19) = +1$
d) $(+15)\dots(-20) = -5$
e) $(-12)\dots(+4) = -3$
f) $(-4)\dots 0 = \ 0$
g) $(+1)\dots(+1) = \ 0$
h) $(+5)\dots(-6) = +11$
i) $-8\dots(-2) = +16$

2.38. Inserisci il numero mancante.

a) $+5 + (\dots\dots) = -5$
b) $-8 + (\dots\dots) = -6$
c) $+7 - (\dots\dots) = \ 0$
d) $0 - (\dots\dots) = -2$
e) $+3 \cdot (\dots\dots) = -3$
f) $-5 \cdot (\dots\dots) = \ 0$
g) $(+16) : (\dots\dots) = -2$
h) $(-6) : (\dots\dots) = -1$
i) $(-10) : (\dots\dots) = +5$

2.39. Scrivi tutti i numeri:

a) interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
b) interi relativi il cui prodotto è -12
c) interi negativi maggiori di -5

2.40. Inserisci "+" o "−" in modo da ottenere il numero più grande possibile:

$$-3\dots(-3)\dots 3\dots(-6).$$

2.41. Inserisci le parantesi in modo da ottenere il risultato indicato.

a) $-5 \cdot +3 - 1 + 2 = -20$
b) $-5 + 2 \cdot -1 + 2 = +5$
c) $-5 + 7 - 3 \cdot 2 = +3$
d) $-1 \cdot +3 - 5 \cdot -1 - 2 = +12$
e) $+1 - 1 \cdot 1 - 1 + 3 - 2 \cdot -3 - 2 = +5$

2.42 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5 + 7 + 4 - 9$
b) $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$
c) $+1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$
d) $+1 - 2 + 2 - 3 + 3 - 4 + 5 - 6 + 6 - 7 + 7 - 8 + 8 - 9 + 9 - 10$
e) $(-3 + 10) - (2 - 3)$

2.43 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(+5 - 2 - 1) + (+2 + 4 + 6)$
b) $(-5 + 7 - 9) + (+1 - 2 + 3) - (+4 - 6 + 8)$
c) $+4 - 3 - [+2 - 1 - (8 - 3) - (-5 - 2)] - (2 + 3)$
d) $-2 + (-5 + 1) + (-7 + 4) - 2 \cdot (-6 + 1)$
e) $15 - 9 \cdot (-14 + 12) + 8 \cdot (-3 + 6) + 5 \cdot (-3 + 1)$

2.44 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(50 - 36 - 25) \cdot (-15 + 5 + 20) - 10 \cdot (-3 - 7)$
b) $[+3 - (10 - 5 + 25)] \cdot [-16 + 5 - (-2 - 14)] : (9 + 6)$
c) $20 : (+15 - 5) - 30 : (-10 + 5) + 40 : (15 - 20)$
d) $18 : (-3) + 6 \cdot [1 - 5 \cdot (-2 + 4) + 3] : (-6)$
e) $3 \cdot 4 - 3 \cdot [18 : (-2) - 17 + (14 - 26 + 5) \cdot 3 - 12] + [16 - 1 \cdot (-1 - 3 + 5) - 37 + 16]$

2.45 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $100 : 2 + 3^2 - 2^2 \cdot 6$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $2^7 : 2^3 - 2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $30 - 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2^2 - 2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $(3^2 + 4^2) - (-3 - 4)^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.46 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : \left(5^2\right)^3 + 5$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $32^5 : 16^4 + (-2)^9$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $\left(3^4 \cdot 3^3 : 3^6\right)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $\left(3 \cdot 2^2 - 10\right)^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.47 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5 \cdot (12 - 3 + 4) - 2 \cdot \left[3 - 16 : (-2 + 4)\right]^2$

b) $\left[-3+(-5)\cdot(-1)\right]^3+\left[-4-(1-2)\right]^2$
c) $\left[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)\right]^2:\left[2^4-3\cdot(+6)\right]^2$
d) $\left[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)\right]^3:\left[2^2+5\cdot(-2)^2\right]^3$

2.48 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(-3)^2\cdot(4-1)^5:[(-4)^3:(2^5)-3^3:(-3)^3]$
b) $[-(-2)\cdot 2+(-10)^2:(-5)^2]\cdot[3-5+2\cdot(-3)^2-5]$
c) $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot(2^3-3^2)-6:(-3)-(4-7+3)^4$
d) $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot(2^2+3^2)-(-12):(-3)$

2.49 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $[10-6\cdot(-2)^2]:(-7)+(3^2:3)\cdot 2^3-15:(-3)+[(-3)^3:(-3)^0]$
b) $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$
c) $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$
d) $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-\big(|3-5|\cdot(3-5)\big)^2\cdot(-2)$
e) $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$

2.50. Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità:

a) il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo;
b) il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo;
c) la differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5;
d) il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo.

2.51. Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di $+2$ e -2 Il risultato è?

2.52. Sottrarre dalla somma di -15 e $+27$ il prodotto di -3 e $+7$.

2.53. Aggiungere al prodotto di -5 e $+3$ la somma di $+5$ e -10.

2.54. Sottrarre dal prodotto di $+7$ e $+4$ la somma di $+1$ e -8.

2.55. Moltiplica la somma tra -3 e $+3$ con la differenza tra $+3$ e -3

2.56. Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?

2.57. Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?

2.58. Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?

2.59. Il prodotto di due numeri interi relativi è $+6$, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

2.60. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7.

2.61. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7

2.62. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+2$ e come somma $+1$

2.63. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+10$ e come somma -3

2.64. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+14$ e come somma -9

2.65. Determina due numeri relativi aventi come prodotto -15 e come somma -8

Numeri razionali (e irrazionali) 3

3.1 Premessa storica

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.

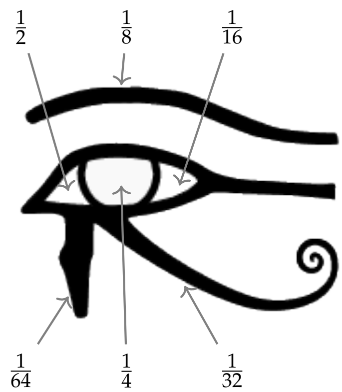
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni ed il valore corretto andava interpretato dal contesto.

Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata:

Nel *papiro di Ahmes* (detto anche *papiro di Rhind*) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$, con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



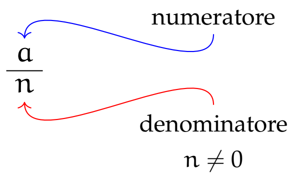
I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48... Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni. *Semis* per indicare $\frac{1}{2}$, il cui simbolo era S oppure Z *sextans* per indicare $\frac{1}{6}$, *dracma* per indicare $\frac{1}{96}$ e *obolus* per indicare la sesta parte della *dracma*.

Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini *numeratore* e *denominatore*.

La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che con il suo *Liber Abaci* (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

3.2 Frazioni

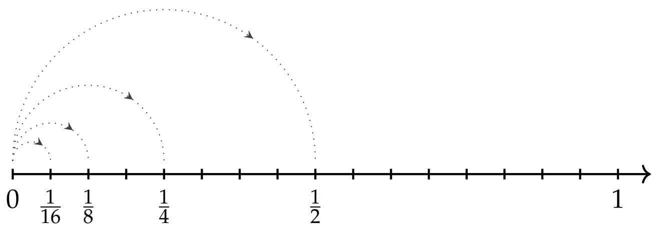
Definizione 3.1. Una *frazione* è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama numeratore e il secondo denominatore. Il denominatore deve essere diverso da zero.



Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}l$, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria litro per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come operatori che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

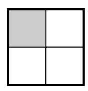
Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta *frazione unitaria*; indicata con A una grandezza (segmento, peso, superficie, angolo...) la scrittura $\frac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come il 'tutto', in n parti uguali.

Nella figura, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$ dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$ dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$ dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



Definizione 3.2. Il *denominatore* di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero. Poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}Q$.



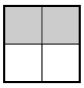
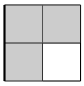
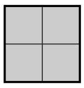
Una frazione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di A, dove A è il tutto che si deve dividere in n parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per n la frazione $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi:

$$\frac{2}{n}A, \frac{3}{n}A, \dots, \frac{n}{n}A$$

che rappresentano il doppio di un ennesimo, il triplo di un ennesimo, l'intera grandezza A.

Riferendoci all'esempio del quadrato:

 $\frac{2}{4}Q$  $\frac{3}{4}Q$  $\frac{4}{4}Q$

La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge *emme ennesimi di* A) con $m < n$ indica il multiplo secondo m della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$ essa indica la grandezza che si ottiene dividendo A in n parti uguali e prendendone m.

Definizione 3.3. Il *numeratore* di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti secondo il denominatore, sono state prese.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore. Quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo, quarto, quinto,. . .) fino a 10 e se è maggiore di dieci si aggiunge la terminazione *-esimo*.

Esempio 3.1. Lettura di frazioni.

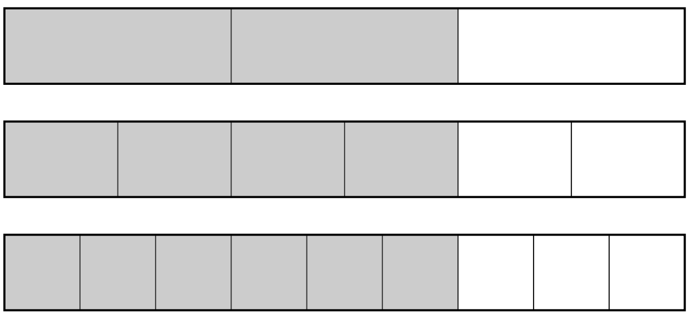
a) $\frac{1}{2}$ si legge *un mezzo*;
b) $\frac{1}{10}$ si legge *un decimo*;
c) $\frac{2}{3}$, si legge *due terzi*;
d) $\frac{1}{11}$ si legge *un undicesimo*;
e) $\frac{5}{7}$ si legge *cinque settimi*;
f) $\frac{1}{12}$ si legge *un dodicesimo*.

A volte per scrivere le frazioni si utilizza la scrittura del tipo a/b, quindi 2/3 4/6 6/9. . .

Definizione 3.4. Si chiamano *proprie* le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell'intero.

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$



Definizione 3.5. Si dicono *equivalenti* due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

Proprietà 3.1 (Invariantiva delle frazioni)**.** *Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.*

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio 3.2. Trovare due frazioni equivalenti a $\frac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Definizione 3.6. Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* se il numeratore e il denominatore sono due interi primi tra loro.

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio 3.3. Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{8}{12}$.

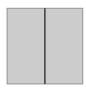
Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8 = 2^3$ e $12 = 3 \cdot 2^2$. Calcolo il MCD prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo; in questo caso 2^2 cioè 4. Divido numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{10}{10} = 1.$$

Per esempio, se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero,. . .



$\frac{2}{2} = 1$

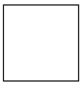
$\frac{3}{3} = 1$

Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato Q? Tutte le frazioni che hanno il numeratore che è multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

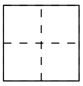
$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{15}{3} = 5, \qquad \frac{72}{6} = 12.$$

Definizione 3.7. Si chiamano *apparenti* le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

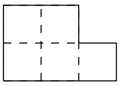
Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).



I $\frac{5}{4}$ si ottengono dividendo il quadrato in 4 parti uguali;



dovendone prenderne 5 l'unità non basta.



La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}.$$

Definizione 3.8. Si chiamano *improprie* le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate *frazioni equivalenti*. Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nella figura 3.3.

Definizione 3.9. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un *numero razionale assoluto* ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nel nostro esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \dots\right\}.$$

In questo modo abbiamo dato al simbolo a/b un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura a/b rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo $2 : 3 = 2/3$.

Definizione 3.10. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto *numero razionale*. L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

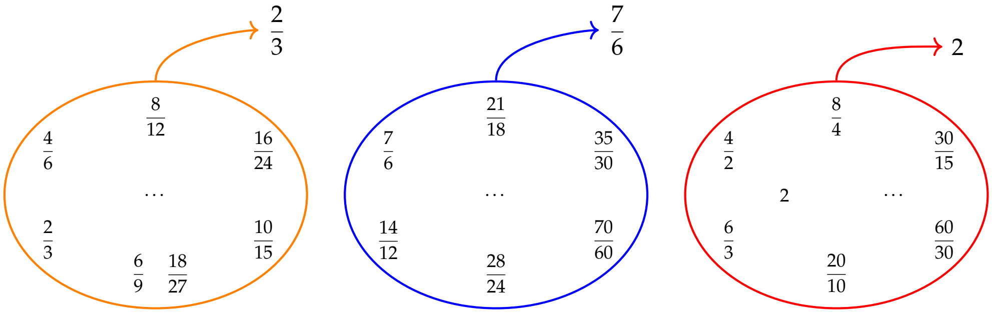


FIGURA 3.1: Esempi di frazioni equivalenti.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempio 3.4. Segno di numeri razionali.

$$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}; \qquad \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}; \qquad \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione propria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione propria è il denominatore stesso della frazione.

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{20}{5}, \frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \dots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a 1, 2, 4, 3, 4.

Esempio 3.5. $\dfrac{11}{3} = 3 + \dfrac{2}{3}$.

- $11 \div 3 = 3$ il numero naturale;
- $11 \bmod 3 = 2$ numeratore della frazione propria;
- $3 =$ denominatore della frazione propria.

Esempio 3.6. $\dfrac{19}{7} = 2 + \dfrac{5}{7}$.

- $19 \div 7 = 2$ il numero naturale;
- $19 \bmod 7 = 2$ numeratore della frazione propria;
- $5 =$ denominatore della frazione propria.

3.4 La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & & & & 3 \\ \cline{5-5}
1 & 0 & & & 0\,,\,3\,3\,3\,3\,\ldots \\
 & 1 & 0 & & \\
 & & 1 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & & \ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 1 & & & 8 \\ \cline{5-5}
 & 3 & & & 1\,,\,3\,7\,5 \\
 & 3 & 0 & & \\
 & & 6 & 0 & \\
 & & & 4 & 0 \\
 & & & & 0
\end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad\qquad \frac{11}{8} = 1,375$$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come $1,375$ e numeri decimali periodici come $1,333333\ldots$ quest'ultimo si scrive mettendo una barra sulla parte periodica: $1,\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1,(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.

I numeri decimali periodici semplici si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.

I numeri decimali periodici misti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempio 3.7. Alcuni numeri decimali finiti.

a) $\dfrac{11}{8} = \dfrac{11}{2^3} = \dfrac{11 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{1375}{1000} = 1,375$

b) $\dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{5^2} = \dfrac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \dfrac{28}{100} = 0,28$

c) $\dfrac{13}{40} = \dfrac{13}{2^3 \cdot 5} = \dfrac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{325}{1000} = 0,325$

d) $\dfrac{50}{7} = \dfrac{\ldots}{10}$, non è possibile, non è un decimale finito.

Procedura 3.2. *Trasformare una frazione in numero decimale:*

a) *eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;*
b) *se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per* 10 *il resto;*
c) *continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;*
d) *se la divisione si conclude con resto* 0 *si ottiene un numero decimale finito;*
e) *se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.*

Esempio 3.8. Trasformazione di frazioni in numeri decimali.

a)
```
   1 1 3     | 2 0
 - 1 0 0     |--------
 -------     | 5 , 6 5
     1 3 0
   - 1 2 0
   -------
       1 0 0
     - 1 0 0
     -------
           0
```

b)
```
   1 7     | 6
 - 1 2     |--------
 -----     | 2 , 8 3
     5 0
   - 4 8
   -----
       2 0
     - 1 8
     -----
         2
```

c)
```
   1 5     | 7
 - 1 4     |--------------------
 -----     | 2 , 1 4 2 8 5 7
     1 0
   -   7
   -----
       3 0
     - 2 8
     -----
         2 0
       - 1 4
       -----
           6 0
         - 5 6
         -----
             4 0
           - 3 5
           -----
               5 0
             - 4 9
             -----
                 1
```

a) $\dfrac{113}{20} = 5{,}65$, numero decimale finito;

b) $\dfrac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$, numero decimale periodico misto di periodo 3;

c) $\dfrac{15}{7} = 2{,}\overline{142857}$, numero decimale periodico di periodo 142857.

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura 3.3. *Trasformare un numero decimale finito in una frazione:*

a) scrivere una frazione che ha per numeratore il numero che si vuole trasformare e per denominatore uno;
b) moltiplicare numeratore e denominatore per dieci elevato al numero di cifre a destra della virgola.
c) semplificare la frazione così ottenuta.

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

Esempio 3.9. Trovare la frazione equivalente a 1,36:

$$\frac{1{,}36}{1} = \frac{1{,}36 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}.$$

.

Esempio 3.10. Trovare la frazione equivalente a 0,00043000:

$$\frac{0{,}00043}{1} = \frac{0{,}00043 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = \frac{43}{100000}.$$

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

la parte intera composta dalle cifre poste prima della virgola;

il periodo che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;

l'antiperiodo la parte composta da zero o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485795795795795... la parte intera è 253, il periodo è 579, l'antiperiodo è 48.

Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde.

Il numero 253,485795795795795... può essere scritto $253,48\overline{579}$, oppure $253,48(579)$.

I numeri decimali periodici si dividono in:

semplici se subito dopo la virgola è presente il periodo;

misti se dopo la virgola è presente l'antiperiodo.

Anche i numeri periodici possono essere trasformati in una frazione, che si dice *frazione generatrice* del numero.

Procedura 3.4. *Determinare la frazione generatrice di un numero periodico:*

a) *il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola e con il periodo scritto una sola volta, il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo;*
b) *il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti* 9 *quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti* 0 *quante sono le cifre comprese tra il periodo e la virgola;*
c) *semplificare la frazione ottenuta.*

Passo a $2,5\overline{12} \to 2512$.

Passo b $2512 - 25 = 2487$.

Passo c $2,5\overline{12} = \dfrac{2487}{990}$.

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione Consideriamo il numero periodico semplice $2,\overline{3}$. Considero la frazione $\frac{2,\overline{3}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 10 $\frac{2,\overline{3}\cdot 10}{1\cdot 10}$ e ottengo $\frac{23,\overline{3}}{10}$.

L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale. Per ottenere questo risultato tolgo $2,\overline{3}$ da $23,\overline{3}$, cioè $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$.

Come mai $2,\overline{3}$ e non $1,\overline{3}$ o $0,\overline{3}$? Perché in questo modo posso sapere quanto vale il denominatore: se $23,\overline{3}$ è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 10$, 21 è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 9$ in quanto $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$. In definitiva

$$2,\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$

Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto $2,5\overline{12}$.

Considero la frazione $\frac{2,5\overline{12}}{1}$, moltiplico numeratore e denominatore per 1000 e ottengo: $\frac{2512,\overline{12}}{1000}$. L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale che contiene il periodo che si ripete all'infinito. Per ottenere questo risultato tolgo da $2512,\overline{12}$ questa volta $25,\overline{12}$, cioè $2512,\overline{12} - 25,\overline{12} = 2487$. Per avere una frazione equivalente occorre che al denominatore abbia 990 in quanto dal numeratore ho tolto 10 volte $2,5\overline{12}$.

$$2,5\overline{12} = \frac{2512 - 25}{990} = \frac{2487}{990}.$$

3.4.1 Numeri periodici particolari

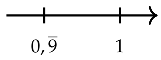
Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2,\overline{9}$, $1,1\overline{9}$, $21,22\overline{9}$ ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico otteniamo un risultato inatteso

$$2,\overline{9} = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Quindi $2,\overline{9}$ coincide con il numero intero 3.

Per lo stesso motivo $1,1\overline{9} = 2$, $21,22\overline{9} = 21,23$.

Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.



Se i due numeri fossero veramente diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere "buchi", tra un suo punto e un altro ci deve essere almeno un altro numero compreso tra i due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,9999999998 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1, di conseguenza i due numeri coincidono.

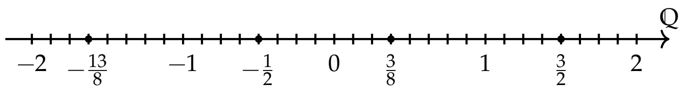
3.5 I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto O sulla retta e associare ad esso il numero zero. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$, il punto corrispondente al numero razionale sulla retta viene determinato nel seguente modo. Dividiamo il segmento unitario u in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore n della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto O procedendo verso destra, si contano a frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

Per le frazioni improprie la singola unità u non è sufficiente, occorre prendere la unità successiva di u e dividere anche questa in n parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da a. Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$. In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1 + \frac{1}{2}$, quindi rappresentiamo partendo dal numero 1 invece che da 0.

Se il numero razionale è negativo, ci comportiamo come prima con l'avvertenza di muoverci nel senso opposto a quello precedente cioè da destra verso sinistra.



3.6 Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ è *minore* del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

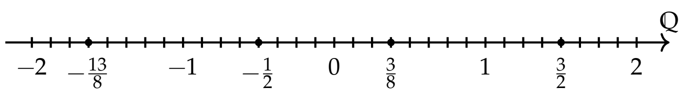
$$\frac{a}{n} < \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *maggiore* di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *equivalente* a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono.

Esempio 3.11. Confronto tra numeri razionali.



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} < \frac{3}{2}, \qquad -1 > -\frac{13}{8}.$$

Per certe frazioni è facile vedere se una frazione precede o segue un'altra. Per altre non è così semplice.

Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$, con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali?

Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno unità frazionarie dello stesso tipo: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura 3.5. *Confrontare due frazioni:*

a) *si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;*
b) *si trasforma ciascuna frazione come segue:*
- *il nuovo denominatore è il* mcm *trovato;*
- *il nuovo numeratore si ottiene dividendo il* mcm *per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data.*

c) *si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.*

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel *moltiplicare in croce* numeratori e denominatori delle frazioni, come nei seguenti esempi.

Esempio 3.12. Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$.
Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3}, \text{ perché } 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5.$$

Esempio 3.13. Confronta le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$.
$\text{mcm}(7.9) = 63$.

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63}, \qquad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63}.$$
$$\frac{54}{63} > \frac{49}{63} \Rightarrow \frac{6}{7} > \frac{7}{9}.$$

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

3.7.1 Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Definizione 3.11. La *somma di due frazioni con lo stesso denominatore* è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.

$$\begin{array}{l} \dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{15} \\[1em] \dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{15} \end{array} \rightrightarrows \boxed{+} \longrightarrow \frac{31}{15}$$

In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come

$$\frac{mq+pn}{nq}.$$

$$\begin{array}{l} \dfrac{m}{n}=\dfrac{mq}{nq} \\[1em] \dfrac{p}{q}=\dfrac{pn}{nq} \end{array} \rightrightarrows \boxed{+} \longrightarrow \frac{mq+pn}{nq}$$

Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura 3.6. *Sommare due o più frazioni:*

a) *ridurre le frazioni ai minimi termini;*
b) *calcolare il* mcm *dei denominatori;*
c) *mettere il* mcm *come denominatore della frazione somma;*
d) *per ogni frazione dividere il* mcm *per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore della frazione mantenendo il segno;*
e) *calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;*
f) *mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;*
g) *ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.*

Esempio 3.14. Sommare le frazioni $\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-1$.

Passo a riduco ai minimi termini le frazioni $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{1}$

Passo b calcolo $\text{mcm}(3,6,5,1)=30$.

Passo c la frazione somma avrà come denominatore il mcm trovato $\dfrac{\ldots}{30}$.

Passo d per ogni frazione divido il mcm per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot(30:3)-5\cdot(30:6)+8\cdot(30:5)-1\cdot(30:1)}{30}&=\frac{2\cdot 10-5\cdot 5+8\cdot 6-1\cdot 30}{30}\\&=\frac{20-25+48-30}{30}.\end{aligned}$$

Passo e calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore $+13$.

Passo f metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\dfrac{13}{30}$.

Passo g vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\dfrac{13}{30}$.

Esempio 3.15. Sommare i numeri razionali $-0,2-1,\overline{2}+25\%+\frac{7}{12}$.

Trasformo i numeri razionali in frazioni:

$$-\frac{2}{10}-\frac{12-1}{9}+\frac{25}{100}+\frac{7}{12}=-\frac{1}{5}-\frac{11}{9}+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}.$$

Quindi $\text{mcm}(5,9,4,12)=180$.

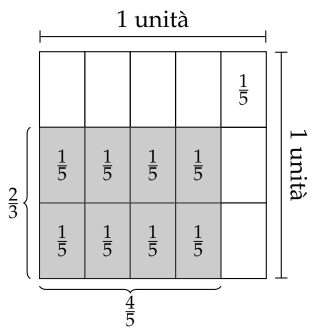
$$\begin{aligned}\frac{-1\cdot(180:5)-11\cdot(180:9)+1\cdot(180:4)+7\cdot(180:12)}{180}&=\frac{-1\cdot 36-11\cdot 20+1\cdot 45+7\cdot 15}{180}\\&=\frac{-36-220+45+105}{180}\\&=-\frac{106}{180}\\&=-\frac{53}{90}.\end{aligned}$$

3.7.2 Sottrazione di frazioni

La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parla di somma di frazioni si intende sempre somma algebrica di frazioni.

3.7.3 Moltiplicazione

Il risultato della moltiplicazione tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.



Moltiplicare $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$. Il denominatore indica in quante parti è stato diviso il quadrato unitario: sono $3 \cdot 5 = 15$ parti. Il numeratore indica quante parti prendiamo, sono le parti $2 \cdot 4 = 8$ in grigio.

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\begin{array}{c} \frac{m}{n} \\ \frac{p}{q} \end{array} \rightrightarrows \boxed{\,\cdot\,} \longrightarrow \frac{mp}{nq}$$

3.7.4 Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa? Una operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.

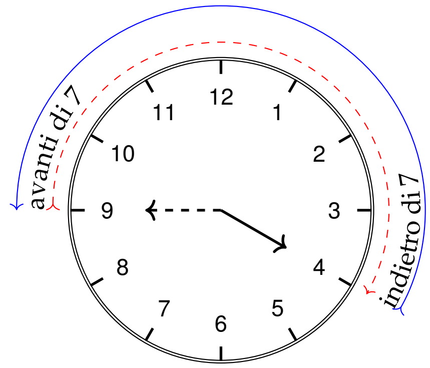
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici $(12 = 0)$. Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore. Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

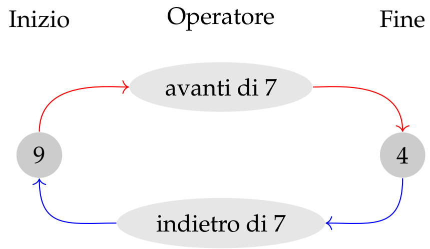
Consideriamo l'addizione $9 + 7 = 4$. Il primo elemento 9 può essere interpretato come stato iniziale, $+\,7$ come operatore formato dall'operazione «spostare le lancette avanti di...» e dall'argomento 7; il risultato 4 è lo stato finale.

Si indica come operazione inversa quella operazione che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello precedente dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.

Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro che è 0, ogni numero ha l'inverso.

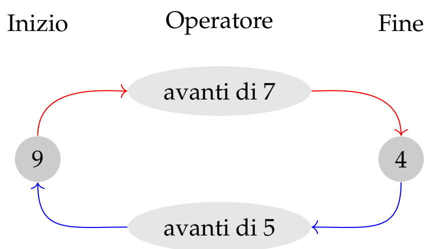
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

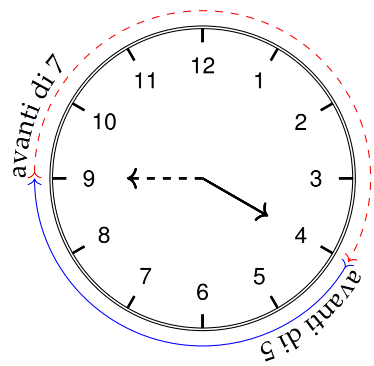




- L'inverso di 0 è 0 perché $0 + 0 = 0$
- l'inverso di 1 è 11 perché $1 + 11 = 0$
- l'inverso di 2 è 10 perché $2 + 10 = 0$
- l'inverso di 3 è 9 perché $3 + 9 = 0$
- l'inverso di 4 è 8 perché $4 + 8 = 0$
- l'inverso di 5 è 7 perché $5 + 7 = 0$.

L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa, con l'operazione diretta che ha come argomento l'elemento inverso dell'argomento dell'operazione diretta.

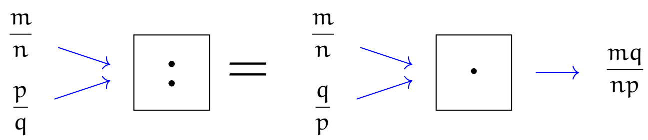




Così per tornare allo stato iniziale invece di operare con portare indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

3.7.5 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni.



$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempio 3.16. Quoziente di due frazioni.

➡ $\dfrac{2}{3} : \dfrac{7}{4}$.

Il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$. Pertanto

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{4} \to \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}.$$

➡ $-\dfrac{2}{3} : \left(-\dfrac{3}{4}\right)$.

Il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$. Pertanto

$$-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) \to -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}.$$

➡ $\dfrac{2}{3} : 0$.

Il reciproco di 0 non esiste, quindi la divisione non è eseguibile.

➡ $0 : \dfrac{2}{3}$.

Il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$. Pertanto

$$0 : \frac{2}{3} \to 0 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

3.8 Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Esempio 3.17. Potenza di frazioni.

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$
- $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$.

3.8.1 Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.

Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:

- $a^n : a^n = 1$, la divisione di due numeri uguali è 1;
- $a^n : a^n = a^0$, applicando le proprietà delle potenze.

Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero $a^0 = 1$. Non è invece possibile la potenza 0^0.

3.8.2 Potenza con esponente un numero intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo:

$$a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

La potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.

Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0. Il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

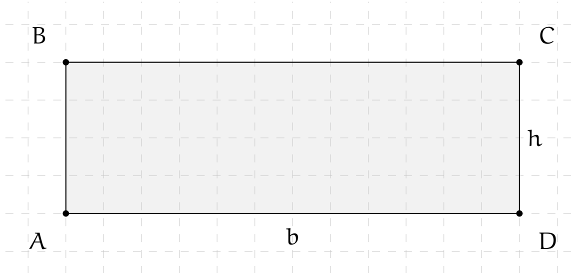
Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc, si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000m
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000m/s
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007m.

I primi due numeri sono 'molto grandi', mentre l'ultimo è 'molto piccolo' e operare con numeri simili, non è affatto semplice.

Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni $b = 0,00000006\text{m}$ e $h = 0,0000002\text{m}$ e calcoliamone l'area:

$$A = b \cdot h = 0,00000006 \cdot 0,0000002 = 0,000000000000012.$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri in questo caso 'molto piccoli', è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.

Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di *notazione scientifica*.

Definizione 3.12. Un numero α è scritto in *notazione scientifica* se si presenta nella forma:

$$\alpha = k \cdot 10^n,$$

dove k è un numero decimale maggiore o uguale a 1 e minore di 10 e n è un numero intero.

Esempio 3.18. I numeri $3,5 \cdot 10^7$ e $8,9 \cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0,5 \cdot 10^3$ e $10,3 \cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 10,3 che è maggiore di 10.

3.9.1 Come trasformare un numero in notazione scientifica

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero $0,000007\text{m}$. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0,000007\text{m} = 7 \cdot \frac{1}{1000000}\text{m} = 7 \cdot 10^{-6}\text{m}.$$

Allo stesso modo il numero 0,000000026 viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0,000000026 = 2,6 \cdot \frac{1}{100000000} = 2,6 \cdot \frac{1}{10^8} = 2,6 \cdot 10^{-8}.$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero k deve essere minore di 10.

Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6 400 000m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6,4 \cdot 10^6$.

Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3,4 \cdot 10^{11}$. Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero k deve essere minore di 10.

❑ **Osservazione** A numeri 'piccoli', corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri 'grandi', corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Procedura 3.7. *Scrivere un numero decimale in notazione scientifica:*

a) spostare la virgola di tanti posti in modo da avere una sola cifra diversa da zero a sinistra;
b) scrivere la moltiplicazione tra il numero ottenuto al passo precedente e dieci elevato ad un esponente pari al numero si spostamenti della virgola effettuati se la virgola è stata spostata verso sinistra o elevato al suo opposto se la virgola è stata spostata verso destra.

Esempio 3.19. Scrivi 348 000 000 000 000 in notazione scientifica. Per comodità riscrivo il numero evidenziando l'attuale posizione della virgola: 348 000 000 000 000,0.

Passo a Per ottenere un numero con una sola cifra diversa da zero a sinistra della virgola devo spostare la virgola di 14 posti verso sinistra;

Passo b ora scrivo la moltiplicazione tra il numero ottenuto: $3,48$ e 10 elevato alla 14: $3,48 \cdot 10^{14}$.

Esempio 3.20. Scrivi 0,0000340 in notazione scientifica.

Passo a Per ottenere un numero con una sola cifra diversa da zero a sinistra della virgola devo spostare la virgola di 5 posti verso destra;

Passo b ora scrivo la moltiplicazione tra il numero ottenuto: $3,40$ e 10 elevato alla -5: $3,40 \cdot 10^{-5}$.

Esempio 3.21. Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $b = 6 \cdot 10^{-8}$m, $h = 2 \cdot 10^{-7}$m. L'area sarà quindi:

$$\begin{aligned} A &= b \cdot h = \\ &= 6 \cdot 10^{-8}\text{m} \times 2 \cdot 10^{-7}\text{m} = \\ &= 12 \cdot 10^{-15}\text{m}^2 = \\ &= 1,2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-15}\text{m}^2 = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-14}\text{m}^2. \end{aligned}$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

Esempio 3.22. Trasforma in notazione scientifica e calcola $\dfrac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002}$.

$$\begin{aligned}\frac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002} &= \frac{3 \cdot 10^3 : (6 \cdot 10^6)}{5 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^{-6})}\\ &= \frac{3 : 6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}\\ &= \frac{0,5}{10} \cdot 10^{-3+3}\\ &= 0,05 \cdot 10^0\\ &= 0,05\\ &= 5 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

3.9.2 Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri 'molto grandi' o 'molto piccoli', non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto è grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

Definizione 3.13. Dato un numero scritto in forma scientifica, si definisce *ordine di grandezza* (abbreviato con la sigla o.d.g.), la potenza di 10.

Procedura 3.8. *Determinare l'ordine di grandezza di un numero:*

a) scrivi il numero in notazione scientifica $k \cdot 10^n$
b) l'ordine di grandezza è 10^n.

Esempio 3.23. Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000074 e 47000000000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica:

$$0,000074 = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ e } 47000000000 = 4,7 \cdot 10^{10}.$$

L'o.d.g. del primo numero è 10^{-5}. L'o.d.g del secondo numero è 10^{10}.

3.10 Problemi con le frazioni

3.10.1 Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio 3.24. Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

- cornetti alla crema: $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$
- cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$
- cornetti alla marmellata: 71.

3.10.2 Problemi inversi

Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio 3.25. Mario ha speso € 21 che corrispondono ai 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che € 21 corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. È sufficiente dividere 21 per la frazione: € $21 : \frac{3}{5} =$ € $21 \cdot \frac{5}{3} =$ € 35.

Esempio 3.26. Giuseppe possiede € 150. Se spende i 3/5 della somma posseduta e poi i 2/3 della somma rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi.

Calcoliamo prima i 3/5 di 150, cioè € $150 \cdot \frac{3}{5} =$ € 90. Quindi la prima volta Giuseppe spende € 90, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di € 60, cioè € $60 \frac{2}{3} =$ € 40. In tutto ha speso € 90 + € 40 = € 130, gli rimangono € 20.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{13}{15},$$

gli rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono € $150 \cdot \frac{2}{15} =$ € 20.

3.11 Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.

Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

Definizione 3.14. Le *percentuali* sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100}; \qquad 7\% = \frac{7}{100}; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000}.$$

Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35; \qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0,07; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = 0,125.$$

Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0,02 = \frac{0,02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; \qquad 0,23 = \frac{0,23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; \qquad 1,21 = \frac{1,21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%.$$

Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = \frac{0,\overline{6}}{1} = \frac{66,\overline{6}}{100} = 66,\overline{6}\%.$$

3.11.1 Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio 3.27. In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere, si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100. Precisamente $\frac{95}{100} \cdot 857 = 814,15$. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio 3.28. Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli:

$$\frac{126}{652} \cdot 100\% \approx 0,19 \cdot 100\% = 19\%.$$

3.11.2 Problemi con gli sconti

Esempio 3.29. Un pantalone costava € 70 e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e po il prezzo scontato. Lo sconto è dato da

$$20\% \cdot 70\,€ = \frac{20}{100} \cdot 70\,€ = 14.$$

Il prezzo scontato è € 70− € 14 = € 56.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è 100% − 20% = 80%. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\% \cdot 70\text{ €} = \frac{80}{100} \cdot 70\text{ €} = 56\text{ €}.$$

Esempio 3.30. Un paio di scarpe da € 120 viene venduto scontato a € 75 Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto € 120 − € 75 = € 45.

Calcolo la percentuale che € 45 rappresentano di € 120,

$$\frac{45}{120} \cdot 100\% = 0,375 \cdot 100\% = \ 37,5\%.$$

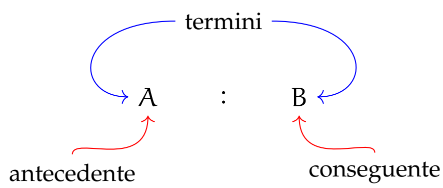
Esempio 3.31. Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del 15%, ha risparmiato cosi 120 euro. Quanto costa il computer di listino?

€ 120 corrispondono al 15% del prezzo di listino. Per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$$120 : \ 15\% = \ 120 : \frac{15}{100} = 120 \cdot \frac{100}{15} = \text{€ } 800.$$

3.12 Proporzioni

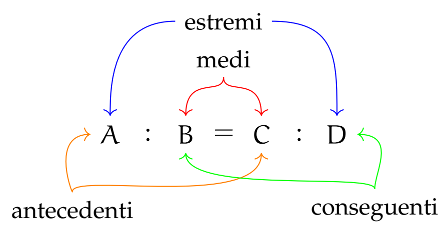
Definizione 3.15. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice *antecedente*, il secondo *conseguente*.



Definizione 3.16. Una *proporzione* è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo

$$A : B = C : D,$$

che si legge A *sta a* B *come* C *sta a* D, con B e D diversi da zero.



Esempio 3.32. $4:\ 2 =\ 12:\ 6.$
Formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.

Esempio 3.33. $7:\ 14 =\ 16:\ 4.$
Non formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

Si dice anche che quattro numeri sono in proporzione se il rapporto tra i primi due è uguale al rapporto tra il terzo e il quarto.

Proprietà 3.9 (Fondamentale delle proporzioni)**.** *In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

$$A : B = C : D \Rightarrow A \cdot D = B \cdot C.$$

Esempio 3.34. $4:\ 6 =\ 6:\ 9.$
Il prodotto dei medi è $6 \cdot 6 = 36$ e il prodotto degli estremi è $4 \cdot 9 = 36$. Quindi è una proporzione.

Esempio 3.35. $20:\ 30 =\ 30:\ 40.$
Il prodotto dei medi è $30 \cdot 30 = 900$ il prodotto degli estremi è $20 \cdot 40 = 800$. Quindi non è una proporzione.

3.12.1 Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo il risultato per l'altro medio:

$$a : b = x : d \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo il risultato per l'altro estremo:

$$x : b = c : d \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}.$$

Esempio 3.36. Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione.

- $5 : 7 = 20 : x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 20}{5} = 28$
- $2 : x =\ 3 : 16 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$
- $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{9}.$

Definizione 3.17. Una proporzione si dice *continua* se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo $A : B = B : C$, per esempio

$$3:\ 9 =\ 9:\ 27, \qquad 5:\ 10 =\ 10:\ 20, \qquad 4:\ 16 =\ 16:\ 64.$$

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a : x = x : d \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot d}.$$

Esempio 3.37. Trovare il valore di x nella seguente proporzione continua $36 : x = x : 9$.
Svolgimento $x = \sqrt{36 \cdot 9} = 18$.

3.12.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$2p = 3l.$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc.

Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

Definizione 3.18. Due grandezze x e y si dicono *direttamente proporzionali* se il loro rapporto è costante, cioè

$$\frac{y}{x} = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = kx, \text{ con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.2).

Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta € 10 di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre € 10.

Prezzo benzina al litro p (€)	1,126	1,156	1,212	1,248
Benzina ricevuta b (l)	8,881	8,650	8,251	8,013
Costo $c = p \cdot b$ (€)	10,00	10,00	10,00	10,00

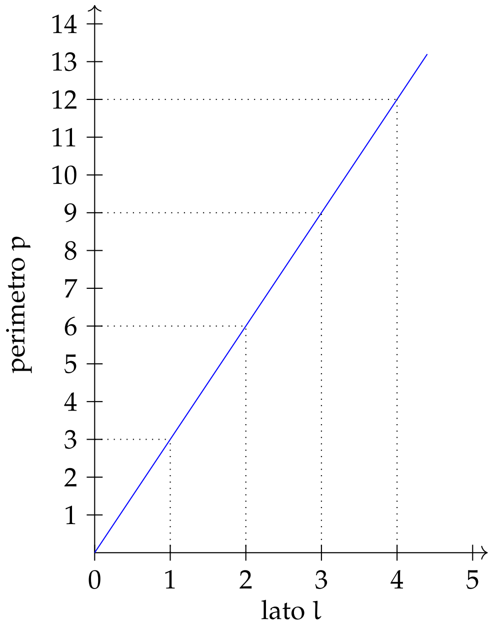


FIGURA 3.2: Proporzionalità diretta.

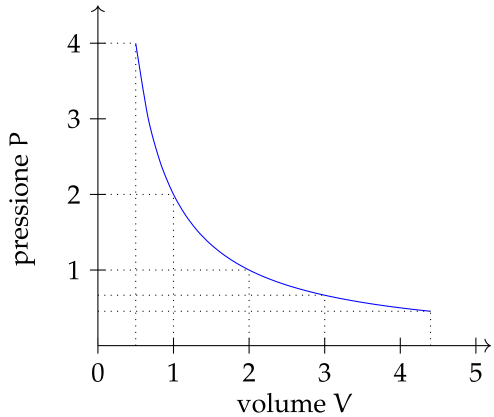


FIGURA 3.3: Proporzionalità inversa.

Definizione 3.19. Due grandezze x e y si dicono *inversamente proporzionali* se il loro prodotto è costante, cioè se:

$$x \cdot y = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}, \text{ con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.3).

3.13 Espressioni con le frazioni

Esempio 3.38. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

1. Eseguo le operazioni contenute nelle parentesi più interne. La linea di frazione equivale ad una coppia di parentesi per cui le parentesi tonde non sono più necessarie. Trasformo le divisioni in moltiplicazioni per il reciproco del divisore.

$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{4-3}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{15-14}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

2. Eseguo le addizioni presenti nei numeratori di due frazioni.

$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

3. Eseguo le moltiplicazioni tra frazioni presenti nella parentesi quadra.

$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1}{45}+\frac{2}{5}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

4. Addiziono le frazioni presenti nella quadra.

$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1+18+1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

5. Eseguo la moltiplicazione nella parentesi graffa,

$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\frac{20}{45}+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left\{\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$

6. Eseguo l'addizione nella graffa.

$$=\frac{3}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

7. Eseguo l'ultima moltiplicazione.

$$=\frac{1}{6}$$

Quando si deve addizionarre un numero intero ad una frazione si può evitare di usare un passaggio per scrivere esplicitamente il denominatore comune: dato che c'è un unico denominatore è ovvio che quello *è* il denominatore comune. È possibile ottenere la somma di un intero e una frazione con un unico passaggio moltiplicando il numero intero per il denominatore e aggiungendolo al numeroatore della frazione.

Esempio 3.39. Esegui i seguenti calcoli:

- $3+\frac{5}{4}=\dots$ «tre per quattro -> dodici, più cinque -> diciassette, quarti»
- $5-\frac{1}{2}=\dots$ «cinque per due -> dieci, meno uno -> nove, mezzi»
- $\frac{8}{3}-2=\dots$ «due per tre -> sei, otto meno sei -> due, terzi»

Applicando questo metodo si può risparmiare qualche passaggio.

Esempio 3.40. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left[\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\frac{11}{2}=$$
$$=\left[\frac{13}{5}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{11}=$$
$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{2}{3}=$$
$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Le potenze hanno la precedenza sulle altre operazioni, ma quando ci sono anche potenze da calcolare, conviene sempre controllare se è possibile usare qualche proprietà. Non solo, ma anche quando non è possibile utilizzare le proprietà delle potenze, a volte può essere conveniente non eseguire la potenza ma scriverla sotto forma di prodotto:

Esempio 3.41. $\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^3=-\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot9\cdot9\cdot9}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{9}{4}$

In questo caso siamo riusciti a risolvere l'espressione senza eseguire alcuna moltiplicazione.

Esempio 3.42. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{2}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right)=$$
$$=\left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{15\cdot15\cdot15\cdot15}\cdot\frac{5\cdot5}{2\cdot2}\cdot\frac{15\cdot15}{2\cdot2}\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\frac{25+40+1}{25}=$$
$$=\left[\left(\frac{9}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{1}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25}=$$
$$=\left[1-\frac{1}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25}=$$
$$=\left[\frac{8}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25}=$$
$$=\frac{8\cdot8}{9\cdot9}\cdot\frac{9\cdot9}{10\cdot10}-\frac{66}{25}=\frac{16}{25}-\frac{66}{25}=-\frac{50}{25}=-2$$

Se nell'espressione, oltre alle frazioni, ci sono anche numeri decimali limitati o periodici, conviene in un primo passaggio trasformare ogni numero razionale in frazione e poi eseguire il solito calcolo.

Esempio 3.43. Calcola il valore della seguente espressione.

$$
\begin{aligned}
&3,5 \cdot 0,4 - 1,2 - 0,8\bar{6} \cdot \left(1,\bar{6} + 5,8\bar{3} - 5,5 - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{35}{10} \cdot \frac{4}{10} - \frac{12}{10} - \frac{86-8}{90} \cdot \left(\frac{16-1}{9} + \frac{583-58}{90} - \frac{55}{10} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{7}{5} - \frac{6}{5} - \frac{78}{90} \cdot \left(\frac{15}{9} + \frac{525}{90} - \frac{55}{10} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{35}{6} - \frac{11}{2} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{35}{6} - \frac{11}{2} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15} \cdot \frac{130+455-429-138}{2 \cdot 3 \cdot 13} = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15} \cdot \frac{18}{2 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0
\end{aligned}
$$

3.14 La leggenda di Pitagora e la scoperta di un numero inquietante

La vita e l'opera di Pitagora hanno costituito oggetto di approfondite ricerche da parte degli storici di tutti i tempi. Nonostante le indagini più accurate, i fatti della vita di Pitagora realmente accertati sono veramente pochi. Si dice sia nato a Samo nel 572 a.C.[1] dove vi regnava il tiranno Policrate; non sopportando la tirannia, si trasferì in Egitto con un incarico di lavoro presso il faraone Amasi. Sembra che poi abbia viaggiato in Babilonia prima di approdare a Crotone dove fondò una Scuola che accolse numerosi discepoli. Pitagora propose un sistema matematico della natura: la spiegazione dei fenomeni naturali doveva avvenire attraverso la ricerca di relazioni tra numeri. Pensava che tutti i corpi fossero formati da punti materiali o monadi combinate in modo da formare le varie figure geometriche e il numero totale di tali unità rappresentava l'oggetto materiale. Da qui nasceva la dottrina secondo la quale tutte le cose che si conoscono hanno un numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere; la spiegazione dei fenomeni naturali può essere raggiunta solo attraverso l'aritmetica.

Per i pitagorici esistono due soli tipi di numeri: gli interi e le frazioni. Ogni numero aveva sia una rappresentazione simbolica che un significato simbolico: il numero 5 veniva assunto a rappresentare il matrimonio, essendo la somma del primo numero dispari, il 3, con il primo numero pari, il 2.

Fu dunque terribile la scoperta di un nuovo tipo di numero che non è né intero né frazionario, questo numero si ottiene calcolando per mezzo del teorema di Pitagora la misura della diagonale di un quadrato di lato uno. Questo nuovo numero, che oggi scriviamo $\sqrt{2}$, non poteva essere espresso in nessun modo come frazione, cioè rapporto di numeri interi.

[1] O nel 575 a.C. per altri autori.

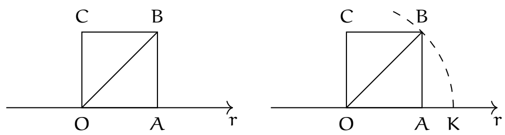
Ad esso i pitagorici diedero il nome di *arreton*, cioè indicibile, inesprimibile. La scoperta fu mantenuta segreta. La leggenda narra che Ippaso, discepolo della Scuola, morì affogato perché violò il giuramento che aveva fatto di non diffondere questa terribile verità.

Oggi questi numeri li chiamiamo *numeri irrazionali*, termine che riflette la stessa idea di inesprimibilità attribuita loro dai pitagorici [2].

3.15 I numeri irrazionali

Applicando il teorema di Pitagora a un quadrato di lato unitario per calcolare la misura della diagonale i pitagorici individuarono un nuovo tipo di numero, oggi indicato con $\sqrt{2}$.

Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale OB.



Il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$. Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Sappiamo che 'estrarre la radice quadrata' di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta r che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB e determinando su r il punto K estremo del segmento con $OK = OB$.

Dalla posizione del punto K possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ oppure $\sqrt{2} = 1,5$ commettiamo un errore minore di $1/10$.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

[2]Per approfondire l'argomento: G. Masini, *Storia della matematica*, SEI; John D. Barrow, *La luna nel pozzo cosmico*, CDE; Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, vol. 1; David Bergamini e redattori di Life, *La matematica*, Mondadori; Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, A. Mondadori.

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/100$. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K. Ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	Numero	Valore per eccesso	Ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
...	$\sqrt{2}$	...	...

Per arrivare a concludere che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a e b primi tra loro; si avrebbe, elevando al quadrato, $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Se si eleva un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di a^2 e di b^2 sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati. Quindi anche a^2 e b^2 sono primi tra di loro e a^2 non può essere il doppio di b^2. Se lo fosse dovrebbe essere almeno il quadruplo. Quindi $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione.

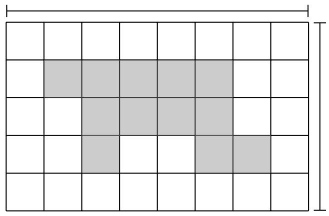
Le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti e che non sono il quadrato di alcuna frazione sono numeri decimali con infinite cifre decimali non periodiche; essi perciò possono essere scritti solo in maniera approssimata. Questi numeri sono detti *numeri irrazionali* e insieme ad altri, che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali.

3.16 Esercizi

3.16.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 Frazioni

3.1. Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.

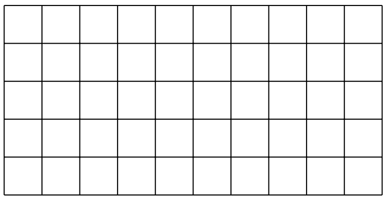


Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?

a) La forma ottenuta è più piccola del cartoncino;
b) la forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato;
c) la forma ottenuta rappresenta i 12/40 del cartoncino.

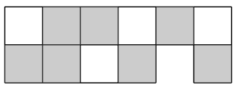
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i 3/10 del cartoncino?

3.2. Il monte-premi di una lotteria è di € 50 000. Il primo premio è di € 25 000, il secondo di € 10 000, il terzo di € 5 000, il quarto di € 4 000, il quinto e il sesto premio sono uguali. Nella figura un quadretto rappresenta € 1 000.



a) Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio;
b) quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione;
c) Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

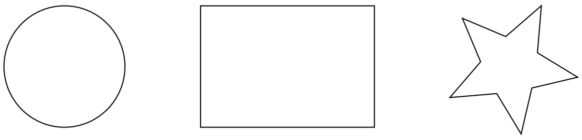
3.3. La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi.



Completa: la figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta .... dell'intera figura, mentre la parte bianca ne è ....

3.4. Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione.

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$



3.5. Indica se le frazioni sono proprie (P), improprie (I) o apparenti (A).

a) $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ c) $\frac{12}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ e) $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

b) $\frac{8}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ d) $\frac{5}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ f) $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

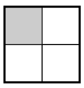
3.6. Trova le frazioni equivalenti completando.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$ $\qquad$ b) $\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots}$ $\qquad$ c) $\frac{5}{2} = \frac{\dots}{10}$ $\qquad$ d) $\frac{21}{35} = \frac{\dots}{5}$

3.7. Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

a) $\frac{5}{6}$ $\qquad$ b) $\frac{3}{5}$ $\qquad$ c) $\frac{12}{60}$ $\qquad$ d) $\frac{2}{3}$ $\qquad$ e) $\frac{1}{2}$ $\qquad$ f) $\frac{5}{2}$

3.8. Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta $1/4$ del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti $8/4$ del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali.



3.9. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{4}{6}$ $\qquad$ d) $\frac{18}{16}$ $\qquad$ g) $\frac{80}{100}$ $\qquad$ j) $\frac{10}{15}$ $\qquad$ m) $\frac{16}{6}$ $\qquad$ p) $\frac{21}{9}$

b) $\frac{8}{2}$ $\qquad$ e) $\frac{3}{12}$ $\qquad$ h) $\frac{8}{12}$ $\qquad$ k) $\frac{14}{49}$ $\qquad$ n) $\frac{18}{15}$ $\qquad$ q) $\frac{24}{30}$

c) $\frac{2}{10}$ $\qquad$ f) $\frac{6}{20}$ $\qquad$ i) $\frac{9}{6}$ $\qquad$ l) $\frac{15}{21}$ $\qquad$ o) $\frac{20}{12}$ $\qquad$ r) $\frac{25}{15}$

3.10. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{27}{21}$ $\qquad$ d) $\frac{32}{24}$ $\qquad$ g) $\frac{40}{6}$ $\qquad$ j) $\frac{48}{60}$ $\qquad$ m) $\frac{121}{22}$ $\qquad$ p) $\frac{110}{30}$

b) $\frac{28}{14}$ $\qquad$ e) $\frac{35}{10}$ $\qquad$ h) $\frac{42}{21}$ $\qquad$ k) $\frac{12}{30}$ $\qquad$ n) $\frac{87}{99}$ $\qquad$ q) $\frac{240}{75}$

c) $\frac{30}{16}$ $\qquad$ f) $\frac{36}{81}$ $\qquad$ i) $\frac{45}{27}$ $\qquad$ l) $\frac{135}{77}$ $\qquad$ o) $\frac{15}{360}$ $\qquad$ r) $\frac{140}{294}$

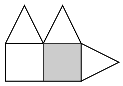


FIGURA 3.4: Esercizio 3.11

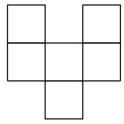
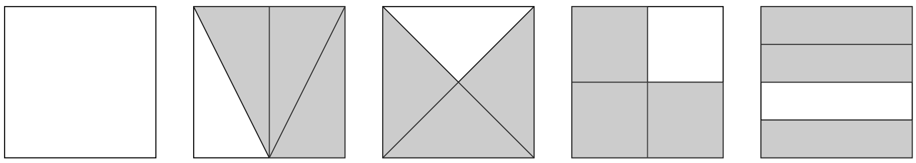


FIGURA 3.5: Esercizio 3.12

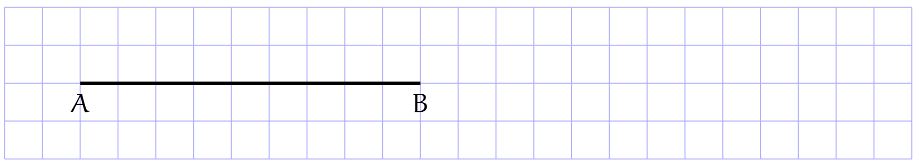
3.11. Si può dire che la parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?

3.12. Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura seguente.

3.13. Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\dfrac{3}{4}$ del quadrato bianco?



3.14. Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero.



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

3.15. Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25

3.16. Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{8}{4} \qquad \frac{9}{4}.$$

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

3.17. Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini.

$$\frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ -\frac{5}{2};\ \frac{6}{-14};\ \frac{-12}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{-3}{-9};\ \frac{10}{-4};\ \frac{10}{20};\ \frac{-18}{42};\ \frac{5}{15};\ -\frac{9}{21};\ -\frac{15}{6};\ \frac{4}{12}.$$

3.18. Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria.

$$\frac{10}{3};\ \frac{17}{9};\ \frac{11}{2};\ \frac{25}{3};\ \frac{17}{10};\ \frac{15}{6}.$$

3.4 La scrittura dei numeri razionali

3.19. Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito (DF), quali come numero decimale periodico (DP) e quali come numero intero (I):

a) $-\frac{3}{2}$ DF DP I
b) $-\frac{6}{5}$ DF DP I
c) $\frac{2}{25}$ DF DP I
d) $\frac{5}{8}$ DF DP I
e) $\frac{5}{6}$ DF DP I
f) $-\frac{5}{12}$ DF DP I
g) $\frac{12}{6}$ DF DP I
h) $\frac{5}{10}$ DF DP I

3.20. Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

a) $\frac{13}{2}$
b) $\frac{11}{3}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{15}{6}$
e) $\frac{17}{7}$
f) $\frac{15}{8}$
g) $\frac{12}{9}$
h) $\frac{127}{10}$
i) $\frac{122}{11}$
j) $\frac{13}{12}$
k) $\frac{35}{121}$
l) $\frac{121}{35}$
m) $\frac{12}{10}$
n) $\frac{127}{100}$
o) $\frac{122}{1100}$
p) $\frac{13}{100}$
q) $\frac{35}{1000}$
r) $\frac{121}{10000}$
s) $\frac{12}{5}$
t) $\frac{13}{7}$
u) $\frac{15}{4}$
v) $\frac{5}{8}$
w) $\frac{32}{9}$
x) $\frac{21}{20}$
y) $\frac{37}{18}$
z) $\frac{2}{21}$

3.21 (*). Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.

a) 12,5
b) 4,2
c) 6,25
d) 3,75
e) 0,1
f) 2,5
g) 100,100
h) 0,12
i) 1,1030
j) 0,00100
k) 100,0010
l) 0,0001
m) 1,25
n) 0,08
o) 1,002
p) 15,675
q) 1,7
r) 1,46
s) 0,13
t) 0,149
u) 5,015
v) 3,21
w) 2,3
x) 1,086

[a) $\frac{25}{2}$, b) $\frac{21}{5}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{15}{4}$ e) $\frac{1}{10}$ f) $\frac{5}{2}$...]

3.22. Completa la tabella.

Numero decimale	Parte intera	Parte decimale	Periodo	Antiperiodo	Frazione
1,7521					
$3,\overline{75}$					
$12,1\overline{24}$					
$1,0\overline{5}$					
$0,13\overline{57}$					

3.23. Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

a) $-1,25$
b) 0,03;
c) $-2,\overline{1}$
d) $0,\overline{13}$
e) 5,080;
f) $3,\overline{752}$
g) $-0,38$
h) $11,\overline{175}$
i) $0,01\overline{02}$
j) $0,12\overline{345}$
k) $100,\overline{100}$
l) $100,\overline{001}$
m) 0,08;
n) 0,2;
o) 0,1;
p) 0,03;
q) $23,\overline{5}$
r) $22,\overline{32}$
s) 0,25;
t) $31,\overline{02}$
u) $0,\overline{21}$
v) $2,3\overline{4}$
w) $3,21\overline{8}$
x) $0,03\overline{4}$

3.24. Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$ Qual è la 614-esima cifra decimale del numero?

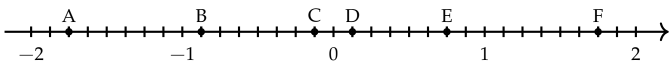
3.25. Calcola $0,\overline{9} - 3,\overline{9}$ Cosa osservi?

3.5 I numeri razionali e la retta

3.26. Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta.

a) $\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{2}, \quad -\frac{7}{12}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{11}{6}, \quad \frac{9}{4}$
b) $\frac{0}{4}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{19}{8}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{4}{2}$
c) $\frac{10}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad 2, \quad \frac{0}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{13}{6}$
d) $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{8}, \quad -\frac{5}{16}$
e) $\frac{8}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad -\frac{7}{4}, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{11}{10}$

3.27. Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura.



3.28. Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta.

a) $0,6 \qquad 2,3 \qquad -1,2 \qquad -0,06$
b) $+1,4 \qquad -0,3 \qquad -1,5 \qquad 0,2$
c) $-0,8 \qquad -1,6 \qquad +4,91 \qquad -1,17$
d) $1,55 \qquad 2,01 \qquad -3,0 \qquad -2,10$

3.6 Confronto tra numeri razionali

3.29. Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \ldots \frac{5}{7}$
b) $-\frac{9}{5} \ldots -\frac{8}{3}$
c) $-1 \ldots \frac{1}{12}$
d) $\frac{2}{7} \ldots \frac{6}{21}$
e) $-\frac{1}{2} \ldots -\frac{3}{4}$
f) $\frac{3}{5} \ldots \frac{6}{9}$

3.30. Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{7}{12}.$$

3.31. Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

$$-\frac{2}{3},\quad -\frac{3}{4},\quad -\frac{5}{6},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{2}{5}.$$

3.32. Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande).

$$-\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad -\frac{5}{6},\quad \frac{1}{2},\quad -1,\quad -\frac{2}{5},\quad 0.$$

3.33. Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo).

$$-\frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{6}{5},\quad \frac{2}{5},\quad -1,\quad \frac{5}{2},\quad 0$$

3.34. Qual è la minore delle seguenti frazioni?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{7}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$.

3.35. Metti in ordine le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{11}{12};\quad \frac{5}{3}.$$

3.36. Ordina dal più piccolo al più grande.

a) 10,011 10,110 11,001 11,100;
b) 10,01 11,11 10,101 10,001;
c) 0,101 0,011 0,110 0,0101;
d) 1,0101 1,1001 1,0011 1,0110;

3.37. Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$.

3.38. Scrivi una frazione compresa tra:

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

3.39. Quali disuguaglianze sono vere?

a) $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3.40. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

$\boxed{\text{A}}$ 0,10 $\boxed{\text{B}}$ 0,99 $\boxed{\text{C}}$ 0,01 $\boxed{\text{D}}$ 0,90

3.41. Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

$\boxed{A}$ 0,01 $\boxed{B}$ 0,90 $\boxed{C}$ 1,01 $\boxed{D}$ 0,19

3.42. Scrivi due numeri compresi tra:

a) 2,3 e 3,4;
b) 3,4 e 3,6;
c) $2,\overline{3}$ e $2,\overline{4}$
d) $1,1\overline{3}$ e $1,2\overline{3}$
e) $3,\overline{4}$ e $3,\overline{6}$
f) $1,\overline{35}$ e $1,\overline{36}$

3.43. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente:

$$\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{2}{5}; \frac{6}{3}; \frac{5}{6}; \frac{12}{4}; \frac{19}{8}; \frac{16}{5}.$$

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

3.44. Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$
e) $\frac{6}{5}+0$
f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$
g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$
j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$
k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$
l) $1-\frac{3}{2}$
m) $\frac{11}{5}+5$
n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$
o) $3-\frac{2}{3}$
p) $\frac{1}{5}-1$
q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$
r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$
s) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$
t) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

3.45. Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\overline{6}+\frac{2}{3}$
b) $5,1-1,\overline{5}$
c) $0,03+\frac{0}{3}$
d) $0,1\overline{6}-1,\overline{45}$
e) $50\%+\frac{1}{2}$
f) $\frac{2}{5}-1,2+5\%$
g) $-1,\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$
h) $\frac{3}{2}-13\%+0,15$
i) $1,\overline{2}+1,2+\frac{1}{2}+1,2\%$
j) $7,9892+3,1218$
k) $3,999+$ un centesimo

3.46. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

3.47. Calcola a mente:

a) $0,1+0,1$
b) $0,2+0,8$
c) $0,01+0,9$
d) $0,91+0,19$
e) $1,10+1,01$
f) $0,999+0,10$
g) $1,1-0,9$
h) $100-0,99$
i) $2-0,1$
j) $3-1,1$
k) $4-1,4$
l) $10-0,10$

3.48. Calcola i seguenti prodotti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$
b) $6\cdot\frac{5}{2}$
c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$
d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}d$
e) $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$
f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$

3.49. Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$$-1,\overline{1}\cdot\frac{18}{5};\qquad 2\%\cdot 5\%;\qquad -\frac{3}{4}\cdot(-120\%).$$

3.50. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\overline{6}$	$+\frac{17}{3}$	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\overline{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		-1		0	

3.51. Calcola a mente:

a) $0,1\cdot 0,1$
b) $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$
c) $0,1\cdot 100$
d) $1\cdot 0,1$
e) $2\cdot 0,1$
f) $20\cdot 0,02$
g) $0,01\cdot 10$
h) $\frac{1}{100}\cdot 10$
i) $0,1\cdot 0,2$
j) $\frac{3}{10}\cdot 30$
k) $0,01\cdot 0,1$
l) $1000\cdot 0,0001$

3.52. Calcola i seguenti quozienti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$
b) $-\frac{6}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$
c) $\frac{+3}{2}:\left(\frac{-3}{2}\right)$
d) $\frac{2}{5}:\frac{5}{8}:\left(-\frac{5}{6}\right)$

3.53. Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\overline{1}:\frac{18}{5}$
b) $2\%:5\%$
c) $\frac{1}{2}:0,5$
d) $-\frac{3}{4}:1,4:(-120\%)$

3.54. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a : b$							
$b : a$							

3.55. Calcola a mente:

a) $0,30 \cdot 0,40$
b) $0,5 : 0,1$
c) $0,5 \cdot 0,2$
d) $0,1 \cdot 0,1$
e) $0,4 \cdot 3$
f) $0,1 : 0,1$
g) $0,5 \cdot 20$
h) $0,1 \cdot 0,010$

3.8 Potenza di una frazione

3.56. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$
c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$
e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$
f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$
g) -2^4
h) $(-2)^4$
i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$
j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$
k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
l) -2^{-4}
m) $(-2)^{-4}$
n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

3.57. Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze.

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$ proprietà
b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$
c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$
d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$
e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$

3.58. Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$\left(-\frac{2}{3}\right)$							
$-1,\overline{6}$							
$-0,1$							
$\frac{3}{10}$							

3.59. Calcola a mente.

a) $3,4 \cdot 10^2$
b) $3,4 : 10^2$
c) $0,34 \cdot 10^4$
d) $34,4 : 10^2$
e) $0,34 \cdot 10^3$
f) $34,10 \cdot 10^3$
g) $3,04 \cdot 10$
h) $0,34 : 10^2$

3.60. Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni.

a) $-(-2)^2$
b) $[-(-1)^2]^3$
c) $-(-2)^{-4}$
d) $-[-(-1)^{-1}]^{-2}$
e) $\dfrac{2^{-1}+3^{-2}}{2^{-2}+3^{-1}}$
f) $\dfrac{2^{-2}-3^{-1}}{2^{-2}+3^{-1}}$
g) $(-3)^3 \cdot \dfrac{2^{-2}-5^{-1}}{2^{-2}+5^2}$

3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

3.61. Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri.

a) $780000000000000 = 7,8 \cdot 10^{\cdots}$
b) $423000000000 = 4,23 \cdot 10^{\cdots}$
c) $76000000000000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$
d) $0,00000000098 = 9,8 \cdot 10^{\cdots}$
e) $0,0000045 = 4,5 \cdot 10^{\cdots}$
f) $0,000000987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$

3.62. Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?
$\boxed{\text{A}}$ $5,67 \cdot 10^{-12}$ $\boxed{\text{B}}$ $4,28 \cdot 10^8$ $\boxed{\text{C}}$ $10,3 \cdot 10^{-2}$ $\boxed{\text{D}}$ $9,8 \cdot 10^7$

3.63. Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura $0,00000000021\text{m}$

3.64. Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.

34000; $0,000054$; 26; $0,54000$; 5; $0,00001$; 990000; 222.

3.65. Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

a) $0,00036 \cdot 20000000 = \ldots$
b) $8400 : 42 = \ldots$
c) $900000000 : 0,0003 = \ldots$
d) $3 : 10000000 = \ldots$

3.66. Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica.

a) $3 \cdot 10^{24} + 4 \cdot 10^{24}$
b) $0,3 \cdot 10^{104} + 4 \cdot 10^{103}$
c) $6 \cdot 10^{101} \cdot 0,15 \cdot 10^{101}$
d) $12 \cdot 10^{2000} : 6 \cdot 10^{200}$

3.67 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.
$\dfrac{(0,00002)^2 : 30000000 \cdot (0,1)^5}{4000 \cdot 0,02 : 0,000003}$ $[5 \cdot 10^{-30}]$

3.68 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.
$\dfrac{(3000)^2 : 0,000003 : 20000000}{0,00002 : 0,00000004}$ $[3 \cdot 10^2]$

3.69 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.
$\dfrac{(2000)^3 \cdot (0,000001)^5 : 20}{(0,0003)^2 : 3.000.000}$ $[1,3 \cdot 10^{-8}]$

3.70 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.
$\dfrac{4000^2 \cdot 0,000012}{3 \cdot 10^9 \cdot 2000^3}$ $[8 \cdot 10^{-18}]$

3.71. Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media riportata tra parentesi: Mercurio $(5,8 \cdot 10^7)$, Nettuno $(4,5 \cdot 10^9)$, Giove $(7,8 \cdot 10^8)$, Plutone $(6,1 \cdot 10^9)$, Urano $(2,7 \cdot 10^9)$, Terra $(1,5 \cdot 10^8)$, Marte $(2,3 \cdot 10^8)$

3.72. Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

a) 126 000 000
b) 0,0000098
c) 7 000 000
d) 0,0000000027

3.73. Completare la seguente tabella.

Numero	26000000	0,000083	490000	0,0000081
Notazione scientifica				
o.d.g.				

3.74. Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli.

a) $5,3 \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^3 - 2,5 \cdot 10^6$
b) $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3)^3$

3.10 Problemi con le frazioni

3.75. La distanza Roma - Bari è di 450km Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

3.76 (*). Lucia ha letto 3/5 di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro? [300]

3.77. Una persona possiede € 525. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

3.78. Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre, che a sua volta ha i 4/5 dell'età del marito. Quali sono l'età del padre e della madre di Luigi?

3.11 Le percentuali

3.79. Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.

$$12\%; \quad 0,03\%; \quad 4,3\%; \quad 80\%; \quad 3,5\%; \quad -0,2\%; \quad 15\%; \quad -0,38\%.$$

3.80. Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.

$$-1,25; \quad 0,03; \quad -2,\overline{1}; \quad 0,\overline{13}; \quad 5,080; \quad 3,7\overline{52}; \quad -0,38.$$

3.81. Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.

$$12\%; \quad 0,03\%; \quad 4,3\%; \quad 80\%; \quad 3,5\%; \quad -0,2\%; \quad 15\%; \quad -0,38\%.$$

3.82. Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.

$$-\frac{3}{2}; \quad \frac{4}{3}; \quad -\frac{6}{5}; \quad \frac{2}{25}; \quad \frac{5}{8}; \quad \frac{5}{6}; \quad -\frac{5}{12}.$$

3.83. A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

3.84. Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

3.85. A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

3.86. Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era € 175. Quanto costa ora?

3.87 (*). Una canna da pesca da € 125 è in vendita promozionale a € 70. Qual è la percentuale di sconto applicata? [44%]

3.88 (*). Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben € 120. Qual era il prezzo senza sconto? [480]

3.89. Completa la seguente tabella.

Prezzo di listino (€)	Sconto (€)	sconto (%)	Prezzo scontato (€)
120	12	10	108
250	10		
125	5		
170		10	
1 100		15	
220			20
12 000			700
	15	15	
	30		50
		25	140
	120	30	

3.90. Calcola:

a) il 10% di 100;
b) il 30% di 700;
c) il 20% di 500;
d) il 15% di 150;
e) il 25% di 1250;
f) il 16% di 120.

3.91. Quale percentuale è:

a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è . . . . . . ;
b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è . . . . . . ;
c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è . . . . . . ;
d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è . . . . . .

3.92. Se aumenta il prezzo:

a) un chilo di pane lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è aumentato del 3%, allora costa . . . . . . ;
b) un litro di benzina lo scorso anno costava € 1,514, quest'anno costa € 1,629 allora è aumentata del . . . . . . %;
c) un litro di latte lo scorso anno costava € 1,25, quest'anno è aumentato di $0,05\%$, allora costa € . . . . . . ;
d) un chilo di formaggio parmigiano lo scorso anno costava € 23,50 quest'anno costa € 25,80 allora è aumentato del . . . . . . %.

3.93. Se il prezzo diminuisce:

a) un chilo di pomodori lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è diminuito del 5%, allora costa € . . . . . . ;
b) un chilo di peperoni lo scorso anno costava € 2,10, quest'anno costa € 1,80 allora è diminuito del . . . . . . %;
c) un chilo di cicoria lo scorso anno costava € 0,80, quest'anno due chili costano € 1,20, allora la cicoria è diminuita del . . . . . . %;
d) un chilo di arance lo scorso anno costava € 1,40, quest'anno le arance sono diminuite del 15%, allora costano al chilo € . . . . . .

3.94. Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	21	
1 250	21	
17,40	4	
	21	170
	21	12 240
101,00		105,60

3.95. Dati imponibile (costo senza IVA) e IVA determina il costo comprensivo di IVA, e viceversa

Imponibile (€)	IVA (%)	IVA (€)	Totale
100	21	21	121
1 100	21		
1	23		1 100
1 000			1 100
	21	141	
1 100		100	

3.96. La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza di una classe prima di una scuola secondaria.

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

a) Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?
b) qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?
c) qual è la percentuale di alunni che non provengono dalle scuole A o B o C?
d) qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?

3.97. Agli esami di stato un gruppo di allievi (A) ha riportato i seguenti punteggi (P) in centesimi.

P	60	64	68	70	74	75	80	82	83	84	85	86	87	88	89	90	92	94	98	100
A	2	3	1	5	4	2	1	2	3	2	4	1	3	2	1	3	2	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

3.98. Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.

	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

a) Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?
b) qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

3.99. Sapendo che $\overline{AB} = 12cm$ e che $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ calcola la lunghezza di BC

3.100. Sapendo che $\overline{AB} = 36cm$ e che $\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{BC}$ calcola la lunghezza di BC

3.101. Sapendo che $\overline{AB} + \overline{BC} = 15cm$ e che $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC

3.102. Sapendo che $\overline{AB} - \overline{BC} = 4cm$ e che $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC

3.103. Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.

3.104. Determina le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che uno è i 2/3 dell'altro.

3.105. Determina le misure dei due lati di un rettangoli sapendo che ha perimetro di 128cm e che l'altezza è 3/2 della base.

3.106. La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo (3 235km^2), Firenze (3 514km^2), Grosseto (4 504km^2), Livorno (1 211km^2), Lucca (1 773km^2), Massa e Carrara (1 156km^2), Pisa (2 444km^2), Pistoia (965km^2), Prato (365km^2), Siena (3 821km^2).

3.107. La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per 1/5 la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per 2/3 da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?

3.108 (*). In 30kg di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono? [21kg, 9kg]

3.109. Una soluzione di 6kg è concentrata al 45%. Quanta sostanza concentrata devo aggiungere per avere una nuova soluzione concentrata al 60%.

3.110. Quanta acqua bisogna aggiungere a una soluzione di 2kg concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%?

3.111. Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occorre miscelare le due soluzioni in modo da ottenere 6kg di soluzione concentrata al 15%?

3.112. Una società ha acquistato dei PC nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti ha ottenuto uno sconto dell'8%, versando di conseguenza l'importo di € 24 500. Qual è il valore iniziale della merce acquistata?

3.113. Una persona paga un tappeto € 1200, lo stesso tappeto l'anno precedente costava € 900. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro?

3.114. Quanto vale il 2012% di 2012?

3.12 Proporzioni

3.115. Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione.

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ c) 35; 7; 48; 6 d) 14; 3,5; 4; 1 e) $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

3.116. Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione.

a) $10 : 11 = 12 : 13$ Sì No
b) $7 : 14 = 21 : 42$ Sì No
c) $64 : 48 = 8 : 6$ Sì No
d) $18 : 15 = 12 : 10$ Sì No
e) $10 : 6 = 5 : 3$ Sì No
f) $1{,}2 : 1{,}4 = 3{,}6 : 4{,}2$ Sì No

3.117. Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione.

a) 7 5 20 28;
b) 8 3 2 12;
c) 5 6 2 15;
d) 3 5 9 15;
e) 6 7 2 21;
f) 3 8 6 16.

3.118. Completa la seguente tabella.

1° termine	2° termine	Antecedente	Conseguente	Rapporto	Rap. inverso
32	8	32	8	$32 : 8 = 4$	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$	
					$\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

3.119. Completa la seguente tabella.

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore rapporto
$3 : 5 = 21 : 35$	3 e 21	5 e 35	5 e 21	3 e 35	0,6
$54 : 12 = 36 : 8$					
$7 : 21 = 9 : 27$					
$\frac{5}{4} : \frac{15}{8} = 4 : 6$					

3.120. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $269\ 2 : 24 = 3 : x$
b) $x : 0,\overline{6} = 0,8 : 1,\overline{3}$
c) $\frac{7}{3} : x = \frac{4}{3} : \frac{8}{35}$
d) $\left(1 - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = x : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{8}\right)$

3.121. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{3}{20} + \frac{3}{8}\right) : x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{7}\right)$
b) $\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right) : x$
c) $\left(\frac{4}{5} + 1\right) : \left(3 - \frac{1}{5}\right) = x : \left(2 + \frac{1}{3}\right)$

3.122 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3} - 3\right) : x = x : \left(1 + \frac{5}{16} + \frac{3}{8}\right)$ $\left[\pm\frac{3}{2}\right]$
b) $\left\{\frac{5}{2} : \left[\frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{1}{3} : \frac{5}{3} - \frac{14}{5}\right)\right]\right\} : x = x : \left\{\frac{3}{11}\left[\left(5 - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{21} + \frac{3}{2}\right]\right\}$ $\left[\pm\frac{5}{2}\right]$

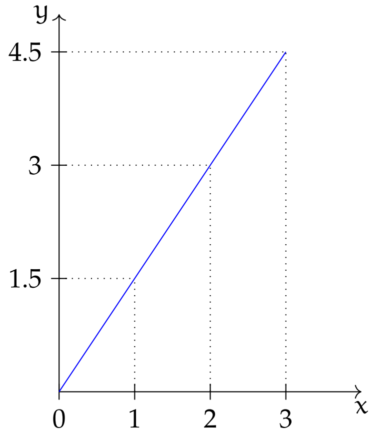
c) $(70-x):6=x:8$ [40]

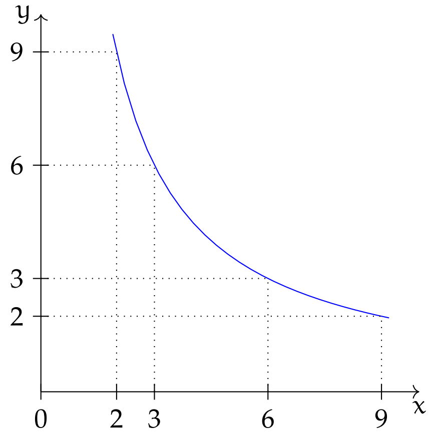
d) $\left(\frac{5}{6}-x\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=x:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$ $\left[\frac{25}{48}\right]$

3.123. Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi.

a) $y=5x$
b) $y=\frac{1}{2x}$
c) $y=\frac{2}{3}x$
d) $y=\frac{1}{x}+3$
e) $y=6x+1$
f) $y=\frac{24}{x}$
g) $y=4x$
h) $y=\frac{18}{x}$
i) $y=\frac{1}{2}x$
j) $y=\frac{6}{x}$
k) $y=5+x$
l) $y=3x+2$
m) $y=\frac{2}{x}$
n) $y=2x$
o) $y=2x-1$
p) $y=\frac{1}{2x}+1$
q) $y=2x-2$

3.124. Osserva i grafici e rispondi alle domande:





a) quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è ...... del secondo è ......
c) qual è la funzione? Del primo grafico è .... del secondo grafico è ....

3.125. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?

c) qual è la legge che lega y a x?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.126. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega s a t?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.16.2 Esercizi riepilogativi

3.127. Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.

a) $\frac{2}{3}\cdot 0$
b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{0}$
d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2}$
e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
f) $\frac{2}{3}:0$
g) $\frac{2}{3}-0$
h) $1:\frac{2}{3}$
i) $\frac{1}{4}\cdot 4$
j) $\frac{1}{4}:4$
k) $0,3:3$
l) $1,5:1,\overline{5}$
m) $1,5:1,5$
n) $1,5^0$
o) $(1-1)^0$
p) $(-1)^{-1}$
q) $3^0:2^0$
r) $\frac{(-2)^{-2}}{(-1)^{-1}}$

3.128. Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice.

$$\frac{1,\overline{7}}{1,\overline{3}}=1,\overline{3};\qquad \frac{2,\overline{7}}{1,\overline{6}}=1,\overline{6};\qquad \frac{1,\overline{16}}{2,\overline{3}}=0,5;\qquad \frac{2,\overline{3}}{1,\overline{6}}=1,4.$$

3.129. Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti.

$$\frac{6}{10};\qquad \frac{25}{100};\qquad \frac{12}{10};\qquad \frac{5}{25}.$$

3.130. Completa le seguenti uguaglianze.

a) $\frac{3}{5}=\frac{\dots}{10}$
b) $\frac{75}{10}=\frac{\dots}{100}$
c) $\frac{7}{\dots}=\frac{1}{2}$
d) $3=\frac{24}{\dots}$

3.131. Completa:

$$\frac{3}{4}+\dots=1;\qquad 1-\dots=\frac{4}{13};\qquad \frac{11}{12}\cdot\dots=\frac{8}{55};\qquad \dots:\frac{5}{3}=\frac{3}{5}.$$

3.132. Correggi le seguenti operazioni.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7};\qquad \frac{8}{25}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{50};\qquad 3\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{39}.$$

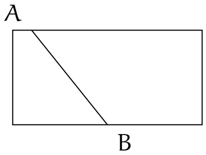


FIGURA 3.6: 3.135

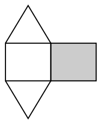


FIGURA 3.7: 3.136

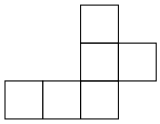


FIGURA 3.8: 3.137

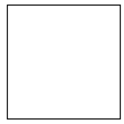


FIGURA 3.9: 3.138

3.133. Completa le seguenti tabelle.

	Sottraendo			
$-$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
Minuendo $\frac{23}{12}$				
$\frac{13}{2}$				
$\frac{9}{4}$				

	Primo fattore			
$\times$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
Minuendo $\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{2}$				
$\frac{7}{3}$				
$\frac{8}{5}$				

3.134. Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione:

a) il triplo di un terzo è l'unità;
b) la somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti;
c) un ottavo è maggiore di un quinto.

3.135. Relativamente alla figura 3.6, quale proposizione è vera?

a) Il segmento AB la divide in due parti uguali;
b) il segmento AB la divide in due quadrilateri.

3.136. La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura 3.7?

3.137. Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura 3.8.

3.138. Colora i 3/4 della figura 3.9.

3.139. Costruire la frazione $\frac{N}{D}$ significa dividere l'unità in ... parti uguali e prendere ... parti.

3.140. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4};\quad \frac{3}{8};\quad \frac{1}{3};\quad \frac{5}{4};\quad \frac{2}{5};\quad \frac{6}{3};\quad \frac{5}{6};\quad \frac{12}{4};\quad \frac{19}{8};\quad \frac{16}{5}.$$

3.141 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$ $\left[-\frac{2}{11}\right]$

b) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{1}{24}\right]$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$ $\left[-\frac{3}{20}\right]$

3.142 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$ $\left[-\frac{673}{1680}\right]$

b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0,75-\frac{5}{6}\right]$ $\left[\frac{31}{3}\right]$

c) $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) $-\left(\frac{3}{4}+1,4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$ $\left[\frac{55}{96}\right]$

3.143 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$ $\left[-\frac{8}{5}\right]$

b) $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$ $\left[-\frac{46}{45}\right]$

c) $\frac{63}{55}\cdot\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\cdot\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\cdot 10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$ $[1]$

d) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0,6)$ $\left[\frac{13}{5}\right]$

3.144 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\cdot\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$ $\left[\frac{11}{28}\right]$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}+1$ $\left[\frac{15}{14}\right]$

c) $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$ $\left[\frac{1}{50}\right]$

d) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

3.145 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

b) $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$ $[10]$

c) $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-1{,}25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ $\left[\frac{13}{15}\right]$

d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$ $\left[\frac{11}{6}\right]$

3.146 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

b) $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

c) $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$ $\left[\frac{139}{40}\right]$

d) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$ $[1]$

3.147 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$ $\left[\frac{9}{20}\right]$

c) $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

d) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.148 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$ $\left[\frac{1}{144}\right]$

b) $\left[(0{,}4-1)^2:0{,}01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ $[540]$

c) $\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5}$ $\left[\frac{77}{50}\right]$

d) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\left[\frac{46}{9}\right]$

3.149 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4}$ $\left[\frac{44}{3}\right]$

b) $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^{6}\right]^{2}\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{8}:\left(\frac{8}{3}\right)^{3}\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$ $\left[\frac{64}{9}\right]$

c) $\left(1+\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-2}$ [400]

d) $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3-\frac{1}{30}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

3.150 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)}:\dfrac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)}$ $\left[\frac{100}{303}\right]$

b) $8,75\cdot\left(\frac{2}{5}-0,2\right)\cdot\left\{\left[2-1,\overline{6}-\left(0,2+\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{17}{4}\right)\right\}-\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)+7,5-0,\overline{3}$ [10]

c) $\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^{2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{2}-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^{2}\right]^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}-\left(1+\frac{8}{5}-\frac{1}{25}\right)$ [−2]

d) $\left(\frac{1}{6}+0,1\right)\cdot 0,16\cdot\left(1-1,0\overline{1}\right)^{-1}$ [−4]

3.151 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{11}{4}\right)\right]:(-3,5)\right\}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right):7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}(-3)^{2}(-1)^{2}:(-3)^{2}}$ $\left[-\frac{2}{27}\right]$

b) $\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right):\left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{11}{6}$ $\left[-\frac{60}{11}\right]$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$ $\left[\frac{8}{81}\right]$

3.152 (*). Calcola il valore della seguente espressione. $\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\right]:\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right\}^{6}:$
$\left\{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^{2}\right]^{2}\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^{5}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\right]^{2}\right\}^{2}$ $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}\right]$

3.153 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$ [2]

b) $\left[0,625+4,5\cdot(0,75-0,\overline{6})\right]:\left[0,875+0,75\cdot(2,5-2,\overline{3})\right]$ [1]

c) $\left\{3-\left[0,\overline{6}-\left(0,1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0,25\right\}^{2}\cdot\left(0,\overline{6}-0,625\right)$ $\left[\frac{8}{27}\right]$

d) $\left(\frac{12}{9}-1\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^3 \cdot \left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right] - \frac{1}{(-4)^2}$ $\left[\frac{25}{4}\right]$

3.154 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} - \dfrac{\left(\frac{1}{3}+0,5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0,5\right)^{-2}} + \left(\frac{0,5-0,1}{1-0,5}\right)^{-2} - 4^{-2}$ $\left[-\frac{9}{2}\right]$

b) $\left[0,1\overline{6} + (0,1\overline{36} + 0,41\overline{6} - 0,2\overline{27}) : 0,3\overline{90}\right] : \left[0,\overline{36} + 2.25 \cdot (0,\overline{5} - 0,\overline{27})\right]$ $[1]$

c) $\dfrac{1,6 - 0,5 \cdot (0,\overline{6} - 0,5) : (1 - 0,\overline{6})^2 - 0,7}{3 \cdot (1-0,5)^2 + 0,875 - (1-0,5)^2 : 0,2 - 0,6 \cdot 0,5}$ $[2]$

d) $0,1\overline{6}^2 + \left[1,5 : 1,5^2 + (1,\overline{6} - 0,5) : (2 - 0,\overline{3}) + (0,\overline{6} + 0,5 - 0,2) \cdot 0,75 : 5,8\right] \cdot 0,\overline{6}$ $\left[\frac{38}{45}\right]$

3.155 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{0,8\overline{3} - \left[0,\overline{6} + (0,75 - 0,\overline{6}^2 - (1 - 2,\overline{3} \cdot 0,25))\right] + 0,\overline{6} : 0,\overline{8}\right\} : 1,02\overline{7}$ $\left[\frac{40}{37}\right]$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^3}} - \sqrt{\dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{24}}$ $\left[\frac{1}{15}\right]$

c) $\sqrt{20 - 2 \cdot (2+3) + (2+1) \cdot 5} + \sqrt{48 : 6 - 3 \cdot 2 + 10 : 5}$ $[7]$

d) $\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \left\{\left[\frac{11}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] : \left[\left(2 - \frac{7}{4}\right) + \frac{10}{3}\right]\right\}}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.156 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\sqrt{\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{4}{5}\right] \cdot \frac{1}{4}\right\}^2 : \left(1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}\right)^2}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

b) $\left(1 + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-2} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(4 - \frac{9}{2}\right)^{-3}$ $\left[-\frac{8}{81}\right]$

3.157. Calcola il valore dell'espressione $E = A - B$, dove

$$A = \left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4 : \left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2}, \qquad B = \left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right)^5\right)^2.$$

3.158 (*). L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo? [20]

3.159 (*). L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco? [9]

3.160 (*). I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa. Le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quante pagine è formato il libro? [105]

3.161 (*). Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i $3/7$ e i $2/7$ del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola? [189]

3.162 (*). Al supermercato ho speso $7/10$ della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai $13/20$ della somma iniziale e ho speso $2/15$ sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente? [270]

3.163 (*). In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli sono i $2/5$ di tutti gli animali, mentre le capre sono i $2/3$ degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono? [30, 18, 27]

3.164 (*). Tre casse pesano complessivamente 220kg la seconda pesa $1/2$ della prima e la terza pesa $1/3$ della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa. [132, 66, 22]

3.165 (*). Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni i tre operai potrebbero eseguire tutto il lavoro? [6]

3.166 (*). Un collezionista vende i $3/7$ della sua collezione costituita da 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono? [220]

3.167. Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di 280g e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene? [...]

3.168. Un misurino contiene $1/8$ di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5kg? [...]

3.169. In un'azienda $3/10$ degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda? [...]

3.170. A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica";
- 70 leggono "Il Corriere della sera";
- 30 leggono "La stampa";
- 10 leggono "La gazzetta dello sport".

Trasforma in percentuali i dati ottenuti. [...]

3.171. A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso? [...]

3.172 (*). Un'auto usata è stata acquistata a € 11 800 in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata? [€ 737,50]

3.173 (*). Un gestore di un bar acquista i cornetti a € 0,60 rivende a € 0,75. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto? [25%]

3.174. In un supermercato si vende il pomodoro pelato a € 0,60 in confezioni da 250g e a 1,00 euro in confezioni da 500g Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo? [...]

3.175 (*). In una piscina contenente $2800 m^3$ di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per $1000 m^3$ di acqua? [5, 36l]

3.176. Un televisore a $16/9$ ha la base di 18 pollici. Quanti pollici misura l'altezza? [...]

3.177. Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare? [...]

3.178. Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente? [21%]

3.179. Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno? [...]

3.180. Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo. [€ 2,15]

3.181. Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere? [...]

3.182. Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca 5 930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca? [...]

3.183. Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata? [...]

3.184. Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i $2/3$ dei candidati superano il primo test e $1/5$ di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test? [...]

3.185. L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di € 23 000 all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012, il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto? [...]

3.186. Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione? [19,19%]

3.187. Una ragazza, di 46kg, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso? [...]

3.188. Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile? [...]

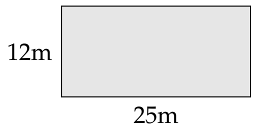
3.189. Una certa bevanda è ottenuta mescolando 1 parte di sciropppo con 5 parti di acqua. Per errore Adolfo ha mescolato 5 parti di sciroppo con 1 di acqua, ottenendo 3 litri di miscuglio. Aggiungendo una opportuna quantità di acqua, Adolfo può ottenere una bevanda in cui sono rispettate le proporziioni stabilite? Quanti litri di acqua deve aggiungere? [...]

Calcolo letterale 4

4.1 Espressioni letterali e valori numerici

4.1.1 Lettere per esprimere formule

Esempio 4.1. In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?



Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S = (25 \cdot 12)m^2 = 300m^2$.

Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?

La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con la formula $A = b \cdot h$ nella quale abbiamo indicato con b la misura di una dimensione e con h la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

❑ **Osservazione** La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.

4.1.2 Lettere per descrivere schemi di calcolo

Esempio 4.2. L'insegnante chiede agli alunni di scrivere «il doppio della somma di due numeri».

- Antonella scrive: $2 \cdot (3 + 78)$
- Maria chiede «Quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta»;
- Giulia scrive: $2 \cdot (a + b)$.

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

❑ **Osservazione** L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo.

Definizione 4.1. Un'*espressione letterale* o *espressione algebrica* è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.

Per esempio, la scrittura "$3 \cdot 4+$" non è corretta, in quanto il simbolo "$+$" dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale "$a \cdot c+$".

Come nelle espressioni numeriche, anche nelle espressioni letterali le parentesi indicano la priorità di alcune operazioni rispetto ad altre. La formula $a \cdot (x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri". Essa è diversa da $a \cdot x + y$ che rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

4.1.3 Lettere per esprimere proprietà

Le proprietà delle operazioni tra numeri si esprimono con lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi. La scrittura "$(a+b)+c = a+(b+c)$" per esempio esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

4.1.4 Valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2 \cdot x^2 + x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".

Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico

$$x \to x^2 \to 2 \cdot x^2 \to 2 \cdot x^2 + x$$

e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.

Calcoliamo il valore dell'espressione $2 \cdot x^2 + x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5. Seguiamo la schematizzazione $x \to x^2 \to 2 \cdot x^2 \to 2 \cdot x^2 + x$ e otteniamo: $5 \to 25 \to 50 \to 55$. Il risultato è 55. Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica $2 \cdot 5^2 + 5$ il cui risultato è 55.

E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?

Eseguiamo la sostituzione: $2 \cdot (-5)^2 + (-5) = \ldots$ Lasciamo a te il calcolo finale. Ti sarai accorto che il risultato è cambiato.

Definizione 4.2. In un'espressione letterale le *lettere* rappresentano le *variabili* che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri. Chiamiamo *valore* di un'espressione letterale il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale dipende dal *valore assegnato* alle sue variabili.

Esempio 4.3. Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per $a=1$, $b=1$.

Svolgimento: $3 \cdot 1 \cdot (1-1) = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

4.1.5 Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari per l'espressione $E = \dfrac{x-y}{3 \cdot x}$.

Caso I

x	y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3}=0$. Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

Caso II

x	y	E
0	25	?

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo punto di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0; il calcolo finale è dunque $-\frac{25}{0}$, impossibile. Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali (x, y) l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non possiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero. Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la *Condizione di Esistenza* (C. E.) $x \neq 0$.

L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un'espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.

Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la C. E., eliminando quei valori che rendono nullo il divisore. Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.

Quanto fa 15 diviso 5? Perché? In forma matematica: $15:5=3$ perché $3 \cdot 5 = 15$. Quindi, generalizzando $a:b=c$ se $c \cdot b = a$.

Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0:

- quanto fa 0:5? Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0 \cdot 5 = 0$.
- quanto fa 15:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15:0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x \cdot 0 = 15$.

➡ quanto fa 0:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non ne trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0:0=33$ infatti $33\cdot 0=0$. Anche $0:0=-189,6$ infatti $-189,6\cdot 0=0$. Anche $0:0=0$ infatti $0\cdot 0=0$. Ancora $0:0=10^{99}$ infatti $10^{99}\cdot 0=0$. Quindi $0:0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x\cdot 0=0$, per qualunque valore di x si ha $x\cdot 0=0$.

Consideriamo l'espressione letterale $E=\frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo:

a) la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma";
b) la domanda che riguarda il denominatore: "quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore?";
c) la C. E.: "a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
$E=\frac{a-b}{a+b}$					

Dalla C. E., ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4},0\right)$. La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

Cosa succede per la coppia (0,0)?

4.2 I monomi

4.2.1 Definizioni

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione $5\cdot a^2+\frac{3}{8}\cdot a\cdot b-7\cdot b^2$ verrà scritta in modo più compatto $5a^2+\frac{3}{8}ab-7b^2$.

Definizione 4.3. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama *monomio*.

Esempio 4.4. L'espressione nelle due variabili a e b, $E=5\cdot 2a^2\frac{3}{8}ab7b^2$ è un monomio perché numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.

Esempio 4.5. L'espressione $E = 2a^2 - ab^2$ non è un monomio poiché compare anche il segno di sottrazione.

❑ **Osservazione** Gli elementi di un monomio sono *fattori*, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche *potenze*, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

Definizione 4.4. Un monomio si dice *ridotto in forma normale* quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio 4.6. Il monomio $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8} ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna.

Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$ eseguiamo il prodotto di potenze con la stessa base otteniamo a^3b^3. Il monomio in forma normale è $E = \frac{105}{4}a^3b^3$.

Procedura 4.1. *Ridurre in forma normale un monomio:*

a) *moltiplicare tra loro i fattori numerici;*
b) *moltiplicare le potenze con la stessa base.*

Definizione 4.5. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama *coefficiente*.

Esempio 4.7. Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti.

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

Definizione 4.6. Se il coefficiente del monomio è zero il *monomio* si dice *nullo*.

Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la *parte letterale*.

Esempio 4.8. L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è un monomio; il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3, b, c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione; il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Esempio 4.9. Controesempi:

a) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3 + bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione;

b) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Definizione 4.7. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono *simili*.

Esempio 4.10. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0,5a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

❑ **Osservazione** Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

Definizione 4.8. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono *monomi opposti*.

Esempio 4.11. I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Esempio 4.12. Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$ ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti.

Definizione 4.9. Il *grado complessivo* di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il *grado* del monomio *rispetto a quella variabile*.

Esempio 4.13. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale $(3+1+2=6)$. Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado, rispetto alla variabile c è di secondo grado.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o piùvariabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?

Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo $56a^3 \cdot 1 \cdot c^2 = 56a^3c^2$. Se in un monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0 = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

❑ **Osservazione** Esistono *monomi di grado 0*; essi presentano solo il coefficiente e pertanto *sono* equiparabili ai *numeri razionali*.

4.2.2 Valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio 4.14. Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x = -3$, $y = 5$ e $z = 0$.

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3 \cdot (-3)^4 \cdot 5^5 \cdot 0 = 0$ essendo uno dei fattori nullo.

❑ **Osservazione** Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo $\frac{1}{2}bh$ area del quadrato l^2 perimetro del quadrato $4l$ area del rettangolo bh volume del cubo l^3 ecc. Esse acquistano significato quando alle lettere sostituiamo numeri che rappresentano le misure della figura considerata.

4.2.3 Moltiplicazione di monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.

Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.

La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

Definizione 4.10. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempio 4.15. Assegnati i monomi $m_1 = -4x^2yz^3$ e $m_2 = \frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3 = \left(-4 \cdot \frac{5}{6}\right)\left(x^2 \cdot x^3\right) \cdot y \cdot \left(z^3 \cdot z^6\right) = -\frac{10}{3}x^5yz^9.$$

Procedura 4.2 (per moltiplicare due monomi)**.** *La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:*

a) nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;
b) nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.

Proprietà della moltiplicazione

a) commutativa: $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$
b) associativa: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$
c) 1 è l'elemento neutro: $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$
d) se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$.

4.2.4 Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente.

$$\text{Potenza} = \text{base}^{\text{esponente}} = \underbrace{(\text{base} \cdot \text{base} \cdot \text{base} \cdot \ldots \cdot \text{base})}_{\text{tanti fattori quanti ne indica l'esponente}}.$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

Definizione 4.11. La *potenza di un monomio* è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio 4.16. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2b$.

$$m_1 = -\frac{1}{2}a^2b \qquad \text{elevo al quadrato}$$
$$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4b^2.$$

$$m_1 = -\frac{1}{2}a^2b \qquad \text{elevo al cubo}$$
$$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6b^3.$$

Esempio 4.17. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3b^2c^2$.

$$m_2 = 5a^3b^2c^2 \qquad \text{elevo al quadrato}$$
$$(5a^3b^2c^2)^2 = (5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 = 25a^6b^4c^4.$$

$$m_2 = 5a^3b^2c^2 \qquad \text{elevo al cubo}$$
$$(5a^3b^2c^2)^3 = (5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^2)^3 = 125a^9b^6c^6.$$

Procedura 4.3. *Eseguire la potenza di un monomio:*

a) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio;
b) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l'esponente della variabile per l'esponente delle potenza.

4.2.5 Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2 \neq 0$, eseguire la divisione $d_1 : d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ basta la condizione $d_2 \neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Definizione 4.12. Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempio 4.18. $(36x^5y^2) : (-18x^3y)$.

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2) = q \cdot (-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q = -2x^2y$. Infatti $(-2x^2y) \cdot (-18x^3y) = (36x^5y^2)$. Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura 4.4 (Calcolare il quoziente di due monomi)**.** *Il quoziente di due monomi è così composto:*

a) il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati;
b) la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili;
c) se la potenza di alcune lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempio 4.19. $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$.

Seguiamo i passi descritti sopra

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right) = \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{8}{21}\right) a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1} = -\frac{4}{3}a^2x^2y.$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione le Condizioni di Esistenza (C. E.): C. E. $= a \neq 0$ e $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Esempio 4.20. $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$.

La C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$, il quoziente è

$$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right) = \left(\frac{9}{20}\right) \cdot (-8)a^{2-5}b^{4-2} = -\frac{18}{5}a^{-3}b^2.$$

Osserviamo che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

4.2.6 Addizione di due monomi

L'addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell'addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

Addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio 4.21. Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$.

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$.

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

Proprietà della addizione

a) commutativa: $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$
b) associativa: $m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$
c) 0 è l'elemento neutro: $0 + m = m + 0 = m$
d) per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m^* tale che

$$m + m^* = m^* + m = 0.$$

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

❑ **Osservazione** Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio 4.22. Assegnati $m_1 = \frac{1}{2}a^2b$, $m_2 = -5a^2b$ determina $m_1 - m_2$.

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b - (-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b + 5a^2b = \frac{11}{2}a^2b$.

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo *somma algebrica di monomi*.

❑ **Osservazione** La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 4.23. Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{5} - 2 - \frac{1}{2}\right)x^4 = -\frac{13}{30}x^4.$$

Addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2 = (7a^3b^2 + a^3b^2) - 5a^2b^3 = 8a^3b^2 - 5a^2b^3.$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato *riduzione dei termini simili*.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempio 4.24. Calcola la seguente somma: $3a - 7a + 2a + a$.

Il risultato è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili, precisamente $-a$.

Esempio 4.25. Calcola la seguente somma: $\frac{1}{2}a^3 + b - \frac{3}{4}a^3 - \frac{6}{5}b$.

Il risultato non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $-\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{5}b$.

4.2.7 Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E = (-\frac{1}{2}a^2b)^3 : (a^5b) + (-2ab) \cdot (\frac{1}{2}b + b) + 5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che vi compaiono sono monomi.

Se volessimo calcolare il valore di E per $a = 10$ $b = -2$ dovremmo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

Esempio 4.26.

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b) + (-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right) + 5ab^2 && \text{sviluppiamo per prima il cubo}\\
=&\left(-\frac{1}{8}a^6b^3 : a^5b\right) + (-2ab)\cdot\frac{3}{2}b + 5ab^2 && \text{eseguiamo divisione e moltiplicazione}\\
=&-\frac{1}{8}ab^2 - 3ab^2 + 5ab^2 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{15}{8}ab^2.
\end{aligned}
$$

Ora è più semplice calcolarne il valore: per $a = 10$ e $b = -2$ si ha $= \frac{15}{8}\cdot 10\cdot(-2)^2 = \frac{15}{8}\cdot 10\cdot 4 = 75$.

Esempio 4.27.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : \left(-3ab^3\right) - \frac{2}{9}abc^2 && \text{Sviluppiamo le potenze}\\
=&\frac{4}{9}a^2b^4c^2 : \left(-3ab^3\right) - \frac{2}{9}abc^2 && \text{eseguiamo la divisione e moltiplichiamo le frazioni}\\
=&-\frac{4}{27}abc^2 - \frac{2}{9}abc^2 && \text{somiamo i monomi simili}\\
=&\frac{-4-6}{27}abc^2 && \text{il risultato è}\\
=&-\frac{10}{27}abc^2
\end{aligned}
$$

Esempio 4.28. $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right) : \left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$. Eseguiamo per prima la divisione tra le parentesi quadre.

$$
\begin{aligned}
=&\left[+\frac{14}{16}\cdot\frac{4}{14}xy\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{eseguiamo la moltiplicazione tra le frazioni}\\
=&\left[\frac{1}{4}xy\right]^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{sviluppiamo il cubo}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3 + \frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{moltiplichiamo i due monomi}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3 + \frac{1}{8}x^3y^3 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{1+8}{64}x^3y^3 && \text{il risultato è}\\
=&\frac{9}{64}x^3y^3.
\end{aligned}
$$

4.2.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.

Definizione 4.13. Un monomio A si dice *multiplo* di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A = B \cdot C$ in questo caso diremo anche che B è *divisore* del monomio A.

Definizione 4.14. Il massimo comune divisore tra due o piùmonomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro MCD, se non sono interi è opportuno scegliere 1.

Esempio 4.29. Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni:

$$1; 2; 4; a; a^2; b; ab; a^2b; 2a.$$

$$2a^2; 2b; 2ab; 2a^2b; 4a; 4a^2; 4b; 4ab; 4a^2b.$$

Il monomio di grado massimo è a^2b, il MCD tra i coefficienti è 4. Pertanto il MCD dei monomi è $4a^2b$.

Procedura 4.5 (Calcolare il MCD tra monomi)**.** *Il* MCD *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) per coefficiente numerico il MCD *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.

Esempio 4.30. Calcolare $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c)$.

Per prima cosa calcoliamo il MCD tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2.

In definitiva, $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c) = 2ab^2$.

Esempio 4.31. Calcolare il massimo comune divisore tra $5x^3y^2z^3$ $-\frac{1}{8}xy^2z^2$ $7x^3yz^2$.

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del MCD. Le lettere in comune sono xyz, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha xyz^2.

Quindi, $\text{MCD}(5x^3y^2z^3; -\frac{1}{8}xy^2z^2; 7x^3yz^2) = xyz^2$.

❑ **Osservazione** La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del MCD, nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del MCD Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

Definizione 4.15. Due monomi si dicono *monomi primi tra loro* se il loro MCD è 1.

Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo.

Definizione 4.16. Il *minimo comune multiplo di due o più monomi* è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro mcm, se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio 4.32. Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$$5a^3b \text{ alcuni multipli: } 10a^3b, 10a^3b^2, 10a^4b, 15a^3b \ldots$$

$$10a^2b^2 \text{ alcuni multipli: } 10a^2b^3, 10a^3b^2, 10a^4b^2, 20a^2b^2 \ldots$$

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il mcm, è utile invece la seguente procedura.

Procedura 4.6 (Calcolo del mcm tra due o più monomi)**.** *Il* mcm *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) *per coefficiente numerico il* mcm *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) *la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.*

Esempio 4.33. Calcola il minimo comune multiplo tra $5a^3bc$, $12ab^2c$ e $10a^3bc^2$.

Il mcm tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado maggiore delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $\text{mcm}(5a^3bc; 12ab^2c; 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempio 4.34. Calcola il minimo comune multiplo tra $6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il mcm avrà come coefficiente 1.

La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z.

In definitiva $\text{mcm}(6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz) = x^3y^2z$.

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z, calcoliamo MCD e mcm.

$\text{MCD}(x^2y; xy^2z) = xy$ e $\text{mcm}(x^2y; xy^2z) = x^2y^2z$.

Moltiplichiamo ora MCD e mcm, abbiamo: $xy \cdot x^2y^2z = x^3y^3z$.

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo: $(x^2y) \cdot (xy^2z) = x^3y^3z$.

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il MCD e il mcm. Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale.

Proprietà 4.7. *Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.*

4.3 Polinomi

4.3.1 Definizioni fondamentali

Definizione 4.17. Un polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi.

Esempio 4.35. Sono polinomi: $6a + 2b$, $5a^2b + 3b^2$, $6x^2 - 5y^2x - 1$, $7ab - 2a^2b^3 + 4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in *forma normale* o *ridotto*; se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.

Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato *termine noto*.

Esempio 4.36. Il polinomio $3ab + b^2 - 2ba + 4 - 6ab^2 + 5b^2$ ridotto in forma normale diventa $ab + 6b^2 - 6ab^2 + 4$. Il termine noto è 4.

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempio 4.37. Binomi, trinomi, quadrinomi.

a) $xy - 5x^3y^2$ è un binomio;
b) $3ab^2 + a - 4a^3$ è un trinomio;
c) $a - 6ab^2 + 3ab - 5b$ è un quadrinomio.

Definizione 4.18. Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono *uguali*, più precisamente vale il *principio di identità dei polinomi*: due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.

Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi *opposti*.

Definiamo, inoltre, un polinomio *nullo* quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempio 4.38. Polinomi uguali, opposti, nulli.

a) I polinomi $\frac{1}{3}xy + 2y^3 - x$ $\quad 2y^3 - x + \frac{1}{3}xy$ sono uguali;
b) i polinomi $6ab - 3a + 2b$ $\quad 3a - 2b - 6ab$ sono opposti;
c) il polinomio $7ab + 4a^2 - ab + b^3 - 4a^2 - 2b^3 - 6ab + b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Definizione 4.19. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, *grado di un polinomio rispetto ad una data lettera* l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio, dopo che è stato ridotto a forma normale.

Esempio 4.39. Grado di un polinomio.

- Il polinomio $2ab + 3 - 4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado;
- il grado del polinomio $a^3 + 3b^2a - 4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più grande con cui tale lettera compare è 3.

Definizione 4.20. Un polinomio si dice *omogeneo* se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio 4.40. Il polinomio $a^3 - b^3 + ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

Definizione 4.21. Un polinomio si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera*, quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio 4.41. Il polinomio $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2y - 2xy^2 + \frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Definizione 4.22. Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice *completo* se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio 4.42. Il polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

❑ **Osservazione** Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4 - x + 1 + 4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - x + 1$.

4.3.2 Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.

Definizione 4.23. La *somma di due o più polinomi* è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

La differenza di polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo polinomio.

Esempio 4.43. Differenza di polinomi.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - \left(2a^2 + ab - \frac{1}{2}b\right) &= 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - 2a^2 - ab + \frac{1}{2}b \\ &= a^2 + \frac{-1-2}{2}ab + \frac{4+1}{2}b \\ &= a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}b. \end{aligned}$$

4.3.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

Per eseguire il prodotto tra il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy + 5x^3y^2$ indichiamo il prodotto con $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2)$. Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2) = 6x^3y^2 + 15x^5y^3$.

❑ **Osservazione** Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio 4.44. Prodotto di un monomio per un polinomio.

$$\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)$$
$$=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4.$$

4.3.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.

Definizione 4.24. Si dice che un *polinomio è divisibile per un monomio*, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice *divisore* del polinomio.

Esempio 4.45. Quoziente tra un polinomio e un monomio.

$$\left(6x^5y+9x^3y^2\right):\left(3x^2y\right)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy.$$

❑ **Osservazione**

a) Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero;
b) un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore letterale del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo;
c) la divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio;
d) il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

4.3.5 Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Esempio 4.46. Prodotto di polinomi.

a) $\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$. Riducendo i termini simili:

$$\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+\underline{3a^3b^3}+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2$$
$$+9a^2b^2-\underline{2a^3b^3}+4a^2b-12a^2b^3$$
$$=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3.$$

b) $\left(x-y^2-3xy\right)\cdot\left(-2x^2y-3y\right)$. Moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo otteniamo.

$$\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y-3y\right)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2+9xy^2;$$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)$.

$$\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{3}{8}x^4+\underline{\frac{1}{2}x^3}-\underline{\frac{3}{2}x^3}-2x^2=\frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2.$$

4.4 Prodotti notevoli

Con l'espressione prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi aventi caratteristiche particolari facili da ricordare.

4.4.1 Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio $A+B$ in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A+B)(A+B)$, che sotto forma di potenza si scrive $(A+B)^2$.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2.$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

❑ **Osservazione** Il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.

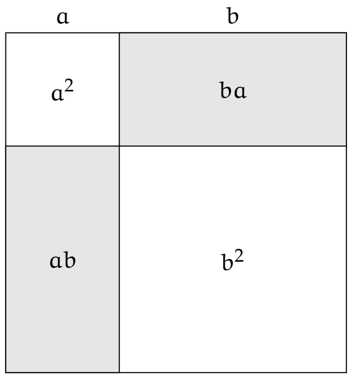
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A+B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.

Ne consegue che:

a) A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi;
b) $2AB$ è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.

È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti.

Prendiamo due segmenti di lunghezza a e b, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo a con il primo estremo del segmento di lunghezza b: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a+b$. Costruiamo il quadrato di lato $a+b$, il quale avrà area $(a+b)^2$ e dividiamolo come nella figura a fianco.



Puoi notare che il quadrato di lato $a+b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area ab. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$.

4.4.2 Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A + B + C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= (A+B+C)\cdot(A+B+C)\\ &= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2\\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.\end{aligned}$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$

❑ **Osservazione** Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi.

Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt.$$

4.4.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2. \qquad (4.1)$$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

❑ **Osservazione** Il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.

Esempio 4.47. $\left(3a^2 + 5ab\right) \cdot \left(3a^2 - 5ab\right)$.

Moltiplichiamo $3a^2 \cdot 3a^2$ e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^2 - 25a^2b^2$.

Esempio 4.48.

$$\left(-\frac{1}{4}x^2 + b\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}x^2 + b\right).$$

Osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (4.1) occorre porre $A = b$ $B = \frac{1}{4}x^2$. Il risultato è quindi $A^2 - B^2 = b^2 - \frac{1}{16}x^4$.

Esempio 4.49. Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28 \cdot 32$.

Svolgimento: $28 \cdot 32 = (30-2)(30+2) = 900 - 4 = 896$.

Esempio 4.50. $(2x + 1 - y)(2x + 1 + y)$.

Possiamo riscrivere il prodotto nella forma

$$(\underbrace{(2x+1)}_{A} - \underbrace{y}_{B})(\underbrace{(2x+1)}_{A} + \underbrace{y}_{B}) = \underbrace{(2x+1)^2}_{A^2} - \underbrace{y^2}_{B^2} = 4x^2 + 4x + 1 - y^2.$$

4.4.4 Cubo di un binomio

Si consideri il binomio $A + B$, il suo cubo sarà dato da:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right)(A+B)\\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3\\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

❑ **Osservazione** Il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio.

Essendo $(A-B)^3 = [A + (-B)]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

4.4.5 Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a + b$ fino all'ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\ (a+b)^1 &= a + b\\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto *triangolo di Tartaglia*.

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
```

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente. Nella figura che segue evidenziamo come costruire il triangolo:

```
                1

            1       1
             ↘ + ↙
        1       2       1
         ↘ + ↙   ↘ + ↙
    1       3       3       1
     ↘ + ↙   ↘ + ↙   ↘ + ↙
1       4       6       4       1
```

Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

4.5 Esercizi

4.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.1 Espressioni letterali e valori numerici

4.1. Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC

Svolgimento: l'area del quadrato è ......, l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è .... Pertanto l'area della superficie in grigio è ......

4.2. Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase "eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato".

Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di a si indica con ..., il doppio quadrato di a si indica con ... e infine il quadrato della differenza sarà: ...

4.3. Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$

Svolgimento: "Eleva al ...... la differenza tra ......"

4.4. Individua tra le espressioni letterali sottostanti, quelle scritte correttamente:

a) $b \cdot \frac{4}{5} + \left(3 - \frac{7}{2}\right) \cdot a - a$
b) $a \cdot +2 - b^4$
c) $x \cdot (a-b)^2 + (x-3)$
d) $x^y - a : 2$
e) $-a + 4b + c$
f) $\frac{a \cdot 1}{2} - \frac{a}{2}$

4.5. Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

Commutativa dell'addizione	$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$
Associativa della moltiplicazione	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva prodotto rispetto alla somma	$a + b = b + a$

4.6. Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione

Svolgimento: "considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione ......; cioè ...."

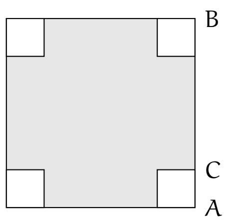


FIGURA 4.1: Esercizio 4.1

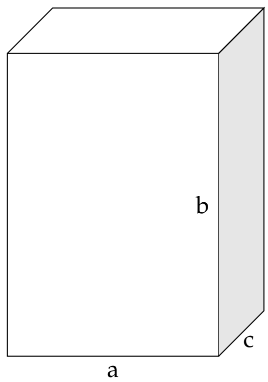


FIGURA 4.2: Esercizio 4.10

4.7. Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B = 5\text{cm}$, base minore $b = 2\text{cm}$ e altezza $h = 4\text{cm}$

4.8. Scrivi la formula che permette di calcolare il lato di un quadrato di perimetro l

4.9. Determina l'altezza h relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC

Caso *numerico*: $\overline{AB} = 8\text{m}$, $\overline{AC} = 15\text{m}$.

Caso *generale*: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i

4.10. Il volume della scatola (figura 4.2) avente le dimensioni di 7cm, 10cm, 2cm è . . .

Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni . . . . . .

Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

a) $2 \cdot a \cdot b \cdot c$
b) $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$
c) $6 \cdot a \cdot b \cdot c$
d) $8 \cdot a \cdot b \cdot c$

4.11. Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi:

a) moltiplica a per l'opposto del cubo di a:
b) somma al triplo di a il doppio quadrato di b
c) moltiplica l'inverso di b per il quadrato dell'inverso di a
d) somma al cubo di a il quadrato della somma di a e b
e) dividi il quadrato di a per il triplo cubo di b
f) moltiplica il quadrato di b per l'inverso del cubo di a
g) il cubo di un numero, aumentato di 2, è uguale al quadrato della differenza tra lo stesso numero e uno;
h) il reciproco della somma dei quadrati di a e di b
i) il cubo della differenza tra 1 e il cubo di a
j) la somma dei quadrati di a e di b per il quadrato della differenza tra a e b

4.1.4 Valore numerico di un'espressione letterale

4.12. Consideriamo l'espressione letterale $E = -3 \cdot a + 2 \cdot (-a + 1)$

Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera a supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni valori della variabile:

$$a = -2 \rightarrow \quad E = -3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-(-2) + 1) = 6 + 2 \cdot (2 + 1) = 6 + 6 = 12$$
$$a = +1 \rightarrow \quad E = -3 \cdot (1) + 2 \cdot (-(1) + 1) = -3 + 2 \cdot (-1 + 1) = -3 + 0 = -3$$
$$a = -1 \rightarrow \quad E = -3 \cdot (\ldots) + 2 \cdot (\ldots + 1) = \ldots\ldots\ldots$$

Completa la seguente tabella.

a	-2	1	-1	$0,1$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-11	0
$E = -3a + 2(-a + 1)$	12	-3						

4.13. Calcolare il valore numerico dell'espressione: $\dfrac{a}{a-3} + \dfrac{b}{3-b}$ per $a = -1$, $b = 0$

Svolgimento: $\dfrac{-1}{-1-3} + \dfrac{0}{3-0} = \ldots\ldots$

4.14. Calcola il valore dell'espressione $E = \frac{x-y}{3x}$ costruita con le variabili x e y che rappresentano numeri razionali. L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo: "la divisione tra la differenza di due numeri e il triplo del primo numero". Completa la seguente tabella:

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{3}{4}$	-4	...	...
y	-2	0	0	-2	...	...
$E = \frac{x-y}{3x}$						

Ti sarai accorto che in alcune caselle compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto?

Vi sono, secondo te, altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

4.15. Scrivi con una frase le seguenti espressioni

a) $2b - 5a$ b) $a\frac{1}{a}$ c) $(a+b)^2$ d) $\frac{3x+y}{2x^2}$

4.16. Completa la tabella sostituendo nella espressione della prima colonna i valori indicati.

Espressione	$x=1$	$x=-1$	$x=0$	$x=2$	$x=\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=0,1$	$x=\frac{1}{10}$
$2x+1$								
$-(3x-2)$								
x^2+2x+2								
x^2-x								
$-x^2+x-1$								
x^3-1								
x^3+3x^2								
$-x^3+x^2-x$								
$-(x+1)^2$								

4.17. Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $3x^2 - \frac{1}{4}x^2$ per $x = \frac{1}{2}$ *Svolgimento*: $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots = \frac{11}{16}$

b) $5a^2b$ per $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{5}$ *Svolgimento*: $5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\frac{3}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2}a - 1$ per $a = 0$, per $a = -1$ e $a = 2$

d) $2 \cdot x^5 - 8 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 8$ per $x = +1$ e $x = -1$

4.18. Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ per $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$

b) $x^2 + 2x + 1$ per $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$

c) $-a^2 \cdot b \cdot c^3$ per $a = 1, b = -1, c = -2$ e $a = -1, b = \frac{9}{16}, c = \frac{4}{3}$

d) $-\frac{3}{2}a+2b^2+11$ per $a=-20,\ b=-\frac{1}{2}$ e $a=\frac{2}{3},\ b=0$

e) $-a^2+\frac{1}{a}-3\cdot a^3$ per $a=\frac{1}{3},\ a=-1$ e $a=+1$

[$\frac{11}{4}$]

4.19 (*). Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

a) $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2},\ y=2$ e $x=2,\ y=\frac{1}{2}$ [$\frac{29}{2}$]

b) $\frac{2}{3}a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3,\ b=-1$ e $a=\frac{1}{3},\ b=0$ [-16]

c) $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2,\ y=-1$ e $x=-2,\ y=+1$ [-7]

d) $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4},\ b=-2$ e $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ [$\frac{5}{8}$]

e) $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2,\ y=\frac{3}{4}$ e $x=-1,\ y=-1$ [$\frac{311}{8}$]

4.1.5 Condizione di esistenza di un'espressione letterale

4.20. Se $E=-\frac{x-2}{2}x^2$ completa la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

4.21. Calcola il valore numerico dell'espressione: $\frac{3x-1}{x}$ per $x=0$

Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per . . . e quindi . . .

4.22 (*). Sostituendo alle lettere i numeri, a fianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

a) $\frac{x+3}{x}$ per $x=0$. $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

b) $\frac{x^2+y}{x}$ per $x=3, y=0$. $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

c) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ per $a=1, b=1$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

d) $\frac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ per $x=2, y=-2$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

e) $\frac{a^3+b+6a^2}{a^2+b^2+3ab-3a^2}$ per $a=1, b=\frac{4}{3}$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

4.23. Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono vere o false

a) $a^2+b^2=(a+b)^2$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $(5a-3b)\cdot(a+b)=5a^2+ab-3b^2$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

4.24. Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n+1$ dà origine:

$\boxed{A}$ ad un numero primo
$\boxed{B}$ ad un numero dispari
$\boxed{C}$ ad un quadrato perfetto
$\boxed{D}$ ad un numero divisibile per 3

4.25. Quale formula rappresenta un multiplo di 5, qualunque sia il numero naturale n?

$\boxed{A}$ $5+n$ $\boxed{B}$ n^5 $\boxed{C}$ $5\cdot n$ $\boxed{D}$ $\frac{n}{5}$

4.26. La tabella mostra i valori assunti da y al variare di x Quale delle seguenti è la relazione tra x e y?

x	1	2	3	4
y	0	3	8	15

$\boxed{A}$ $y=x+1$ $\boxed{B}$ $y=x^2-1$ $\boxed{C}$ $y=2x-1$ $\boxed{D}$ $y=2x^2-1$

4.27. Verifica che sommando tre numeri dispari consecutivi si ottiene un multiplo di 3. Utilizza terne di numeri dispari che cominciano per 3; 7; 11; 15; 21. Per esempio $3+5+7=\ldots$ multiplo di? Vero. Continua tu.

4.2.1 Definizioni

4.28. Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi.

$$E_1=35x^2+y^2; E_2=-4^{-1}ab^4c^6; E_3=\frac{4}{x}y^2; E_4=-\frac{87}{2}x^2z.$$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la ....; pertanto sono monomi ....

4.29. Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$$\frac{4}{9}ab18c^3 2^{-2}a^3b=\frac{\cdots}{\cdots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots};\qquad -x^5\frac{1}{9}y^4\left(-1+5\right)^2y^7=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4.30. Nell'insieme $M=\left\{-\frac{34}{5}a^3b, 3^2a^2b^4, \frac{1}{3}ab^3, a^3b, -a, 7a^2b^4, -\frac{1}{3}ab^3, -89a^3b\right\}$, determina i sottoinsiemi dei monomi simili; rappresenta con un diagramma di Venn.

4.2.2 Valore di un monomio

4.31. Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h=2,5$ e base $b=\frac{3}{4}$

4.32. Calcola il valore dei seguenti monomi in corrispondenza dei valori indicati per ciascuna lettera.

a) $-\frac{2}{9}xz$ per $x=\frac{1}{2}, z=-1$
b) $-\frac{8}{5}x^2y$ per $x=-1, y=+10$
c) $-\frac{1}{2}a^2bc^3$ per $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}, c=-1$
d) $\frac{7}{2}a^3x^4y^2$ per $a=\frac{1}{2}, x=2, y=-\frac{1}{2}$
e) $\frac{8}{3}abc^2$ per $a=-3, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{2}$

4.33. Il grado complessivo di un monomio è:

a) l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
b) la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
c) il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
d) la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

4.34. Due monomi sono simili se:

a) hanno lo stesso grado;
b) hanno le stesse variabili;
c) hanno lo stesso coefficiente;
d) hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

4.35. Individua e sottolinea i monomi tra le seguenti espressioni letterali:

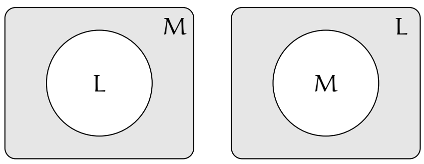
$$3+ab; -2a; -\frac{7}{3}ab^2; -(\frac{4}{3})^3; a^2bc\cdot\frac{-2}{a^3}; 4a^{-3}b^2c^5; -x; 8x^4-4x^2; -y\cdot(2x^4+6z); \frac{abc^9}{3+7^{-2}}$$

4.36. Nel monomio $m=-\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo: coefficiente $=\ldots$, parte letterale $=\ldots$, grado complessivo $=\ldots$, il grado della lettera $x=\ldots$

4.37. Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:

a) "Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili"
V F perché ....
b) "Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado"
V F perché ....

4.38. Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione: «alcune espressioni letterali non sono monomi». L: insieme delle espressioni letterali, M: insieme dei monomi.



A B

4.39. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F
b) Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F
c) Il monomio b^6 è il cubo di b^2 V F
d) L'espressione ab^{-1} è un monomio. V F
e) Il valore del monomio ab è nullo per $a=1$e$b=-1$ V F

4.2.3 Moltiplicazione di monomi

4.40. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $\left(-x^2y^4\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}x^2y\right)$

b) $\left(-\frac{15}{28}xy^3\right)\cdot\left(-\frac{7}{200}x^2y^2\right)$

c) $\left(a^5b^5y^2\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}a^2y^2b^3\right)$

d) $2,5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\cdot 1,5a$

e) $\left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$

f) $-8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$

g) $5x^3y^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

h) $6ab\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2\right)\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 4a^2$

4.41. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $(-2xy)\cdot(+3ax)$

b) $6a(-2ab)\left(-3a^2b^2\right)$

c) $(-1)(-ab)$

d) $1,5a^2b\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$

e) $-\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$

f) $-x\left(14x^2\right)$

4.42. Determina il prodotto delle seguenti coppie di monomi.

a) $1,\overline{6}xa\left(1,2xy^2\right)$

b) $\left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$

c) $\left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$

d) $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$

e) $\left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$

f) $\left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$

4.43. Sulla base degli esercizi precedenti puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:

a) il prodotto dei gradi dei suoi fattori;
b) la somma dei gradi dei suoi fattori;
c) minore del grado di ciascuno dei suoi fattori;
d) uguale al grado dei suoi fattori.

4.2.4 Potenza di un monomio

4.44. Esegui le potenze indicate.

a) $\left(-\frac{3}{5}abx^3y^5\right)^3=\frac{\dots}{\dots}a^3b^3x^{\cdots}y^{\cdots}$

b) $\left(-a^4b^2\right)^7=\dots$

c) $\left(-3x^3y^4z\right)^2=9x^6y^{\cdots}z^{\cdots}$

d) $\left(\frac{1}{2}a^2bc^5\right)^4=\frac{1}{\dots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots}$

e) $\left(a^3b^2\right)^8=\dots$

f) $\left(-5ab^2c\right)^3=\dots$

4.45. Esegui le potenze indicate.

a) $(+2ax^3y^2)^2$
b) $\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$
c) $\left(\frac{3}{4}x^4y\right)^3$
d) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$
e) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$
f) $\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$

4.46. Esegui le operazioni indicate.

a) $\left[(-rs^2t)^2\right]^3$
b) $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2\right]^3$
c) $\left[\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2\right]^2$
d) $(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3$
e) $-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$
f) $-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$
g) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 \cdot (-3ab^3)^2$
h) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 \cdot \frac{2}{3}a^2b\right]^2$

4.2.5 Divisione di due monomi

4.47. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $15b^8 : \left(-\frac{40}{3}b^3\right)$
b) $\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right) : \left(-\frac{26}{27}xyz\right)$
c) $(-a^7) : (8a^7)$
d) $\left(\frac{1}{2}a^3\right) : (-4a^5)$
e) $\left(-\frac{12}{2}a^7b^5c^2\right) : (-18ab^4c)$
f) $(-34x^5y^2) : (-2yz^3)$

4.48. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $21a^3x^4b^2 : 7ax^2b$
b) $a^6 : 20a^2$
c) $20ax^4y : 2xy$
d) $-72a^4b^2y^2 : (-3ab^2)$

4.49. Esegui le operazioni indicate e poni le C. E.:

a) $48a^5bx : a^2b$
b) $\left[-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 : (x^3y^2)^2$
c) $\left[\frac{3}{5}x^4 : \left(\frac{1}{3}x^4\right)\right] \cdot \left[x^4 : \left(\frac{4}{5}x^4\right)\right]$
d) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : (-3ab^3)$

4.2.6 Addizione di due monomi

4.50. Determina la somma dei monomi simili $8a^2b + (-\frac{2}{3})a^2b + \frac{1}{6}a^2b$

La somma è un monomio .... agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \ldots$, la parte letterale è .... Quindi la somma è ....

4.51. Determina la somma $S = 2a - 3ab - a + 17ab + 41a$

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando le proprietà associativa e commutativa in modo da affiancare i monomi simili:

$$S = 2a - 3ab - a + 17ab + 41a = (\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

La somma ottenuta non è un ....

4.52. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $6x + 2x - 3x$
b) $-3a + 2a - 5a$
c) $5a^2b - 3a^2b$
d) $a^2b^2 - 3a^2b^2$
e) $2xy - 3xy + xy$
f) $2y^2 - 3y^2 + 7y^2 - 4y^2$

4.53. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $-2xy^2 + xy^2$
b) $-3ax - 5ax$
c) $5ab - 2ab$
d) $-3xy^2 + 3xy^2$
e) $7xy^3 - 2xy^3$
f) $+2xy^2 - 4xy^2$

4.54. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a^2 - a^2$
b) $+2xy^2 - 4xy^2 + xy^2$
c) $-5x^2 + 3x^2$
d) $\frac{1}{2}a + 2a$
e) $5a^2b + 2a^2b + a^2b - 3a^2b - a^2b$
f) $0,1x - 5x - 1,2x + 3x$

4.55. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{4}a^3b^2 - \frac{1}{2}a^3b^2$
b) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}x - 2x + \frac{3}{10}x$
c) $\frac{2}{5}ab - \frac{1}{2}ab + \frac{27}{2}ab - \frac{1}{10}ab - \frac{5}{2}ab$
d) $-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) - 3ax^2$
e) $-\frac{9}{2}xy - (-xy)$
f) $2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2 - xy^2$

4.56. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a + 2a + (2a - a) - \left(3a - \frac{1}{2}a\right)$
b) $6xy^2 + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{4}xy^2 - 6xy^2$
c) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$
d) $\left(\frac{2}{3}a + a\right) - \left(\frac{2}{3}a - a\right)$
e) $5ab - 2ab + (-ab) - (+2ab) + ab$
f) $-1,2x^2 + 0,1x^2 + (-5x)^2 - (-25x)^2$

4.57. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^2 - 2x^2 - \frac{3}{5}x^2\right)$
b) $5x^3y^2 + \left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) - (x^3y^2) + \left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)$
c) $\left(2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right) - (xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2) + \left(xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right)$

4.2.7 Espressioni con i monomi

4.58 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2a\right)+(2a-a)\left(3a-\frac{1}{2}a\right)a$
b) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}a\right)a+\left(7a-\frac{1}{3}a\right)^2:2$
c) $\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{6}x^3\left(12x-\frac{18}{5}x\right)$
d) $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a$
e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a\right)^2:\left(\frac{3}{2}a-2a\right)$
f) $(3a-2a)(2x+2x):2a$

4.59 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right)$ $\left[\frac{7}{72}x^3\right]$
b) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)-\frac{7}{60}x$ $[-2x]$
c) $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3a-a)+0,5a\right]-a\right\}$ $\left[-\frac{3}{4}a\right]$
d) $-12x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[0,1x^2(-5x)^2-(-x^2)^2\right]$ $\left[\frac{1}{6}x^4\right]$
e) $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0,\overline{6}x^4yz(-0,\overline{7}xy^2z)$ $[]$
f) $\frac{1}{2}ab^2c+\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3-\left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^2\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right]:\left(-\frac{5}{4}a^2b^4c^2\right)$ $\left[-\frac{1}{8}ab^2c\right]$

4.60 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-(xy^2+2xy^2-4xy^2)+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right)$ $[3xy^2]$
b) $\frac{1}{4}x^4y^2-\left[\frac{3}{2}x^5y^4:\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-3x^3y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2$ $\left[\frac{3}{2}x^4y^2\right]$
c) $a^2-\left\{a-\left[2\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\right]\right\}^2+\left(\frac{2}{3}a+a\right)\left(\frac{2}{3}a-a\right)$ $[0]$
d) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^3a^2\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}a\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2\left(-\frac{2}{5}ab^2\right)$ $\left[-\frac{1}{90}a^3b^6\right]$

4.61 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\frac{2}{3}a^2b-\left[3a-\frac{1}{3}a^2b-\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}a-3a\right)+\left(\frac{2}{5}a^2b+\frac{1}{2}a^2b-2a^2b\right)\right]-\frac{1}{10}a^2b+\frac{51}{10}a$ $[2a^2b]$

b) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-2x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-2x^2\right)\left(-\frac{3}{5}x\right)-\frac{4}{3}\left(x^3+\frac{1}{2}x^3\right)$ $\left[-\frac{2}{3}x^3\right]$

c) $\left[\left(\left(\frac{3}{2}xy\right)^2\cdot\left(\frac{4}{15}y\right)\right)^2-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{8}{75}x^2y^4\right]:\left(\frac{10}{3}x^2y\right)$ $\left[-\frac{3}{25}y^3\right]$

d) $\left(\frac{1}{2}x+2x\right)\left(\frac{1}{2}x-2x\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4x^2\right)-\frac{1}{4}x\left(\frac{27}{4}x^3-\frac{61}{3}x^3\right)-16(x^4+x^4)-\frac{1}{12}x^2\cdot x^2+\frac{1}{8}x^4$

4.62. Assegnati i monomi: $m_1=\frac{3}{8}a^2b^2$, $m_2=-\frac{8}{3}ab^3$, $m_3=-3a$, $m_4=-\frac{1}{2}b$ e $m_5=2b^3$ Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C. E.:

a) $m_1\cdot m_2\cdot(m_4)^2$
b) $-m_2\cdot m_1\cdot(m_3)^2\cdot m_5$
c) $(m_3\cdot m_4)^2-m_1$
d) $m3\cdot m_5-m_2$
e) $m_2:m_3+m_5$
f) $m_1:m_2$

4.63. Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo:

a) il doppio del primo termine;
b) il doppio del secondo termine;
c) il monomio nullo;
d) 0.

4.64. Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

A -1 B 0 C 1 D il quadrato del primo monomio

4.65. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) la somma di due monomi opposti è il monomio nullo V F
b) il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti V F
c) la somma di due monomi è un monomio V F
d) il prodotto di due monomi è un monomio V F
e) l'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo V F

4.66 (*). Un quadrato è formato da 9 quadrati più piccoli, tutti di lato $2x$ Determina perimetro e area del quadrato. $[24x\ 36x^2]$

4.67 (*). Di un triangolo equilatero di lato a si raddoppiano due lati e si dimezza il terzo lato, si ottiene un triangolo ....Qual'è la differenza tra i perimetri dei due triangoli? $\left[\frac{3}{2}a\right]$

4.2.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

4.68. Vero o falso?

a) $12a^3b^2c$ è un multiplo di abc V F
b) $2xy$ è un divisore di x^2 V F
c) $2a$ è divisore di $4ab$ V F
d) $-5b^2$ è divisore di $15ab$ V F
e) $8ab$ è multiplo di a^2b^2 V F
f) $12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$ V F
g) 5 è divisore di $15a$ V F

4.69. Vero o falso?

a) il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati V F
b) il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato V F
c) il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro V F

4.70 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $14x^3y^2$, xy e $4x^3y^4$ $[28x^3y^4;\ xy]$
b) xyz^5e $x^3y^2z^2$ $[x^3y^2z^5;\ xyz^2]$
c) $4ab^2$, a^3b^2 e $5ab^5$ $[20a^3b^5;\ ab^2]$

4.71. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $2a^2bc^3$, ab^4c^2 e $24a^3bc$
b) $6a^2x$, $2ax^3$ e $4x^2c^3$
c) $30ab^2c^4$, $5a^2c^3$ e $12abc$

4.72. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $x^2y^4z^2$, xz^3 e $24y^2z$
b) $4a^2y$, y^3c e $15ac^5$
c) $13xyc^2$, $x^2y^3c^2$ e $6c^4$

4.73 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $a^nb^mz^{2m+1}, \quad a^{3n}b^{m+3} \quad \text{e} \quad a^{4n}b^{m+4}$ $[a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1}; a^nb^m]$
b) $-2xy^3z, \quad -6x^3yz \quad \text{e} \quad 8x^3z$ $[24x^3y^3z; 2xz]$
c) $\frac{1}{4}ab^2c, \quad -3a^2b^2c \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2}ab^2c^2$ $[a^2b^2c^2; ab^2c]$
d) $\frac{2}{3}x^2y^2, \quad \frac{1}{6}xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}xyz^2$ $[x^2y^2z^2; xy]$

4.74. Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) calcola il loro MCD
b) calcola il loro mcm
c) verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro mcm e il loro MCD
d) verifica che il loro MCD è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro mcm

4.3.1 Definizioni fondamentali

4.75. Riduci in forma normale il seguente polinomio:

$$5a^3 - 4ab - 1 + 2a^3 + 2ab - a - 3a^3.$$

Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro:

$$\underline{5a^3} - \overline{4ab} + 1 + \underline{2a^3} + \overline{2ab} - a - \underline{3a^3}$$

in modo da ottenere .... Il termine noto è ....

4.76. Il grado di:

a) $x^2y^2 - 3y^3 + 5yx - 6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è ......, il grado complessivo è ......
b) $5a^2 - b + 4ab$ rispetto alla lettera b è ...., il grado complessivo è ....

4.77. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

a) $x^3y + 2y^2x^2 - 4x^4$
b) $2x + 3 - xy$
c) $2x^3y^3 - y^4x^2 + 5x^6$

4.78. Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti:

a) $2 - \frac{1}{2}x^2 + x$
b) $\frac{2}{3} - x + 3x^2 + 5x^3$
c) $3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{7}{8}$

4.79. Relativamente al polinomio $b^2 + a^4 + a^3 + a^2$:

- Il grado massimo è .... Il grado rispetto alla lettera a è ... Rispetto alla lettera b è ...
- il polinomio è ordinato rispetto alla a?
- è completo?
- è omogeneo?

4.80. Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

4.81. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

4.82. Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

4.83. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

4.84. Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

4.85. Calcola il valore numerico dei polinomi per i valori a fianco indicati.

a) $x^2 + x$ per $x = -1$
b) $2x^2 - 3x + 1$ per $x = 0$
c) $3x^2 - 2x - 1$ per $x = 2$
d) $3x^3 - 2x + x$ per $x = -2$
e) $\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}ab$ per $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$
f) $4x - 6y + \frac{1}{5}x^2$ per $x = -5$, $y = \frac{1}{2}$

4.3.2 Somma algebrica di polinomi

4.86. Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2 + 5 - 3y^2x$, $x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$

Svolgimento: Indichiamo la somma $(2x^2 + 5 - 3y^2x) + (x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3)$, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio $2x^2 + 5 - 3y^2x + x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$, sommando i monomi simili otteniamo $3x^2 - 4x^{\cdots}y^{\cdots} - \ldots xy + y^3 + \ldots$

4.87. Esegui le seguenti somme di polinomi.

a) $a + b - b$
b) $a + b - 2b$
c) $a + b - (-2b)$
d) $a - (b - 2b)$
e) $2a + b + (3a + b)$
f) $2a + 2b + (2a + b) + 2a$
g) $2a + b - (-3a - b)$
h) $2a - 3b - (-3b - 2a)$
i) $(a + 1) - (a - 3)$

4.88 (*). Esegui le seguenti somme di polinomi.

a) $(2a^2 - 3b) + (4b + 3a^2) + (a^2 - 2b)$
b) $(3a^3 - 3b^2) + (6a^3 + b^2) + (a^3 - b^2)$
c) $\left(\frac{1}{5}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{5}x - 1\right) - \left(3x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - 1\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}+2a^2+x\right)-\left(\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}ax\right)+\left[-\left(-\frac{3}{2}-2ax+x^2\right)+\frac{1}{3}a^2\right]-\left(\frac{3}{2}ax+2\right)$

e) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}ab\right)-\left(\frac{9}{8}ab+\frac{1}{2}a^2-2b\right)+ab-\frac{3}{4}a$

4.88 d) $-x^2+x+\frac{29}{15}a^2$,
e) $-\frac{a^2}{2}-\frac{7}{24}ab+\frac{5}{2}b$

4.3.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

4.89. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

a) $(a+b)b$
b) $(a-b)b$
c) $(a+b)(-b)$
d) $(a-b+51)b$
e) $(-a-b-51)(-b)$
f) $(a^2-a)a$
g) $(a^2-a)(-a)$
h) $(a^2-a-1)a^2$
i) $(a^2b-ab-1)(ab)$
j) $(ab-ab-1)(ab)$
k) $(a^2b-ab-1)(a^2b^2)$
l) $(a^2b-ab-1)(ab)^2$
m) $ab(a^2b-ab-1)ab$
n) $-2a(a^2-a-1)(-a^2)$
o) $(x^2a-ax+2)(2x^2a^3)$

4.90. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

a) $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$
b) $\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$
c) $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$
d) $\left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)(3x^2y)$
e) $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$
f) $-\frac{1}{3}y\,(6x^2y-3xy)$
g) $-3xy^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)$
h) $\left(\frac{7}{3}b-b\right)\left(a-\frac{1}{2}b+1\right)(3a-2a)$

4.3.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

4.91. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $(2x^2y+8xy^2):(2xy)$
b) $(a^2+a):a$
c) $(a^2-a):(-a)$
d) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$
e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):2$
f) $(2a-2):\frac{1}{2}$
g) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$

4.92. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $(a^2-a):a$
b) $(a^3+a^2-a):a$
c) $(8a^3+4a^2-2a):2a$
d) $(a^3b^2+a^2b-ab):b$
e) $(a^3b^2-a^2b^3-ab^4):(-ab^2)$
f) $(a^3b^2+a^2b-ab):ab$
g) $(16x^4-12x^3+24x^2):(4x^2)$
h) $(-x^3+3x^2-10x+5):(-5)$

4.93. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $\left(a^3b^2 - a^4b + a^2b^3\right) : \left(a^2b\right)$
b) $\left(a^2 - a^4 + a^3\right) : \left(a^2\right)$
c) $\left(-3a^2b^3 - 2a^2b^2 + 6a^3b^2\right) : (-3ab)$
d) $\left(\frac{4}{3}a^2b^3 - \frac{3}{4}a^3b^2\right) : \left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)$
e) $\left(2a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{4}\right) : \left(\frac{a}{2}\right)$
f) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{8}\right) : \left(\frac{1}{2}a\right)$
g) $\left(-4x + \frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right)$

4.3.5 Prodotto di polinomi

4.94. Esegui i seguenti prodotti di polinomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2b - 2ab^2 + \frac{3}{4}a^3b\right) \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)$
b) $\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)(x - 1)$
c) $\left(a^2 + 2ab + b^2\right)(a + b)$
d) $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$
e) $(a + 1)(2a - 1)(3a - 1)$
f) $(a + 1)\left(a^2 + a\right)\left(a^3 - a^2\right)$

4.4.1 Quadrato di un binomio

4.95. Completa:

a) $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $(-2x + 3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(3y) + (3y)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
c) $(-3x - 5y)^2 = (-3x)^2 + 2(-3x)(-5x) + (-5x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $(3x - y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-y) + (-y)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
e) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x)(3y) + (3y)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
f) $\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(x^2\right)^{\cdots} + 2 \cdot (\ldots\ldots)(-\ldots\ldots) + \left(-\frac{1}{2}y\right)^{\cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.96. Quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi?

a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ Sì No
b) $a^2 - 2ab - b^2$ Sì No
c) $25a^2 - 15ab + 3b$ Sì No
d) $\frac{49}{4}a^4 - 21a^2b^2 + 9b^2$ Sì No
e) $a^6 + b^4 + 2a^3b^2$ Sì No
f) $25a^2 + 4b^2 - 20ab^2$ Sì No
g) $-25a^4 - \frac{1}{16}b^4 + \frac{5}{2}a^2b^2$ Sì No
h) $\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{9}b^4 + \frac{1}{6}a^3b^2$ Sì No

4.97. Completa in modo da formare un quadrato di binomio.

a) $\frac{9}{16}x^2 + \ldots + y^2$
b) $x^2 + 2x + \ldots$
c) $4x^2y^2 - 2xyz\ldots$
d) $\frac{a^4}{4} - \ldots + 4b^4$
e) $9 + 6x + \ldots$
f) $1 - x + \ldots$
g) $x^2 + 4y^2 - \ldots$
h) $4x^2 - 4xy + \ldots$
i) $4x^2 - 20x + \ldots$

4.98. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $(x+1)^2$
b) $(x+2)^2$
c) $(x-3)^2$
d) $(2x-1)^2$
e) $(x+y)^2$
f) $(x-y)^2$
g) $(2x+y)^2$
h) $(x+2y)^2$
i) $(-a+b)^2$
j) $(-a-1)^2$
k) $(-a+3)^2$
l) $(-a+2b)^2$
m) $(2a+3b)^2$
n) $(2a-3b)^2$
o) $(3a+2b)^2$
p) $(-2+3b)^2$

4.99. Sviluppa i seguenti quadrati di binomi.

a) $(x+1)^2$
b) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$
c) $\left(-2x^2-\frac{7}{4}y\right)^2$
d) $\left(5x^3-\frac{4}{3}y^2\right)^2$
e) $\left(-1+\frac{3}{2}a^2x\right)^2$
f) $\left(a^2+a\right)^2$
g) $\left(3a-\frac{1}{3}a^2\right)^2$
h) $\left(-2-\frac{1}{2}x\right)^2$
i) $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2$
j) $\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2$
k) $\left(x^{n+1}+x^n\right)^2$
l) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)^2$
m) $\left(x^{2n}-\frac{1}{2}x^n\right)^2$
n) $\left(-2^2-\frac{1}{2}x^n\right)^2$
o) $\left(-2x^{2n}-\frac{1}{4}y^m\right)^2$

4.100 (*). Semplifica le seguenti espressioni contenenti quadrati di binomi.

a) $(x-2y)^2-(2x-y)^2$ $\quad[3y^2-3x^2]$
b) $3(x-y)^2-2(x+2y)^2$ $\quad[x^2-14xy-5y^2]$
c) $3(2x+5)^2-4(2x+5)(2x-5)+10(2x-5)^2$
d) $\left(x^2+1\right)^2-6\left(x^2+1\right)+8$
e) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\quad[\ldots]$
f) $\frac{1}{2}x(y-1)^2-\frac{3}{2}y(x+1)^2+\frac{1}{2}xy(3x-y+8)$ $\quad[\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y]$
g) $\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2+3x(2-y)^2-3y^2\left(x-\frac{1}{4}\right)+4x(4y-3)$ $\quad[\frac{35}{4}x^2]$
h) $(x-1)^2-(2x+3)^2$ $\quad[-3x^2-14x-8]$
i) $\frac{1}{2}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad[-6x^2+5x-\frac{3}{8}]$
j) $(2a+b)^2(a-b)^2-2(3-b)^2(3+b)^2-(6b+2a^2)^2+a^2b[4a+3(b+8)]$ $\quad\left[2ab^3-b^4-162\right]$
k) $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$ $\quad[\ldots]$
l) $(x+1)^2+(x-2)^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-2x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad[\ldots]$

4.4.2 Quadrato di un polinomio

4.101. Completa i seguenti quadrati.

a) $(x+3y-1)^2=x^2+\ldots\ldots+1+6xy-2x-6y$

b) $\left(x^2 - \frac{1}{2}y + 1\right)^2 = x^4 + \frac{1}{4}y^2 + \ldots\ldots - x^2y + \ldots\ldots - y$

c) $\left(2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \ldots\ldots + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} - 2x^{\cdots} + 2x^{\cdots} - \frac{\ldots}{\ldots}\ldots$

4.102. Sviluppa i seguenti quadrati di polinomi.

a) $(a+b-c)^2$
b) $(a-b+c)^2$
c) $(x^2+x+1)^2$
d) $(x-x^2+1)^2$
e) $(2x^2-x+3)^2$
f) $(-x^2-2x+1)^2$
g) $(3x^2+2z-y^2)^2$
h) $(-a+b-c)^2$
i) $(6a-3y^3-2z^2)^2$
j) $(1-x-x^2)^2$
k) $\left(-2ba+4-6ab^2+5b^2\right)^2$
l) $(2ab+3-4a^2b^2-2b^3)^2$

4.103. Sviluppa i seguenti quadrati di polinomi.

a) $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{4}x\right)^2$
b) $\left(3x^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}\right)^2$
c) $\left(5a^3 - \frac{1}{2}ab - 1 - a\right)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}x + 2y^2 - 3\right)^2$
e) $\left(\frac{2}{3}y^2 - 3x^4 + \frac{7}{4}z\right)^2$
f) $\left(2a + \frac{1}{2}ab^2 - 3b\right)^2$
g) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^2x - 2xy\right)^2$
h) $\left(\frac{2}{3}y^2 - 3x^2 + \frac{3}{4}xy\right)^2$
i) $\left(a - b + \frac{1}{2}\right)^2$

4.104 (*). Semplifica le seguenti espressioni che contengono quadrati di polinomi.

a) $(x+y-1)^2 - (x-y+1)^2$ $[4xy-4x]$
b) $(2a+b-x)^2 + (2x-b-a)^2 - 5(x+a+b)^2 + b(4a+3b)$ $[-18ax-16bx]$
c) $\left(x^2+x+1\right)^2 - (x+1)^2$ $\left[x^4+2x^3+2x^2\right]$
d) $(a+b+1)^2 - (a-b-1)^2$ $[4ab+4a]$

4.105. Semplifica le seguenti espressioni che contengono quadrati di polinomi.

a) $(a-3b+1)^2 - (a-3b)^2 - (3b-1)^2 + (a-3b)(a+3b-1)$
b) $\left(\frac{1}{2}a^2 - b^2\right)^2 + \left(a - b + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(a + b - \frac{1}{2}\right)^2$
c) $(a+b-1)^2 - (a+b)^2 - (a-1)^2 - (b-1)^2$

4.4.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

4.106. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

a) $(x-1)(x+1)$
b) $(a+1)(a-1)$
c) $\left(l + \frac{1}{2}m\right)\left(l - \frac{1}{2}m\right)$
d) $(b-2)(b+2)$
e) $(2a+b)(2a-b)$
f) $\left(\frac{1}{2}u + v\right)\left(\frac{1}{2}u - v\right)$
g) $(a+2b)(a-2b)$
h) $(2a+3b)(2a-3b)$
i) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

4.107. Calcola a mente i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

a) $18\cdot 22$ b) $15\cdot 25$ c) $43\cdot 37$ d) $195\cdot 205$

4.108. Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$
b) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$
c) $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$
d) $\left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$
e) $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$
f) $\left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$
g) $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$
h) $\left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$
i) $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$
j) $\left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$
k) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-x+\frac{1}{2}\right)$
l) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right)$
m) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$
n) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x\right)$
o) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$
p) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$

4.109 (*). Applica la regola della somma per differenza ai seguenti casi.

a) $(2a+b+1)(2a+b-1)$ [. . .]
b) $(3x-b+c)(3x+b-c)$ [. . .]
c) $[(2x+y)+(3y-1)]\,[(2x+y)-(3y-1)]$ [. . .]
d) $(ab-2b-a)(-ab+2b-a)$ $\left[a^2-a^2b^2+4ab^2-4b^2\right]$
e) $\left(\frac{1}{2}a+1+b+ab\right)\left(\frac{1}{2}a+1-b-ab\right)$ $\left[-a^2b^2+\frac{1}{4}a^2-2ab^2+a-b^2+1\right]$
f) $\left(a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}-5ab\right)$ [. . .]
g) $(3x-y-1)(3x+y-1)$ $\left[9x^2-6x-y^2+1\right]$

4.110 (*). Semplifica le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

a) $(a+b)(a-b)-(a+b)^2$ $\left[-2ab-2b^2\right]$
b) $[(x-1)(1+x)]^2$ $\left[x^4-2x^2+1\right]$
c) $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)-\frac{2}{3}(a-b)^2+2\left(\frac{1}{3}a\right)^2$ $\left[\frac{4}{3}ab-\frac{5}{3}b^2\right]$

4.111 (*). Semplifica le seguenti espressioni con prodotti notevoli.

a) $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(b^2+\frac{4}{9}a^2\right)$ $\left[\frac{16}{81}a^4-b^4\right]$
b) $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ [. . .]

c) $(a+b-1)^2+(a-b)^2+\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)+2a\left(a-\frac{1}{2}\right)-a(5a+3)-(2b-1)$ $[\frac{7}{4}b^2-4b-6a+2]$

d) $(x^2+2x)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{1}{2}x^2(x+5)$ $[x]$

4.4.4 Cubo di un binomio

4.112. Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi.

a) $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ Sì No
b) $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ Sì No
c) $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ Sì No
d) $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ Sì No

4.113. Sviluppa i seguenti cubi di binomio.

a) $(2a+b^2)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3\,(2a)\cdot(b^2)^2+(b^2)^3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\ldots y^{\cdots}$
c) $(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a+b)^3-a^3-b^3-a^2-b^2-ab$

4.114. Sviluppa i seguenti cubi di binomio.

a) $(x+y)^3$
b) $(x-y)^3$
c) $(-x+y)^3$
d) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$
e) $(a+2)^3$
f) $(a+1)^3$
g) $(a-1)^3$
h) $\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$
i) $(x+2y)^3$
j) $(y-2x)^3$
k) $(2x+y)^3$
l) $\left(-\frac{1}{3}xy-3\right)^3$
m) $(x^2y-3)^3$
n) $(xy-1)^3$
o) $(x^2-2y)^3$
p) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

4.4.5 Potenza n-esima di un binomio

4.115. Sviluppa la seguente potenza del binomio.

$$\left(2a-b^2\right)^4=(2a)^4+4\cdot(2a)^3\cdot\left(-b^2\right)+6\,(2a)^2\cdot\left(-b^2\right)^2+\ldots(2a)\cdot\left(-b^2\right)^{\cdots}+\left(-b^2\right)^{\cdots}$$

4.116. Sviluppa le seguenti potenze di binomio.

a) $(a+1)^5$
b) $(x-1)^6$
c) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$
d) $(1-y)^7$
e) $(a+2)^5$
f) $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$
g) $(a-2)^6$
h) $(2a-1)^2$
i) $\left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$
j) $(3x^2a-a^2)^5$
k) $(2x^2-1)^6$
l) $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$

4.117. Trova la regola generale per calcolare il cubo del trinomio $(A+B+C)^3$

4.5.2 Esercizi riepilogativi

4.118 (*). Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $(-a-1-2)-(-3-a+a)$ $[-a]$
b) $(2a^2-3b)-\left[(4b+3a^2)-(a^2-2b)\right]$ $[-9b]$
c) $(2a^2-5b)-\left[(2b+4a^2)-(2a^2-2b)\right]-9b$ $[-18b]$
d) $3a\left[2(a-2ab)+3a\left(\frac{1}{2}-3b\right)-\frac{1}{2}a(3-5b)\right]$ $[6a^2-\frac{63}{2}a^2b]$
e) $2(x-1)(3x+1)-\left(6x^2+3x+1\right)+2x(x-1)$ $[2x^2-9x-3]$
f) $\left(\frac{1}{3}x-1\right)(3x+1)-2x\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)(x+1)-\frac{1}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)$
g) $\left(b^3-b\right)(x-b)+(x+b)\left(ab^2-a\right)+(b+a)\left(ab-ab^3\right)+2ab\left(b-b^3\right)$
h) $ab\left(a^2-b^2\right)+2b\left(x^2-a^2\right)(a-b)-2bx^2(a-b)$
i) $\left(\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy\right)\left(2x-\frac{1}{3}y\right)4x$
j) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2\right)(1-a)\left[a^2+2a-\left(a^2+a+1\right)\right]$

4.119. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $(1-3x)(1-3x)-(-3x)^2+5(x+1)-3(x+1)-7$
b) $3\left(x-\frac{1}{3}y\right)\left[2x+\frac{1}{3}y-(x-2y)\right]-2\left(x-\frac{1}{3}y+2\right)(2x+3y)$
c) $\frac{1}{24}(29x+7)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x-3)(x-3)-2-\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)\right]$
d) $-\frac{1}{4}\left(2abx+2a^2b^2+3ax\right)+a^2(b^2+x^2)-\left[\left(\frac{1}{3}ax\right)^2-\left(\frac{2}{3}bx\right)^2\right]$
e) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{5}\right)-\left[\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$
f) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x\right)^3+2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$
g) $(3a-2)(3a+2)-(a-1)(2a-2)+a(a-1)\left(a^2+a+1\right)$
h) $-4x(5-2x)+\left(1-4x+x^2\right)\left(1-4x-x^2\right)$
i) $-(2x-1)(2x-1)+\left[x^2-\left(1+x^2\right)\right]^2-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4.120. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $4(x+1)-3x(1-x)-(x+1)(x-1)-\left(4+2x^2\right)$
b) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)(x-1)-\left(x^2-1\right)$
c) $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)-(2x-1)(2x+1)(x-2)+2x^3$
d) $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)\left[2a^2(a-b)-a\left(a^2-2ab\right)\right]$ $[a^4-\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{3}a^4b+a^3]$
e) $\left(3x^2+6xy-4y^2\right)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$ $[\frac{3}{2}x^3y+x^2y^2-6xy^3+\frac{8}{3}y^4]$
f) $(2a-3b)\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{6}b^2\right)-\frac{1}{6}a\left(12a^2-\frac{18}{5}b^2\right)+\frac{37}{30}ab^2-\frac{1}{2}a\left(a^2-\frac{11}{2}ab\right)$ $[\frac{1}{2}b^3]$

4.121. Se $A = x - 1$, $B = 2x + 2$, $C = x^2 - 1$ determina

a) $A + B + C$
b) $A \cdot B - C$
c) $A + B \cdot C$
d) $A \cdot B \cdot C$
e) $2AC - 2BC$
f) $(A + B) \cdot C$

4.122 (*). Operazioni tra polinomi con esponenti letterali.

a) $\left(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3}\right) : \left(a^{1+n}\right)$ $\quad\left[1 - a + a^2\right]$
b) $\left(1 + a^{n+1}\right)\left(1 - a^{n-1}\right)$ $\quad\left[1 - a^{n-1} + a^{n+1} - a^2 n\right]$
c) $\left(16a^{n+1}b^{n+2} - 2a^{2n}b^{n+3} + 5a^{n+2}b^{n+1}\right) : \left(2a^n b^n\right)$ $\quad\left[8ab^2 - a^n b^3 + \frac{5}{2}a^2 b\right]$
d) $\left(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3}\right)\left(a^{n+1} - a^n\right)$ $\quad\left[a^{2n+4} - 2a^{2n+3} + 2a^{2n+2} - a^{2n+1}\right]$
e) $\left(a^n - a^{n+1} + a^{n+2}\right)\left(a^{n+1} - a^{n-1}\right)$ $\quad\left[a^{2n+3} - a^{2n+2} - a^{2n-1} + a^{2n}\right]$
f) $\left(a^n + a^{n+1} + a^{n+2}\right)\left(a^{n+1} - a^n\right)$ $\quad\left[-a^2 n + a^{2n+3}\right]$
g) $\left(a^{n+2} + a^{n+1}\right)\left(a^{n+1} + a^{n+2}\right)$ $\quad\left[a^{2n+4} + 2a^{2n+3} + a^{2n+2}\right]$
h) $\left(1 + a^{n+1}\right)\left(a^{n+1} - 2\right)$ $\quad\left[a^{2n+2} - a^{n+1} - 2\right]$
i) $\left(a^{n+1} - a^n\right)\left(a^{n+1} + a^n\right)\left(a^{2n+2} + a^{2n}\right)$ $\quad\left[a^{4n+4} - a^{4n}\right]$

4.123. Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

4.124. Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

4.125. Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

4.126. Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

4.127. Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2 b$

4.128. Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base $x^2 y$ e altezza $\frac{1}{5}xy^2$

4.129 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $[a + 2(b - c)][a - 2(b - c)] + 4b(b - 2c)$ $\quad\left[a^2 - 4c^2\right]$
b) $\left[(a - 2b)^2 - a^3\right]\left[-a^3 - (a - 2b)^2\right] + a^2(a^2 - 8ab + 24b^2 - a^4)$ $\quad\left[+32ab^3 - 16b^4\right]$
c) $x(x - 1)^2 + (x + 1)(x - 1) - x(x + 1)(x - 3) - (x + 2)^2$ $\quad[-5]$
d) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ $\quad[4x]$
e) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6x^2$ $\quad[2]$
f) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 - (x - 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$ $\quad[5]$
g) $(x + 2)(x - 2) + (x + 2)^2$ $\quad\left[2x^2 - 4x\right]$
h) $(x + 1)^3 - (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) + 3x(x - 1)$ $\quad[6x2 + 2]$
i) $(x + 1)(x - 1) + (x + 1)^2 + (x - 1)^2$ $\quad\left[3x^2 + 1\right]$
j) $(x + y + 1)(x + y - 1) + (x + y)^2 - 2(x + y)(x - y) - (2y - 1)(2y + 1)$ $\quad[4xy]$

4.130 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $(x - y)^2 + (x + y)(y - x)$ $\quad\left[2y^2 - 2xy\right]$
b) $(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 - 2(x - y - z)^2$ $\quad[4xy + 4xz - 8yz]$
c) $(a - 3b)^2 + (2a + 3b)(2a - 3b) - (a + 2b)(b - 2a)$ $\quad\left[7a^2 - 3ab - 2b^2\right]$
d) $\left[3x^2 - (x + 2y)(x - 2y)\right]^2 - 2x\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)^2 - 3xy\left(x + \frac{3}{2}y\right) - \left(2x^2 + 4y^2\right)^2$ $\quad\left[-\frac{1}{2}x^3 - 9xy^2\right]$
e) $\left[(x + 2y)^2 - \left(x^2 - 2y\right)^2\right]\left[(x + 2y)^2 + \left(x^2 - 2y\right)^2\right]$

f) $(a+2b-3c)(a+2b+3c)\left(a^2-b\right)\left(-a^2-b\right)+(2a-b)^3$

g) $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$

h) $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$

4.131 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $-2x(x-1)^2+2x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}x\left(2x-\frac{4}{3}\right)$ $[0]$

b) $(a-2b)^4-b(2a-b)^3-a^2(a+6b)^2$ $\left[17b^4-38ab^3-28a^3b\right]$

c) $[(x-1)^2-2]^2-\left(x^2+x-1\right)^2+6x(x-1)(x+1)$ $[3x^2]$

d) $(x+1)^4-(x+1)^2(x-1)^2-4x(x+1)^2$ $[0]$

e) $\dfrac{(x-2)(x+2)}{4}+\dfrac{(x-2)^2}{(-2)^2}+x$ $[\frac{1}{2}x^2]$

f) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^3+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ $[8x^3+\frac{14}{3}x+\frac{26}{27}]$

g) $(x+1)^3-3(x-1)(-1-x)+(x-4)(x+1)$ $[x^3+7x^2-6]$

h) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-(x+1)^2-\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$ $[1-2x]$

i) $(x-3)^3-x^2(x-9)-9(x-3)-9$ $[18x-9]$

j) $x(x-1)^2(x+1)+(x-1)^2-x(x-1)^3$ $[2x^3-3x^2+1]$

4.132 (*). Risolvi utilizzando i prodotti notevoli.

a) $-\frac{1}{2}x\left(x+\frac{3}{4}\right)(2x+1)-\left[x+1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{8}(5x+1)$ $[8x^3-\frac{11}{4}x^2]$

b) $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{41}{18}$ $[\frac{4}{3}x^2-\frac{47}{18}x]$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2-\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3-\frac{1}{6}(x+1)^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{6}\left(x^3-11\right)$ $[-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2]$

d) $-x^2\left(x^2-1\right)+\left(x^2-4x+2\right)^2+4(x-1)^2+8(x-1)^3$ $[x^2]$

e) $x\left(2x^2+3x\right)^2-2x^3\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+x^3(x-2)^3-x^2\left(x^3+2x^2\right)(x-12)$ $[52x^4+\frac{1}{2}x^3]$

f) $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$

g) $-2t(t-x)-3t^2+x(x+t)(t-x)+(x-t)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}t\right)^3$

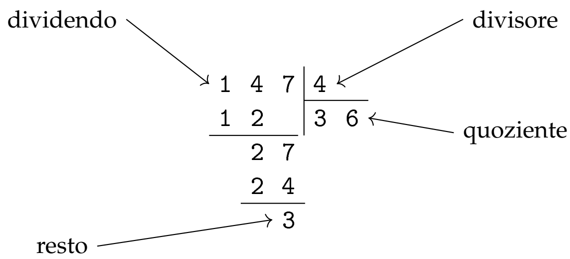
h) $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)^2-x\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-x\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2$

5 Divisibilità e scomposizione di polinomi

5.1 Divisione tra polinomi

5.1.1 Algoritmo di Euclide

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio $147 : 4$. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto $r < 4$, in modo che $147 = q \times 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:



Verifichiamo che $147 = 36 \times 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.

In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, $A(x)$ *dividendo* e $B(x)$ *divisore*, vogliamo determinare altri due polinomi, $Q(x)$ *quoziente* e $R(x)$ *resto*, con grado di $R(x)$ minore del grado di $B(x)$, per i quali: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

Esempio 5.1. Eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo dobbiamo sempre controllare che:

- il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore: $A(x)$ ha grado 4, $B(x)$ grado 2
- i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile, in questo caso la x poiché ciò non è vero, riscriviamo $A(x)$ ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$
- dividendo e divisore siano in forma completa, cioè abbiano i termini con tutti i gradi; nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1; B(x) = 3x^2 + 0x - 1.$$

I passi da eseguire sono i seguenti:

1. Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} \multicolumn{5}{c|}{\text{dividendo}} & \multicolumn{3}{c}{\text{divisore}}\\ 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} \multicolumn{5}{c|}{\text{Spazio per i calcoli}} & \multicolumn{3}{c}{\text{Spazio per il quoziente}} \end{array}$$

2. Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, otteniamo x^2 che è il primo termine del quoziente; esso va riportato nello spazio dedicato al quoziente.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} & & & & & x^2 & & \end{array}$$

3. Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:
   - incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
   - cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & & \end{array}$$

4. Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & & \\ \cline{1-5} & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \end{array}$$

5. Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto, $-4x^3 + x^2 + 5x - 1$ e il divisore $3x^2 + 0x - 1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5} & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \end{array}$$

6. Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto, con segno opposto, sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\dfrac{4}{3}x & \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & -4x^3 & +0x^2 & -\dfrac{4}{3}x & & & & \\
\cline{2-5}
 & & x^2 & +\dfrac{11}{3}x & -1 & & &
\end{array}
$$

7. Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x) = x^2 + \frac{11}{3}x - 1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2, per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\dfrac{4}{3}x & +\dfrac{1}{3} \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & +4x^3 & +0x^2 & -\dfrac{4}{3}x & & & & \\
\cline{2-5}
 & & x^2 & +\dfrac{11}{3}x & -1 & & & \\
 & & -x^2 & +0x & +\dfrac{1}{3} & & & \\
\cline{4-5}
 & & & +\dfrac{11}{3}x & -\dfrac{2}{3} & & &
\end{array}
$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x) : B(x)$ ha quoziente $Q(x) = x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$ e resto $R(x) = +\dfrac{11}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Verifica Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra: $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.

$$
\begin{aligned}
\left(3x^2 - 1\right)\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \frac{11}{3}x - \frac{2}{3} &= 3x^4 - 4x^3 + x^2 - x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{11}{3}x - \frac{2}{3} \\
&= 3x^4 - 4x^3 + \frac{15}{3}x - \frac{3}{3} \\
&= 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = A(x).
\end{aligned}
$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? È sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il seguente teorema.

Teorema 5.1 (Divisione euclidea)**.** *Siano* $A(x)$ *e* $B(x)$ *due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi* $Q(x)$ *e* $R(x)$, *con grado di* $R(x)$ *minore o uguale del grado di* $B(x)$, *tali che* $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.

❑ **Osservazione** Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$. Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

Definizione 5.1. Si dice che un polinomio A (dividendo) è divisibile per un polinomio B (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A = Q \cdot B$.

Esempio 5.2. Eseguiamo la divisione tra $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ e $B(x) = x^2 + 1$. I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di A è maggiore del grado di B e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nello schema per eseguire l'algoritmo. Risulta: $\left(x^3 - 2x^2 + x - 2\right) : \left(x^2 + 1\right) = (x - 2)$ il resto $R(x)$ è il polinomio nullo e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$. Infatti $\left(x^2 + 1\right) \cdot (x - 2) = \left(x^3 - 2x^2 + x - 2\right)$.

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2 & +0x & +1 \\
\cline{5-7}
-x^3 & -0x^2 & -x & & x & -2 & \\
\cline{1-4}
 & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\
 & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

In conclusione, se $A(x)$ è un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n \geqslant m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n - m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g < m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B. Se $n < m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

5.1.2 Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, *nel caso in cui il divisore sia di grado 1* si può applicare la regola di Ruffini. Questa regola deriva dall'algoritmo di Euclide ma lo rende più semplice.

Partiamo da un esempio e eseguiamo innanzitutto la divisione con l'algoritmo di Euclide:

$$\left(3x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x - 5\right) : (x + 2)$$

Utilizzando l'algoritmo di Euclide otteniamo:

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrr}
3x^4 & +8x^3 & +9x^2 & +4x & -5 & x & +2 & & \\
\cline{6-9}
-3x^4 & -6x^3 & & & & 3x^3 & +2x^2 & +5x & -6 \\
\cline{1-3}
 & +2x^3 & +9x^2 & & & & & & \\
 & -2x^3 & -4x^2 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & +5x^2 & +4x & & & \text{R}= +7 & & \\
 & & -5x^2 & -10x & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -6x & -5 & & & & \\
 & & & +6x & +12 & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +7 & & & &
\end{array}
$$

Possiamo osservare che la parte letterale è facilmente ricostruibile, se abbiamo messo per bene in colonna, e molti coefficienti sono inutilmente ripetuti. Riscriviamo la divisione senza la parte letterale e con i coefficienti essenziali riquadrati:

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrr}
+3 & +8 & +9 & +4 & -5 & 1 & +2 & & \\
\cline{6-9}
-3 & \boxed{-6} & & & & 3 & +2 & +5 & -6 \\
\cline{1-3}
 & +2 & +9 & & & & & & \\
 & -2 & \boxed{-4} & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & +5 & +4 & & & \text{R}= +7 & & \\
 & & -5 & \boxed{-10} & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -6 & -5 & & & & \\
 & & & +6 & \boxed{+12} & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +7 & & & &
\end{array}
$$

In questa versione senza le variabili sono stati evidenziati i dati, riquadrati i risultati intermedi e cerchiati i risultati. Tutti gli altri valori sono inutili o ripetuti. La regola di Ruffini permette di scrivere solo i dati necessari:

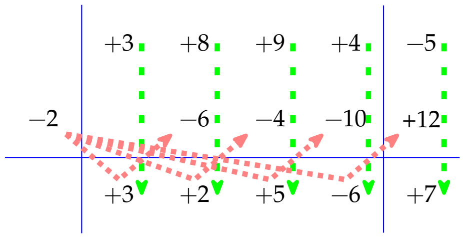
$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & +3 & +8 & +9 & +4 & -5 \\
-2 & & \boxed{-6} & \boxed{-4} & \boxed{-10} & \boxed{+12} \\
\hline
 & +3 & +2 & +5 & -6 & +7
\end{array}
$$

Ma come si possono ottenere tutti i coefficienti senza l'algoritmo di Euclide? Vediamo in questo caso concreto:

- -2 è l'opposto del termine noto del divisore;
- addiziono $+3$ con 0 e ottengo $+3$;
- moltiplico -2 con $+3$ e ottengo -6;

- addiziono $+8$ con -6 e ottengo $+2$;
- moltiplico -2 con $+2$ e ottengo -4;
- addiziono $+9$ con -4 e ottengo $+5$;
- moltiplico -2 con $+5$ e ottengo -10;
- addiziono $+4$ con -10 e ottengo -6;
- moltiplico -2 con -6 e ottengo $+12$;
- addiziono -5 con $+12$ e ottengo $+7$.

Come è riassunto nel seguente diagramma dove le frecce verdi tratteggiate indicano *addizioni* e quelle rosse punteggiate indicano *moltiplicazione*.



E aggiungendo le variabili si ottiene il risultato:

$$Q = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \quad R = +7$$

Come avevamo calcolato con l'algoritmo di Euclide.
Da notare che:

- la prima riga contiene i coefficienti del dividendo;
- il termine noto del dividendo e posto a destra della seconda linea verticale;
- nella seconda riga, prima della prima linea verticale si scrive il termine noto del divisore cambiato di segno, così invece di ricordarsi di cambiare di segno ogni volta (come nell'algoritmo di Euclide), lo si fa una volta per tutte;
- l'algoritmo inizia con un'addizione tra il primo coefficiente del dividendo e 0 (addizione facile);
- nella terza riga otteniamo i coefficienti del risultato;
- dividendo un polinomio di grado enne per un polinomio di primo grado si ottiene un polinomio di grado $n-1$, quindi, in questo caso, il primo monomio sarà di grado 2;
- il termine in basso a destra è il resto della divisione, per forza di grado zero;
- se il resto della divisione è zero vuol dire che il *dividendo* è un multiplo del *divisore*.

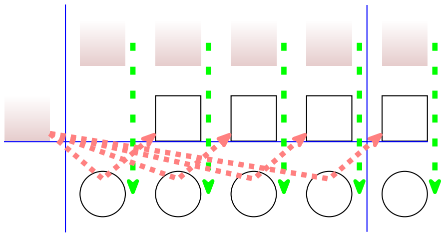
Esempio 5.3. Eseguire la seguente divisione:

$\left(-3a + a^3 + 1\right) : (a - 3)$

Il divisore è del tipo $(x + x_0)$ quindi posso usare la regola di Ruffini. Prima di tutto mettiamo in ordine il dividendo completandolo:

$\left(-3a + a^3 + 0a^2 - 3a + 1\right) : (a - 3)$

Poi inseriamo i dati nello schema di Ruffini ed eseguiamo addizioni e moltiplicazioni. Dobbiamo ricordarci di cambiare segno al termine noto del divisore



Infine scriviamo il risultato: quoziente e resto:
Q=$a^2 + 3a + 6$; R=19

5.1.3 Teorema di Ruffini

Teorema 5.2 (del resto)**.** *Il resto della divisione di un polinomio* $A(x)$ *per un binomio del tipo* $x + k$ *è uguale al valore che* $A(x)$ *assume quando al posto della variabile* x *si sostituisce il valore* $-k$, $R = A(-k)$.

Dimostrazione. Dalla divisione di $A(x)$ per $x - k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x) = (x - k) \cdot Q(x) + R$$

in cui si è scritto R anziché $R(x)$, poiché essendo il divisore di primo grado, il resto è di grado zero quindi è una costante.

Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile x, sostituiamo al suo posto il valore $-k$ e otteniamo:

$$A(-k) = (-k + k) \cdot Q(k) + R$$

Ma:

- $A(-k) = 0$ per ipotesi;
- $(-k + k) = 0$ per ovvi motivi.

Quindi l'espressione precedente diventa:

$$0 = 0 \cdot Q(k) + R \quad \Longrightarrow \quad R = 0 \qquad \text{q.e.d}$$

□

Dalla:

$$A(-k) = (-k + k) \cdot Q(k) + R \Longrightarrow R = A(-k)$$

Si ottiene il seguente corollario:

Il valore assunto da $A(x)$ quando x è sostituito da $-k$ è uguale al *resto* della divisione di $A(x)$ per $(x + k)$, cioè: $A(-k) = R$.

Dal teorema del resto si può ottenere il

Teorema 5.3 (di Ruffini)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio* $A(x)$ *sia divisibile per un binomio del tipo* $x + k$ *è che risulti* $A(-k) = 0$.

Dimostrazione. Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $x + k \Rightarrow A(-k) = 0$.

Poiché $A(x)$ è divisibile per $x + k$, per definizione di divisibilità deve essere $R = 0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k) = R = 0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(-k) = 0$.

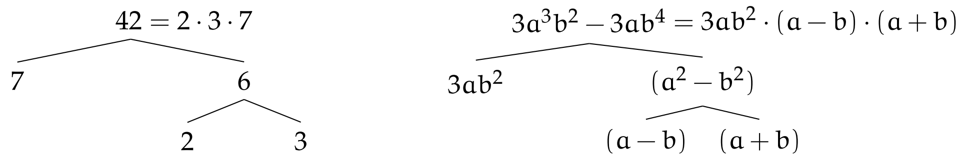
Seconda implicazione: $A(-k) = 0 \Rightarrow A(x)$ divisibile per $x + k$.

Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x + k$, per il teorema del resto risulta $R = A(-k)$ e per ipotesi $A(k) = 0$, ne segue che $R = 0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x + k$. □

5.2 Scomposizione in fattori

5.2.1 Cosa vuol dire scomporre in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro diano come risultato il polinomio stesso. Si può paragonare la scomposizione in fattori di un polinomio alla scomposizione in fattori dei numeri naturali.



Per esempio, scomporre il numero 42 significa scriverlo come $2 \cdot 3 \cdot 7$ dove 2, 3 e 7 sono i suoi fattori primi. Anche $42 = 6 \cdot 7$ è una scomposizione, ma non è in fattori primi. Allo stesso modo un polinomio va scomposto in fattori non ulteriormente scomponibili che si chiamano *irriducibili*.

Si può verificare che $3ab^2(a - b)(a + b)$ è una scomposizione in fattori di $3a^3b^2 - 3ab^4$ eseguendo le moltiplicazioni:

$$3ab^2(a - b)(a + b) = 3ab^2(a^2 + ab - ba - b^2) = 3ab^2\left(a^2 - b^2\right) = 3a^3b^2 - 3ab^4$$

La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati. Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

Definizione 5.2. Un polinomio si dice *riducibile* (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà *irriducibile*.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali, ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi. Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

Definizione 5.3. La scomposizione in fattori di un polinomio è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

5.2.2 Raccoglimento fattore comune

Raccoglimento totale

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Prendiamo in considerazione il seguente prodotto: $a(x+y+z) = ax + ay + az$.

Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax + ay + az$ per individuare il prodotto che lo ha generato possiamo osservare che i tre monomi contengono tutti la lettera a, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo

$$ax + ay + az = a(x+y+z).$$

Esempio 5.4. Scomponiamo in fattori $6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc$.

$$\begin{aligned} 6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc &= 3a^2b(2a^3) + 3a^2b(-5b^2) + 3a^2b(-7c) \\ &= 3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right) \end{aligned}$$

Possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera a^2 è in comune a tutti i monomi, come la lettera b. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto $3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right)$.

Procedura 5.4. *Mettere in evidenza il fattore comune:*

a) *trovare il* MCD *di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono;*
b) *scrivere il polinomio come prodotto del* MCD *per il polinomio ottenuto dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il* MCD
c) *verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.*

Esempio 5.5. Scomporre in fattori $5a^2x^2 - 10ax^5$.

a) tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5, tra la parte letterale sono in comune le lettere a con esponente 1 e x con esponente 2, pertanto il MCD è $5ax^2$
b) divido ciascun termine del polinomio per $5ax^2$:
   ➡ $5a^2x^2 : 5ax^2 = a$
   ➡ $-10ax^5 : 5ax^2 = -2x^3$
c) quindi $5a^2x^2 - 10ax^5 = 5ax^2(a - 2x^3)$.

Esempio 5.6. Scomporre in fattori $10x^5y^3z - 15x^3y^5z + 5x^2y^3z$.

a) Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore: MCD $= 5x^2y^3z$
b) divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:
   ➡ $10x^5y^3z : 5x^2y^3z = 2x^3$
   ➡ $-15x^3y^5z : 5x^2y^3z = -3xy^2$
   ➡ $+5x^2y^3z : 5x^2y^3z = +1$
c) il polinomio si può allora scrivere come $5x^2y^3z \cdot (2x^3 - 3xy^2 + 1)$

❑ **Osservazione** La scomposizione in fattori riguarda la moltiplicazione e la divisione quindi il terzo termine del polinomio di partenza dà come risultato 1, non 0.

❑ **Osservazione** Avremmo anche potuto scegliere il fattore da raccogliere con il segno $(-)$, in questo caso avremmo ottenuto: $-5x^2y^3z \cdot (-2x^3 + 3xy^2 + 4z)$.

Esempio 5.7. Scomporre in fattori $-8x^2y^3 + 10x^3y^2$.

1. a) Se scegliamo come mcd il fattore $-2x^2y^2$
   b) otteniamo $-8x^2y^3 + 10x^3y^2 = -2x^2y^2(4y - 5x)$.
2. a) Se scegliamo come mcd il fattore $2x^2y^2$
   b) otteniamo $-8x^2y^3 + 10x^3y^2 = 2x^2y^2(-4y + 5x)$.

Non è detto che il fattore da raccogliere debba essere un numero o una lettera, potrebbe essere anche un'espressione comune a più addendi come negli esempi seguenti.

Esempio 5.8. Scomporre in fattori $6a(x-1) + 7b(x-1)$.

a) Il fattore comune è $(x-1)$;
b) dividendo i termini otteniamo:

➡ $6a(x-1) : (x-1) = 6a$
➡ $7b(x-1) : (x-1) = 7b$.

In definitiva $6a(x-1) + 7b(x-1) = (x-1)(6a+7b)$.

Esempio 5.9. Scomporre in fattori $10(x+1)^2 - 5a(x+1)$.

a) il fattore comune è $5(x+1)$;
b) in definitiva $10(x+1)^2 - 5a(x+1) = 5(x+1)\left[2(x+1) - a\right]$.

5.2.3 Raccoglimento parziale

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.

Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z) = ax + ay + az + bx + by + bz$. Supponiamo ora di avere il polinomio $ax + ay + az + bx + by + bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

Esempio 5.10. Scomponiamo in fattori $ax + ay + az + bx + by + bz$. Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.

Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo a tra i primi tre termini e b tra gli ultimi tre, avremo: $a(x+y+z) + b(x+y+z)$. Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza $ax + ay + az + bx + by + bz = a(x+y+z) + b(x+y+z) = (x+y+z)(a+b)$.

Procedura 5.5. *Eseguire il raccoglimento parziale.*

a) Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;
b) verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio...) comune a tutti i termini;
c) se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;
d) se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.

Esempio 5.11. Scomporre in fattori $ax + ay + bx + ab$.

a) Provo a mettere in evidenza la a nel primo e secondo termine e la b nel terzo e quarto termine: $ax + ay + bx + ab = a(x + y) + b(x + a)$
b) in questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

Esempio 5.12. Scomporre in fattori $bx - 2ab + 2ax - 4a^2$.

a) Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale: b nei primi due monomi e $2a$ negli altri due;
b) $\underline{bx} - \underline{2ab} + \underline{\underline{2ax}} - \underline{\underline{4a^2}} = b(\underline{x - 2a}) + 2a(\underline{x - 2a}) = (x - 2a)(b + 2a)$.

Esempio 5.13. Scomporre in fattori $bx^3 + x^2 - bx - 1 + abx + a$.

a) Raggruppiamo nel seguente modo: $\underline{bx^3} + \underline{\underline{x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{1}} + \underline{abx} + \underline{\underline{a}}$ tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune bx, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune 1
b) $\underline{bx^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{1}} + \underline{abx} + \underline{\underline{a}} = bx\left(\underline{x^2 - 1 + a}\right) + 1\left(\underline{x^2 - 1 + a}\right) = \left(x^2 + a - 1\right)\left(bx + 1\right)$.

Esempio 5.14. Scomporre in fattori $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx$.

a) Il fattore comune è $5a$, quindi:
➡ $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx = 5a\left(b^2 - 2bc - 5bx + 10cx\right)$
b) vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale $5a(\underline{b^2} - \underline{2bc} - \underline{\underline{5bx}} + \underline{\underline{10cx}}) = 5a\left[b(\underline{b - 2c}) - 5x(\underline{b - 2c})\right] = 5a(b - 2c)(b - 5x)$.

5.2.4 Riconoscimento di prodotti notevoli

Differenza di due quadrati

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B).$$

Esempio 5.15. Scomporre in fattori $\frac{4}{9}a^4 - 25b^2$.

$$\frac{4}{9}a^4 - 25b^2 = \left(\frac{2}{3}a^2\right)^2 - (5b)^2 = \left(\frac{2}{3}a^2 + 5b\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a^2 - 5b\right)$$

Esempio 5.16. Scomporre in fattori $-x^6+16y^2$.

$$-x^6+16y^2=-\left(x^3\right)^2+(4y)^2=\left(x^3+4y\right)\cdot\left(-x^3+4y\right)$$

Esempio 5.17. Scomporre in fattori $a^2-(x+1)^2$. La formula precedente vale anche se A e B sono polinomi. $a^2-(x+1)^2=[a+(x+1)]\cdot[a-(x+1)]=(a+x+1)(a-x-1)$

Esempio 5.18. Scomporre in fattori $\left(2a-b^2\right)^2-(4x)^2$.

$$\left(2a-b^2\right)^2-(4x)^2=\left(2a-b^2+4x\right)\cdot\left(2a-b^2-4x\right)$$

Esempio 5.19. Scomporre in fattori $(a+3b)^2-(2x-5)^2$.

$$(a+3b)^2-(2x-5)^2=(a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5).$$

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2-C^2=A^2+2AB+B^2-C^2$
- $A^2-(B+C)^2=A^2-B^2-2BC-C^2$
- $(A+B)^2-(C+D)^2=A^2+2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$.

Esempio 5.20. Scomporre in fattori $4a^2-4b^2-c^2+4bc$.
Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$$\begin{aligned}4a^2-4b^2-c^2+4bc&=4a^2-\left(4b^2+c^2-4bc\right)\\&=(2a)^2-(2b-c)^2=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c).\end{aligned}$$

Esempio 5.21. Scomporre in fattori $4x^4-4x^2-y^2+1$.

$$4x^4-4x^2-y^2+1=\left(2x^2-1\right)^2-(y)^2=(2x^2-1+y)\cdot(2x^2-1-y).$$

Esempio 5.22. Scomporre in fattori $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$.

$$\begin{aligned}a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2&=\left(a^2+1+2a\right)-\left(b^2+9c^2-6bc\right)\\&=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c).\end{aligned}$$

Quadrato di un binomio

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli. Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue.

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\quad\Rightarrow\quad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze.

$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (-A-B)^2$$

$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = (-A+B)^2.$$

Esempio 5.23. Scomporre in fattori $4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$.

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:

$$4a^2 + 12ab^2 + 9b^4 = (2a)^2 + 2\,\mathtt{cdot}(2a) \cdot (3b^2) + \left(3b^2\right)^2 = \left(2a + 3b^2\right)^2$$

Esempio 5.24. Scomporre in fattori $x^2 - 6x + 9$.

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno "meno". Dunque: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x-3)^2$, ma anche $x^2 - 6x + 9 = (-x+3)^2$.

Esempio 5.25. Scomporre in fattori $x^4 + 4x^2 + 4$.

Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati. $x^4 + 4x^2 + 4$ è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = \left(x^2\right)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (x^2) + (2)^2 = \left(x^2 + 2\right)^2.$$

Procedura 5.6. *Individuare il quadrato di un binomio:*

a) *individuare le basi dei due quadrati;*
b) *verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;*
c) *scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi;*
d) *mettere il segno "più" o "meno" in accordo al segno del termine che non è un quadrato.*

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno "meno".

Esempio 5.26. Scomporre in fattori $-9a^2 + 12ab - 4b^2$.

Mettiamo -1 a fattore comune $-9a^2 + 12ab - 4b^2 = -(9a^2 - 12ab + 4b^2) = -(3a - 2b)^2$.

Esempio 5.27. Scomporre in fattori $-x^4 - x^2 - \frac{1}{4}$.

$$-x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x^4 + x^2 + \frac{1}{4}\right) = -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$$

Esempio 5.28. Scomporre in fattori $-x^2 + 6xy^2 - 9y^4$.

$$x^2 + 6xy^2 - 9y^4 = -\left(x^2 - 6xy^2 + 9y^4\right) = -\left(x - 3y^2\right)^2$$

Possiamo avere un trinomio che "diventa" quadrato di binomio dopo aver messo qualche fattore comune in evidenza.

Esempio 5.29. Scomporre in fattori $2a^3 + 20a^2 + 50a$.

Mettiamo a fattore comune $2a$, allora $2a^3 + 20a^2 + 50a = 2a(a^2 + 10a + 25) = 2a(a + 5)^2$.

Esempio 5.30. Scomporre in fattori $2a^2 + 4a + 2$.

$$2a^2 + 4a + 2 = 2\left(a^2 + 2a + 1\right) = 2(a + 1)^2$$

Esempio 5.31. Scomporre in fattori $-12a^3 + 12a^2 - 3a$.

$$-12a^3 + 12a^2 - 3a = -3a\left(4a^2 - 4a + 1\right) = -3a(2a - 1)^2$$

Esempio 5.32. Scomporre in fattori $\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2$.

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2 + 2ab + 4b^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^2,$$

o anche

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{8}\left(a^2 + 8ab + 16b^2\right) = \frac{3}{8}(a + 4b)^2$$

Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio secondo le seguenti regole.

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2 = (-A - B - C)^2.$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutt'e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

Esempio 5.33. Scomporre in fattori $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b$.

I primi tre termini sono quadrati, rispettivamente di $4a^2$,b e 1, si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti: $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b = \left(4a^2 + b + 1\right)^2$.

Esempio 5.34. Scomporre in fattori $x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz$.

$$x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz = \left(x^2 - y - z\right)^2 = \left(-x^2 + y + z\right)^2$$

Esempio 5.35. Scomporre in fattori $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma:

$$3x^2 = x^2 + 2x^2.$$

In questo modo si ha:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$$

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A + B + C + D)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD.$$

Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule.

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = (A+B)^3.$$

$$(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 = (A-B)^3.$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero, elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo, se è negativo rimane negativo.

Esempio 5.36. Scomporre in fattori $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$.

Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di $2a$ e di b, il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di $2a$ e b, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra $2a$ e il quadrato di b. Abbiamo dunque:

$$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3 = (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(b)+3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = (2a+b)^3$$

Esempio 5.37. Scomporre in fattori $-27x^3+27x^2-9x+1$.

Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di $-3x$ e di 1. Dunque:

$$-27x^3+27x^2-9x+1 = (-3x)^3+3\cdot(-3x)^2\cdot 1+3\cdot(-3x)\cdot 1^2+1 = (-3x+1)^3$$

Esempio 5.38. Scomporre in fattori $x^6-x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{27}$.

Le basi del cubo sono x^2 e $-\frac{1}{3}$ i termini centrali sono i tripli prodotti, quindi $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3$.

5.2.5 Altre tecniche di scomposizione

Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2+2x+3x+3\cdot 2 = x^2+(2+3)x+6 = x^2+5x+6.$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio x^2+5x+6 come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando:

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)\,x+a\cdot b$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2+(a+b)\,x+a\cdot b = (x+a)\cdot(x+b)$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri a e b tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esempio 5.39. $x^2+7x+12$

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi. Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri naturali solo come:

$$12\cdot 1;\quad 6\cdot 2;\quad 3\cdot 4$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma (S) +7 e prodotto (P) +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:

$$x^2+7x+12=(x+4)\cdot(x+3)\,.$$

Esempio 5.40. $x^2-\overset{S}{8}x+\overset{P}{15}$.

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia -8 e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15 -1 e -5 -3. Allora i due numeri cercati sono -5 e -3. Il trinomio si scompone come:

$$x^2-8x+15=(x-5)\cdot(x-3)\,.$$

Esempio 5.41. $x^2+\overset{S}{4}x-\overset{P}{5}$.

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà -5 come prodotto, precisamente $+5$ e -1. Il polinomio si scompone:

$$x^2+4x-5=(x+5)\cdot(x-1)\,.$$

Esempio 5.42. $x^2-\overset{S}{3}x-\overset{P}{10}$.

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno -10 come prodotto sono -10 $+1$, ma anche -5 $+2$. Quelli che danno -3 come somma sono -5 e $+2$.

$$x^2-3x-10=(x-5)\cdot(x+2)\,.$$

Esempio 5.43. In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore.

- $x^4+5x^2+6=\left(x^2+3\right)\cdot\left(x^2+2\right)$
- $x^6+x^3-12=\left(x^3+4\right)\cdot\left(x^3-3\right)$
- $a^4-10a^2+9=\left(a^2-9\right)\cdot\left(a^2-1\right)=(a+3)\cdot(a-3)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$
- $-x^4-x^2+20=-\left(x^4+x^2-20\right)=-\left(x^2+5\right)\cdot\left(x^2-4\right)=-\left(x^2+5\right)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$
- $2x^5-12x^3-14x=2x\cdot\left(x^4-6x^2-7\right)=2x\cdot\left(x^2-7\right)\cdot\left(x^2+1\right)$

➡ $-2a^7+34a^5-32a^3=-2a^3\left(a^4-17a^2+16\right)=-2a^3\left(a^2-1\right)\left(a^2-16\right)$
$=-2a^3\,(a-1)\,(a+1)\,(a-4)\,(a+4)\,.$

È possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili.

Esempio 5.44. $x^2+5xy+6y^2$.

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo: $x^2+\overset{S}{5}xy+\overset{P}{6}y^2$.

Bisogna cercare due monomi A e B tali che $A+B=5y$ e $A\cdot B=6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono $+3$ e $+2$, i monomi cercati sono $+3y$ e $+2y$, infatti $+3y+3y=+5y$ e $+3y\cdot(+2y)=+6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue: $x^2+5xy+6y^2=(x+3y)(x+2y)$.

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio.

Esempio 5.45. $2x^2-x-1$.

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia -1 e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2\cdot(-1)=-2$. I numeri sono -2 e $+1$. Spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$$2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1.$$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$$2x^2-x-1=2x^2\underbrace{-2x+x}_{-x}-1=2x\cdot\underline{(x-1)}+1\cdot\underline{(x-1)}=(x-1)\cdot(2x+1)\,.$$

Procedura 5.7. *Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi* ax^2+bx+c *con* $a\neq 1$, *cerchiamo due numeri* m *ed* n *tali che* $m+n=b$ *e* $m\cdot n=a\cdot c$ *se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente* b *e riscrivere il polinomio nella forma* $p=ax^2+(m+n)\cdot x+c$ *su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.*

Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio $P(x)$, se riusciamo a trovare un numero k per il quale $P(k)=0$, allora $P(x)$ è divisibile per il binomio $x-k$, allora possiamo scomporre $P(x)=(x-k)\cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra $P(x)$ e $(x-k)$.

Il problema di scomporre un polinomio $P(x)$ si riconduce quindi a quello della ricerca del numero k che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche *radice del polinomio*.

Il numero k non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.

❑ **Osservazione** Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

Esempio 5.46. $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.

Per $x = 1$ si ha $p(1) = (1)^3 + (1)^2 - 10 \cdot (1) + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere $P(x)$ per $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -10 & 8 \\ 1 & & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \end{array}$$

Predisponiamo una griglia come quella a fianco, al primo rigo mettiamo i coefficienti di $P(x)$, al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del quoziente: $q(x) = x^2 + 2x - 8$.

Possiamo allora scrivere:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8).$$

Per fattorizzare il polinomio di secondo grado $x^2 + 2x - 8$ possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia $+2$ e il cui prodotto sia -8. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto -8 e precisamente tra le seguenti coppie $(+8, -1)$, $(-8, +1)$, $(+4, -2)$, $(-4, +2)$. La coppia che dà per somma $+2$ è $(+4, -2)$. In definitiva si ha:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8) = (x - 1)(x - 2)(x + 4).$$

Esempio 5.47. $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$.

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in $\{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 5 \pm 6 \pm 10 \pm 15 \pm 30\}$. Sostituiamo questi numeri al posto della x, finché non troviamo la radice.

Per $x = 1$ si ha $P(1) = 1 - 5 - 7 + 29 + 30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice. Invece:

$P(-1) = +1 + 5 - 7 - 29 + 30 = 0$

Una radice del polinomio è quindi -1 e, utilizzando la regola di Ruffini, abbiamo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -5 & -7 & 29 & 30 \\ -1 & & -1 & 6 & 1 & -30 \\ \hline & 1 & -6 & -1 & 30 & 0 \end{array}$$

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente e possiamo scrivere:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x + 1)(x^3 - 6x^2 - x + 30).$$

Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme $\{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 5 \pm 6 \pm 10 \pm 15 \pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da -1.

$P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1) + 30 = -1 - 6 + 1 + 30 \neq 0$

$P(+2) = (+2)^3 - 6 \cdot (+2)^2 - 1 \cdot (+2) + 30 = +8 - 24 - 2 + 30 \neq 0$

$P(+2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 1 \cdot (-2) + 30 = -8 - 24 + 2 + 30 = 0$

Quindi -2 è una radice del polinomio. Dividiamo il polinomio per $(x+2)$.

	1	-6	-1	30
-2		-2	16	-30
	1	-8	15	0

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3-6x^2-x+30=(x+2)\cdot(x^2-8x+15)$.

Infine possiamo scomporre $x^2-8x+15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma -8 e prodotto $+15$ sono -3 e -5. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:

$$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5).$$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

Esempio 5.48. $6x^2-x-2$.

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di -2 e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1; \pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono

$$\left\{\pm\frac{1}{1};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{2}{1};\pm\frac{2}{3};\pm\frac{2}{6}\right\} \text{ cioè } \left\{\pm 1;\pm\frac{1}{2};\pm 2;\pm\frac{2}{3};\pm\frac{1}{3}\right\}.$$

Si ha $A(1)=-3; A(-1)=5; A\left(\frac{1}{2}\right)=-1; A\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$

	6	-1	-2
$-\frac{1}{2}$		-3	2
	6	-4	0

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x)=6x^2-x-2$ è divisibile per $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2-x-2$ come $Q(x)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente. Il quoziente è $Q(x)=6x-4$ Il polinomio sarà scomposto in $(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$$6x^2-x-2 = (6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2(3x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (3x-2)(2x+1)$$

Binomi omogenei

Un binomio omogeneo è un binomio del tipo $x^n \mp a^n$. Vediamo come scomporlo a seconda del valore di n.

- $n=1$
  - $x+a$ è irriducibile perché di primo grado.
  - $x-a$ è irriducibile perché di primo grado.
- $n=2$
  - x^2+a^2 è irriducibile.

- $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$.

- $n = 3$
  - $x^3 + a^3$ è divisibile per $(x+a)$ usando la regola di Ruffini:

	1	0	0	$+a^3$
$-a$		$-a$	$+a^2$	$-a^3$
	1	$-a$	$+a^2$	0

Quindi: $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

  - $x^3 - a^3$ è divisibile per $(x-a)$ usando la regola di Ruffini:

	1	0	0	$-a^3$
$+a$		$+a$	$+a^2$	$+a^3$
	1	$+a$	$+a^2$	0

Quindi: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

- $n = 4$
  - $x^4 + a^4$ lo si può scomporre usando uno sporco trucco: aggiungere e togliere: $-2x^2a^2$.
    $x^4 + a^4 = x^4 + 2x^2b^2 + a^4 - 2x^2a^2 = (x^2+a^2)^2 - 2x^2a^2 =$
    $\left(x^2 + a^2 - \sqrt{2}xa\right)\left(x^2 + a^2 + \sqrt{2}xa\right)$
  - $x^4 - a^4$ si può scomporre trattandolo come la differenza di due quadrati:
    $x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x-a)(x+a)(x^2+a^2)$
- $n = 5$
  - $x^5 + a^5$ è divisibile per $(x+a)$ usando la regola di Ruffini ottenendo:
    $x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + x^2a^2 - xa^3 + a^4)$
  - $x^5 - a^5$ è divisibile per $(x-a)$ usando la regola di Ruffini ottenendo:
    $x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$
- $n = 6$ ...

5.2.6 Scomposizione mediante metodi combinati

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro.

Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare *un raccoglimento totale*;
2. *contare il numero di termini* di cui si compone il polinomio:

a) con *due* termini analizzare se il binomio è
   i. una *differenza di quadrati* $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
   ii. una *differenza di cubi* $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$
   iii. una *somma di cubi* $A^3 + B^3 = (A + B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$
   iv. una *somma di quadrati* nel qual caso è *irriducibile* $A^2 + B^2$.
b) con *tre* termini analizzare se è
   i. un *quadrato di binomio* $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$
   ii. un *trinomio particolare* del tipo $x^2 + Sx + P = (x + a)(x + b)$ con $a + b = S$ e $a \cdot b = P$
   iii. un *falso quadrato*, che è irriducibile $A^2 \pm AB + B^2$.
c) con *quattro* termini analizzare se è
   i. un *cubo di binomio* $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$
   ii. una *particolare differenza di quadrati*
   $A^2 \pm 2AB + B^2 - C^2 = (A \pm B + C)(A \pm B - C)$
   iii. un *raccoglimento parziale* $ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$.
d) con *sei* termini analizzare se è
   i. un *quadrato di trinomio* $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$
   ii. un *raccoglimento parziale*
   $ax + bx + cx + ay + by + cy = (a + b + c)(x + y)$.

3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la *regola di Ruffini*.

Esempio 5.49. $a^2x + 5abx - 36b^2x$.

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo; tra i suoi monomi si ha MCD $= x$ effettuiamo il raccoglimento totale: $x \cdot \left(a^2 + 5ab - 36b^2\right)$. Il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo e può essere riscritto

$$a^2 + (5b) \cdot a - 36b^2.$$

Proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi m ed n tali che $m + n = 5b$ e $m \cdot n = -36b^2$ i due monomi sono $m = 9b$ ed $n = -4b$

$$a^2x + 5abx - 36b^2x = x \cdot (a + 9b) \cdot (a - 4b)\,.$$

Esempio 5.50. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$.

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2 + y^2 + 2 \cdot (xy - x - y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.

I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere -2, quindi $\left(\underline{x + y}\right)^2 - 2 \cdot \left(\underline{x + y}\right)$, raccogliendo $(x + y)$ tra i due termini si ottiene

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y) \cdot (x + y - 2)\,.$$

Esempio 5.51. $8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2$.

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (1 - 4a - 5b)^2 .$$

Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno stesso lo quadrato possiamo riscrivere:

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (-1 + 4a + 5b)^2 .$$

$$\begin{aligned} 8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2 &= (4a + 5b - 1) \cdot (2 - 1 + 4a + 5b) \\ &= (4a + 5b - 1) \cdot (1 + 4a + 5b) . \end{aligned}$$

Esempio 5.52. $t^3 - z^3 + t^2 - z^2$.

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili. Poiché due monomi sono nella variabile t e gli altri due nella variabile z potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale: $t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = t^2 \cdot (t + 1) - z^2 \cdot (z + 1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.

Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2\right) + (t - z) \cdot (t + z) .$$

Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t - z)$

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2 + t + z\right) .$$

Esempio 5.53. $x^3 - 7x - 6$.

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile. Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3. Procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero che annulla il polinomio nell'insieme dei divisori del termine noto $D = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Si ha $P(+1) == 1 - 7 - 6 \neq 0$. $P(-1) == -1 + 7 - 6 = 0$. Quindi $P(x)$ è divisibile per $(x + 1)$, determiniamo il quoziente con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Pertanto: $P(x) = x^3 - 7x - 6 = (x + 1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$.

Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole. Cerchiamo due numeri a e b tali che $a + b = -1$ e $a \cdot b = -6$. I due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno -6 come prodotto, precisamente $(-6, +1)$, $(-3, +2)$, $(+6, -1)$, $(+3, -2)$. La coppia che fa al caso nostro è $(-3, +2)$ quindi si scompone $q = x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$.

In definitiva $x^3 - 7x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$.

Esempio 5.54. $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo a^2b^2 otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - (ab)^2 = \left(a^2 + b^2 + ab\right)\left(a^2 + b^2 - ab\right).$$

Esempio 5.55. $a^2x^2 + 2ax^2 - 3x^2 - 4a^2 - 8a + 12$.

$$\begin{aligned} a^2x^2 + 2ax^2 - 3x^2 - 4a^2 - 8a + 12 &= x^2\left(a^2 + 2a - 3\right) - 4\left(a^2 + 2a - 3\right) \\ &= \left(x^2 - 4\right)\left(a^2 + 2a - 3\right) \\ &= (x + 2)(x - 2)(a - 1)(a + 3). \end{aligned}$$

5.3 Esercizi

5.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi

5.1.1 Algoritmo di Euclide

5.1. Completa la divisione

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
7x^4 & +0x^3 & -5x^2 & +x & -1 & 2x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
 & & \ldots & & & \frac{7}{2}x & \ldots & \\
\cline{1-5}
 & & -\frac{3}{2}x^2 & +x & -1 & & & \\
 & & & \ldots & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & x & -\frac{7}{4} & & &
\end{array}
$$

5.2. Esegui le seguenti divisioni

a) $\left(-2x^5+8x^4+10x^3-52x^2+14x+34\right):(2x-4)$
$[Q=-x^4+2x^3+9x^2-8x-9;\ R=-2]$

b) $\left(5x^6+10x^5-30x^4-15x^3-20x^2+75x-103\right):(-5x+10)$
$[Q=-x^5-4x^4-2x^3-x^2+2x-11;\ R=7]$

c) $\left(-10x^5+33x^4+26x^3+20x^2-58x+37\right):(-x+4)$
$[Q=10x^4+7x^3+2x^2-12x+10;\ R=-3]$

d) $\left(55x^8-7x^7-61x^6+50x^5-79x^4+24x^3+8x^2+26x-5\right):\left(-5x^2-3x+7\right)$
$[Q=-11x^6+8x^5-8x^4+6x^3+x^2+3x-2;\ R=-x+9]$

e) $\left(12x^8+69x^7+120x^6-20x^5+123x^4-265x^3+93x^2-161x+107\right):\left(-12x^3+3x^2-6x+11\right)$
$[Q=-x^5-6x^4-11x^3+x^2-10x+9;\ R=-5x^2+3x+8]$

f) $\left(-40x^5-12x^4-40x^3-44x^2+124x-40\right):(8x-4)$
$[Q=-5x^4-4x^3-7x^2-9x+11;\ R=4]$

g) $\left(40x^5-60x^3+90x^2+220x+121\right):(-10x-10)$
$[Q=-4x^4+4x^3+2x^2-11x-11;\ R=11]$

h) $\left(88x^8-29x^7+36x^6+56x^5-165x^4-187x^3-53x^2+111x+83\right):\left(-11x^2+5x+10\right)$
$[Q=-8x^6-x^5-11x^4-11x^3+7x+8;\ R=x+3]$

5.3 (*). Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $\left(3x^2-5x+4\right):(2x-2)$ $\quad[Q(x)=\frac{3}{2}x-1;\quad R(x)=2]$

b) $\left(4x^3-2x^2+2x-4\right):(3x-1)$ $\quad[Q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{16}{27};\quad R(x)=-\frac{92}{27}]$

c) $\left(5a^3-a^2-4\right):(a-2)$ $\quad[Q(a)=5a^2+9a+18;\quad R(a)=32]$

d) $\left(6y^5-5y^4+y^2-1\right):\left(2y^2-3\right)$ $\quad[Q(y)=3y^3-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{2}y-\frac{13}{4};\quad R(y)=\frac{27}{2}y-\frac{43}{4}]$

e) $\left(6-7a+3a^2-4a^3+a^5\right):\left(1-2a^3\right)$ $\quad[Q(a)=2-\frac{1}{2}a^2;\quad R(a)=\frac{7}{2}a^2-7a+4]$

f) $\left(2x^5-11x^3+2x+2\right):\left(x^3-2x^2+1\right)$

g) $\left(15x^4-2x+5\right):\left(2x^2+3\right)$

h) $\left(-\frac{9}{2}x^2-2x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{69}{8}x-\frac{9}{4}-\frac{4}{3}x^5\right):\left(-2x^2-3x-\frac{3}{4}\right)$

5.1.2 Regola di Ruffini

5.4. Esegui le seguenti divisioni

a) $\left(-11x^5+11x^4-4x+3\right):(x-1)$ $[Q=-11x^4-4;\ R=-1]$
b) $\left(-12x^4+126x^3-68x^2+78x+29\right):(x-10)$ $[Q=-12x^3+6x^2-8x-2;\ R=9]$
c) $\left(2x^4-12x^3+17x^2-8x+24\right):(x-3)$ $[Q=2x^3-6x^2-x-11;\ R=-9]$
d) $\left(-7x^4-45x^3-18x^2+5x+36\right):(x+6)$ $[Q=-7x^3-3x^2+5;\ R=6]$
e) $\left(-5x^4-4x^3-3x^2+7x+4\right):(x+1)$ $[Q=-5x^3+x^2-4x+11;\ R=-7]$
f) $\left(9x^4-94x^3-52x^2-30x-22\right):(x-11)$ $[Q=9x^3+5x^2+3x+3;\ R=11]$
g) $\left(-4x^5-54x^4-106x^3+44x^2+7x+73\right):(x+11)$ $[Q=-4x^4-10x^3+4x^2+7;\ R=-4]$
h) $\left(7x^4-42x^3-2x^2+6x+41\right):(x-6)$ $[Q=7x^3-2x-6;\ R=5]$
i) $\left(10x^4-66x^3-26x^2-25x+81\right):(x-7)$ $[Q=10x^3+4x^2+2x-11;\ R=4]$
j) $\left(3x^4-10x^3+14x^2-6x+3\right):(x-1)$ $[Q=3x^3-7x^2+7x+1;\ R=4]$
k) $\left(11x^4+80x^3+17x^2-39x-66\right):(x+7)$ $[Q=11x^3+3x^2-4x-11;\ R=11]$

5.5 (*). Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(3x^3-4x^2+5x-1\right):(x-2)$ $[Q(x)=3x^2+2x+9;\quad R(x)=17]$
b) $\left(x^5-x^3+x^2-1\right):(x-1)$ $[Q(x)=x^4+x^3+x+1;\quad R(x)=0]$
c) $\left(x^4-10x^2+9\right):(x-3)$ $[Q(x)=\ x^3+3x^2-x-3;\quad R(x)=0]$
d) $\left(x^4+5x^2+5x^3-5x-6\right):(x+2)$ $[Q(x)=x^3+3x^2-x-3;\quad R(x)=0]$
e) $\left(4x^3-2x^2+2x-4\right):(x+1)$ $[Q(x)=4x^2-6x+8;\quad R(x)=-12]$
f) $\left(\frac{4}{3}y^4-\frac{3}{2}y^3+\frac{3}{2}y-2\right):(y+3)$ $[Q(y)=\frac{4}{3}y^3-\frac{11}{2}y^2+\frac{33}{2}y-48;\quad R(y)=142]$
g) $\left(27x^3-3x^2+2x+1\right):(x+3)$
h) $\left(2x^4-5x^3-3x+2\right):(x-1)$
i) $\left(x^5+\frac{1}{3}x^4-2x^2-\frac{2}{3}x\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$

5.1.3 Teorema di Ruffini

5.6 (*). Risolvi utilizzando, quando puoi, il teorema di Ruffini.

a) Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx+2 è divisibile per x^2-1? $[k=-1]$
b) Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx è divisibile per x^2-1? [nessuno]
c) Per quale valore di k il polinomio x^3-3x^2+x-k è divisibile per $x+2$? $[k=-22]$
d) Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile a che, diviso per a^2-1 dà come quoziente a^2+1 e come resto -1 $[a^4-2]$

5.7 (*). Risolvi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile x che risulti divisibile per $(x-1)$ e per $(x-2)$ e tale che il resto della divisione per $(x-3)$ sia uguale a -4 $[-2x^2+6x-4]$
b) Per quale valore di a la divisione $\left(2x^2-ax+3\right):(x+1)$ dà resto 5? $[a=0]$
c) Per quale valore di k il polinomio $2x^3-x^2+kx-3k$ è divisibile per $x+2$? $[k=-4]$
d) I polinomi $A(x)=x^3+2x^2-x+3k-2$ e $B(x)=kx^2-(3k-1)x-4k+7$ divisi entrambi per $x+1$ per quale valore di k hanno lo stesso resto? $[k=2]$

5.2.1 Cosa vuol dire scomporre in fattori

5.8. Associa le espressioni a sinistra con i polinomi a destra.

a) $(a+2b)^2$
b) $3ab^2(a^2-b)$
c) $(2a+3b)(a-2b)$
d) $(3a-b)(3a+b)$
e) $(a+b)^3$
f) $(a+b+c)^2$
g) $2a^2-4ab+3ab-6b^2$
h) $a^2+4ab+4b^2$
i) $9a^2-b^2$
j) $3a^3b^2-3ab^3$
k) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
l) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

5.2.2 Raccoglimento fattore comune

5.9 (*). Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $ax+3a^2x-abx$ $[ax(3a-b+1)]$
b) $15b^2+12bc+21abx+6ab^2$ $[3b(7ax+2ab+5b+4c)]$
c) $15x^2y-10xy+25x^2y^2$ $[5xy(5xy+3x-2)]$
d) $-12a^8b^9-6a^3b^3-15a^4b^3$ $[-3a^3b^3\left(4a^5b^6+5a+2\right)]$
e) $2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2b^2c^2$ $[2b^2(a+c-a^2-c^2)]$
f) $2m^7+8m^6+8m^5$ $[2m^5\left(m+2\right)^2]$
g) $9x^2b+6xb+18xb^2$ $[3bx(3x+6b+2)]$
h) $20a^5+15a^7+10a^4$ $[5a^4\left(3a^3+4a+2\right)]$
i) $x^2b-x^5-4x^3b^2$ $[-x^2\left(x^3+4b^2x-b\right)]$

5.10. Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $3xy+6x^2$
b) $b^3+\frac{1}{3}b$
c) $3xy-12y^2$
d) x^3-ax^2
e) $9a^3-6a^2$
f) $5x^2-15x$
g) $-2x^3+2x$
h) $\frac{3}{5}ax^2+\frac{7}{5}ax$
i) $-8x^2y^3-10x^3y^2$
j) $\frac{1}{7}x^2y+x$
k) ab^2-a+a^2
l) $2b^6+4b^4-b^9$
m) $2a^2b^2x-4a^2b$
n) $-a^4-a^3-a^5$
o) $-3a^2b^2+6ab^2-15b$
p) $-\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3$
q) a^2b-b+b^2
r) $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$
s) $x^2y^3ab-x^2yab$
t) $2b^6+4b^4-b^9$
u) $-5a^4-10a^2-30a$
v) $-a^2b^2-a^3b^5+b^3$
w) $-2x^6+4x^5-6x^3y^9$
x) $\frac{3}{4}x^3y+\frac{1}{2}x^2y-xy$

5.11. Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $\frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{3}a^4b^3-\frac{5}{9}a^2b^2$
b) $12a^3x^5-18ax^6-6a^3x^4+3a^2x^4$
c) $\frac{2}{3}a^4bc^2-4ab^3c^2+\frac{10}{3}abc^2$
d) $-\frac{3}{5}a^4bx+\frac{3}{2}ab^4x-2a^3b^2x$
e) $-\frac{5}{2}a^3b^3-\frac{5}{3}a^4b^2+\frac{5}{6}a^3b^4$
f) $91m^5n^3+117m^3n^4$
g) $\frac{2}{3}a^2x+\frac{5}{4}ax^2-\frac{5}{4}ax$
h) $-5a^2+10ab^2-15a$
i) $a^n+a^{n-1}+a^{n-2}$
j) $a^n+a^{2n}+a^{3n}$
k) $2x^{2n}-6x^{(n-1)}+4x^{(3n+1)}$
l) $a^2x^{n-1}-2a^3x^{n+1}+a^4x^{2n}$
m) $a(x+y)-b(x+y)$
n) $(x+y)^3-(x+y)^2$
o) $5y^3(x-y)^3-3y^2(x-y)$

p) $5a(x+3y)-3(x+3y)$
q) $2x(x-1)-3a^2(x-1)$
r) $2(x-3y)-y(3y-x)$

5.12 (*). Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $3x^2(a+b)-2x^3(a+b)+5x^5(a+b)$ $[x^2(a+b)(5x^3-2x+3)]$
b) $(2x-y)^2-5x^3(2x-y)-3y(2x-y)^3$ $[(2x-y)\left(2x-y-5x^3-12x^2y+12xy^2-3y^3\right)]$

5.2.3 Raccoglimento parziale

5.13 (*). Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $2x-2y+ax-ay$ $[(x-y)(2+a)]$
b) $3ax-6a+x-2$ $[(x-2)(3a+1)]$
c) $ax+bx-ay-by$ $[(a+b)(x-y)]$
d) $3x^3-3x^2+3x-3$ $[(3x-3)\left(x^2+1\right)]$
e) x^3-x^2+x-1 $[(x-1)\left(x^2+1\right)]$
f) $ay+2x^3-2ax^3-y$ $[(a-1)\left(y-2x^3\right)]$

5.14. Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $3ax-9a-x+3$
b) ax^3+ax^2+bx+b
c) $2ax-4a-x+2$
d) $b^2x+b^2y+2ax+2ay$
e) $-x^3+x^2+x-1$
f) x^3+x^2-x-1
g) $x^3-1-x+x^2$
h) $-x^3-x-1-x^2$
i) x^3+x^2+x+1
j) $b^2x-b^2y+2x-2y$
k) $b^2x-b^2y-2ax-2ay$
l) $xy+x+ay+a+by+b$
m) $3x+6+ax+2a+bx+2b$
n) $2x-2+bx-b+ax-a$
o) $2x-2+bx-b-ax+a$
p) $2x+2+bx-b-ax+a$

5.15 (*). Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $bx^2-bx+b+x^2-x+1$ $[(b+1)(x^2-x+1)]$
b) $a^3-a^2b^2-ab+b^3$ $[\left(a^2-b\right)\left(a-b^2\right)]$
c) $\dfrac{1}{5}a^2b+3ab^2-\dfrac{1}{3}a-5b$ $[\left(\frac{3}{5}ab-1\right)\left(\frac{1}{3}a+5b\right)]$

5.16 (*). Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $2^{11}x^2+2^{12}x+2^{15}x+2^{16}$ $[2^{11}(x+2)(x+16)]$
b) $6x^2+6xy-3x(x+y)-9x^2(x+y)^2$ $[-3x(x+y)\left(3x^2+3xy-1\right)]$
c) $2x^3+2x^2-2ax^2-2ax$ $[2x(x+1)(x-a)]$
d) $\dfrac{2}{3}ax^3-\dfrac{1}{3}ax^2+\dfrac{2}{3}ax-\dfrac{1}{3}a$ $[\frac{1}{3}a(x^2+1)(2x-1)]$
e) $\dfrac{7}{3}x^2-\dfrac{7}{3}xy+\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{9}x^2y-\dfrac{5}{9}(x^2-xy)$ $[\frac{1}{9}x(x-y)(16+x)]$
f) $2b(x+1)^2-2bax-2ba+4bx+4b$ $[2b(x+1)(x-a+3)]$
g) $2bx^2+4bx-2x^2-4ax$
h) $x^4+x^3-x^2-x$
i) $15x(x+y)^2+5x^2+5xy$
j) $2a^2mx-2ma^2-2a^2x+2a^2$

5.2.4 Differenza di due quadrati

5.17. Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a) a^2-25b^2
b) $16-x^2y^2$
c) $25-9x^2$
d) $4a^4-9b^2$
e) x^2-16y^2
f) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^4$
g) $144x^2-9y^2$
h) $16x^4-81z^2$
i) $a^2b^4-c^2$
j) $4x^6-9y^4$
k) $-36x^8+25b^2$
l) $\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$
m) $-1+a^2$
n) $2a^2-50$
o) a^3-16ab^6
p) $-4x^2y^2+y^2$
q) $-4a^2+b^2$
r) $25x^2y^2-\frac{1}{4}z^6$

5.18 (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(b+3)^2-x^2$ $[(b+3-x)(b+3+x)]$
b) $a^8-(b-1)^2$ $[(a^4-b+1)(a^4+b-1)]$
c) $(x-1)^2-a^2$ $[(x+a-1)(x-a-1)]$
d) $(x-3)^2-9y^2$ $[(x+3y-3)(x-3y-3)]$
e) $(x+1)^2-(y-1)^2$ $[(x+y)(x-y+2)]$
f) $x^2+2x+1-y^2$ $[(x+y+1)(x-y+1)]$

5.19 (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(2x+3)^2-(2y+1)^2$ $[4(x+y+2)(x-y+1)]$
b) $a^2-2ab+b^2-4$ $[(a-b-2)(a-b+2)]$
c) $(2x-3a)^2-(x-a)^2$ $[(3x-4a)(x-2a)]$
d) $a^2-6a+9-x^2-16-8x$ $[-(x+a+1)(x-a+7)]$
e) $x^2+25+10x-y^2+10y-25$ $[(x+y)(x-y+10)]$

5.2.4 Quadrato di un binomio

5.20. Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) a^2-2a+1
b) x^2+4x+4
c) y^2-6y+9
d) $16t^2+8t+1$
e) $4x^2+1+4x$
f) $9a^2-6a+1$
g) $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$
h) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$
i) $\frac{4}{9}a^4-4a^2+9$
j) $4x^2-12x+9$
k) $9x^2+4+12x$
l) $4x^2+4xy+y^2$
m) $a^4+36a^2+12a^3$
n) $x^2-6xy+9y^2$
o) $-x^2-6xy-9y^2$
p) $-9x^2-\frac{1}{4}+3x$
q) $16a^2+\frac{1}{4}b^2-4ab$
r) $144x^2-6xa^2+\frac{1}{16}a^4$

5.21. Individua perché i seguenti polinomi non sono quadrati di un binomio.

a) $4x^2+4xy-y^2$ non è un quadrato di binomio perché . . . . ;
b) $x^2-6xy+9y$ non è un quadrato di binomio perché . . . . ;
c) $25+100x+x^2$ non è un quadrato di binomio perché . . . . ;
d) $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$ non è un quadrato di binomio perché . . . . ;
e) $25t^2+4-10t$ non è un quadrato di binomio perché . . . .

5.22 (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $24a^3+6a+24a^2$ $[6a(2a+1)^2]$
b) $3a^2x-12axb+12b^2x$ $[3x(a-2b)^2]$
c) $5a^2+2ax+\frac{1}{5}x^2$ $[\frac{1}{5}(x+5a)^2]$
d) $x^6y+x^2y+2x^4y$ $[x^2y\left(x^2+1\right)^2]$
e) $x^5+4x^4+4x^3$ $[x^3(x+2)^2]$
f) $2y^3-12y^2x+18x^2y$ $[2y(3x-y)^2]$

g) $-50t^3-8t+40t^2$ $[-2t(5t-2)^2]$ h) $2^{10}x^2+2^6\cdot 3^{20}+3^{40}$ $[(2^5x+3^{20})^2]$

5.2.4 Quadrato di un polinomio

5.23. Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
b) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$
c) $x^2+y^2+4+4x+2xy+4y$
d) $4a^4-6ab-4a^2b+12a^3+b^2+9a^2$
e) $9x^6+2y^2z+y^4-6x^3z-6x^3y^2+z^2$
f) $\frac{1}{4}a^2+b^4+c^6+ab^2+ac^3+2b^2c^3$
g) $a^2+2ab+b^2-2a+1-2b$
h) $x^2+\frac{1}{4}y^2+4-xy+4x-2y$
i) $a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab$
j) $-x^2-2xy-9-y^2+6x+6y$
k) $4a^2+4ab-8a+b^2-4b+4$
l) $a^2b^2+2a^2b+a^2-2ab^2-2ab+b^2$

5.24. Individua perché i seguenti polinomi non sono quadrati.

a) $a^2+b^2+c^2$ non è un quadrato perché . . . . ;
b) $x^2+y^2+4+4x+4xy+4y$ non è un quadrato perché . . . . ;
c) $a^2+b^2+c^2-2ac-2bc-2ab$ non è un quadrato perché . . . . ;
d) $a^2+b^2-1-2a-2b+2ab$ non è un quadrato perché . . . .

5.25 (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $a^2+4ab-2a+4b^2-4b+1$ $[(a+2b-1)^2]$
b) $a^2b^2+2a^2b+a^2+4ab^2+4ab+4b^2$ $[(ab+a+2b)^2]$
c) $x^2-6xy+6x+9y^2-18y+9$ $[(x-3y+3)^2]$

5.26. Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ scomponi prima $3x^2=x^2+2x^2$
b) $4a^4+8a^2+1+8a^3+4a$ scomponi prima $8a^2=4a^2+4a^2$
c) $9x^4+6x^3-11x^2-4x+4$ scomponi in maniera opportuna $-11x^2$

5.2.4 Cubo di un binomio

5.27. Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $-x^9-3x^6+3x^3+8$
b) $b^3+12a^2b-6ab^2-8a^3$
c) $-12a^2+8a^3-b^3+6ab$
d) $-12a^2b+6ab+8a^3-b^3$
e) $x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}$
f) $-x^3-6x^2-12x-8$
g) $x^3y^6+1+3x^2y^2+3xy^2$
h) $x^3+3x-3x^2-1$
i) $-5x^5y^3-5x^2-15x^4y^2-15x^3y$
j) $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$

5.28. Individua perché i seguenti polinomi non sono cubi.

a) $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$ non è un cubo perché . . . . ;
b) $27a^3-b^3+9a^2b-9ab^2$ non è un cubo perché . . . . ;
c) $8x^3+b^3+6x^2b+6xb^2$ non è un cubo perché . . . . ;
d) $x^3+6ax^2-6a^2x+8a^3$ non è un cubo perché . . . .

5.29 (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$ $[(a^2+b^2)^3]$
b) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$ $[(2a-3b)^3]$
c) $a^6+3a^5+3a^4+a^3$ $[a^3(a+1)^3]$
d) $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$ $[a(a^3-2)^3]$

5.2.5 Trinomi particolari

5.30. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2-5x-36$
b) $x^2-17x+16$
c) $x^2-13x+12$
d) x^2+6x+8
e) $x^2+7x+12$
f) x^2-2x-3
g) $x^2+9x+18$
h) x^2-5x+6
i) x^2-8x-9
j) $x^2-7x+12$
k) x^2-6x+8
l) $x^2-51x+50$
m) x^2-3x-4
n) $x^2+5x-14$
o) $x^2+4x-12$
p) x^2-3x+2
q) $x^2+3x-10$
r) $x^2+13x+12$
s) $x^2+2x-35$
t) $x^2+5x-36$
u) x^2+8x+7

5.31. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) x^4+8x^2+12
b) x^4-5x^2+4
c) x^6-5x^3+4
d) x^4+9x^2-10
e) x^6-x^3-30
f) $x^2y^2-2xy-35$
g) $a^4b^2-a^2b-72$
h) x^4+11x^2+24
i) $-x^6+7x^3-10$

5.32 (*). Scomponi i seguenti polinomi seguendo la traccia.

a) $2x^2-3x-5=2x^2+2x-5x-5=\dots\dots\dots\dots$ $[(x+1)(2x-5)]$
b) $3y^2+y-10=3y^2+6y-5y-10=\dots\dots\dots\dots$ $[(y+z)(3y-5)]$
c) $5t^2-11t+2=5t^2-10t-t+2=\dots\dots\dots\dots$ []
d) $-3t^2+4t-1=-3t^2+3t+t-1=\dots\dots\dots\dots$ []
e) $2x^2-3x-9=2x^2-6x+3x-9=\dots\dots\dots\dots$ $[(x-3)(2x+3)]$

5.33. Scomponi i seguenti polinomi.

a) $3a^2-4a+1$
b) $11k-6k^2+7$
c) $4b^2-4b-3$
d) $6x^2-13x-15$
e) $x^2+10ax+16a^2$
f) $2x^4+x^2-3$

5.2.5 Scomposizione con la regola Ruffini

5.34 (*). Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3-9x-9+x^2$ $[(x+1)(x+3)(x-3)]$
b) m^3+2m^2-m-2 $[(m-1)(m+1)(m+2)]$
c) a^3+a^2-4a-4 $[(a+1)(a-2)(a+2)]$
d) $3a^2+a-2$ $[(a+1)(3a-2)]$
e) $6a^3-a^2-19a-6$ $[(a-2)(3a+1)(2a+3)]$
f) x^3-5x^2+8x-4 $[(x-1)(x-2)^2]$

5.35 (*). Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $a^6+6a^4+11a^2+6$ *Suggerimento*: sostituisci $a^2=x$ $[(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)]$
b) $2x^{2n}+x^n-3$ *Suggerimento*: $x^n=a$ $[(x^n-1)(2x^n+3)]$

c) $x^3 - ax^2 - 2ax + 2a^2$ *Suggerimento*: cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$ $[(x - a)\left(x^2 - 2a\right)]$

5.36. Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3 - 8$
b) $x^3 + 8$
c) $-x^3 - 8$
d) $-x^3 + 8$
e) $27x^3 - 1$
f) $x^5 + 32$
g) $x^5 - 32$
h) $8x^3 + 1$
i) $27x^3 - 8$
j) $x^3 + a^3$
k) $x^3 - a^3$
l) $125x^3 + 8a^3$

5.2.5 Binomi omogenei

5.37. Scomponi in fattori i seguenti binomi omogenei.

a) $x^3 - 1$
b) $27 - x^3$
c) $x^3 + 1$
d) $x^3 + 8$
e) $64a^3 - 8b^3$
f) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}b^3$
g) $8x^3 - 27y^3$
h) $0,001^3 - x^3$
i) $10^{-3}x^3 - 10^3y^3$
j) $x^6 - y^6$
k) $27x^3 - 8y^3$
l) $\frac{27}{8}x^3 - 8$
m) $a^3b^3 - 1$
n) $a^9 - 1$
o) $a^6 - 1$
p) $a^3 - 125$
q) $x^6 - y^3$
r) $x^9 + \frac{8}{27}y^3$

5.3.2 Esercizi riepilogativi

5.38 (*). Scomponi in fattori.

a) $(x+1)^2 - (y-1)^2$ $[(x+y)(x-y+2)]$
b) $5x^4y^2 + 5x^2y + \frac{5}{4}$ $[5\left(\frac{1}{2} + x^2y\right)^2]$
c) $(y-1)^2 - 2y + 2$ $[(y-1)(y-3)]$
d) $4 - (y-1)^2$ $[(y+1)(3-y)]$
e) $4x^2 - xy - 4x + y$ $[(x-1)(4x-y)]$
f) $0,\overline{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2$ $[\frac{1}{3}(a+b)(a-b)]$
g) $3x + k + 3x^2 + kx$ $[(x+1)(3x+k)]$
h) $x^3 + 3x - 4x^2$ $[x(x-1)(x-3)]$
i) $4x^2 - 7x - 2$ $[(x-2)(4x+1)]$
j) $6x^2 - 24xy + 24y^2$ $[6(x-2y)^2]$

5.39 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^2 - (2+a)x + 2a$ $[(x-2)(x-a)]$
b) $2x^2 + 5x - 12$ $[(x+4)(2x-3)]$
c) $\frac{1}{16}a^2 + 4b^4 - ab^2$ $[\left(\frac{1}{4}a - 2b^2\right)^2]$
d) $81a - 16a^3b^2$ $[a(9-4ab)(9+4ab)]$
e) $a^2 - 10a - 75$ $[(a-15)(a+5)]$
f) $ax + bx - 3ay - 3by$ $[(a+b)(x-3y)]$
g) $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ $[(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2 - x + 1\right)]$
h) $0,09x^4y^5 - 0,04y$ $[\frac{1}{100}y\left(3x^2y^2 + 2\right)\left(3x^2y^2 - 2\right)]$
i) $-a^2x - 2abx - b^2x + 5a^2 + 10ab + 5b^2$ $[(a+b)^2(5-x)]$
j) $\frac{1}{9}x^2 - 0,25b^2$ $[\frac{1}{36}(2x+3b)(2x-3b)]$

5.40 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^2(x^4 - 18x^2 + 81) - x^6 + 729$ $[-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)]$

b) x^5-2x^2-x+2 $[(x+1)(x-1)^2(x^2+x+2)]$
c) $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ $[(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)]$
d) $16ab-81a^5b^9$ $[ab(2-3ab^2)(2+3ab^2)(4+9a^2b^4)]$
e) $6x^7+2x^6-16x^5+8x^4$ $[2x^4(x-1)(x+2)(3x-2)]$
f) x^4-4x^2-45 $[(x-3)(x+3)(x^2+5)]$
g) $-3a^7x^2+9a^5x^4-9a^3x^6+3ax^8$ $[3ax^2(x-a)^3(x+a)^3]$
h) $x^3-13x^2+35x+49$ $[(x+1)(x-7)^2]$
i) $4ab^3c^2+20ab^3-3abc^2-15ab$ $[ab(4b^2-3)(c^2+5)]$
j) $6a^6b^3-12a^4b^5+6a^2b^7$ $[6a^2b^3(a-b)^2(a+b)^2]$

5.41 (*). Scomponi in fattori.

a) $(-x^2+6x-9)^2-(4x-12)(x+1)$ $[(x-3)(x^3-9x^2+23x-31)]$
b) $x+1-2(x^2+2x+1)+(3x^2+x^3+3x+1)(x-2)$ $[(x+1)(x^3-5x-3)]$
c) $36x^2+24xy-48x+4y^2-16y+15$ $[(6x+2y-3)(6x+2y-5)]$
d) $x^5-2-x+2x^4$ $[(x+2)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)]$
e) $6a^3+11a^2+3a$ $[a(3a+1)(2a+3)]$
f) $3a^4-24ax^3$ $[3a(a-2x)\left(a^2+2ax+4x^2\right)]$
g) x^2-2x+1
h) $x^2+y^2+z^4-2xy+2xz^2-2yz^2$
i) $a^6+b^9+3a^4b^3+3a^2b^6$
j) $a^3-6a^2+12a-8$

5.42. Scomponi in fattori.

a) $a^2+b^2-1-2ab$
b) $a^4+2b-1-b^2$
c) $-8a^2b+24ab^2-18b^3$
d) $6a^5-24ab^4$
e) $a^4+b^4-2a^2b^2$
f) $x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3$
g) $x^2-12x+32$
h) $x^2-8x+15$
i) x^4-7x^2-60
j) x^3-5x^2+6x
k) $x^2+10xy+25y^2$
l) $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$
m) $64a^9-48a^6b^2+12a^3b^4-b^6$
n) $4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$
o) $x^6-6x^4+12x^2-8$
p) $a^7-a^4b^2-4a^3b^2+4b^4$

5.43. Scomponi in fattori.

a) $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$
b) $18a^4b-2b^3$
c) x^4-9x^2+20
d) $3a^4b^3-6a^3b^3-9a^2b^3$
e) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{9}a^2$
f) $3x^3+x^2-8x+4$
g) $4a^2-9-4b^2+12b$
h) x^3+3x^2-6x-8
i) $16x^3-72x^2+108x-54$
j) $\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{27}$

5.44 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^{a+1}-5x^a-4x^{a-2}$ $[x^{a-2}(x^3-5x^2-4)]$
b) $x^{n^2-1}+2x^{n^2+2}+x^{n^2}(x-3)$ $[x^{n^2-1}(2x-1)(x^2+x-1)]$
c) $x^{4n+1}-x^{3n+1}y^n+2x^ny^{4n}-2y^{5n}$ $[(x^n-y^n)(x^{3n+1}+2y^{4n})]$
d) $x^{n+2}+3x^ny^{2n}-x^2y^3-3y^{3+2n}$ $[(x^n-y^3)(x^2+3y^{2n})]$

Geometria II

"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

6 Nozioni fondamentali

6.1 Introduzione alla geometria razionale

6.1.1 Breve nota storica

La parola geometria deriva dal greco antico: γεωμετρία, composta da γεω (geo) che significa "terra" e da μετρία (metria) che significa "misura", tradotto alla lettera significa "misura della terra". Secondo una tradizione storica, durante il VI secolo a.C. alcuni matematici e pensatori greci (principalmente Talete e Pitagora) cominciarono a organizzare in maniera razionale (secondo il susseguirsi di ragionamenti logici) le conoscenze geometriche che egiziani e babilonesi avevano raggiunto nei secoli precedenti. Lo storico greco Erodoto, vissuto tra il 484 a.C. e il 425 a.C., racconta che a causa delle periodiche inondazioni del fiume Nilo gli egiziani erano costretti a ricostruire ogni anno i confini dei singoli possedimenti terrieri e in questo modo avevano sviluppato delle modalità tecniche per la misura della terra (γεωμετρία appunto).

Ritrovamenti più recenti di tavolette di creta del periodo babilonese incise con caratteri cuneiformi ci fanno ritenere che la cultura babilonese possedesse già delle sofisticate conoscenze geometriche. Di certo sappiamo che nel III secolo a.C. il matematico ellenico Euclide[1], direttore della grande biblioteca di Alessandria in Egitto, diede una struttura razionale alle conoscenze geometriche note sino ad allora scrivendo una delle più grandi opere della cultura occidentale, gli *Elementi* (in greco Στοιχεια). Questa grande opera è organizzata in 13 libri, di cui i primi sei riguardano la Geometria Piana, i successivi quattro trattano i rapporti tra grandezze e gli ultimi tre riguardano la Geometria Solida. Essa prese il posto di tutti i libri precedenti sulla geometria e servì come testo fondamentale nell'antichità e nel medioevo; è stata usata come libro scolastico di geometria fino ai nostri giorni. La sua considerazione presso i Romani fu modesta, ma fu grandissima presso i Bizantini e gli Arabi. Proprio questi ultimi la reintrodussero in Europa dopo la perdita medievale, grazie alla traduzione di Adelardo di Bath[2] (secolo XII).

Dal punto di vista della struttura logica, gli *Elementi* di Euclide sono organizzati a partire da cinque assiomi (nozioni comuni evidenti), cinque postulati (proposizioni che si richiede siano assunte come vere, senza dimostrazione) e 23 definizioni. L'opera di Euclide è rimasta nella nostra cultura l'unico punto di riferimento per lo studio della geometria, fino a quando, contestualmente allo studio dei fondamenti delle altre branche della matematica, i matematici cercarono di dare una base più rigorosa alla geometria di Euclide. Un'impostazione assiomatica più moderna venne data dal matematico tedesco David Hilbert[3] nel libro *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria) pubblicato nel 1899, nel quale la geometria veniva fondata su ben 21 assiomi.

[1] vissuto molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.).
[2] traduttore, filosofo e matematico britannico (1080 - 1152).
[3] (1862 - 1943).

6.1.2 Lo spazio fisico e la geometria

La geometria nasce come studio sistematico dello spazio fisico e delle forme che in esso si muovono. Lo spazio in cui ci muoviamo è per tutti una delle prime esperienze che facciamo fin dai primi mesi di vita. I nostri sensi determinano le sensazioni che ci permettono di riconoscere le forme degli oggetti e i loro movimenti. Tuttavia, le nozioni geometriche come quelle di punto, retta, rettangolo, cubo, sfera ... non trovano un perfetto riscontro nella realtà fisica. Nello spazio fisico non esistono, infatti, punti e rette come li descrive la geometria, né figure a due sole dimensioni, né cubi o sfere perfette. La geometria si propone quindi di fornire un "modello" ideale della realtà fisica, sia per le forme degli oggetti sia per le proprietà dello spazio.

Fino alla seconda metà dell'Ottocento, matematici e filosofi sono stati sostanzialmente d'accordo nel considerare la geometria come la scienza che descriveva razionalmente le proprietà dello spazio fisico. Galileo Galilei[4] ne *Il saggiatore* (1623) scriveva:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, i matematici si sono invece convinti che la geometria non descrive esattamente lo spazio fisico, che sono possibili più geometrie ugualmente vere dal punto di vista logico e matematico. Lo studio matematico della geometria si è allora differenziato dallo studio dello spazio fisico e da quello dello spazio psicologico percepito dall'uomo con i suoi sensi. I matematici hanno accettato l'esistenza di diverse geometrie matematicamente possibili, si sono accontentati di costruire dei modelli astratti e hanno lasciato ai fisici la "scelta" del modello che meglio si adatta a descrivere i fenomeni fisici dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. La geometria allora è diventata una branca della matematica alla quale i matematici hanno cercato di dare un fondamento esclusivamente logico, indipendente dalle esperienze fisiche.

Il legame tra fisica e matematica non si è mai rotto. Con il passare dei secoli, ci si è resi sempre più conto di quanto la "geometria" del mondo fisico sia molto complessa e di come alcune nuove geometrie riescono a descrivere meglio fenomeni che con la vecchia geometria di Euclide non si riusciva a spiegare.

6.2 Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

La geometria, sin dai tempi di Euclide, è stata organizzata assiomaticamente, partendo cioè dalle fondamenta. Nella matematica queste fondamenta sono costituite dai concetti primitivi e dagli assiomi. Gli *enti primitivi* sono le nozioni che si decide di non definire. Ci si può rendere facilmente conto, infatti, che non tutto può essere definito, poiché in ogni nozione che si definisce si deve fare ricorso ad altre nozioni, le quali a loro volta devono essere definite per mezzo di altre nozioni e così via all'indietro senza che teoricamente questo processo abbia mai una fine, arrivando necessariamente ad alcune nozioni così primitive

[4] fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano (1564 - 1642).

da non poter essere definite con altre nozioni più elementari. A queste nozioni non è né necessario né possibile associare alcun significato esplicito; è invece fondamentale esprimere le loro proprietà esclusivamente attraverso *assiomi*, cioè attraverso proprietà non dimostrabili che indicano però come gli enti primitivi devono e possono essere usati. Il matematico Hilbert utilizza tre enti primitivi – punto, linea e piano – e 21 assiomi. A partire dagli enti primitivi si fanno derivare tutte le *definizioni* degli enti geometrici.

La definizione è un'affermazione mediante la quale si spiega la natura di un certo ente, al quale si attribuisce anche un nome. Gli enti primitivi non necessitano di definizione; gli assiomi e i postulati, che danno una descrizione delle proprietà degli enti fondamentali, risultano una sorta di definizione implicita di questi stessi enti.

Oltre ai tre enti primitivi, il *punto*, la *retta* e il *piano*, occorre poi assumere l'esistenza di tre relazioni primitive tra gli enti geometrici: *giacere su*, *stare fra*, *essere congruente a*. Queste relazioni permettono di stabilire dei legami tra gli enti geometrici, per esempio: «un punto giace su una retta», «un punto sta fra altri due punti», «un segmento è congruente a un altro segmento», ...

Esiste una simbologia convenzionale, condivisa dagli studiosi, per indicare questi enti:

- per indicare un punto usiamo una lettera maiuscola: $A, B, C, \dots$;
- per indicare una retta usiamo una lettera minuscola: $a, b, c, \dots$;
- per indicare un piano usiamo una lettera greca: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Ricordiamo l'alfabeto greco:

- lettere greche minuscole: α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), ζ (zeta), η (eta), ϑ (theta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mi), ν (ni), ξ (xi), o (omicron), π (pi o pi greca), ρ (rho), σ (sigma), τ (tau), υ (ipsilon), φ (fi), χ (chi), ψ (psi), ω (omega);
- lettere greche maiuscole: $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, \Sigma, T, \Upsilon, \Phi, X, \Psi, \Omega$.

Dal punto di vista della rappresentazione grafica si usano le convenzioni come nella figura 6.1:

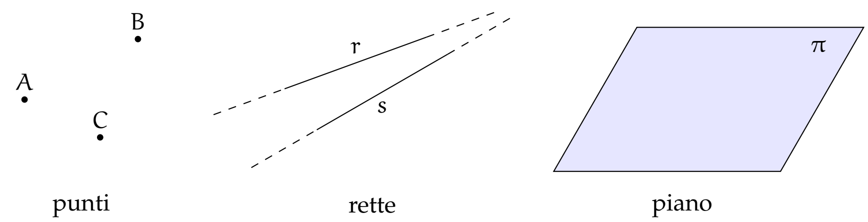


FIGURA 6.1: Rappresentazione grafica degli enti fondamentali della geometria

6.2.1 I teoremi

Un *teorema* è una proposizione composta del tipo SE ... ALLORA..., in simboli $I \Rightarrow T$, cioè una implicazione tra due proposizioni, dette *ipotesi* (I) e *tesi* (T).

Dimostrare un teorema significa fare un ragionamento logico che permetta di concludere che la tesi è vera avendo supposto che l'ipotesi sia vera. Nel caso in cui un teorema sia dimostrabile all'interno di una teoria, si dice che è un teorema valido.

In riferimento alla terminologia usata quando abbiamo parlato dell'implicazione, chiamiamo $I \Rightarrow T$ *teorema diretto*, $T \Rightarrow I$ *teorema inverso*, $\neg I \Rightarrow \neg T$ *teorema contrario* e $\neg T \Rightarrow \neg I$ *teorema controinverso*. Ribadiamo l'equivalenza tra il teorema diretto ed il teorema controinverso, nonché l'equivalenza tra il teorema contrario ed il teorema inverso, mentre in generale la validità del teorema diretto non implica la validità del teorema inverso, e viceversa.

Nel caso particolare in cui vale sia $I \Rightarrow T$ che $T \Rightarrow I$, si scrive $I \Leftrightarrow T$ e si dice che ipotesi e tesi sono *logicamente equivalenti*. Più precisamente, nel linguaggio specifico delle scienze che fanno uso della logica, e quindi anche nel linguaggio della Geometria Razionale, se vale $I \Rightarrow T$, si dice che «I è condizione sufficiente per T» e anche che «T è condizione necessaria per I»; se in particolare vale $I \Leftrightarrow T$, si usa dire che «I è condizione necessaria e sufficiente per T».

In generale incontreremo molti teoremi che vengono denominati genericamente *proposizioni*, perché il nome di "teorema" viene tradizionalmente attribuito solo ai teoremi più importanti. Inoltre si usa chiamare *lemma* una proposizione che non ha una grande importanza di per sé, ma che è particolarmente utile per la dimostrazione di altri teoremi. Si chiama invece *corollario* un teorema importante che è una conseguenza immediata di un altro teorema.

Così come abbiamo visto che non è possibile definire tutto e che quindi bisogna assumere alcune nozioni come primitive, analogamente non è possibile dimostrare tutte le proposizioni di una teoria. Alcune proposizioni devono essere assunte come vere e costituiscono la base della dimostrazione dei teoremi; queste proposizioni si chiamano *postulati* o *assiomi*. Risulta evidente che cambiando sia pure uno solo degli assiomi cambiano anche i teoremi dimostrabili e quindi la teoria.

In generale, come abbiamo detto, dato un teorema (diretto) del tipo $p \Rightarrow q$, la sua validità non garantisce la validità del teorema inverso $q \Rightarrow p$. Questo però può succedere. In ogni caso, se sono vere $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, le due proposizioni sono *logicamente equivalenti*, ossia $p \Leftrightarrow q$.

Esempio 6.1. Teorema: «un triangolo che ha i lati uguali ha anche gli angoli uguali».

- Il teorema si può schematizzare nel seguente modo: $p =$ «un triangolo ha i lati uguali»; $q =$ «un triangolo ha gli angoli uguali». Il teorema enunciato è $p \Rightarrow q$.
- Il teorema inverso è $q \Rightarrow p$, cioè «un triangolo che ha gli angoli uguali ha anche i lati uguali».

In tale esempio sono validi sia il teorema diretto che quello inverso. Il fatto che uno dei due teoremi sia chiamato diretto e l'altro inverso è un fatto soggettivo, che può dipendere semplicemente dall'ordine con cui si enunciano i teoremi. Il teorema precedente si può esporre allora nel seguente modo:

Teorema: «un triangolo ha i lati uguali se e solo se ha gli angoli uguali».

6.2.2 Postulati e assiomi

Un *postulato*, o *assioma*, è una proposizione, spesso intuitiva, evidente ma non dimostrata, ammessa come vera in quanto necessaria per costruire poi le dimostrazioni dei teoremi.

Euclide nei suoi *Elementi* aveva individuato un gruppo di cinque assiomi, che riguardano le nozioni comuni e quindi non fanno riferimento alla geometria, e un gruppo di cinque postulati che riguardano proprietà geometriche.

Assiomi di Euclide

I. Cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro.

II. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

IV. Cose che coincidono fra loro sono uguali.

V. Il tutto è maggiore della parte.

Postulati di Euclide

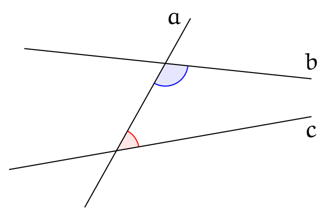
I. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. Un segmento si possa prolungare indefinitamente in linea retta.

III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.

IV. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

V. Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.



Nella figura a lato, la retta a taglia le rette b e c, formando sul lato destro due angoli la cui somma è minore di due angoli retti. Prolungando opportunamente le rette b e c, risulta che esse si incontrano sul lato destro della figura.

Nell'impostazione assiomatica moderna di Hilbert, gli assiomi hanno la funzione di definire implicitamente gli enti primitivi, cioè di fissare le proprietà alle quali questi enti devono soddisfare. Hilbert aggiunge inoltre altri assiomi che Euclide stesso non aveva esplicitato chiaramente.

Assiomi di Hilbert

L'esposizione che segue è una semplificazione degli assiomi del grande matematico tedesco.[5]

Hilbert assume come enti primitivi della geometria piana il *punto* e la *retta*, come relazioni primitive l'appartenenza di un punto ad una retta, il giacere di un punto tra altri due punti, e la congruenza di segmenti.

[5] chi volesse studiare direttamente il testo originale può consultare `http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf` [ultima consultazione 20.03.2014].

Assiomi di appartenenza “giacere su”

I. Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta che contiene entrambi i punti.

II. Ogni retta contiene almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta (figura 6.2).

III. Dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano che contiene tutti e tre i punti. Ogni piano contiene almeno un punto (figura 6.3).

IV. Se due punti di una retta giacciono su un piano, allora anche tutti gli altri punti della retta giacciono su questo piano (figura 6.4).

V. Se un punto giace su due piani distinti, allora esiste almeno un altro punto giacente su entrambi questi piani.

VI. Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

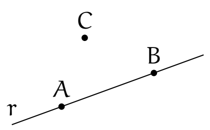


FIGURA 6.2: Assioma II

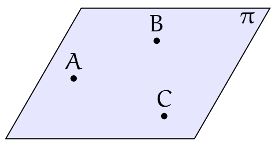


FIGURA 6.3: Assioma III

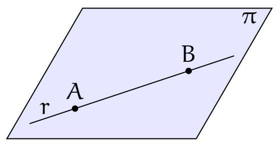


FIGURA 6.4: Assioma IV

Assiomi di ordinamento “stare fra”

VII. Se un punto B giace fra i punti A e C, allora i punti A, B e C sono tre punti distinti sulla stessa retta, e B giace fra C ed A (figura 6.5).

VIII. Dati due punti A e C, esiste almeno un punto B, sulla retta AC, giacente fra di essi.

IX. Dati tre punti qualsiasi di una retta, uno e uno solo di essi giace fra gli altri due.

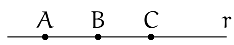
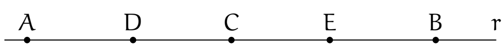


FIGURA 6.5: Assioma VII

Gli ultimi assiomi ci permettono di dedurre il seguente teorema.

Teorema 6.1. *Tra due punti di una retta esiste sempre una quantità illimitata di altri punti.*

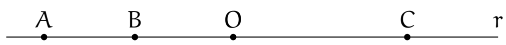
Dimostrazione. Data una retta r e due suoi punti A e B, per l’assioma VIII sappiamo che esiste un terzo punto C sulla retta r che giace tra A e B. Ma allora esiste un punto D su r che giace tra A e C e un punto E che giace tra C e B. Per lo stesso assioma esisterà un punto tra A e D, uno tra D e C, uno tra C e B e così via. □



Definizione 6.1. Si chiama *segmento* AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno sulla retta tra A e B.

Gli assiomi di ordinamento ci permettono di dare anche la seguente

Definizione 6.2. Presi quattro punti A, B, C, O su una retta, in modo che B stia tra A e O e O stia tra A e C possiamo dire che A e B *stanno dalla medesima parte* rispetto a O, mentre A e C non stanno dalla medesima parte rispetto a O.



❑ **Osservazione** Trascuriamo in questa trattazione elementare l'*assioma di Pasch*[6] (X) e l'*assioma delle parallele*[7] (XI).

Assiomi di congruenza "essere congruente a"

XII. *Assioma del trasporto di un segmento.* Se A, B sono due punti di una retta r e A′ è un punto sulla stessa retta (o fissato su un'altra retta r′), si può sempre trovare un punto B′ sulla retta r (o su r′), da una data parte rispetto ad A′, tale che il segmento AB sia congruente al segmento A′B′ (figura 6.6).

XIII. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se A′B′ è congruente ad AB e A″B″ è congruente ad AB allora A′B′ è congruente ad A″B″.

XIV. Siano AB e BC segmenti su una retta r privi di punti comuni a parte B, e siano A′B′ e B′C′ segmenti su una retta r′ privi di punti comuni a parte B′. Se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, allora $AC \cong A'C'$ (figura 6.7).

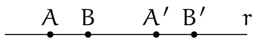


FIGURA 6.6: Assioma XII

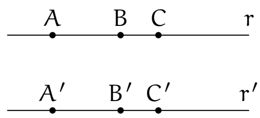
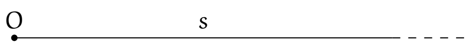


FIGURA 6.7: Assioma XIV

Prima di proseguire con gli altri assiomi premettiamo le seguenti definizioni.

Definizione 6.3. Chiamiamo *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.



[6] chiamato così in onore del matematico tedesco Moritz Pasch (1843 - 1930) che ne mise in evidenza l'indeducibilità dagli altri assiomi di Euclide, è uno degli assiomi che Hilbert aggiunse ai postulati di Euclide per renderli completi. Il suo enunciato è il seguente: «Dati un triangolo nel piano, una retta che ne attraversi un lato in un punto che non sia un estremo, deve necessariamente intersecare un altro dei due lati o il vertice in comune tra essi.»

[7] si tratta del V postulato di Euclide, anche se nella tradizione didattica moderna esso viene in genere sostituito dall'assioma di Playfair (più restrittivo): «Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.»

Definizione 6.4. Si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 6.8).

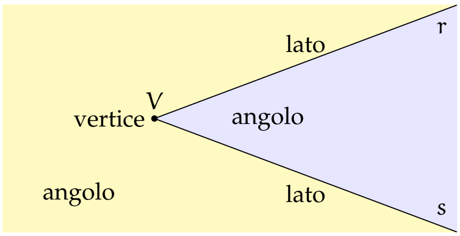


FIGURA 6.8: Le semirette r e s, aventi l'origine V comune, individuano due regioni del piano ognuna delle quali è detta *angolo*.

L'angolo individuato da tre punti A, B, C è l'angolo formato dalla semiretta con origine B e passante per A e dalla semiretta con origine B e passante per C. Questo angolo si indica con il simbolo $A\widehat{B}C$. Nei disegni si usa indicare l'angolo con un archetto che indica la parte di piano considerata.

XV. Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che sia l'angolo $D\widehat{B'}C'$ che $E\widehat{B'}C'$ sono congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$ (figura 6.9);

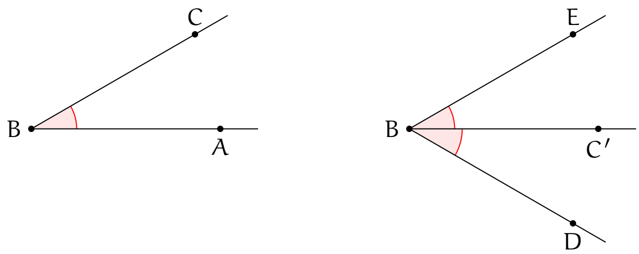


FIGURA 6.9: Assioma XV

XVI. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C' \equiv A''\widehat{B''}C''$.

Assioma di continuità

XVII. *Assioma di Archimede*. Sulla retta che unisce due punti qualsiasi A e B si prende un punto A_1, quindi si prendono i punti $A_2, A_3, A_4, \ldots$ in modo che A_1 sia tra A e A_2, A_2 tra A_1 e A_3, A_3 tra A_2 e A_4, ecc. e che $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \equiv \ldots$ allora tra tutti questi punti esiste sempre un punto A_n tale che B sta tra A e A_n (figura 6.10).

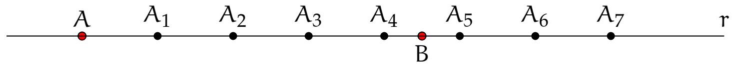


FIGURA 6.10: Assioma di Archimede (XVII)

Assioma di completezza

XVIII. Ad un sistema di punti, linee rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi in modo tale che il sistema, così generalizzato, formi una nuova geometria obbediente a tutti i cinque gruppi di assiomi. In altre parole, gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, nel caso in cui si considerino validi i cinque gruppi di assiomi.

6.3 Prime definizioni

6.3.1 Semirette e segmenti

Nel paragrafo precedente abbiamo già introdotto alcune definizioni di base, necessarie per enunciare tutti i postulati della geometria secondo l'assiomatizzazione di Hilbert. In questo paragrafo costruiamo le prime definizioni. Per comodità del lettore riportiamo anche quelle già date.

Partiamo dalla nozione generica di figura.

Definizione 6.5. Si chiama *figura* un qualsiasi insieme, non vuoto, di punti.

Questa definizione fa riferimento soltanto all'ente primitivo geometrico di punto.

Lo spazio non è considerato un ente primitivo, in quanto può essere ottenuto dalla seguente definizione.

Definizione 6.6. Si chiama *spazio* l'insieme di tutti i punti.

Risulta pertanto che una figura è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio.

In base agli assiomi di ordinamento un qualunque punto P su una retta divide la retta in due parti, una è costituita dai punti che "seguono" P, l'altra è costituita dai punti che "precedono" P.

Definizione 6.7. Si chiama *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

Solitamente una semiretta viene indicata con una lettera latina minuscola.

Prendendo due qualsiasi rette dello spazio esse si possono trovare in diverse posizioni reciproche, cioè una rispetto all'altra.

Definizione 6.8. Due rette che appartengono ad uno stesso piano si dicono *complanari*, altrimenti si dicono *sghembe*.

Definizione 6.9. Due rette complanari r ed s che non hanno nessun punto in comune si dicono *parallele* e si scrive $r \parallel s$.

Definizione 6.10. Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Definizione 6.11. Se due rette hanno almeno due punti in comune sono *coincidenti*.

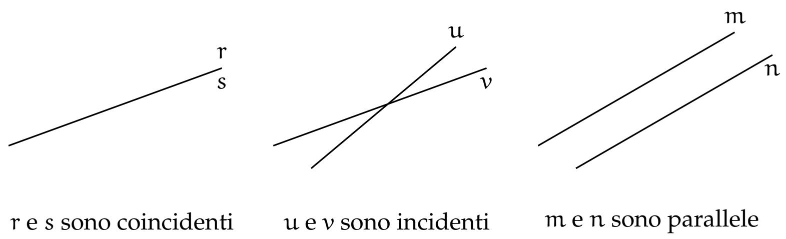


FIGURA 6.11: Relazioni tra rette complanari

❑ **Osservazione** Due rette non parallele possono appartenere a piani diversi, in questo caso non avranno punti in comune, sono cioè sghembe. Viceversa se due rette hanno un punto in comune allora sono sicuramente complanari. Inoltre, se hanno più di un punto in comune le rette coincidono, in questo caso ci sono infiniti piani che le contengono.

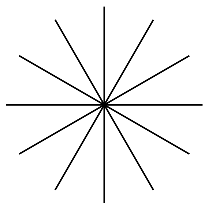


FIGURA 6.12: Fascio proprio di rette

Definizione 6.12. L'insieme di tutte le rette di un piano che passano per uno stesso punto è detto *fascio proprio di rette*, il punto in comune a tutte le rette si dice *centro del fascio* (figura 6.12).

Prendendo su una retta due punti A e B, la retta resta divisa in tre parti: la semiretta di origine A che non contiene B, la parte costituita dai punti compresi tra A e B e la semiretta di origine B che non contiene A.

Definizione 6.13. Si chiama *segmento* AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B. I punti A e B si dicono *estremi* del segmento.

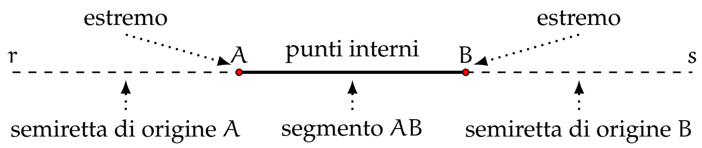


FIGURA 6.13: I punti A e B formano le due semirette r ed s, e il segmento AB

Un segmento viene indicato con le due lettere maiuscole dei suoi estremi.

Due segmenti nel piano possono trovarsi in diverse posizioni reciproche. Alcune di esse hanno un interesse per la geometria.

Definizione 6.14. Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno in comune soltanto un estremo (figura 6.14).

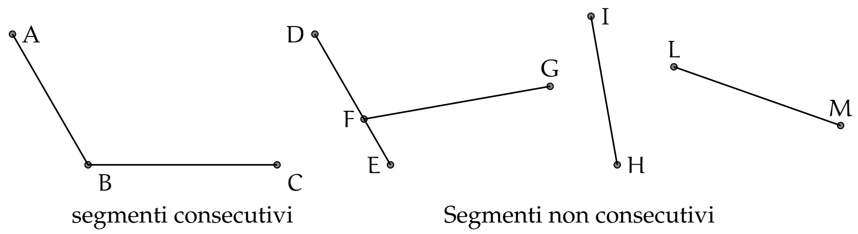


FIGURA 6.14: I segmenti AB e BC sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto B che è un estremo di entrambi; DE e FG non sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto F ma esso non è estremo del segmento DE; HI e LM non sono consecutivi perché non hanno nessun punto in comune.

Definizione 6.15. Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta (figura 6.15).

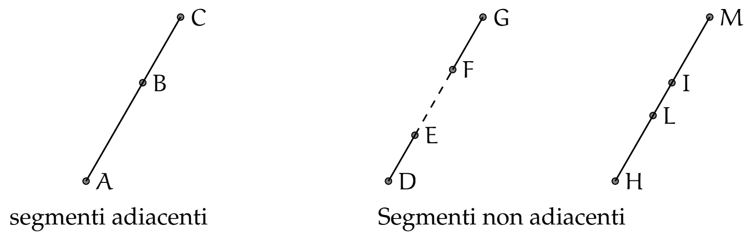


FIGURA 6.15: I segmenti AB e BC sono adiacenti perché hanno in comune solo l'estremo B e giacciono sulla stessa retta; i segmenti DE e FG, pur giacendo sulla stessa retta, non sono adiacenti poiché non hanno alcun punto in comune; i segmenti HI e LM giacciono sulla stessa retta ma non sono adiacenti poiché hanno più di un punto in comune.

6.3.2 Semipiani e angoli

Definizione 6.16. Si dice *semipiano* di origine la retta r la figura formata dalla retta r e da una delle due parti in cui essa divide il piano (figura 6.16).

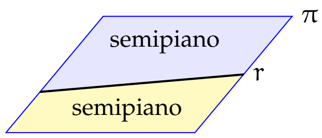


FIGURA 6.16: Semipiani opposti

In un piano π, una qualsiasi retta $r \subset \pi$ dà origine a due semipiani distinti, che si dicono semipiani *opposti*.

Definizione 6.17. Una figura si dice *convessa* se, considerati due suoi qualsiasi punti, il segmento che li unisce è contenuto nella figura. Si dice *concava* se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è interamente contenuto nella figura (figura 6.17).

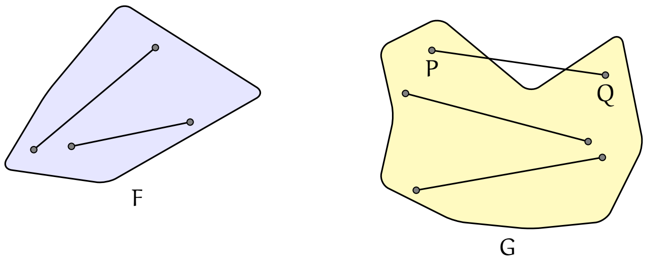


FIGURA 6.17: La figura F è convessa, per qualsiasi coppia di punti interni a F il segmento che li unisce è interamente nella figura; la figura G è concava perché unendo i punti P e Q si ha un segmento che cade in parte esternamente alla figura.

Ricordiamo la definizione di angolo già data: si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 6.8).

Definizione 6.18. Un angolo si dice *piatto* se i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro.

Definizione 6.19. Un angolo si dice *nullo* se è costituito solo da due semirette sovrapposte.

Definizione 6.20. È detto *angolo giro* l'angolo che ha per lati due semirette sovrapposte e che contiene tutti i punti del piano (figura 6.18).

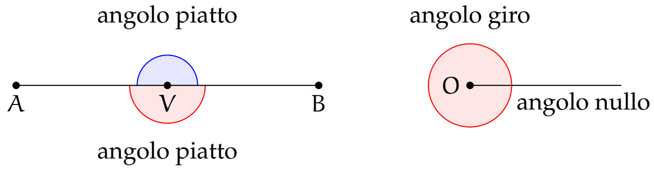


FIGURA 6.18: L'angolo $\widehat{ab}$ a sinistra è piatto (sia quello sopra che quello sotto), gli angoli a destra, individuati dalle semirette coincidenti con origine in O, sono rispettivamente un angolo giro (quello esterno) e un angolo nullo (quello interno).

Definizione 6.21. Un angolo, i cui lati non appartengono alla stessa retta, si dice *concavo* se contiene i prolungamenti dei lati, se non li contiene si dice *convesso*.

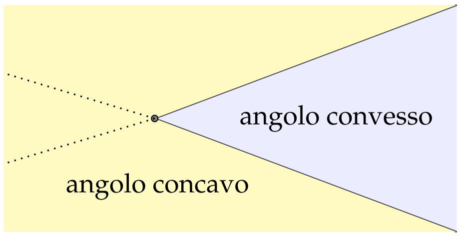


FIGURA 6.19: L'angolo concavo è quello in giallo in quanto contiene i prolungamenti dei lati (punteggiati)

Quando si disegna un angolo è utile, oltre a disegnare le semirette e l'origine, indicare con un archetto quale dei due angoli si intende considerare.

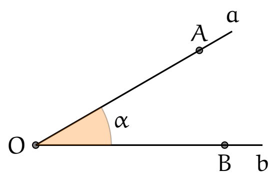


FIGURA 6.20: Per indicare che l'angolo da considerare è quello convesso e non quello concavo si è usato un archetto in prossimità del vertice O

Per indicare gli angoli si usano diverse convenzioni:

- $\widehat{ab}$: se si conoscono i nomi delle semirette che ne costituiscono i lati;
- $A\widehat{O}B$: se si conoscono i nomi del vertice e di due punti sui lati;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (una lettera greca): per indicare direttamente l'angolo.

I primi due modi di indicare l'angolo non individuano con chiarezza di quale dei due angoli si tratta. Solitamente si intende l'angolo convesso, quando si vuole indicare l'angolo concavo bisogna dirlo esplicitamente.

Anche per gli angoli si danno le definizioni di angoli consecutivi e angoli adiacenti, in parte simili a quelle date per i segmenti.

Definizione 6.22. Due angoli si dicono *consecutivi* se hanno il vertice e un lato comune e giacciono da parte opposta rispetto al lato comune.

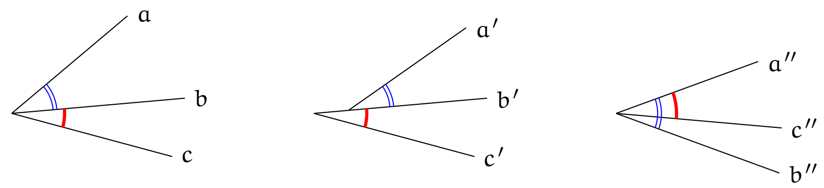


FIGURA 6.21: Nella figura gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono consecutivi perché hanno il vertice e il lato b in comune; $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{b'c'}$ non sono consecutivi perché non hanno il vertice in comune; $\widehat{a''b''}$ e $\widehat{a''c''}$ non sono consecutivi perché non giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune a''

Definizione 6.23. Due angoli si dicono *adiacenti* se sono consecutivi e se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

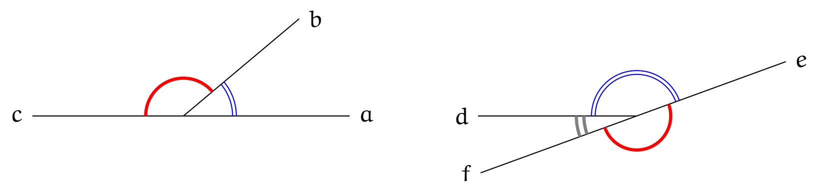
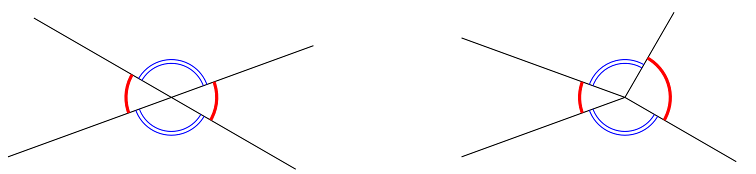


FIGURA 6.22: I due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono adiacenti perché sono consecutivi e i lati a e c sono uno il prolungamento dell'altro; i due angoli $\widehat{de}$ ed $\widehat{ef}$ non sono adiacenti in quanto d non è il prolungamento di f; gli angoli $\widehat{de}$ e $\widehat{df}$ sono adiacenti in quanto f è il prolungamento di e

Definizione 6.24. Due angoli convessi si dicono *opposti al vertice* se i lati del primo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



angoli opposti al vertice   angoli non opposti al vertice

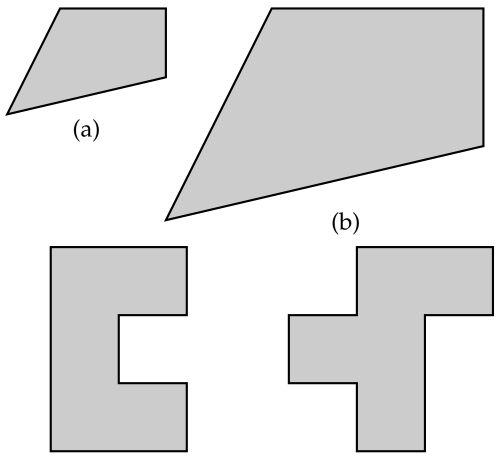
FIGURA 6.23: Gli angoli formati dalle semirette a sinistra sono opposti al vertice; gli angoli formati dalle semirette a destra non lo sono

6.4 Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

6.4.1 Premessa intuitiva

Nel linguaggio comune usiamo la parola "uguale" con un significato generico, spesso per indicare due oggetti che si assomigliano: due macchine uguali, due orologi uguali, … In aritmetica e in algebra usiamo la parola "uguale" per indicare oggetti matematici perfettamente uguali. Per esempio, $2 = 2$, ogni numero infatti è uguale solo a se stesso. Scriviamo anche $3 + 2 = 5$, per dire che il numero che si ottiene dalla somma di 3 e 2 è proprio il numero 5. Nei polinomi si enuncia il principio di identità dei polinomi, in base al quale due polinomi sono uguali se si possono scrivere formalmente allo stesso modo.

In geometria, usiamo il termine "uguale" per indicare due figure coincidenti nella forma e nella posizione. In altre parole due figure sono *uguali* solo se sono esattamente la stessa figura. Tuttavia, in geometria siamo interessati a studiare soprattutto figure che senza essere del tutto identiche hanno delle caratteristiche in comune. Vediamo prima degli esempi intuitivi e successivamente tratteremo lo stesso tema ma in modo formalmente corretto.



(a) (b) (c) (d)

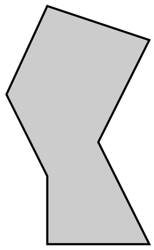
Le figure (a) e (b), riportate, hanno la stessa forma ma una è più grande dell'altra, la seconda infatti è stata ottenuta dalla prima raddoppiando la lunghezza di ogni lato: in geometria tali figure si dicono *simili*.

Le figure (c) e (d), invece, non hanno la stessa forma e non si somigliano affatto, però le loro superfici hanno la stessa estensione, in quanto sono costituite dallo stesso numero di quadratini: in geometria tali figure si dicono *equivalenti*.

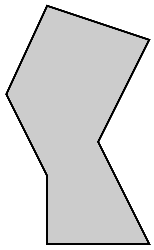
Le figure (e) ed (f) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni ma sono in posizioni differenti. È comunque possibile spostarle una sull'altra e farle coincidere. Usualmente le chiamiamo figure uguali, ma più precisamente in geometria tali figure si dicono *congruenti*.

Le figure (g) e (h) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni (per rendersene conto basta ruotare, per esempio, la seconda figura in senso antiorario e poi trascinarla sulla prima per sovrapporla). Anche queste figure sono dette uguali nel linguaggio comune, ma in geometria si dicono *congruenti*.

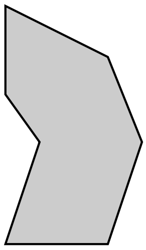
Le figure (i) e (j) hanno stessa forma e stesse dimensioni, tuttavia non si riesce a trasportare l'una sull'altra muovendole nel piano, né trascinandole, né ruotandole. Per farlo è necessario



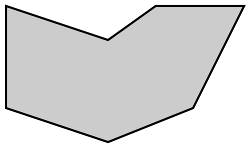
(e)



(f)

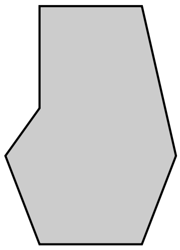


(g)

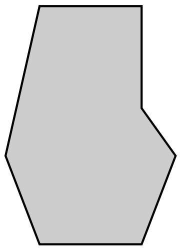


(h)

ribaltarne una facendola uscire dal piano, poiché le due figure sono una l'immagine speculare dell'altra. In geometria tali figure sono dette *inversamente congruenti*.



(i)



(j)

❑ **Osservazione** Per ribaltare una figura occorre una dimensione in più rispetto a quelle della figura, precisamente se si tratta di due figure piane (che hanno due dimensioni: lunghezza e larghezza) occorre avere la terza dimensione per effettuare un ribaltamento; se siamo su una retta (una sola dimensione: la lunghezza) occorre la seconda dimensione per ribaltare un segmento.

Per renderci conto di quanto accade con le figure solide, possiamo pensare ai palmi delle nostre mani che con buona approssimazione si possono considerare inversamente congruenti: esse possono essere giunte, ma non sovrapposte. Infatti non è possibile vedere le proprie mani sovrapposte, entrambe dal dorso o entrambe dal palmo, con le dita rivolte verso l'alto.

6.4.2 La congruenza

Secondo il punto di vista del matematico tedesco Felix Klein (1848-1925), la geometria è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni.

Nello studio della geometria euclidea ci occupiamo delle proprietà delle figure geometriche invarianti rispetto ai movimenti rigidi, cioè rispetto a quei movimenti che conservano forma e dimensioni delle figure. Queste trasformazioni vengono anche dette *isometrie* (si intuisce dalla radice etimologica che si parla di stessa misura): significa che viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di due figure congruenti in modo da "mantenere" le distanze.

Definizione 6.25. Diciamo che due figure F e G sono *congruenti* quando esiste un movimento rigido che le sovrappone perfettamente. In simboli $F \cong G$.

Nella Premessa a questo paragrafo abbiamo dato un'idea intuitiva e sperimentale del concetto di congruenza. Ma per esplicitarlo matematicamente dobbiamo utilizzare gli assiomi di congruenza di Hilbert che abbiamo enunciato nella sezione 6.2.2. Ne riportiamo alcuni per comodità del lettore.

Assiomi di congruenza

III. *Assioma del trasporto di un segmento.* Se A e B sono due punti di una retta a e A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B' sulla retta a o su a', da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$.

Questo assioma afferma che, fissato un punto A' su una retta a', è sempre possibile trasportare un qualunque segmento AB in modo che l'estremo A coincida con A' e il segmento stia sulla retta a'.

IV. La relazione di congruenza tra segmenti è *transitiva*, cioè se $A'B'$ e $A''B''$ sono entrambi congruenti ad AB, allora $A'B'$ è congruente a $A''B''$.

La relazione di congruenza tra segmenti è allora un relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà:

a) *riflessiva*: ogni segmento è congruente a se stesso;
b) *simmetrica*: se AB è congruente a $A'B'$ allora anche $A'B'$ è congruente ad AB;
c) *transitiva*: se AB è congruente ad $A'B'$ e $A'B'$ è congruente ad $A''B''$, allora AB è congruente ad $A''B''$.

Definizione 6.26. Si dice *lunghezza di un segmento* la classe di equivalenza dei segmenti congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti i segmenti che sono congruenti tra di loro.

V. *Assioma del trasporto di un angolo.* Dati un angolo $A\hat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che l'angolo $D\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\hat{B}C$ e l'angolo $E\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\hat{B}C$.

Questo assioma ci garantisce che è sempre possibile trasportare un angolo su una qualsiasi semiretta, facendo coincidere il vertice dell'angolo con l'origine della semiretta e un lato dell'angolo con la semiretta stessa.

VI. La relazione di congruenza tra angoli è *transitiva*, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono entrambi congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C'$ è congruente a $A''\widehat{B''}C''$.

Quindi anche la relazione di congruenza tra gli angoli è una relazione di equivalenza, gode cioè delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Definizione 6.27. Si dice *ampiezza di un angolo* la classe di equivalenza degli angoli congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti gli angoli che sono congruenti tra di loro.

Aggiungiamo che:

- tutte le rette sono fra loro congruenti;
- tutte le semirette sono fra loro congruenti;
- tutti i piani sono fra loro congruenti.

6.4.3 Costruzioni riga e compasso

Il trasporto di un segmento e quello di un angolo si possono realizzare con costruzioni grafiche che utilizzano gli strumenti della riga e del compasso.

Per realizzare una costruzione con riga e compasso si effettua una successione di operazioni scelte tra quattro operazioni fondamentali. Le operazioni sono:

1. congiungere due punti (già costruiti) con una retta;
2. trovare il punto di intersezione di due rette (già costruite);
3. tracciare una circonferenza, dato il centro ed un suo punto;
4. trovare i punti di intersezione di una circonferenza con un'altra circonferenza (già costruita) o con una retta (già costruita).

Con riga e compasso.

Procedura 6.2 (Triangolo equilatero)**.** *Dati due punti A e B, si deve costruire un punto C in modo che ABC sia un triangolo equilatero:*

1. *Traccia i punti A e B.*
2. *Traccia la circonferenza di centro A e passante per B.*
3. *Traccia la circonferenza di centro B e passante per A.*
4. *Individua un punto C di intersezione delle due circonferenze.*
5. *Il poligono ABC è il triangolo richiesto.*

Un'operazione non elementare ma utile nelle costruzioni riga e compasso è quella di utilizzare lo strumento compasso con raggio prefissato in modo da poter costruire una circonferenza dati centro e raggio invece che centro e un suo punto.

Procedura 6.3 (Compasso rigido)**.** *Dati un punto A ed un segmento BC, si deve costruire la circonferenza con centro A e raggio BC:*

1. *Traccia il punto A e il segmento BC.*
2. *Costruisci il punto D in modo che ABD sia equilatero.*
3. *Traccia la semiretta DB: denominala r.*
4. *Traccia la semiretta DA: denominala s.*
5. *Traccia la circonferenza di centro B e passante per C.*
6. *Individua un punto E di intersezione di questa circonferenza e r.*
7. *Traccia la circonferenza di centro D e passante per E.*
8. *Individua il punto F di intersezione di questa circonferenza e s.*
9. *La circonferenza di centro A e passante per F: è la circonferenza richiesta.*

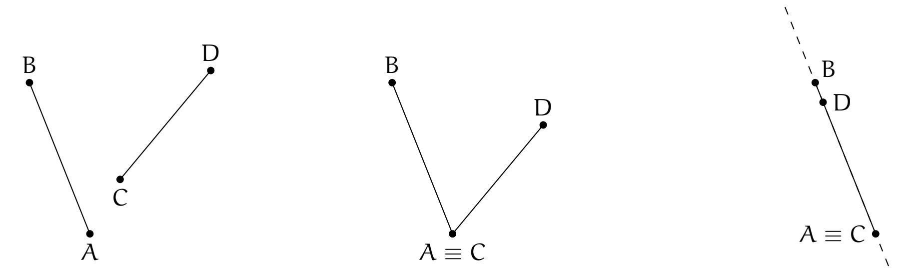
Con l'uso della riga e del compasso è quindi possibile simulare un compasso rigido. Perciò nel tracciare una circonferenza potremmo individuare il centro ed un suo punto oppure, indifferentemente, il centro ed un segmento che determini il raggio.

Con il compasso rigido, non "collassabile", si è in grado di effettuare un "movimento rigido" e quindi di rilevare la congruenza di segmenti. Affrontiamo nei prossimi paragrafi il concetto teorico di "movimento rigido", che sta alla base del confronto di segmenti e di angoli. Riprenderemo solo in seguito la modalità di costruzione con riga e compasso.

6.4.4 Confronto di segmenti

Per confrontare l'altezza di due persone e vedere chi è più alto, le facciamo mettere affiancate in modo che i piedi stiano allo stesso livello, dopodiché confrontiamo l'estremità della testa: è più alto chi ha l'estremità della testa più in alto. Un procedimento analogo si fa per confrontare due segmenti.

Per confrontare due segmenti AB e CD, facciamo in modo che con un movimento rigido gli estremi A e C coincidano, con una rotazione intorno al punto A facciamo in modo che coincidano anche le rette AB e CD e che gli estremi B e D stiano dalla stessa parte rispetto ad A e C.



(a) Situazione iniziale

(b) 1° passo: facciamo coincidere A con C

(c) 2° passo: facciamo coincidere la retta CD con AB. I punti B e D devono stare dalla stessa parte

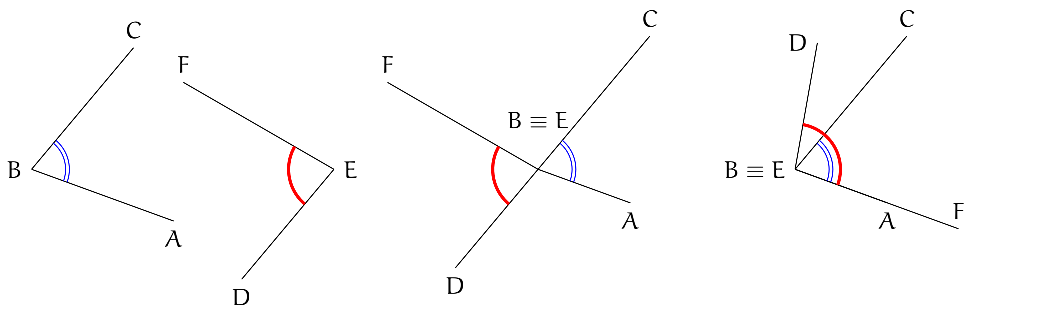
FIGURA 6.24: Confronto di due segmenti

A questo punto sono possibili tre situazioni:

- B cade dopo l'estremo D, allora diciamo che AB è *maggiore* di CD e scriviamo $AB > CD$;
- B cade esattamente su D, allora i due segmenti sono *congruenti* e scriviamo $AB \cong CD$;
- B cade tra C e D, allora diciamo che AB è *minore* di CD e scriviamo $AB < CD$.

6.4.5 Confronto di angoli

Per confrontare due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, portiamo con un movimento rigido il vertice B sul vertice E, con una rotazione portiamo a coincidere la semiretta BA con la semiretta EF, in modo che le altre due semirette, BC e ED, stiano dalla stessa parte rispetto a BA.



(a) Situazione iniziale

(b) 1º passo: facciamo coincidere i vertici B ed E

(b) 2º passo: facciamo coincidere le semirette BA ed EF

FIGURA 6.25: Confronto di due angoli

A questo punto si possono avere tre situazioni distinte:

- il lato EF cade internamente all'angolo $A\hat{B}C$ e quindi diciamo che $A\hat{B}C$ è *maggiore* di $D\hat{E}F$: $A\hat{B}C > D\hat{E}F$;
- il lato EF cade esattamente su BC e quindi i due angoli sono *congruenti*: $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$;
- il lato EF cade esternamente all'angolo $A\hat{B}C$ e quindi diciamo che $A\hat{B}C$ è *minore* di $D\hat{E}F$: $A\hat{B}C < D\hat{E}F$.

❑ **Osservazione** La seguente costruzione è possibile solo perché possiamo realizzare un compasso rigido (vedi 6.3).

Con riga e compasso.

Procedura 6.4 (Trasporto di un angolo). *Costruzione di un angolo congruente ad un angolo assegnato:*

1. *Traccia un angolo* AVB *e la semiretta* V′E *che sarà uno dei lati dell'angolo congruente.*
2. *Traccia la circonferenza con centro V passante per A.*
3. *Chiama E l'intersezione di questa circonferenza con il lato VB.*
4. *Traccia la circonferenza di centro* V′ *avente lo stesso raggio della precedente.*
5. *Chiama* A′ *il punto di intersezione di questa circonferenza con la semiretta.*
6. *Traccia la circonferenza di centro* A′ *e avente raggio uguale a* AE.
7. *Chiama* E′ *il punto di intersezione delle due ultime circonferenze.*
8. *L'angolo* A′V′E′ *è l'angolo richiesto.*

6.4.6 Operazioni con i segmenti

Somma di due segmenti. La somma di due segmenti AB e CD è il segmento AD che si ottiene trasportando con un movimento rigido il segmento CD in modo che AB e CD siano adiacenti, con l'estremo B coincidente con C. Scriviamo $AB + CD \cong AD$, usando l'usuale simbolo di addizione.

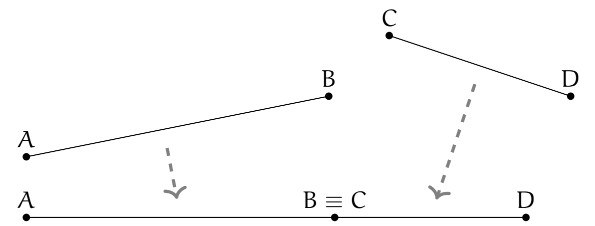


FIGURA 6.26: Somma di due segmenti. Il segmento AD è la somma dei segmenti AB e CD

Differenza di due segmenti. La differenza di due segmenti AB e CD, con $AB > CD$, è il segmento DB che si ottiene sovrapponendo AB e CD facendo coincidere l'estremo A con l'estremo C. Scriviamo $AB - CD \cong DB$.

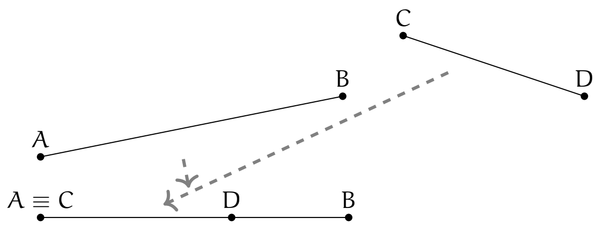


FIGURA 6.27: Differenza di due segmenti. Il segmento DB è la differenza dei segmenti AB e CD

Multiplo di un segmento. Il multiplo secondo m, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è il segmento AC che si ottiene sommando m volte il segmento AB a se stesso.

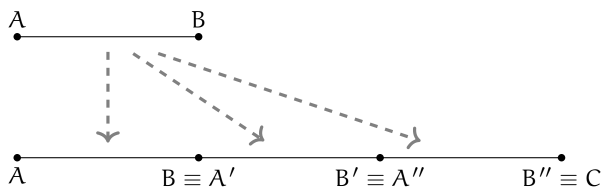


FIGURA 6.28: Multiplo di un segmento. Il segmento AC è il multiplo secondo 3 di AB, cioè $AC \cong 3 \cdot AB$

Se $m = 0$, il multiplo secondo m di qualsiasi segmento AB è il segmento nullo, ove per segmento nullo intendiamo un qualsiasi segmento in cui gli estremi coincidono, cioè il segmento ridotto a un solo punto.

Con riga e compasso.

Procedura 6.5 (Multiplo di un segmento). *Dato un segmento AB, costruisci il segmento AC congruente a 3AB:*

1. *Traccia il segmento AB e la semiretta r con origine A e passante per B.*
2. *Costruisci la circonferenza di centro B e passante per A.*
3. *Denomina B′ l'intersezione, diversa da A, della circonferenza con la semiretta r.*
4. *Costruisci una circonferenza di centro B′ e passante per B.*
5. *Denomina C l'intersezione, diversa da B′, di questa ultima circonferenza con la semiretta r.*
6. *Il segmento AC è quello richiesto.*

Analogamente si può procedere per costruire segmenti multipli di AB secondo un qualsiasi numero n naturale non nullo.

Retta parallela. Il quinto postulato di Euclide afferma che data una retta e un punto esiste una e una sola parallela alla retta passante per il punto.

Con riga e compasso.

Procedura 6.6 (Retta parallela). *Dato una retta AB e un punto A' costruisci la retta A′B′ parallela ad AB:*

1. *Traccia la retta AB.*
2. *Traccia il punto A'.*
3. *Traccia la circonferenza di centro A' e raggio AB.*
4. *Traccia la circonferenza di centro B e raggio AA'.*
5. *Denomina B' l'intersezione (giusta) di queste due circonferenze.*
6. *La retta A′B′ è la retta richiesta.*

Sottomultiplo di un segmento. Il sottomultiplo secondo n, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è un segmento AC tale che $AB \cong n \cdot AC$. Si può anche scrivere $AC \cong \frac{1}{n} \cdot AB$.

Con riga e compasso.

Procedura 6.7 (Sottomultiplo di un segmento). *Dato un segmento AB, costruisci il segmento AD congruente a 1/3 AB:*

1. *Traccia il segmento AB.*
2. *Traccia un punto C non appartenente a AB.*
3. *Traccia la semiretta AC.*
4. *Costruisci sulla semiretta il segmento AC'' triplo di AC (vedi 6.5).*
5. *Traccia la retta C″B.*
6. *Traccia la retta CD parallela a $C''B$.*
7. *Il segmento AD è quello richiesto.*

Analogamente si può procedere per costruire segmenti sottomultipli di AB secondo un qualsiasi numero n naturale non nullo.

In generale, il segmento $AC \cong \frac{m}{n} \cdot AB$ si ottiene dividendo AB in n parti uguali ottenendo il segmento AD e poi sommando m segmenti congruenti ad AD.

Definizione 6.28. Dato un segmento AB si chiama *punto medio di un segmento* il punto M interno al segmento che lo divide in due parti tra loro congruenti ($AM \cong MB$).

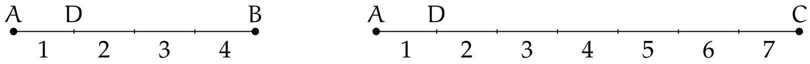


FIGURA 6.29: Sottomultiplo di un segmento. Il segmento AC è congruente a $\frac{7}{4}$ di AB, cioè $AC \cong \frac{7}{4} \cdot AB$, infatti AB è stato suddiviso in 4 parti uguali e AC è costituito da 7 di tali parti

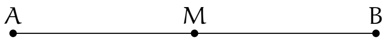


FIGURA 6.30: Punto medio di un segmento. M è il punto medio del segmento AB poiché $AM \cong MB$

Con riga e compasso.

Procedura 6.8 (Punto medio). *Costruzione del punto medio di un segmento dato:*

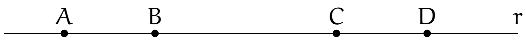
1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza di centro A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza di centro B e passante per A.*
4. *Le circonferenze si intersecano in due punti: denominali C e D.*
5. *Traccia la retta CD.*
6. *Denomina M il punto di intersezione fra la retta Cd e il segmento AB: M è il* ***punto medio*** *del segmento AB.*

Proprietà:

- ➡ somme di segmenti a due a due congruenti sono congruenti;
- ➡ differenze di segmenti a due a due congruenti sono congruenti.

Esempio 6.2. Siano AB e CD due segmenti congruenti appartenenti a una retta r che non abbiano punti in comune. Dimostra che $AD - BC \cong 2 \cdot AB$.

Dimostrazione. Disponiamo i punti A, B, C, D su una retta r come in figura.



Per definizione di somma di segmenti si ha che $AD \cong AB + BC + CD$ e quindi

$$AD - BC \cong AB + BC + CD - BC \cong AB + CD.$$

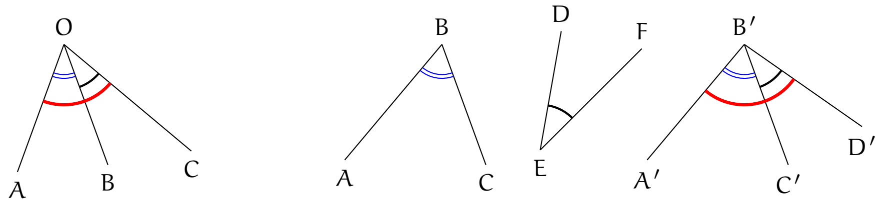
Poiché $AB \cong CD$ si ha che

$$AD - BC \cong AB + CD \cong AB + AB \cong 2 \cdot AB.$$

□

6.4.7 Operazioni con gli angoli

Somma di angoli. La somma di due angoli consecutivi $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ è l'angolo $A\widehat{O}C$. Per sommare due angoli che non sono consecutivi, per esempio $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$, si costruiscono due angoli consecutivi tra di loro, uno congruente a $A\widehat{B}C$, l'altro congruente a $D\widehat{E}F$ e quindi si calcola la somma (figura 6.31).



(a) Somma di angoli consecutivi (b) Somma di angoli non consecutivi

FIGURA 6.31: Somma di due angoli.

Differenza di angoli. La differenza di due angoli, di cui il primo è maggiore o congruente al secondo, è l'angolo che addizionato al secondo dà per somma il primo (figura 6.32). Se i due angoli considerati sono congruenti la loro differenza è l'angolo nullo.

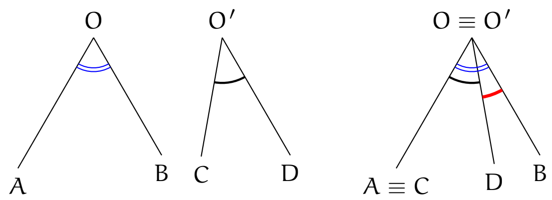


FIGURA 6.32: Differenza di due angoli.

Multiplo di un angolo. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ e un numero n naturale non nullo, il multiplo di $A\widehat{O}B$ secondo n (si può scrivere $n \cdot A\widehat{O}B$) è l'angolo che si ottiene sommando n angoli congruenti a $A\widehat{O}B$. Se $n = 0$, il multiplo secondo n di qualsiasi angolo $A\widehat{O}B$ è l'angolo nullo.

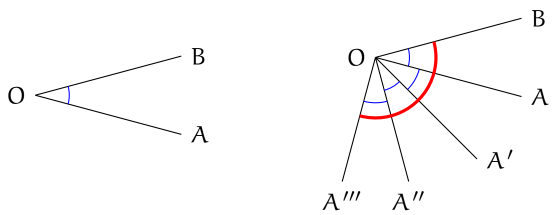


FIGURA 6.33: Multiplo di un angolo. L'angolo $A'''\widehat{O}B$ è il quadruplo di $A\widehat{O}B$, cioè $A'''\widehat{O}B \cong 4 \cdot A\widehat{O}B$

Sottomultiplo di un angolo. Il sottomultiplo secondo n, naturale non nullo, di un angolo $A\widehat{O}B$ è un angolo $A\widehat{O}C$ tale che $A\widehat{O}B \cong n \cdot A\widehat{O}C$. Si può anche scrivere $A\widehat{O}C \cong \frac{1}{n} \cdot A\widehat{O}B$.

In generale, un angolo $A\widehat{O}C \cong \frac{m}{n} \cdot A\widehat{O}B$ si ottiene suddividendo $A\widehat{O}B$ in n angoli uguali (indichiamo con $A\widehat{O}D$ il primo di essi), quindi l'angolo $A\widehat{O}C$ è ottenuto sommando m volte l'angolo $A\widehat{O}D$.

Definizione 6.29. Si dice *bisettrice di un angolo* la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli tra loro congruenti.

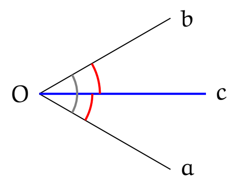


FIGURA 6.34: La semiretta c è la bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$, gli angoli $a\hat{O}c$ e $c\hat{O}b$ sono congruenti

Con riga e compasso.

Procedura 6.9 (Bisettrice). *Costruzione della bisettrice di un angolo:*

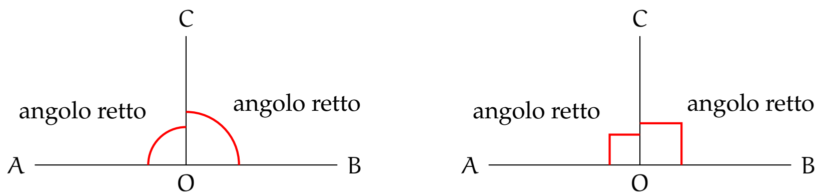
1. *Disegna un angolo AVB.*
2. *Traccia una circonferenza di centro V e passante per A.*
3. *Chiama C la sua intersezione con il lato VB.*
4. *Traccia le due circonferenze con centro in A e C passanti per V.*
5. *Chiama D la loro intersezione diversa da V.*
6. *La retta VD è la bisettrice dell'angolo.*

6.4.8 Angoli particolari

Possiamo ora dare dei nomi ai seguenti angoli particolari.

Definizione 6.30. Si dice *angolo retto* la metà di un angolo piatto.

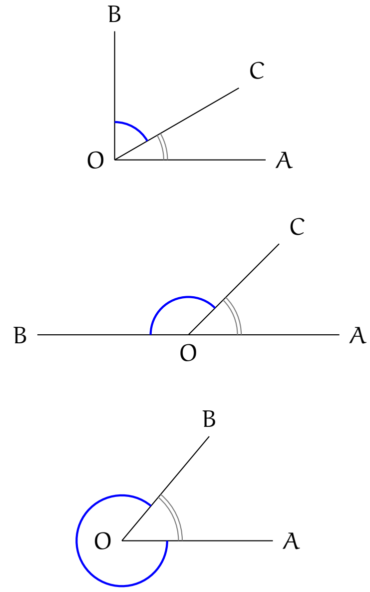
Per denotare il fatto che un angolo è retto si è soliti indicarlo con un quadratino al posto dell'usuale archetto.



Definizione 6.31. Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.

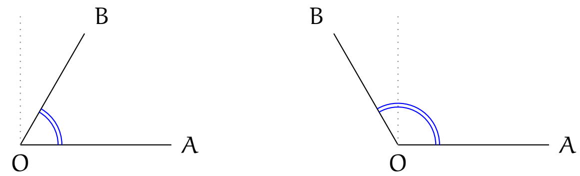
Definizione 6.32. Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

Definizione 6.33. Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è un angolo giro.



Definizione 6.34. Un angolo si dice *acuto* se è minore di un angolo retto.

Definizione 6.35. Un angolo convesso si dice *ottuso* se è maggiore di un angolo retto.



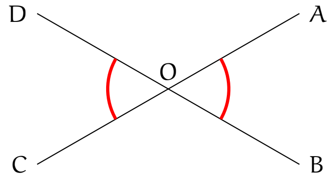
(a) Angolo acuto (b) Angolo ottuso

Teorema 6.10. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*

Dimostrazione. Si considerino due generici angoli opposti al vertice $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ come nella figura seguente.

Gli angoli $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}D$ sono adiacenti, dato che hanno un lato in comune e gli altri due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro. Ma anche gli angoli $A\widehat{O}D$ e $D\widehat{O}C$ sono angoli adiacenti per lo stesso motivo. Quindi gli angoli $D\widehat{O}C$ e $A\widehat{O}B$ sono adiacenti allo stesso angolo $A\widehat{O}D$. Indicando con π l'angolo piatto si ha: $A\widehat{O}D + D\widehat{O}C \cong \pi$ da cui $D\widehat{O}C \cong \pi - A\widehat{O}D$. Analogamente $A\widehat{O}B + A\widehat{O}D \cong \pi$ da cui $A\widehat{O}B \cong \pi - A\widehat{O}D$. Ne consegue che $D\widehat{O}C \cong A\widehat{O}B$ e cioè la tesi. □

Prova tu a dimostrare il seguente teorema



Teorema 6.11. *Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.*

Suggerimento: Dopo aver realizzato il disegno, esplicita ipotesi e tesi. Segui poi il ragionamento del teorema precedente: se due angoli sono supplementari la loro somma è un angolo piatto . . .

Con riga e compasso.

Procedura 6.12 (Angolo di 60°)**.** *Costruzione di un angolo di 60°:*

1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B e passante per A.*
4. *Chiama C e D le due intersezioni delle circonferenze.*
5. *Traccia le semirette AC e AD.*
6. *L'angolo CAB misura 60°.*

Quanto misura l'angolo CAD? e l'angolo ACD?

6.4.9 Perpendicolari e altre definizioni

Definizione 6.36. Due rette si dicono *perpendicolari* se sono incidenti e formano tra loro quattro angoli retti.

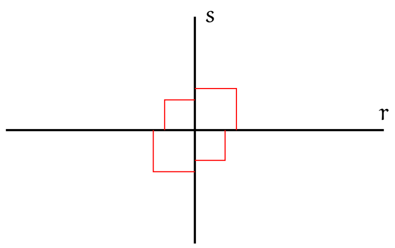


FIGURA 6.35: Le rette r e s sono perpendicolari poiché incontrandosi formano quattro angoli retti

Per indicare che le due rette r e s sono perpendicolari si usa il simbolo $r \perp s$.

Con riga e compasso.

Procedura 6.13 (Perpendicolare)**.** *Costruzione della perpendicolare a una retta, passante per un punto C:*

1. *Traccia la retta passante per due punti A e B, e un punto C.*
2. *Traccia una circonferenza di centro C e passante per B.*
3. *La circonferenza interseca la retta in due punti: D e E.*
4. *Traccia la circonferenza di centro D e passante per E.*
5. *Traccia la circonferenza di centro E e passante per D.*
6. *Chiama F e G i punti di intersezione fra le due circonferenze.*
7. *La retta FG è la perpendicolare ad AB passante per C.*

Definizione 6.37. Si dice *distanza di un punto* P *da una retta* la lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal punto P alla retta.

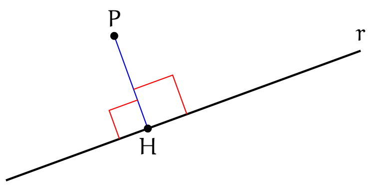


FIGURA 6.36: Il segmento PH, appartenente alla perpendicolare a r passante per P, è la distanza di P dalla retta r

Definizione 6.38. Si chiama *asse di un segmento* la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.

In genere un asse viene rappresentato con una linea a "tratto e punto".

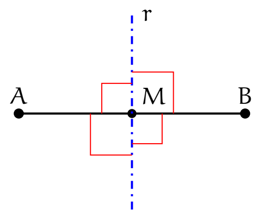


FIGURA 6.37: La retta r è l'asse del segmento AB in quanto è perpendicolare alla retta per AB e passa per M, il punto medio di AB

Definizione 6.39. Due punti si dicono *simmetrici rispetto a una retta* se la retta è asse del segmento che ha per estremi i due punti.

Nella figura 6.37, i punti A e B sono simmetrici rispetto alla retta r.
Con riga e compasso.

Procedura 6.14 (Asse di un segmento). *Costruzione dell'asse di simmetria di un segmento dato:*
1. *Traccia un segmento di estremi A e B.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in A e passante per B.*
3. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B e passante per A.*
4. *Le circonferenze si intersecano in due punti: etichettali C e D.*
5. *Traccia la retta CD, che è l'asse del segmento AB.*

6.5 Poligoni e poligonale

Definizione 6.40. Si chiama *spezzata* una figura formata da una sequenza ordinata di segmenti uno consecutivo all'altro. I segmenti che formano la spezzata si chiamano *lati*, gli estremi dei segmenti si chiamano *vertici*.

Ogni vertice di una spezzata è quindi in comune a due lati, ad eccezione del primo vertice del primo segmento e dell'ultimo vertice dell'ultimo segmento che appartengono a un solo segmento.

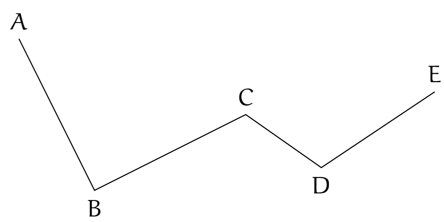


FIGURA 6.38: La linea $ABCDE$ è una spezzata, perché formata da segmenti consecutivi. I segmenti AB, BC, CD e DE sono i lati della spezzata, i punti A, B, C, D ed E sono i vertici

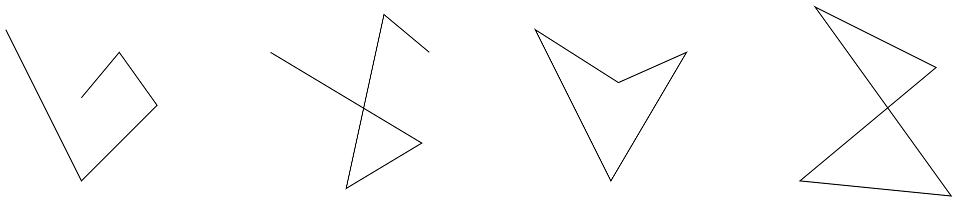
Definizione 6.41. Un spezzata si dice *chiusa* se il primo estremo del primo segmento coincide con l'ultimo estremo dell'ultimo segmento; si dice *aperta* se il primo estremo e l'ultimo estremo sono distinti.

Definizione 6.42. Un spezzata si dice *intrecciata* se almeno due suoi lati si intersecano in punti diversi dagli estremi; si dice *semplice* o *non intrecciata* se ogni coppia di lati non consecutivi non ha punti in comune.

Definizione 6.43. Si chiama *poligonale* una spezzata chiusa non intrecciata.

6.5.1 Poligono

Definizione 6.44. Si chiama *poligono* la figura formata da una poligonale e dalla parte finita di piano da essa delimitata.



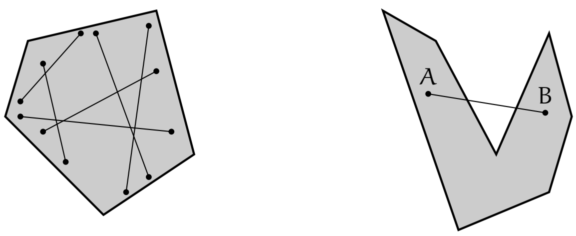
F_1 (semplice, aperta) F_2 (intrecciata, aperta) F_3 (semplice, chiusa) F_4 (intrecciata, chiusa)

FIGURA 6.39: La figura F_1 è un spezzata semplice aperta (i lati non si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_2 è una spezzata intrecciata aperta (due lati si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_3 è una spezzata semplice chiusa (non ci sono lati non consecutivi che si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati); la figura F_4 è una spezzata intrecciata chiusa (due lati si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati)

Definizione 6.45. In un poligono chiamiamo:

- *vertici* del poligono i vertici della poligonale;
- *lati* del poligono i lati della poligonale;
- *contorno* del poligono la poligonale stessa;
- *punti interni* i punti del poligono non situati sul contorno;
- *punti esterni* tutti i punti del piano che non sono interni e non appartengono al contorno;
- *perimetro* del poligono il segmento somma dei lati del poligono.

Definizione 6.46. Un poligono si dice *convesso* se è una figura convessa, cioè se il segmento che ha per estremi due suoi punti qualsiasi è interamente contenuto nel poligono, si dice *concavo* se non è convesso, cioè se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è contenuto interamente nel poligono.



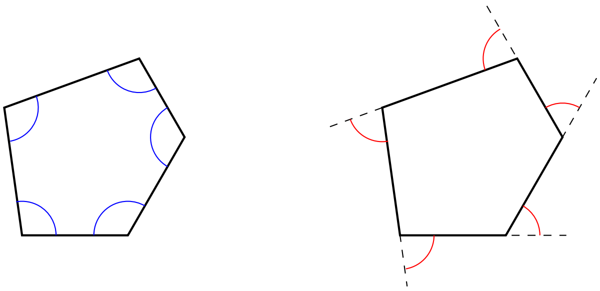
(a) P_1 (poligono convesso) (b) P_2 (poligono concavo)

FIGURA 6.40: Il poligono P_1 è convesso perché comunque si prendono due suoi punti interni, il segmento che li unisce è interno al poligono; il poligono P_2 è concavo perché il segmento AB cade in parte all'esterno del poligono

Nel seguito, quando parleremo di poligoni intenderemo sempre poligoni convessi.

Definizione 6.47. In un poligono chiamiamo:

- *angolo interno* o *angolo del poligono* ognuno degli angoli che ha per lati le semirette che contengono due lati consecutivi del poligono e ha per vertice il vertice del poligono in comune a quei due lati;
- *angolo esterno* ciascun angolo adiacente ad un angolo interno.



(a) angoli interni (b) Angoli esterni

FIGURA 6.41: Nella figura (a) sono indicati gli angoli interni al poligono, nella figura (b) sono indicati gli angoli esterni, ognuno di essi è adiacente a un angolo interno

Osservazioni

- Un poligono è convesso se ogni angolo interno è convesso.
- Un poligono è concavo se ha almeno un angolo interno concavo.

Osserva che per ogni angolo interno esistono due angoli esterni, congruenti tra di loro perché opposti al vertice, ovvero perché supplementari dello stesso angolo.

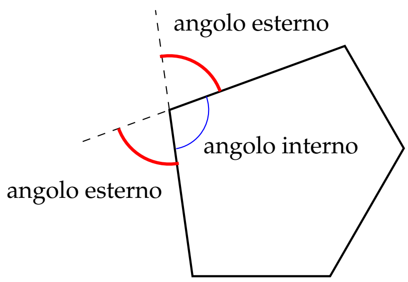


FIGURA 6.42: Ogni angolo interno ha due angoli esterni adiacenti ad esso

Inoltre diamo le seguenti definizioni:

Definizione 6.48. In un poligono chiamiamo:

- *corda* ogni segmento che unisce due qualsiasi punti del contorno del poligono che non appartengono allo stesso lato;
- *diagonale* ogni corda che unisce due vertici non consecutivi.

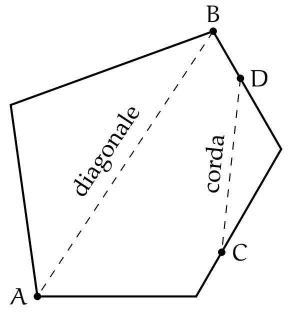


FIGURA 6.43: Il segmento AB è una diagonale del poligono poiché unisce i vertici non consecutivi A e B; il segmento CD è una corda poiché unisce due punti posti su due lati distinti del poligono

I poligoni hanno nomi diversi a seconda del loro numero di lati:

- *triangolo* è un poligono con tre lati;
- *quadrilatero* è un poligono con quattro lati;
- *pentagono* è un poligono con cinque lati;
- *esagono* è un poligono con sei lati;
- e così via.

Definizione 6.49. Un poligono si dice *equilatero* se ha tutti i lati congruenti tra loro.

Definizione 6.50. Un poligono si dice *equiangolo* se ha tutti gli angoli interni congruenti tra loro.

Definizione 6.51. Un poligono equiangolo e equilatero si dice *poligono regolare*.

6.6 Esercizi

6.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.2 - Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

6.1. Trasforma nella forma «Se … allora …» le seguenti frasi:

a) «Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra»
b) «Quando piove prendo l'ombrello»
c) «I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5»
d) «Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza»

6.2. Completa i seguenti ragionamenti:

a) «Se un numero è multiplo di 10 allora è pari»; «il numero n non è pari quindi ………..»
b) «Se il sole tramonta fa buio»; «il sole è tramontato quindi ………..»

6.3. Distingui nelle seguenti frasi le definizioni dalle proposizioni o proprietà

a) «La Terra ruota su se stessa in un giorno» D P
b) «Il solstizio è il momento in cui il Sole raggiunge, nel suo moto apparente lungo l'eclittica, il punto di declinazione massima o minima» D P
c) «La cellula è l'unità fondamentale di tutti gli organismi viventi» D P
d) «I virus sono responsabili di alcune malattie» D P
e) «I numeri che hanno per ultima cifra 0 sono numeri pari» D P
f) «Un numero si dice pari se è divisibile per 2» D P

[a) P, b) D, c) D, d) P, e) P, f) D.]

6.4. Dimostra con un controesempio che l'affermazione «Tutti i multipli di 3 sono dispari» non è vera. [Un controesempio è 6, che è pari.]

6.5 (I Giochi di Archimede, 1997). «Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo». Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?

a) «Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo»;
b) «Se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio»;
c) «Se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio»;
d) «Se la sera non ho fame, allora non mangio troppo»;
e) «Se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio».

6.6. Gli enti primitivi della geometria sono quelli...

a) che occorre definire;
b) che occorre dimostrare;
c) che non si definiscono;
d) che si conoscono già per averli studiati prima.

[c]

6.7. Gli assiomi sono:

a) proposizioni note che si preferisce non dimostrare per non appesantire lo studio;
b) proposizioni che è necessario dimostrare;
c) proposizioni che si assumono vere senza dimostrazione;
d) proposizioni che non si definiscono;
e) proposizioni che non si dimostrano perché la loro dimostrazione è molto semplice.

[c]

6.8. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) Due punti sono sempre allineati V F
b) Tre punti sono sempre allineati V F
c) Tre punti sono sempre complanari V F
d) Tre punti allineati individuano un unico piano V F
e) Una retta e un punto esterno ad essa individuano un piano V F

[a) V, b) F, c) V, d) V, e) V.]

6.9. Su una retta si segnano quattro punti A, B, C e D. Quanti segmenti restano individuati?

6.10. Date tre semirette a, b e c aventi la stessa origine O, quanti angoli restano individuati?

6.11. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, tre punti non allineati e posti sullo stesso piano.

6.12. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, quattro punti, a tre a tre non allineati, di uno stesso piano.

6.13. Quattro rette a due a due incidenti quanti punti di intersezione individuano complessivamente?

6.14. Quale assioma è rappresentato nella figura 6.44?

a) tre punti distinti non allineati determinano uno ed un solo piano che li contiene;
b) su un piano esistono infiniti punti ed infinite rette;
c) la retta passante per due punti distinti di un piano giace completamente nel piano;
d) su una retta esistono infiniti punti.

[a]

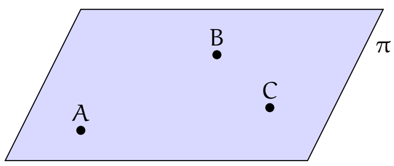


FIGURA 6.44: Esercizio 6.14

6.15. Rispondi a voce alle seguenti domande

a) Qual è l'origine della parola "geometria"?
b) Qual è la differenza tra "assioma" e "teorema"?
c) Qual è la differenza tra "ente definito" e "ente primitivo"?

6.3 - Prime definizioni

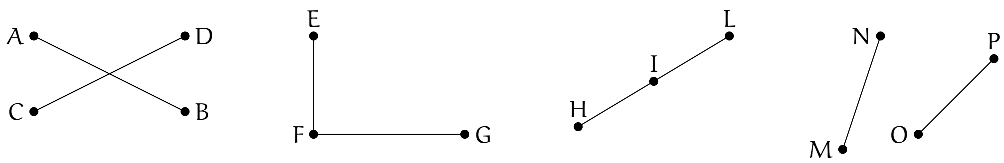
6.16. Disegna una retta a e una retta b che si incontrano in un punto X, disegna anche una retta c che incontra la a in Y e la b in Z. Elenca tutte le semirette e tutti i segmenti che si vengono a formare.

6.17. Disegna due rette a e b parallele tra di loro; disegna poi la retta c che interseca la a in A e la b in B; disegna poi la retta d che interseca a in A e b in C. Quali segmenti si vengono a formare?

6.18. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A \in r$ e $B \in r$, $B \in s$ e $C \in s$, $A \in t$ e $C \in t$
b) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = AD$. $AB \cup CD = \ldots$
c) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = \emptyset$. $AB \cup CD = \ldots$
d) $AB \subset r$, $CD \subset s$, $r \parallel s$, $P \notin r \cup s$

6.19. Attribuisci il nome corretto a ciascuna coppia di segmenti rappresentati nella figura 6.45 tra: adiacenti, incidenti, disgiunti, consecutivi.



AB e CD sono .... EF e FG sono .... HI e IL sono .... MN e OP sono ....

FIGURA 6.45: Esercizio 6.19

6.20. Su una retta r disegna i punti A e B, sapendo che A precede B, disegna i punti C e D sapendo che D è compreso tra A e B e che C segue B. Indica tutti i segmenti che si vengono a formare.

6.21. Dati cinque punti nel piano, in modo che a tre a tre non siano allineati, quante rette passanti per due di questi punti è possibile tracciare? Sai esprimere il legame generale tra il numero N di punti e il numero M di rette che si possono tracciare?

6.22. Vero o falso?

a) Per un punto passa una sola retta [V] [F]
b) Per due punti passa una sola retta [V] [F]
c) Per tre punti passano almeno tre rette [V] [F]
d) Due punti distinti del piano individuano sempre un segmento [V] [F]

e) Due rette distinte del piano hanno al più un punto in comune $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) Tre punti distinti del piano individuano almeno tre rette $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) Due semirette distinte del piano che hanno la stessa origine sono opposte $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) Alcuni segmenti consecutivi non sono adiacenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) Due angoli che hanno il vertice in comune sono consecutivi $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
j) Per un punto del piano passano solo due rette $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
k) Due segmenti posti sulla stessa retta sono adiacenti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
l) Due segmenti consecutivi hanno in comune un estremo e nessun altro punto $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V.]

6.23. Due segmenti si dicono adiacenti se:

a) appartengono alla stessa retta;
b) sono consecutivi ma non appartengono alla stessa retta;
c) non sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
d) sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
e) appartengono alla stessa retta e hanno gli estremi coincidenti. [e]

6.24. Un angolo è convesso se:

a) è adiacente ad un altro angolo;
b) i suoi lati sono rette incidenti;
c) contiene il prolungamento dei suoi lati;
d) è consecutivo ad un altro angolo;
e) non contiene il prolungamento dei suoi lati. [e]

6.25. Due angoli si dicono opposti al vertice se:

a) sono sullo stesso piano;
b) sono uno concavo e uno convesso;
c) hanno il vertice in comune;
d) i lati dell'uno sono contenuti nell'altro;
e) i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro. [e]

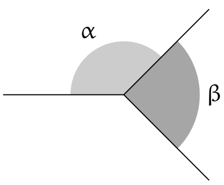
6.26. Quanti angoli individuano tre semirette aventi la stessa origine? Fai un disegno.

6.27. Dà la definizione di "angolo".

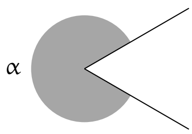
6.28. Qual è la differenza tra angolo piatto e angolo nullo? *Fai riferimento alle definizioni e non al fatto che il primo misura* 360° *e il secondo* 0°.

6.29. Qual è la differenza tra angoli consecutivi e angoli adiacenti?

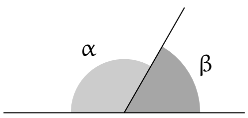
6.30. Per ciascuna figura scrivi di che angolo si tratta (concavo, adiacenti, consecutivi, opposti al vertice).



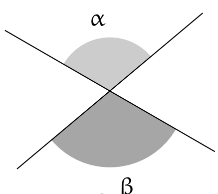
α e β sono
. . . .



α è
. . . .



α e β sono
. . . .

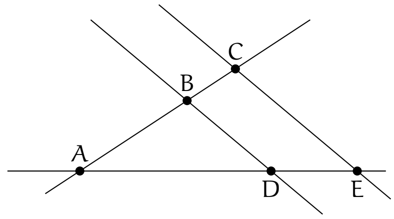


α e β sono
. . . .

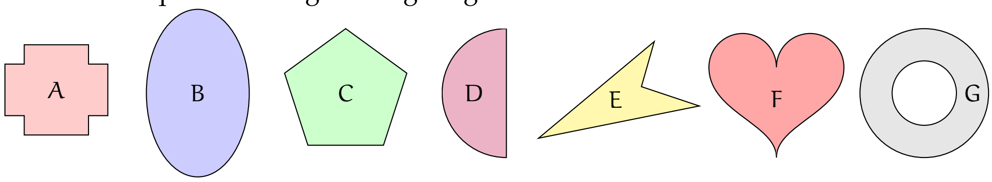
6.31. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A\widehat{O}B \cup A\widehat{O}C = A\widehat{O}B$
b) $A\widehat{O}B \cap A\widehat{O}C = A\widehat{O}B$
c) $A\widehat{O}B \cap C\widehat{O}D = C\widehat{O}B$
d) $A\widehat{O}B \cup C\widehat{O}D = A\widehat{O}B$

6.32. Facendo riferimento alla figura a fianco indica:
a) una coppia di segmenti consecutivi . . . . ;
b) una coppia di segmenti adiacenti . . . . ;
c) una coppia di rette incidenti . . . . ;
d) una coppia di rette parallele . . . . ;
e) una coppia di angoli consecutivi . . . . ;
f) una coppia di angoli adiacenti . . . . ;
g) una coppia di angoli opposti al vertice . . . . ;
h) un angolo concavo . . . . ;
i) un angolo convesso . . . .

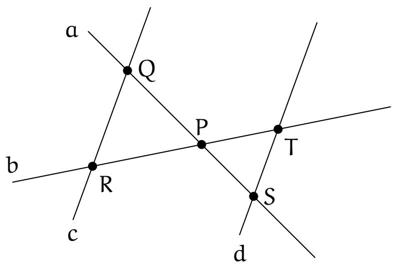


6.33. Indica quali delle seguenti figure geometriche sono convesse:



6.34. Scrivi per esteso nel linguaggio comune quanto è indicato in simboli e rappresenta con un disegno tutti i casi possibili: $(A \in r) \wedge (A \in s) \wedge (B \in r)$.

6.35. Riproduci nel quaderno e descrivi la costruzione della figura a fianco, dove le rette c e d sono parallele.

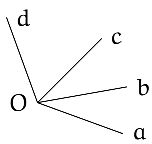


6.36. Se P è centro di un fascio di rette e A è un punto dello stesso piano, è vero che nel fascio di centro P esiste una retta passante per A? [Sì]

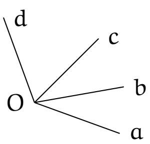
6.37. Motiva la verità o la falsità della proposizione: «Tutte le rette incidenti formano 2 coppie di angoli opposti al vertice».

6.38. Siano a, b, c, d quattro semirette aventi l'origine in comune O disposte in ordine antiorario come nella figura seguente. Individua, aiutandoti con il disegno, quali sono gli angoli che si ottengono dalle seguenti operazioni:

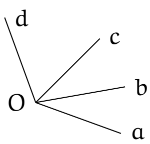
a) $\widehat{ad} \cap \widehat{bd}$



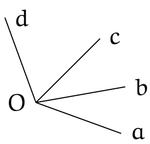
b) $\widehat{cd} \cup \widehat{bc}$



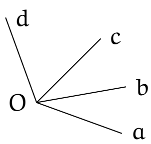
c) $\widehat{cb} \cup \widehat{ac}$



d) $\widehat{ab} \cap \widehat{bd}$



e) $\widehat{ac} \cap \widehat{bd}$



6.4 - Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

6.39. Due angoli sono complementari e uno è doppio dell'altro. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) uno è retto e l'altro è piatto;
b) uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro i 2/3 dell'angolo retto;
c) uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro 1/6 dell'angolo retto;
d) uno è 1/2 dell'angolo retto e l'altro è retto;
e) uno è 2/3 dell'angolo retto e l'altro i 4/6 dell'angolo retto.

6.40. Siano α e β due angoli consecutivi esplementari e siano a e b le loro bisettrici. L'angolo tra a e b è

a) nullo;
b) acuto;
c) retto;
d) piatto;
e) non si può sapere.

[a]

6.41. Se α e β sono due angoli di vertice O, consecutivi e complementari e a e b le loro bisettrici, allora dell'angolo $a\widehat{O}b$ si può dire che:

a) è uguale all'angolo retto;
b) è la metà di un angolo retto;
c) è la terza parte di un angolo retto;
d) è la quarta parte di un angolo retto;
e) non si può determinarne l'ampiezza.

[b]

6.42. Le bisettrici di due angoli adiacenti:

a) sono parallele;
b) sono lati di un angolo retto;
c) sono lati di un angolo concavo;
d) coincidono;
e) sono semirette opposte.

[b]

6.43. Due angoli si dicono complementari quando:

a) sono consecutivi;
b) sono angoli opposti al vertice;
c) la loro somma è un angolo retto;
d) ciascuno di essi è acuto;
e) ciascuno è la metà di un angolo retto.

[c]

6.44. Dati due segmenti adiacenti AB e BC tali che $AB \cong \frac{1}{3} \cdot BC$, allora per $AC = AB + BC$ si può dire che:

a) $AC \cong \frac{1}{4} \cdot BC$;
b) $AC \cong 3 \cdot BC$;
c) $AC \cong 2 \cdot BC$;
d) $AC \cong \frac{1}{2} \cdot BC$;
e) $AC \cong \frac{4}{3} \cdot BC$.

[e]

6.45. Due segmenti AB e CD appartengono alla stessa retta e hanno lo stesso punto medio. Si può affermare che:

a) $AB \cong CD$; b) $AC \cong CD$; c) $DB \cong DC$; d) $AC \cong BD$; e) $AC \cong AB$. [d]

6.46. Per ciascuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, e spiegare perché

a) l'angolo retto è la metà dell'angolo giro [V] [F]
b) ogni angolo convesso ha due bisettrici [V] [F]
c) due angoli che hanno in comune il vertice sono consecutivi [V] [F]
d) un angolo ottuso è maggiore di qualunque angolo acuto [V] [F]
e) sommando due angoli acuti si può ottenere un angolo piatto [V] [F]

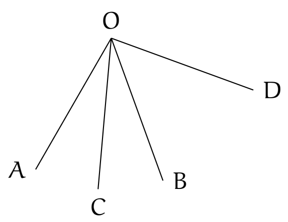
[a) F, b) F, c) F, d) V, e) F.]

6.47. Tre semirette a, b, c uscenti da uno stesso punto dividono il piano in tre angoli congruenti. Dopo aver rappresentato le semirette, traccia la semiretta b_1 opposta di b. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

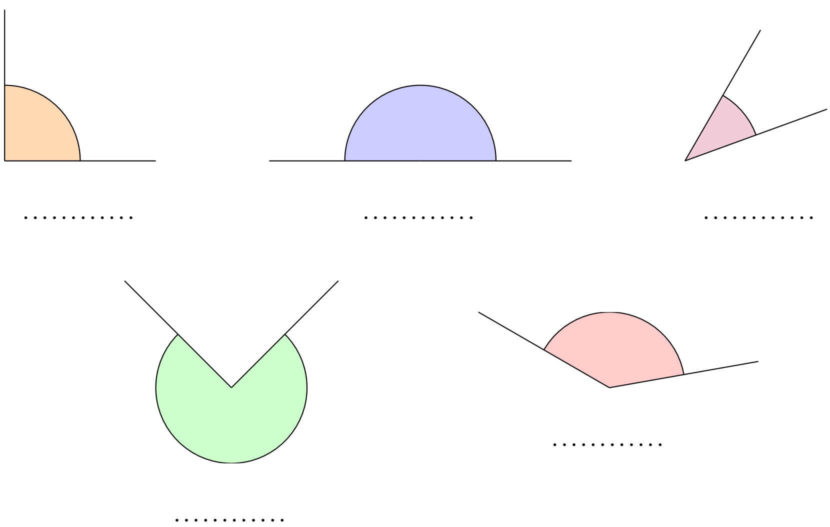
a) b_1 è perpendicolare alla semiretta a;
b) b_1 è bisettrice dell'angolo formato da a e c;
c) b_1 è perpendicolare alla semiretta c; [b]

6.48. Dato l'angolo acuto $A\hat{O}B$, sia OC la sua bisettrice. Sia poi OD una semiretta esterna all'angolo quale relazione è vera?

a) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A - D\hat{O}B)$
b) $C\hat{O}B \cong (A\hat{O}D - A\hat{O}B)$
c) $C\hat{O}B \cong (B\hat{O}D - C\hat{O}B)$
d) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A + D\hat{O}B)$ [a]



6.49. Individua tra gli angoli rappresentati nella figura quello piatto, quello retto, quello acuto, quello ottuso e quello concavo, scrivendolo nelle relative etichette. Per ciascuno di essi traccia la bisettrice.



6.50. Per ognuna delle seguenti affermazioni indica se è vera oppure falsa

a) Sommando due angoli acuti si ottiene sempre un angolo acuto V F
b) Sommando due angoli piatti si ottiene un angolo giro V F
c) Sommando un angolo acuto e uno retto si ottiene un angolo ottuso V F
d) Sommando due angoli retti si ottiene un angolo giro V F
e) Sommando un angolo piatto e un angolo acuto si ottiene un angolo concavo V F
f) Sommando due angoli convessi si ottiene sempre un angolo convesso V F
g) Sommando un angolo retto e un angolo piatto si ottiene un angolo giro V F

[a) F, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F, g) F]

6.51. Individua l'angolo

a) La differenza tra un angolo piatto è un angolo retto è un angolo . . . .
b) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo . . . .
c) La differenza tra un angolo acuto e un angolo retto è un angolo . . . .
d) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo . . . .
e) Il doppio di un angolo piatto è un angolo . . . .
f) Il doppio di un angolo retto è un angolo . . . .

6.52. Spiega perché se due angoli sono complementari i loro doppi sono supplementari.

6.53. Verifica, aiutandoti con un disegno, che se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} < \widehat{D}$ allora $\widehat{A} + \widehat{C} < \widehat{B} + \widehat{D}$.

6.54. Un angolo α è retto e un angolo β è la sesta parte di un angolo piatto. A quale frazione di angolo retto corrisponde la somma $\alpha + \beta$? [$\frac{4}{3}$]

6.55. Dati quattro segmenti $AB > BC > CD > DE$. Verifica, aiutandoti con dei disegni, che:

a) $AB - CD > BC - CD$;
b) $AB + DE > BC + CD$.

6.56. Disegna due angoli consecutivi α e β, disegna l'angolo γ adiacente ad α non contenente β e l'angolo δ adiacente a β non contenente α. Gli angoli $\gamma + \delta$ e $\alpha + \beta$ sono:

a) complementari;
b) supplementari;
c) opposti al vertice;
d) esplementari.

[b]

6.57. Su una semiretta di origine A segna il segmento AB, il segmento $BC \cong 3 \cdot AB$ e il segmento $CD \cong AB$, i punti sono consecutivi secondo l'ordine alfabetico. Secondo quale numero frazionario AD è multiplo di BC? [$\frac{5}{3}$]

6.58. Su una retta, i punti A, B, C, D si susseguono secondo l'ordine alfabetico. Se AB è congruente a CD i punti medi di BC e AD coincidono? Spiega perché? [. . .]

6.59. Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r, non aventi alcun punto in comune e in modo che AB preceda CD. Dimostra che il punto medio di BC è anche punto medio di AD. [. . .]

6.60. Siano AB e BC due segmenti adiacenti non necessariamente congruenti, sia M il punto medio di AC ed N il punto medio di BC, dimostra che $MN \cong \frac{1}{2} \cdot AB$. [. . .]

6.61. In un piano gli angoli $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$ sono adiacenti. Sia OF la bisettrice di $A\hat{O}C$ e OE la bisettrice di $C\hat{O}D$. Spiega perché $F\hat{O}E$ è retto. [. . .]

6.5 - Poligoni e poligonale

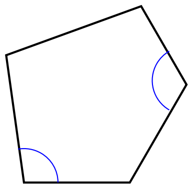
6.62. Quante diagonali ha un triangolo?

a) nessuna; b) 1; c) 2; d) 3. [a]

6.63. Quante diagonali puoi tracciare dal vertice di un poligono di 6 lati?

a) 6; b) 5; c) 4; d) 3. [d]

6.64. Traccia l'angolo esterno relativo agli angoli interni indicati con un arco nella figura.



6.65. Quali tra le seguenti figure geometriche sono sempre congruenti tra loro?

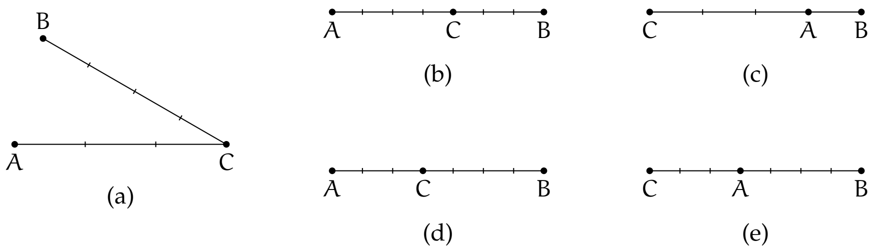
a) Tutti i punti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Tutte le rette $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) Tutte le semirette $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) Tutti i semipiani $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) Tutti gli angoli $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) Tutti i poligoni convessi $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) Tutti i triangoli $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) Tutti i triangoli equilateri $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) Tutti i quadrati $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

[a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) F, g) F, h) F, i) F]

6.66 (Prove invalsi 2006)**.** Che cosa si definisce "diagonale" in un poligono convesso? Un segmento che

a) congiunge due vertici non consecutivi del poligono;
b) congiunge due vertici qualsiasi del poligono;
c) congiunge i punti medi di due lati consecutivi del poligono;
d) divide il poligono in due parti congruenti. [a]

6.67 (Prove invalsi 2006)**.** Scegli tra le figure riportate nella figura **??** quella in cui risulta vera l'uguaglianza $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{4}$.



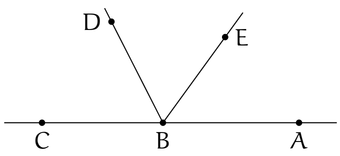
[d]

6.68 (Prove invalsi 2005). Due segmenti misurano 5 dm e 30 cm rispettivamente. Qual è il rapporto fra la lunghezza del secondo segmento e quella del primo?

a) 6; b) 5/3; c) 3/5; d) 1/6.

[c]

6.69 (Prove invalsi 2005). I punti A, B e C sono allineati come nella figura. Se l'angolo $A\widehat{B}E$ misura 54° e BD è la bisettrice dell'angolo $E\widehat{B}C$, quanto misura l'angolo $D\widehat{B}C$?



a) 26°; b) 36°; c) 54°; d) 63°.

[d]

6.70 (Prove invalsi 2005). Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali. Un poligono non è regolare se e solamente se ...

a) tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali;
b) tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali;
c) almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali;
d) almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

[d]

Congruenza nei triangoli 7

7.1 Definizioni relative ai triangoli

Definiamo gli elementi principali di un triangolo

Definizione 7.1.

- Un *triangolo* è un poligono di tre lati.
- Si chiamano *vertici* gli estremi dei lati.
- Un vertice si dice *opposto a un lato* se non appartiene a quel lato.
- Si chiamano *angoli interni* del triangolo i tre angoli formati dai lati.
- Un angolo interno si dice *angolo compreso tra due lati* quando i lati dell'angolo contengono dei lati del triangolo.
- Un angolo interno si dice *angolo adiacente a un lato* del triangolo quando uno dei suoi lati contiene quel lato del triangolo.
- Un angolo si dice *angolo esterno* al triangolo se è un angolo adiacente a un angolo interno.
- Si dice *bisettrice* relativa a un vertice, il segmento di bisettrice dell'angolo al vertice che ha per estremi il vertice stesso e il punto in cui essa incontra il lato opposto.
- Si dice *mediana* relativa a un lato il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.
- Si dice *altezza* di un triangolo relativa a un suo lato il segmento di perpendicolare che ha per estremi il vertice opposto al lato e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta contenente il lato.
- Si dice *asse* di un triangolo, relativo a un suo lato, la perpendicolare al lato condotta nel suo punto medio.

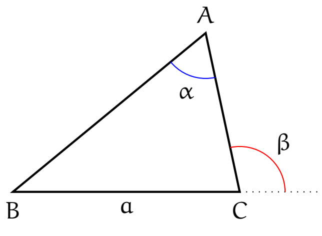
Nel triangolo (a) della figura seguente, A, B e C sono i vertici del triangolo, il vertice A è opposto al lato a, l'angolo α è interno al triangolo ed è compreso tra i lati AB e AC, mentre l'angolo β è esterno. Nel triangolo (b) AL è la bisettrice dell'angolo nel vertice A, AH è altezza relativa alla base BC, AM è la mediana relativa al lato BC e la retta r è l'asse di BC.

I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati

Definizione 7.2.

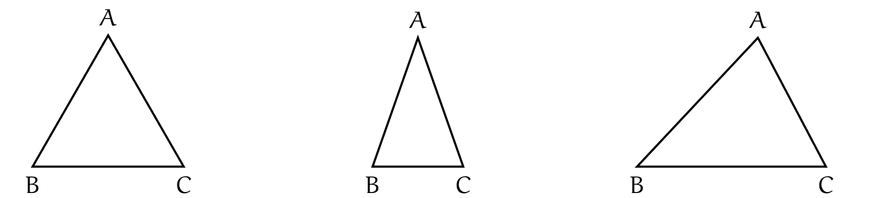
- un triangolo si dice *equilatero* se ha i tre lati congruenti;
- un triangolo si dice *isoscele* se ha (almeno) due lati congruenti;
- un triangolo si dice *scaleno* se ha i lati a due a due non congruenti.

o rispetto agli angoli



(a) (b)

FIGURA 7.1: Triangolo. Vertici, angoli, bisettrice, mediana, asse.



triangolo equilatero $AB \cong AC \cong BC$

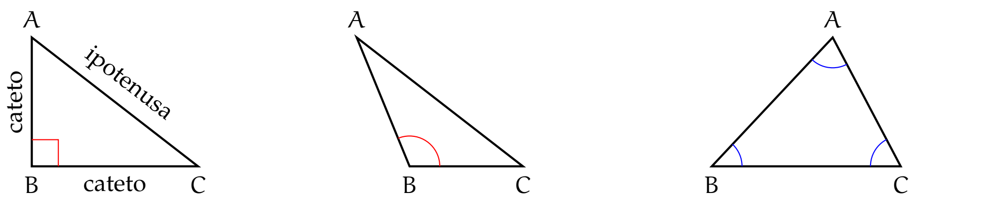
triangolo isoscele $AB \cong AC$

triangolo scaleno $AB \ncong AC, AB \ncong BC, AC \ncong BC$

FIGURA 7.2: Classificazione di un triangolo rispetto ai lati

Definizione 7.3.

- un triangolo si dice *rettangolo* se ha un angolo interno retto; in un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato che si oppone all'angolo retto e si chiamano *cateti* i lati adiacenti all'angolo retto;
- un triangolo si dice *ottusangolo* se ha un angolo interno ottuso;
- un triangolo si dice *acutangolo* se ha tutti gli angoli interni acuti.



triangolo rettangolo $A\widehat{B}C = 90°$

triangolo ottusangolo $A\widehat{B}C > 90°$

triangolo acutangolo $A\widehat{B}C < 90°, B\widehat{C}A < 90°, C\widehat{A}B < 90°$

FIGURA 7.3: Classificazione di un triangolo rispetto agli angoli

Abbiamo già costruito un triangolo equilatero (vedi 6.2).
Vediamo ora come costruire triangoli isosceli. Se è data la base.

Con riga e compasso.

Procedura 7.1. *Costruzione di un triangolo isoscele di base assegnata:*
1. *Traccia un segmento di estremi A e B, base del triangolo da costruire.*
2. *Costruisci l'asse del segmento AB.*
3. *Prendi un punto sull'asse e denominalo C.*
4. *I segmenti AC e BC hanno la stessa lunghezza e quindi il triangolo ABC è isoscele.*

Con questa procedura, quanti triangoli isosceli di base assegnata AB puoi costruire?

Se è dato il lato obliquo.
Con riga e compasso.

Procedura 7.2. *Costruzione di un triangolo isoscele di lato obliquo assegnato:*
1. *Traccia un segmento di estremi A e B, lato obliquo del triangolo da costruire.*
2. *Traccia una circonferenza puntando il compasso in B, con apertura AB.*
3. *Scegli un punto qualsiasi sulla circonferenza: denominalo C; il triangolo ABC è isoscele sulla base AC.*

Con questa procedura, quanti triangoli isosceli di lati assegnati congruenti ad AB puoi costruire?

7.2 Criteri di congruenza dei triangoli

Ricordiamo che due figure piane si dicono *congruenti* se sono sovrapponibili, cioè se è possibile spostare una sull'altra, senza deformarle, in modo che coincidano perfettamente.

In particolare, due triangoli sono sovrapponibili se hanno "ordinatamente" congruenti i tre lati e i tre angoli. Con il termine ordinatamente intendiamo che, a partire da una coppia di vertici (il primo di un triangolo ed il secondo dell'altro) procedendo lungo il contorno in senso orario, oppure antiorario, incontriamo lati tra loro congruenti e vertici di angoli tra loro congruenti. Nel caso dei triangoli, questo succede esattamente quando angoli congruenti nei due triangoli sono compresi tra coppie di lati congruenti o, in maniera equivalente, quando sono opposti a lati congruenti.

I criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che è sufficiente conoscere la congruenza di solo alcuni elementi dei due triangoli, generalmente tre elementi di un triangolo congruenti a tre elementi dell'altro triangolo, per poter affermare che i due triangoli sono tra loro congruenti, e quindi dedurne la congruenza degli altri elementi.

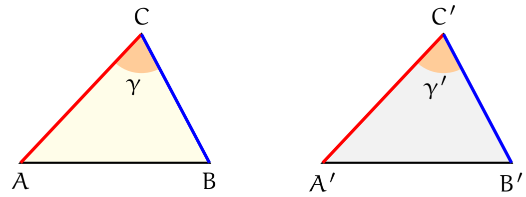
Un modo tradizionale di presentare l'argomento, dovuto allo stesso Euclide, è quello di "dimostrare" i primi due criteri di congruenza dei triangoli facendo uso della definizione stessa di congruenza come "uguaglianza per sovrapposizione", e di utilizzarli successivamente per la verifica di altre proprietà.

Secondo il matematico tedesco Hilbert, il primo criterio di congruenza è invece un assioma e il secondo criterio può essere dimostrato per assurdo attraverso il primo.

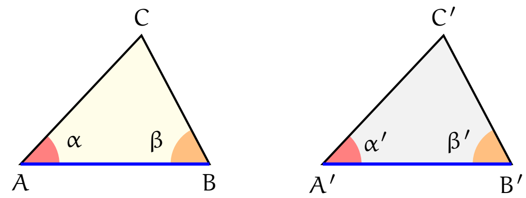
Di seguito presenteremo solo gli enunciati dei tre criteri di congruenza.

Teorema 7.3 (1° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.*

Ipotesi: $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $\gamma \cong \gamma'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

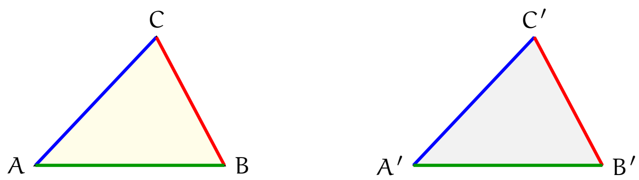


Teorema 7.4 (2° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato tra essi compreso.*



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

Teorema 7.5 (3° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti le tre coppie di lati.*



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

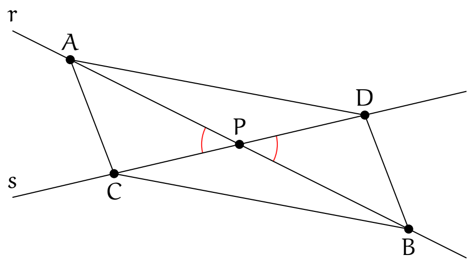
Esempio 7.1. Si considerino due rette incidenti, r ed s, ed il loro punto in comune P. Sulle semirette opposte di origine P si prendano punti equidistanti da P, come in figura, in maniera tale che $AP \cong PB$, $CP \cong PD$. Dimostra che, unendo i quattro punti in modo da costruire un quadrilatero, i quattro triangoli che si vengono a formare sono a due a due congruenti: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi.

Ipotesi: $r \cap s = P$, $AP \cong PB$, $CP \cong PD$.

Tesi: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

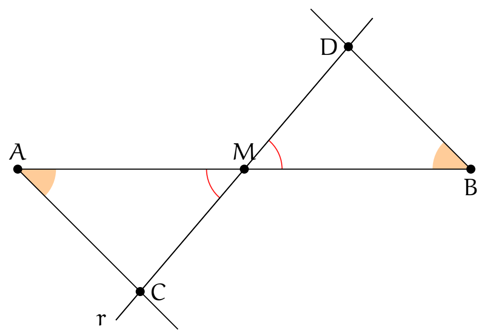
Dimostrazione. I triangoli ACP e BPD hanno: $AP \cong PB$ per ipotesi, $CP \cong PD$ per ipotesi, $A\widehat{P}C \cong B\widehat{P}D$ perché opposti al vertice. Pertanto sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.



Analogamente, i triangoli ADP e BPC hanno: .... $\square$

Esempio 7.2. Si considerino un segmento AB ed il suo punto medio M. Si tracci una generica retta r passante per M e distinta dalla retta per AB. Si traccino inoltre due semirette di origine rispettivamente A e B, situate nei due semipiani opposti rispetto alla retta per AB, che intersechino la retta r rispettivamente in C e in D e che formino con la retta per AB due angoli congruenti (vedi figura **??**). Detti C e D i rispettivi punti di intersezione delle due semirette con la retta r, dimostra che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi.
Ipotesi: $AM \cong MB$, $M\widehat{A}C \cong M\widehat{B}D$.
Tesi: $AMC \cong BMD$.



Dimostrazione. I segmenti AM e MB sono congruenti in quanto M è il punto medio di AB, gli angoli di vertice M sono congruenti perché opposti al vertice, gli angoli di vertici A e B sono congruenti per costruzione. Allora i triangoli AMC e BMD sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli. $\square$

7.3 Teoremi del triangolo isoscele

Il *triangolo isoscele* ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama *base*, i due lati congruenti si dicono *lati obliqui*.

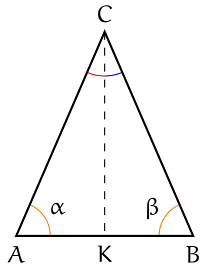
Il *triangolo equilatero* è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che *il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base.*

Teorema 7.6 (del triangolo isoscele [teorema diretto])**.** *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.*

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi.
Ipotesi: $AC \cong BC$ Tesi: $\alpha \cong \beta$

Dimostrazione. Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C. I triangoli ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

- ➡ $AC \cong CB$ per ipotesi;
- ➡ CK lato in comune;
- ➡ $A\widehat{C}K \cong B\widehat{C}K$ perché CK è la bisettrice dell'angolo in C.



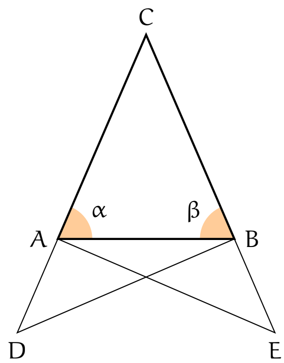
□

Pertanto, essendo congruenti, i due triangoli hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo α (in A) è congruente all'angolo β (in B). Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando tra loro ipotesi e tesi.

Teorema 7.7 (del triangolo isoscele [teorema inverso]). *Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (rispetto al lato compreso tra gli angoli congruenti preso come base).*

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi.
Ipotesi: $\alpha \cong \beta$ Tesi: $AC \cong BC$

Dimostrazione. Procediamo per passi, realizzando una costruzione che ci permetta di confrontare coppie di triangoli congruenti. Prolunghiamo i lati AC e BC dalla parte di A e di B rispettivamente, e sui prolungamenti prendiamo due punti D ed E in maniera tale che risulti $AD \cong BE$.



Osserviamo che i triangoli ADB e BAE risultano congruenti per il 1° criterio, avendo in comune il lato AB ed essendo $AD \cong BE$ per costruzione e $D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}E$ perché adiacenti agli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$ congruenti per ipotesi.

Pertanto, tutti gli elementi dei due triangoli ADB e AEB sono ordinatamente congruenti, in particolare $DB \cong AE$, $A\widehat{D}B \cong B\widehat{E}A$ e $A\widehat{B}D \cong B\widehat{A}E$. I triangoli CDB e CAE risultano dunque congruenti per il 2° criterio poiché hanno $DB \cong AE$, $C\widehat{D}B \cong C\widehat{E}A$ per quanto appena dimostrato e $C\widehat{D}B \cong C\widehat{A}E$ perché somma di angoli rispettivamente congruenti: $C\widehat{B}D \cong C\widehat{B}A + A\widehat{B}D$ e $C\widehat{A}E \cong C\widehat{A}B + B\widehat{A}E$.

Pertanto, i restanti elementi dei due triangoli risultano ordinatamente congruenti, in particolare $CB \cong CA$, che è la tesi che volevamo dimostrare. □

Dai due teoremi precedenti seguono importanti proprietà, che qui riportiamo come corollari.

Corollario 7.8. *Un triangolo equilatero è anche equiangolo.*

Dimostrazione. Poiché un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base, la tesi segue dal teorema diretto del triangolo isoscele. □

Corollario 7.9. *Se un triangolo è equiangolo allora è equilatero.*

Dimostrazione. Possiamo confrontare gli angoli a due a due; risulteranno i lati congruenti a due a due in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 7.10. *Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.*

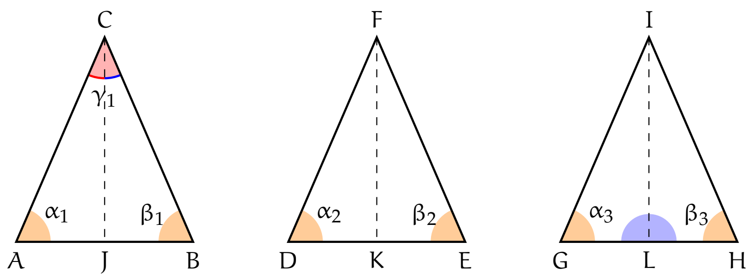
Dimostrazione. Se per assurdo un triangolo scaleno avesse due angoli congruenti, allora risulterebbe isoscele, in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 7.11. *Se un triangolo non ha angoli congruenti allora è scaleno.*

Dimostrazione. Se un triangolo non ha angoli tra loro congruenti non può essere isoscele. □

Proposzione 7.12 (Proprietà del triangolo isoscele)**.** *In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.*

Nella figura, CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice γ_1 del triangolo ABC, FK è la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF, IL è l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI.



Dividiamo l'enunciato in tre parti:

a) In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana relativa alla base.
b) In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza relativa alla base.
c) In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.

Per ciascuna di esse scriviamo ipotesi e tesi.

a) In ABC: Ipotesi: $AC \cong CB$, $\alpha_1 \cong \beta_1$, $A\widehat{C}J \cong B\widehat{C}J$. Tesi: $CJ \perp AB$, $AJ \cong JB$.
b) In DEF: Ipotesi: $DF \cong FE$, $\alpha_2 \cong \beta_2$, $DK \cong KE$.
Tesi: $FK \perp DE$, $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$.

c) In GHI: Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha_3 \cong \beta_3$, $IL \perp GH$.
Tesi: $GL \cong LH$, $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$.

Dimostrazione. Avviamo la dimostrazione delle prime due parti, che lasciamo completare al lettore e rimandiamo al prossimo capitolo la dimostrazione della terza.

a) I triangoli AJC e CJB sono congruenti per il 2° criterio. Infatti hanno . . . .
Dunque $AJ \cong JB$ e $A\widehat{J}C \cong C\widehat{J}B$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.
b) I triangoli DKF e FKE sono congruenti per il 1° criterio. Infatti hanno . . . .
Dunque $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$ e $F\widehat{K}D \cong F\widehat{K}E$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

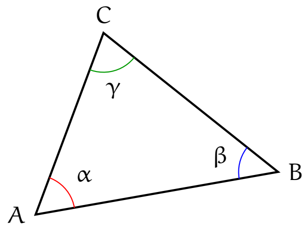
□

7.4 Esercizi

7.4.1 Esercizi riepilogativi

7.1. In base alla figura a lato rispondi alle seguenti domande

a) Il lato AB si oppone all'angolo ....
b) L'angolo α si oppone al lato ....
c) L'angolo di vertice C si chiama ....
d) L'angolo γ è adiacente ai lati ...... e ......
e) I lati AB e BC sono adiacenti all'angolo ......
f) I lati AC e AB formano l'angolo ......
g) Traccia l'angolo esterno al triangolo nel vertice A
h) Traccia la bisettrice dell'angolo β
i) Traccia l'altezza relativa alla base AB
j) Traccia la mediana relativa al lato BC



7.2. Disegna un segmento AB, quindi disegna i triangoli ABC e ABD che hanno la base AB in comune.

7.3. Disegna le tre altezze di ciascuno dei triangoli nella figura 7.4.

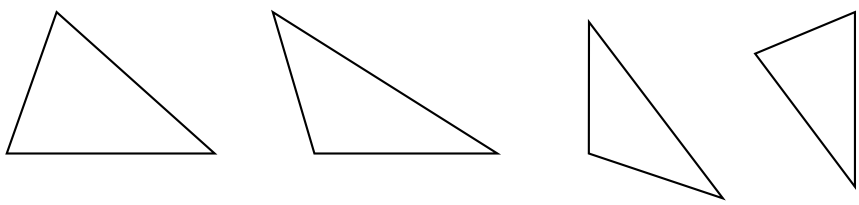
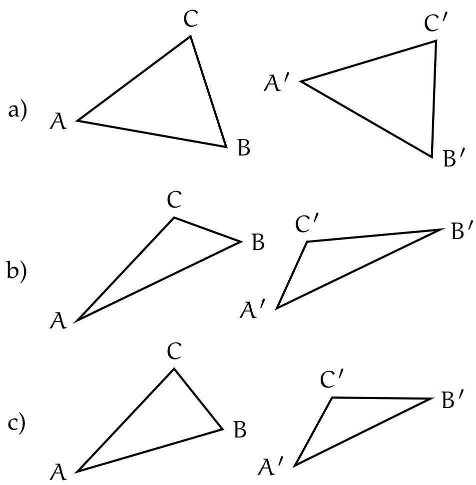


FIGURA 7.4: Esercizio 7.3

7.4. Per ciascuna delle coppie di triangoli a lato indica se sono congruenti ed eventualmente per quale criterio.

a) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e AC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con l'angolo $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....
b) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e gli angoli $\widehat{A}$ con $\widehat{B'}$ e $\widehat{B}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....
c) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e BC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il ....



Dimostra le seguenti affermazioni, utilizzando il 1° e il 2° criterio di congruenza dei triangoli.

7.5. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente a MA. Dimostra che il triangolo AMC è congruente al triangolo BMD e che il triangolo ABM è congruente al triangolo CMD.

7.6. Due triangoli ABC e DEF hanno il lati AB e DE congruenti, hanno inoltre gli angoli esterni ai vertici A e B rispettivamente congruenti agli angoli esterni ai vertici D ed E. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

7.7. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.

7.8. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto adiacente ad esso.

7.9. Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, prolunga la bisettrice AD di un segmento DE. Dimostra che AE è bisettrice dell'angolo $B\widehat{E}C$.

7.10. Siano ABC e DEF due triangoli congruenti. Sui lati congruenti AB e DE prendi il punto G su AB e H su DE, in modo che $AG \cong DH$. Dimostra che anche GC è congruente ad HF.

7.11. Sui prolungamenti oltre A del lato AC, oltre B del lato AB e oltre C del lato BC di un triangolo equilatero ABC si considerino i segmenti congruenti AA', BB', CC'. Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è ancora equilatero.

7.12. Dato l'angolo convesso $b\widehat{A}c$ si considerino su b i due punti B e B' e su c i punti C e C', tali che AB e AB' siano rispettivamente congruenti con AC e AC'. Dimostrare che BB' e BC' sono rispettivamente congruenti con CC' e $B'C$.

7.13. Dato un segmento AB, condurre per il suo punto medio M una qualsiasi retta r e considerare su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due segmenti congruenti MC e MD. Dimostrare che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

7.14. Sui lati a e b di un angolo di vertice O prendi i punti A e B sulla semiretta a e i punti C e D sulla semiretta b, in modo che $OA \cong OC$ e $AB \cong CD$. Sia E il punto di intersezione di AD con BC. Dimostra che sono congruenti i triangoli ABE e CDE.

7.15. Sia C un punto della bisettrice dell'angolo convesso $a\widehat{O}b$, A un punto sul lato a e B un punto sul lato b, tali che $OA \cong OB$. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

Dimostra le seguenti affermazioni sui triangoli isosceli.

7.16. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.

7.17. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti.

7.18. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'angolo al vertice e uno dei lati obliqui.

7.19. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.

7.20. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e la bisettrice dell'angolo al vertice.

7.21. Sia P il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostra che anche APB è isoscele.

7.22. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, indica con M il punto medio di AC, con N il punto medio di CB e con H il punto medio di AB. Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

a) AMH e HNB
b) MNH e MNC
c) AMH e MCN

7.23. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga la base AB, dalla parte di A di un segmento AD e dalla parte di B di un segmento BE congruente ad AD. Dimostra che anche il triangolo DEC è isoscele.

7.24. Due triangoli isosceli ABC e ABD hanno in comune la base AB, i vertici C e D sono situati da parti opposte rispetto alla base AB. Dimostra che la retta per CD è bisettrice dell'angolo in C.

7.25. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto D e su CB un punto E in modo che $CD \cong CE$. Dimostra che il triangolo DME, dove M è il punto medio della base AB, è isoscele.

7.26. Due triangoli isoscele hanno in comune la base, dimostra che la retta che unisce i vertici dei due triangoli divide la base a metà.

7.27. Si prolunghino i lati AC e CB del triangolo isoscele ABC rispettivamente di due segmenti CP e CQ tra loro congruenti. Dimostrare che $A\widehat{Q}B \cong A\widehat{P}Q$ e che $A\widehat{B}P \cong Q\widehat{A}B$.

Esercizi sui criteri di congruenza dei triangoli e sui triangoli isosceli.

7.28. Due triangoli sono congruenti se hanno

a) tre lati congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) tre angoli congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) due lati e l'angolo compreso congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) due angoli e il lato in comune congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) un lato e l'angolo opposto congruenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

[a) V, b) F, c) V, d) V, e) F]

7.29. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la mediana relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

7.30. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la bisettrice relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

7.31. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A prendi un punto D sul lato AB e un punto E sul lato AC, in modo che $BD \cong EC$, unisci C con D e B con E. Sia $F = BE \cap DC$. Dimostra che i triangoli BFA e CFA sono congruenti.

7.32. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$, prolunga la base BC di un segmento BG, dalla parte di B, e di un segmento CF dalla parte di C, in modo che $BG \cong CF$. Dimostra che sono congruenti i triangoli ADG e AEF.

7.33. In un triangolo scaleno ABC sia $AC > BC$. Prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento CD congruente ad AC e prolunga AC, dalla parte di C, di un segmento CE congruente a BC. Detto H il punto di intersezione della retta per AB con la retta per DE, dimostra che $AH \cong DH$.

7.34. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$. Unisci D con C e prolunga il segmento DC, dalla parte di C di un segmento CF. Unisci E con B e prolunga il segmento EB dalla parte di B di un segmento $BG \cong CF$. Dimostra che i triangoli AGD e AFE sono congruenti.

7.35. Dato il triangolo convesso non piatto $a\widehat{O}b$ si prenda un punto A sul lato Oa e un punto B sul lato Ob, in modo che $OA \cong OB$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di OB, congiungi A con N e B con M, indica con P in punto di intersezione. Dimostra che sono congruenti i triangoli OBC e OAD e i triangoli AOP e OPB.

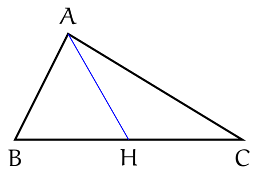
7.36. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC di base AB e sia $AP \cong PB$. Si dimostri che CP appartiene alla bisettrice dell'angolo in C.

7.37. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC, di base AB. Dimostra che se $P\widehat{A}C \cong P\widehat{C}B$ allora P si trova sulla bisettrice dell'angolo in A.

7.38. Sulla bisettrice c di un angolo $a\widehat{O}b$ prendi un punto P e traccia da esso le perpendicolari ai lati a e b dell'angolo che incontrano rispettivamente in A e in B i suddetti lati. Dimostra che $OA \cong OB$.

7.39 (Prove invalsi 2006). Osserva la figura a lato. Se $AB \ncong AC$ e $BH \cong HC$, che cosa rappresenta il segmento AH nel triangolo ABC?

a) Un'altezza.
b) Una mediana.
c) Una bisettrice.
d) Un asse.



[b]

7.40 (Prove invalsi 2003). Da un triangolo equilatero MNO di lato 6 cm viene tagliato via un triangolo equilatero di vertice in O e lato 2 cm. Il perimetro del quadrilatero rimanente è ...

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm; e) 20 cm.

[c]

Il piano cartesiano 8

8.1 Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

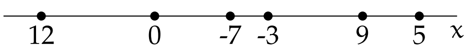
Nonostante queste intuizioni, per migliaia di anni la geometria e l'algebra sono state due discipline completamente separate nella matematica.

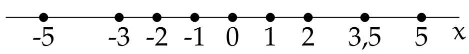
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri. Il *piano cartesiano* è uno strumento che permette di trattare elementi geometrici con metodi algebrici ed elementi algebrici con metodi geometrici. Così, a volte, problemi algebrici difficili possono a trovare una soluzione geometrica semplice e viceversa. In matematica, ma anche nelle altre scienze, quando si riesce a trovare un collegamento tra due rami della disciplina che fino a quel momento erano rimasti separati, si fa un grande passo avanti.

La geometria analitica permette di descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra e viceversa.

8.2 Asse cartesiano

Lo strumento che ci permette di fare tutto ciò è il *riferimento cartesiano*. L'idea di base è che su una retta ci sono infiniti punti e anche i numeri sono infiniti possiamo quindi far corrispondere ai punti della retta tutti gli elementi di un insieme numerico. Possiamo farlo a fantasia o seguendo un metodo che permette a tutti di disporre i numeri esattamente nello stesso modo.

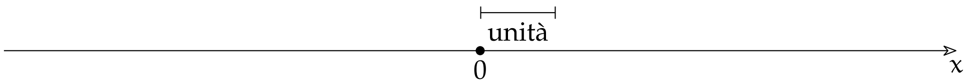




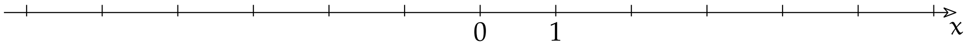
Per farlo in modo preciso abbiamo bisogno di aggiungere ad una retta alcuni elementi ottenendo così un asse cartesiano:

Definizione 8.1. Un *asse cartesiano* è una retta dotata di:

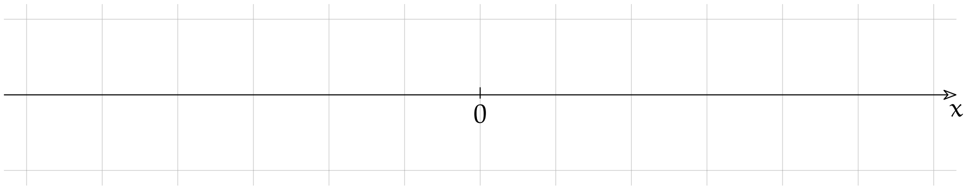
- *origine*, un punto della retta che rappresenta lo zero, a questo punto normalmente viene dato il nome "O";
- *verso*, una freccia che indica da quale parte i numeri aumentano;
- *unità di misura*, un segmento che indica la distanza tra un numero intero e il successivo.



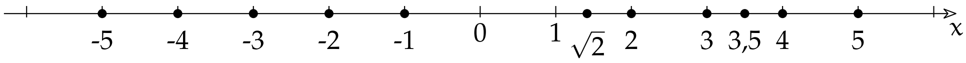
Normalmente, invece di indicare l'unità di misura al di fuori dell'asse indichiamo sull'asse i punti 0 e 1.



Quando lavoriamo su un foglio a quadretti, indichiamo esplicitamente l'unità solo se è diversa dal quadretto e evitiamo anche di tracciare tutti i trattini verticali.



In questo modo possiamo far corrispondere ad ogni numero un punto della retta e ad ogni punto della retta un numero *reale*. Il numero che corrisponde al punto si chiama *coordinata* del punto.



8.3 Piano cartesiano

Abbiamo visto qualche problema sull'asse cartesiano, ma in realtà un solo asse non è molto interessante. Se invece prendiamo due assi cartesiani non paralleli la situazione diventa più complessa, interessante e divertente.

Due assi non paralleli permettono di realizzare una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri: ad ogni punto corrisponde una ben precisa coppia di numeri e ad ogni coppia di numeri un ben preciso punto. La coppia ordinata di numeri prende il nome di *coordinate* del punto.

In entrambi questi riferimenti cartesiani al punto P corrisponde la coppia di numeri (2; 3). Pur essendo validi entrambi, per noi sarà molto più comodo usare il secondo riferimento cartesiano. Cioè un riferimento in cui gli assi:

- hanno l'origine in comune;
- sono perpendicolari;
- hanno la stessa unità di misura.

Un asse, di solito quello orizzontale, si chiama asse delle *ascisse* o asse x; l'altro asse di solito quello verticale, si chiama asse delle *ordinate* o asse y. La prima delle due coordinate si riferisce alla coordinata dell'asse x, la seconda alla coordinata dell'asse y: $(x;\ y)$.

Un riferimento di questo tipo si chiama: *Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico*, (*rcom*). E noi d'ora in poi, quando parleremo di piano cartesiano o di riferimento cartesiano, ci riferiremo sempre ad un *rcom*.

Riassumendo possiamo dare la seguente definizione:

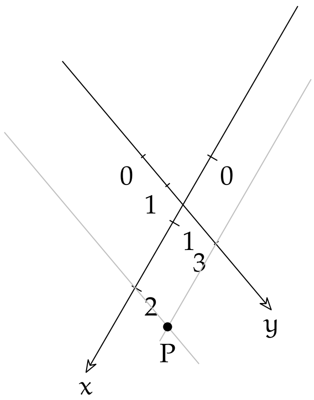


FIGURA 8.1: Riferimento cartesiano.

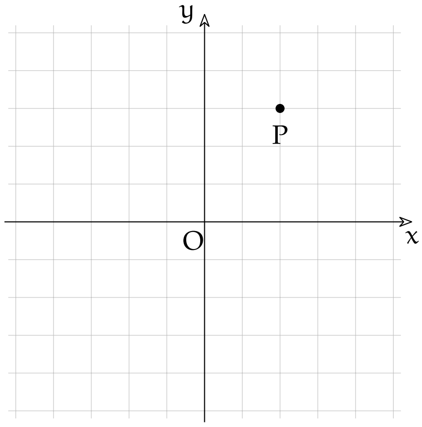


FIGURA 8.2: Rif. cart. ortogonale monometrico.

Definizione 8.2. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di assi cartesiani perpendicolari, con l'origine in comune e dotati di uguale unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura 8.3.

Tutti i punti che appartengono all'asse x hanno l'ordinata (la y) uguale a zero. Tutti i punti che appartengono all'asse y hanno l'ascissa (la x) uguale a zero. L'intersezione degli assi, l'origine, ha coordinate $(0;0)$

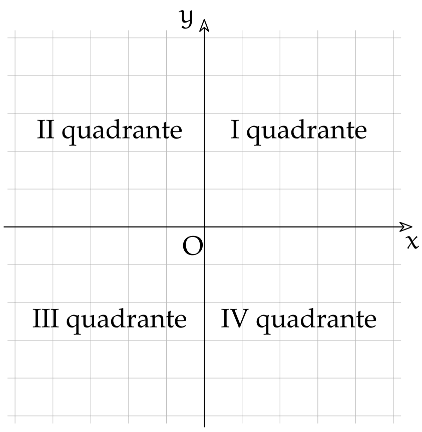


FIGURA 8.3: I quattro quadranti.

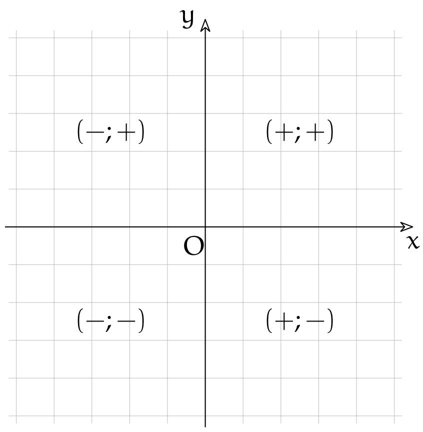


FIGURA 8.4: Collocazione delle coordinate positive e negative.

Per rappresentare un punto P date le sue coordinate $(x_P;y_P)$ si procede nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale x_P
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale y_P

➡ da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

L'intersezione delle parallele tracciate, è il punto P che ha per coordinate la coppia ordinata $(x_P; y_P)$.

Il procedimento inverso permette di passare da un punto del piano alle sue coordinate,

---

Esempio 8.1. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2;3)$, $(-1;4)$, $(-3;-2)$, e $(4;-3)$.

Nella figura 8.5 sono riportati i punti: A che è l'immagine della coppia (2; 3), B immagine della coppia (−1; 4), C immagine della coppia (3; −2) e D della coppia (4; −3).

Esempio 8.2. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $R(0;4)$, $S(0;-2)$, $H(-4;0)$, $K(3;0)$.

Osserviamo (figura 8.6) che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia (0; 4) sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia (0; −2) al punto S dello stesso asse. Analogamente le coppie (−4; 0) e (3; 0) sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

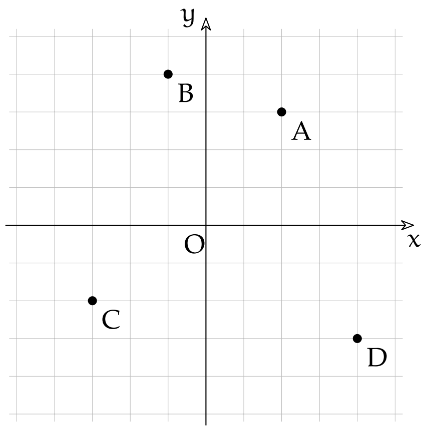


FIGURA 8.5: Punti interni ai quadranti.

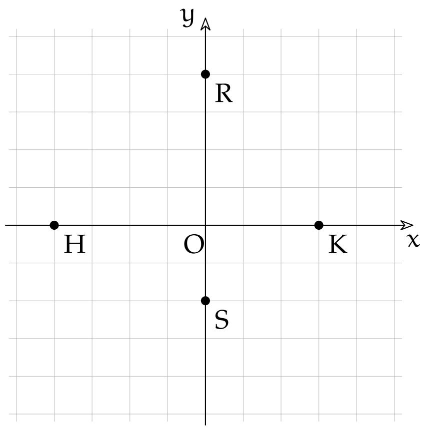


FIGURA 8.6: Punti sugli assi.

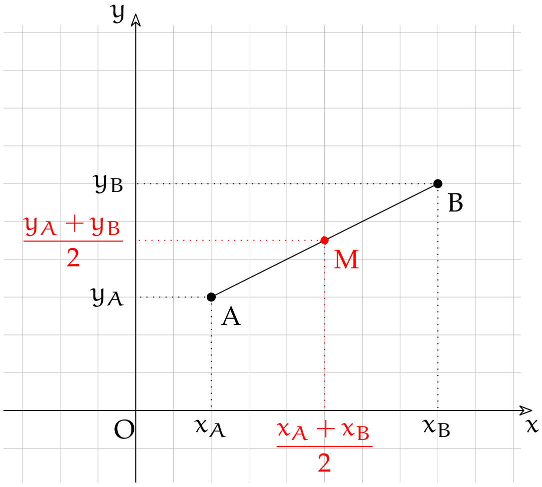
8.4 Problemi nel piano cartesiano

8.4.1 Punto medio di un segmento

Utilizzando i risultati ottenuti nel caso dei punti posti su un asse cartesiano possiamo osservare che anche per quanto riguarda un segmento posto nel piano le coordinate del punto medio sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.

Conoscendo le coordinate degli estremi $A(x_A; y_A$ e $B(x_B; y_B)$ le coordinate del suo punto medio sono (figura 8.7):

Esempio 8.3. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-3;-2)$ e $B(5;7)$. Trova il punto medio usando il righello disegnalo e assegnagli l'etichetta "M". Poi calcola le coordinate del punto medio con la formula precedente e controlla che le coordinate ottenute siano proprio quelle del punto trovato precedentemente.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

o

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

FIGURA 8.7: Il punto medio.

Esempio 8.4. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-9;8)$ e $M(-6;7)$. Usando il righello trova il punto B in modo che M sia il punto medio del segmento AB. Applica la formula precedente per verificare la correttezza di quanto trovato.

8.4.2 Lunghezza di un segmento

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, date le coordinate degli estremi.

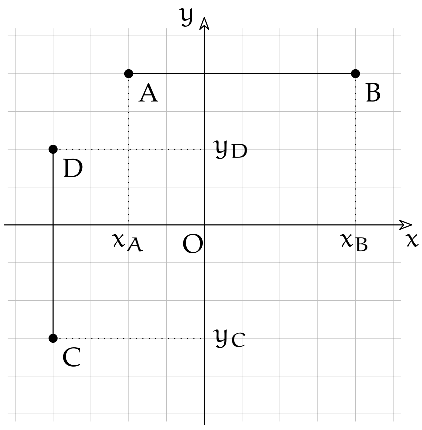


FIGURA 8.8: Lunghezza segmenti paralleli agli assi.

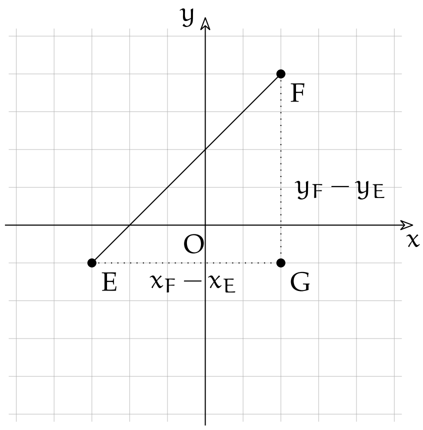


FIGURA 8.9: Lunghezza di un segmento.

Possiamo distinguere due casi:

Primo caso: segmenti paralleli agli assi

i due punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata (figura 8.8). È facile osservare in questo caso che il problema si riduce a quello analogo risolto per segmenti su un asse cartesiano. Se i due punti hanno la stessa ordinata, la stessa y:
$\overline{AB} = x_B - x_A$.
Se hanno la stessa ascissa, la stessa x:
$\overline{CD} = y_D - y_C$.

Secondo caso: segmento qualunque

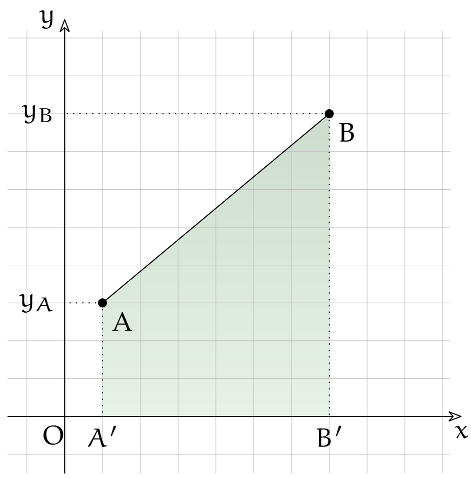
è questo il caso generale, il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 8.9).
Dati: $E(x_E; y_E)$, $F(x_F; y_F)$.
Obiettivo: $\overline{EF}$.
Procedura risolutiva: tracciando da E la parallela all'asse x e da F la parallela all'asse y si determina il vertice G del triangolo rettangolo EGF di cui EF è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{EF} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_G - y_F)^2}$.

Poiché $x_G = x_F$ e $y_G = y_E$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}$.
In conclusione, la *misura del segmento* AB, *note le coordinate* dei suoi estremi è:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}.$$

8.4.3 Area sottesa a un segmento

Dati gli estremi di un segmento trovare la superficie compresa tra il segmento e l'asse x. Partiamo da una situazione particolare: i punti A e B non appartengono all'asse x e il segmento AB non è parallelo all'asse x.



Che forma ha l'area sottesa a questo segmento? È un quadrilatero, ha solo due lati paralleli ha due angoli retti... questa è la descrizione di un trapezio! Forse non hai mai disegnato un trapezio messo in questo modo. Puoi verificare facilmente che è un trapezio, ti basta ruotare il quaderno do 90°. L'area del trapezio è uguale alla somma delle basi per l'altezza diviso due:

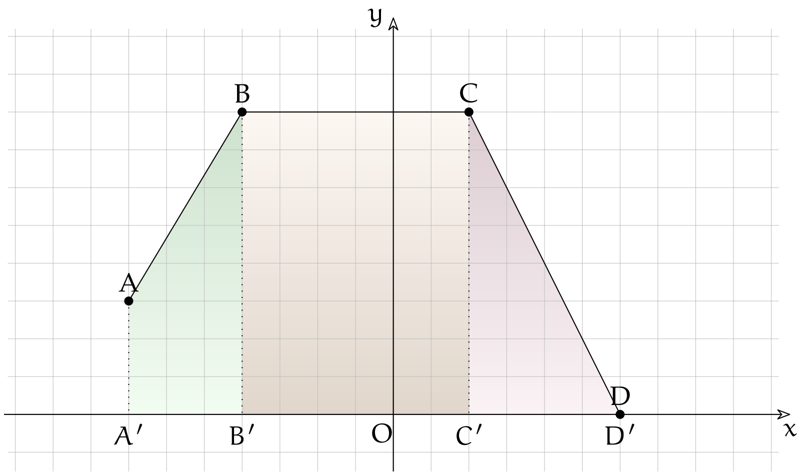
$$Area_{trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Ma quali sono le basi e quale è l'altezza? Nel trapezio le basi sono i due lati paralleli e l'altezza è la distanza tra i due lati paralleli. Uno dei lati paralleli è AA' cioè l'ordinata di A (la y_A) e l'altro è BB' cioè l'ordinata di B (la y_B). L'altezza del trapezio è la lunghezza del segmento $A'B'$ cioè $x_B - x_A$.

Mettendo assieme tutti gli ingredienti otteniamo che l'area sottesa al segmento AB è:

$$\mathcal{A}_{AB} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{2}$$

E se il segmento è messo in un altro modo? Anche limitandoci al primo quadrante possiamo osservare che ci sono svariati casi:



L'area sottesa al segmento AB è un trapezio rettangolo, l'area sottesa al segmento CD è un rettangolo, l'area sottesa al segmento EF è un triangolo rettangolo.

Nel paragrafo precedente abbiamo risolto il primo caso, quello del trapezio, dovremo ripetere tutti quei ragionamenti anche per gli altri due? No! I matematici, che sono un po strani, ritengono che:

- un triangolo rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con una base lunga zero;
- un rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con le basi uguali.

A questo punto non dobbiamo preoccuparci di casi diversi, la formula trovata per il trapezio rettangolo risolverà anche gli altri casi

---

Esempio 8.5. Dopo aver trovato le coordinate dei punti della figura precedente calcola le aree sottese ai tre segmenti sia usando le formule della geometria sia usando la formula dell'area sottesa e confronta i risultati.

Esempio 8.6. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(3; -2)$ e $B(8; -6)$. Calcola l'area sottesa a questo segmento sia usando la formula dell'area del trapezio sia usando la formula dell'area sottesa... Cosa puoi osservare?

Anche per le aree sottese abbiamo una situazione strana: in certi casi l'area di una figura risulta negativa. Questo fatto può essere irritante, ma in certi casi risulterà comodo.

Ci sono certi segmenti che formano con l'asse x una figura con una superficie diversa da zero ma che hanno area sottesa uguale a zero. Quando avviene questo?

8.4.4 Area di un triangolo

Date le coordinate dei vertici di un triangolo trova l'area della sua superficie.

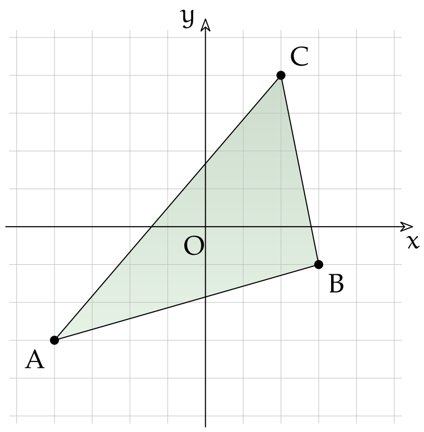


FIGURA 8.10: Area con la formula di Erone.

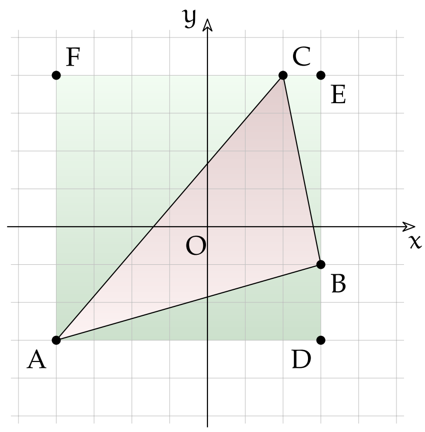


FIGURA 8.11: Area come differenza di superfici.

Formula di Erone

Se conosciamo le coordinate dei tre vertici possiamo trovare le lunghezze dei tre lati e conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo possiamo trovare la sua area utilizzando la formula di Erone. Chiamando: a, b e c i tre lati e p il semiperimetro:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ma spesso le lunghezze dei lati sono numeri approssimati e quindi la formula di Erone, già complicata di suo, risulta piuttosto scomoda.

Differenza di superfici

Un altro metodo consiste nell'iscrivere il triangolo in un rettangolo, trovare l'area del rettangolo e sottrarre da questa le aree dei tre triangoli complementari.

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \mathcal{A}_{rettangolo} - \mathcal{A}_{tri1} - \mathcal{A}_{tri2} - \mathcal{A}_{tri3}$$

Casi particolari

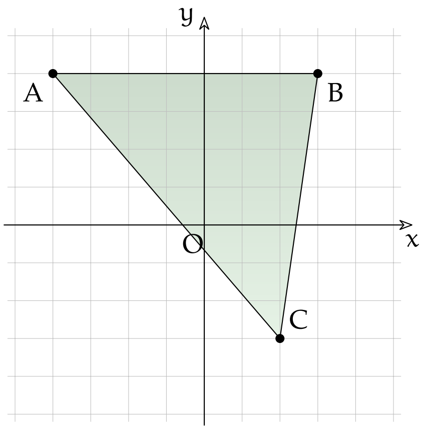


FIGURA 8.12: Area con la formula di Erone.

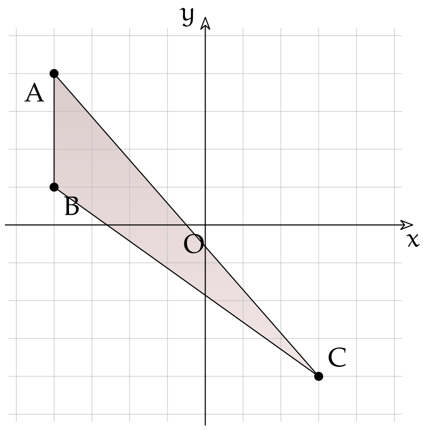


FIGURA 8.13: Area come differenza di superfici.

Se il triangolo ha un lato parallelo ad uno degli assi allora è facile calcolare l'altezza rispetto a questo lato e quindi si può usare la solita formula:

$$\mathcal{A}_{\mathtt{triangolo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Dopo aver trovato le coordinate dei vertici delle figure precedenti:

Esempio 8.7. Con riferimento alla figura 8.10 calcola la lunghezza dei lati e l'area del triangolo con la formula di Erone.

Esempio 8.8. Con riferimento alla figura 8.11 calcola l'area del triangolo come differenza di aree. Confronta poi il risultato con quello ottenuto nel calcolo precedente.

Esempio 8.9. Con riferimento alla figura 8.12 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

Esempio 8.10. Con riferimento alla figura 8.13 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

8.5 Esercizi

8.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

8.4 Problemi nel piano cartesiano

8.1. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A=(-5;1);\ B=(-2;-4)$ $[M_{AB}=(-3.5,-1.5);\ \overline{AB}=\sqrt{34}=5.83;\ A_AB=-4.5]$
b) $A=(-3;0);\ B=(-1;-4)$ $[M_{AB}=(-2.0,-2.0);\ \overline{AB}=\sqrt{20}=4.47;\ A_AB=-4.0]$
c) $A=(-3;0);\ B=(0;-5)$ $[M_{AB}=(-1.5,-2.5);\ \overline{AB}=\sqrt{34}=5.83;\ A_AB=-7.5]$
d) $A=(-7;-2);\ B=(0;-6)$ $[M_{AB}=(-3.5,-4.0);\ \overline{AB}=\sqrt{65}=8.06;\ A_AB=-28.0]$
e) $A=(-4;-1);\ B=(1;-4)$ $[M_{AB}=(-1.5,-2.5);\ \overline{AB}=\sqrt{34}=5.83;\ A_AB=-12.5]$
f) $A=(-7;-3);\ B=(-6;-7)$ $[M_{AB}=(-6.5,-5.0);\ \overline{AB}=\sqrt{17}=4.12;\ A_AB=-5.0]$
g) $A=(-4;-3);\ B=(-1;-6)$ $[M_{AB}=(-2.5,-4.5);\ \overline{AB}=\sqrt{18}=4.24;\ A_AB=-13.5]$
h) $A=(-5;0);\ B=(-3;-3)$ $[M_{AB}=(-4.0,-1.5);\ \overline{AB}=\sqrt{13}=3.61;\ A_AB=-3.0]$
i) $A=(-7;-2);\ B=(-2;-5)$ $[M_{AB}=(-4.5,-3.5);\ \overline{AB}=\sqrt{34}=5.83;\ A_AB=-17.5]$
j) $A=(-2;-3);\ B=(2;-6)$ $[M_{AB}=(0.0,-4.5);\ \overline{AB}=\sqrt{25}=5.0;\ A_AB=-18.0]$

8.2. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A(-8;\ 0);\ B(0;\ -4);\ C(2;\ 3)$ $[2p=26.66\ A=32.0]$
b) $A(-7;\ 0);\ B(-1;\ -2);\ C(5;\ 7)$ $[2p=31.03\ A=33.0]$
c) $A(-3;\ -3);\ B(-2;\ -6);\ C(3;\ 5)$ $[2p=25.25\ A=13.0]$
d) $A(-4;\ 0);\ B(-2;\ -8);\ C(6;\ 1)$ $[2p=30.34\ A=41.0]$
e) $A(-7;\ -3);\ B(1;\ -6);\ C(5;\ 3)$ $[2p=31.81\ A=42.0]$
f) $A(-6;\ 2);\ B(0;\ -8);\ C(2;\ 3)$ $[2p=30.90\ A=43.0]$
g) $A(-5;\ -1);\ B(-3;\ -3);\ C(5;\ 7)$ $[2p=28.44\ A=18.0]$
h) $A(-6;\ 0);\ B(-5;\ -3);\ C(-2;\ 7)$ $[2p=21.66\ A=9.5]$
i) $A(-2;\ -1);\ B(2;\ -4);\ C(5;\ 3)$ $[2p=20.68\ A=18.5]$
j) $A(-3;\ 0);\ B(-2;\ -6);\ C(5;\ 4)$ $[2p=27.23\ A=26.0]$

8.5.2 Esercizi riepilogativi

8.3. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A=(-7;0);\ B=(-6;-5)$ $[M_{AB}=(-6.5,-2.5);\ \overline{AB}=\sqrt{26}=5.10;\ A_AB=-2.5]$
b) $A=(-5;2);\ B=(-4;0)$ $[M_{AB}=(-4.5,1.0);\ \overline{AB}=\sqrt{5}=2.24;\ A_AB=1.0]$
c) $A=(-4;0);\ B=(-3;-6)$ $[M_{AB}=(-3.5,-3.0);\ \overline{AB}=\sqrt{37}=6.08;\ A_AB=-3.0]$
d) $A=(-4;0);\ B=(0;-6)$ $[M_{AB}=(-2.0,-3.0);\ \overline{AB}=\sqrt{52}=7.21;\ A_AB=-12.0]$
e) $A=(-3;1);\ B=(2;-5)$ $[M_{AB}=(-0.5,-2.0);\ \overline{AB}=\sqrt{61}=7.81;\ A_AB=-10.0]$
f) $A=(-3;-3);\ B=(0;-5)$ $[M_{AB}=(-1.5,-4.0);\ \overline{AB}=\sqrt{13}=3.61;\ A_AB=-12.0]$
g) $A=(-4;-2);\ B=(-3;-4)$ $[M_{AB}=(-3.5,-3.0);\ \overline{AB}=\sqrt{5}=2.24;\ A_AB=-3.0]$
h) $A=(-8;0);\ B=(-6;-6)$ $[M_{AB}=(-7.0,-3.0);\ \overline{AB}=\sqrt{40}=6.32;\ A_AB=-6.0]$
i) $A=(-5;-2);\ B=(-2;-6)$ $[M_{AB}=(-3.5,-4.0);\ \overline{AB}=\sqrt{25}=5.0;\ A_AB=-12.0]$
j) $A=(-6;-2);\ B=(-4;-4)$ $[M_{AB}=(-5.0,-3.0);\ \overline{AB}=\sqrt{8}=2.83;\ A_AB=-6.0]$

8.4. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A = (-8;-3);\ B = (1;-6);\ C = (3;-2)$ [$2p = 25.00\ A = 21.0$]
b) $A = (-6;-3);\ B = (-4;-5);\ C = (4;7)$ [$2p = 31.39\ A = 20.0$]
c) $A = (-4;2);\ B = (2;-5);\ C = (6;4)$ [$2p = 29.27\ A = 41.0$]
d) $A = (-5;-2);\ B = (-1;-5);\ C = (7;1)$ [$2p = 27.37\ A = 24.0$]
e) $A = (-8;-1);\ B = (1;-4);\ C = (4;1)$ [$2p = 27.48\ A = 27.0$]
f) $A = (-6;0);\ B = (-3;-4);\ C = (-2;5)$ [$2p = 20.46\ A = 15.5$]
g) $A = (-2;2);\ B = (1;-8);\ C = (4;5)$ [$2p = 30.49\ A = 34.5$]
h) $A = (-3;-2);\ B = (-2;-7);\ C = (-1;2)$ [$2p = 18.63\ A = 7.0$]
i) $A = (-8;-3);\ B = (-2;-6);\ C = (-1;-1)$ [$2p = 19.09\ A = 16.5$]
j) $A = (-7;0);\ B = (-2;-3);\ C = (2;5)$ [$2p = 25.07\ A = 26.0$]

8.5. Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$
Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;0)$ individuano punti del . . . .
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti dell'asse y

8.6. Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$ È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

8.7. Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$ Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$

8.8. Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

8.9. Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$

8.10. Determina la distanza di $P\,(-3;2,5)$ dall'origine del riferimento.

8.11. Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$

8.12. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$

8.13. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

8.14. Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$

8.15. Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

8.16. Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$ Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$

8.17. I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

8.18. I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$

8.19. Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$
c) $A(-1;4), B(1;-4)$
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B\left(-2;-1\right)$
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$

8.20. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC

8.21. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC Determina il perimetro di ABC e di MNP Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

8.22. Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

8.23. Verifica che i segmenti AB e CD di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

8.24. Verifica che il triangolo di vertici $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-4;\ 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

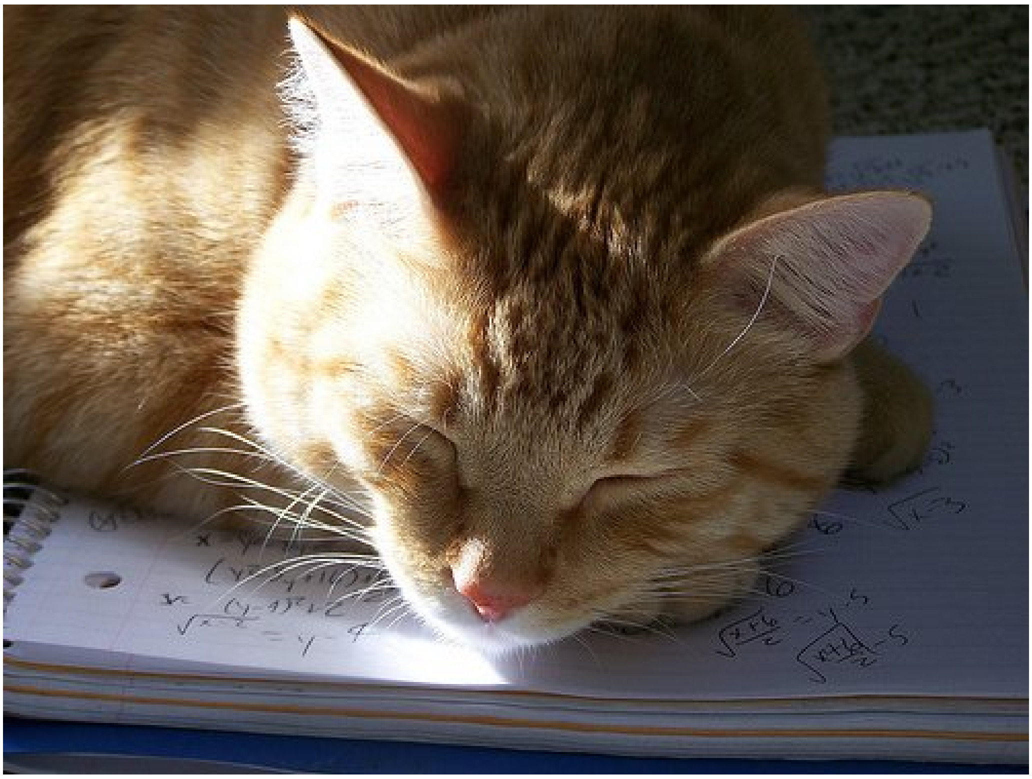
8.25. Verifica che il triangolo di vertici $A(-4;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(1;\ 6)$ è isoscele e calcola l'area. [17]

8.26. Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici $A(0;\ 4)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ -2)$ [5]

8.27. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(2;\ -3)$ [(2; 0)]

8.28. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(-3;\ 4)$, $B(-1;\ -3)$, $C(1;\ 5)$ [(-1; 2)]

Relazioni e funzioni III



“Ernest!”
Foto di Ssmallfry
http://www.flickr.com/photos/ssmallfry/2262374892/
Licenza: Attribuzione 2.0 Generico (CC BY 2.0)

Insiemi 9

9.1 Definizioni

In matematica usiamo la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure che sono detti *elementi* dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.

9.1.1 Elementi primitivi della teoria degli insiemi

La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempio 9.1. Sono insiemi:

a) l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
b) l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
c) l'insieme delle città della Puglia con più di 15 000 abitanti;
d) l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
e) l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
f) l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1 000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:

- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:

- i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
- le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
- le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
- l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

In generale, gli insiemi si indicano con lettere maiuscole $A, B, C\dots$ gli elementi con lettere minuscole $a, b, c\dots$. Se un elemento a sta nell'insieme A si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Il simbolo "$\in$" si chiama simbolo di *appartenenza*.

Se un elemento b non sta nell'insieme A si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive $b \notin A$, si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo "$\notin$" si chiama simbolo di *non appartenenza*.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama *proprietà caratteristica*.

Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe: $A = \{a, b, c, d\}$.

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:

- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12, 34, 0, \overline{25} \ldots\}$.

Esempio 9.2. Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$$\text{lunedì} \in A, \text{martedì} \in A, \text{gennaio} \notin A, \text{giovedì} \in A, \text{dicembre} \notin A, \text{estate} \notin A.$$

Consideriamo l'insieme $A = \{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono *insiemi uguali*.

Definizione 9.1. Due insiemi A e B si dicono *uguali* se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli $A = B$. Due insiemi A e B si dicono *diversi* se non contengono gli stessi elementi: in simboli $A \neq B$.

9.1.2 Insieme vuoto

Consideriamo l'insieme $A = \{$consonanti della parola "AIA"$\}$. Poiché la parola "AIA" non contiene consonanti, l'insieme A è privo di elementi.

Definizione 9.2. Un insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto*, lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o $\{\ \}$.

❑ **Osservazione** $\{\ \} = \emptyset$ ma $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ dato che $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

Esempio 9.3. Alcuni insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto;

b) l'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto;

c) l'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

Insieme universo

La frase «l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino» non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1C gli elementi saranno certamente diversi, probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama *Insieme Universo* e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale un insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente si indica con U l'insieme universo.

9.1.3 Cardinalità

Definizione 9.3. Si definisce cardinalità (o potenza) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Viene indicata con uno dei seguenti simboli $|A|$, $\#(A)$ o $\operatorname{card} A$.

Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempio 9.4. Esempi di cardinalità.

a) L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi $\operatorname{card} A = 5$
b) l'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi $\operatorname{card} B = 3$.

9.2 Rappresentazione degli insiemi

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

9.2.1 Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.

Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura: $X = \{1, 2, 3, 5\}$. Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X = \{1, 2, 3, 5\} = \{2, 1, 5, 3\}.$$

È invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola autunno, scriviamo

$$Y = \{a, u, t, n, o\}.$$

Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.

Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare:

$$X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}.$$

Esempio 9.5. Rappresentazione degli insiemi:

a) l'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: $G = \{$lunedì, martedì, mercoledì$\}$
b) l'insieme A delle lettere della parola "Associazione" si indica: $A = \{a, s, o, c, i, z, n, e\}$.

9.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.

Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come:

$$Y = \{x/x \text{ è un divisore di } 10\}$$

e si legge "Y è l'insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".

In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme. La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è $Y = \{1, 2, 5, 10\}$.

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme X dei naturali minori di 15 è:

$$X = \{x \in \mathbb{N}/x < 15\}$$

e si legge "X è l' insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".

L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'*insieme universo* definito precedentemente. Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

Esempio 9.6. Esempi di proprietà caratteristica:

a) l'insieme A delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare come:

$$A = \{r/r \text{ è una retta incidente a } t\}.$$

b) l'insieme B dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:

$$B = \{n \in \mathbb{N}/n > 100\}.$$

c) l'insieme P dei numeri pari può essere rappresentato come:

$$P = \{n \in \mathbb{N}/n = 2 \cdot m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}.$$

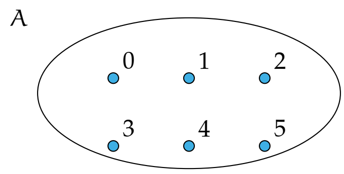
d) l'insieme C dei numeri interi relativi compresi tra -10 e $+100$, estremi inclusi:

$$C = \{n \in \mathbb{Z}/ -10 \leqslant n \leqslant 100\}.$$

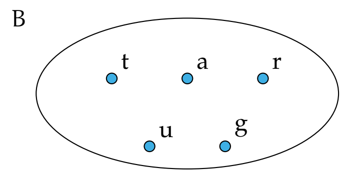
9.2.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche *rappresentazione di Eulero-Venn*[1] si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

Esempio 9.7. A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.



Esempio 9.8. B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", $B = \{t, a, r, u, g\}$.



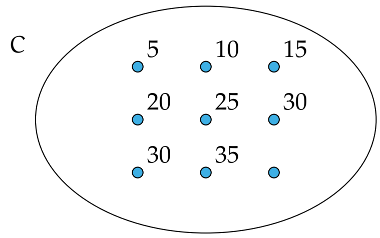
Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

Esempio 9.9. Rappresentare l'insieme C dei multipli di 5.

Per caratteristica: $C = \{n \in \mathbb{N} / n$ è multiplo di $5\}$ oppure $C = \{n \in \mathbb{N} / n = 5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

Tabulare: $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$. I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



9.3 Operazioni con gli insiemi

9.3.1 Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme A degli abitanti di Milano e l'insieme B degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della

[1] In onore dei matematici Leonhard Euler (1707-1783) e John Venn (1834-1923).

popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme B sono anche elementi di A: si dice che B è sottoinsieme di A, si scrive $B \subseteq A$.

Nel caso in cui tutti gli elementi di Y siano elementi di X e tutti gli elementi di X siano elementi di Y si ha che $X = Y$, e Y si dice *sottoinsieme improprio* di X. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $Y = X$.

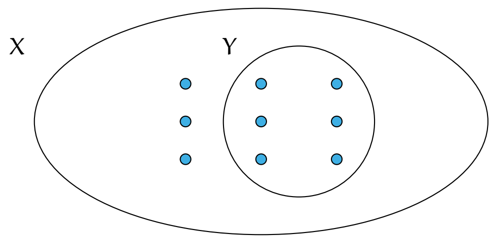
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset \subset X$. L'insieme vuoto è considerato un *sottoinsieme improprio* di qualunque insieme. Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.

Se Y è un sottoinsieme di X e X ha altri elementi oltre a quelli di Y si dice che Y è un *sottoinsieme proprio* di X e si scrive $Y \subset X$. La scrittura $A \subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A = B$ o $A \subset B$.

Definizione 9.4. Dati due insiemi X e Y, si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se ogni elemento di Y è anche elemento di X.

In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge "Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



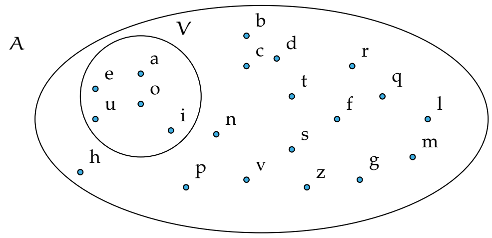
Se a è un elemento del sottoinsieme Y, allora lo sarà anche dell'insieme X:

$$\text{se } a \in Y \text{ e } Y \subseteq X, \text{ allora } a \in X.$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$. Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme X risulta $\emptyset \subseteq X$.

Esempio 9.10. Consideriamo l'insieme $X = \{$lettere della parola "autunno"$\}$ e l'insieme $Y = \{$lettere della parola "notaio"$\}$ possiamo affermare che "ogni" elemento di Y è anche elemento di X? La risposta è negativa: $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi Y non è sottoinsieme di X e si scrive $Y \not\subset X$.

Esempio 9.11. Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e V l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$ cioè V è un sottoinsieme proprio di A, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



Esempio 9.12. Sia $C = \{1\}$, allora C non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Esempio 9.13. Sia A l'insieme delle auto esposte in un autosalone e U l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che U è un sottoinsieme di A, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

9.3.2 Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme A possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di A.

Esempio 9.14. Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3\}$.

$\emptyset \subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}. Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}. L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$. In tutto 8 sottoinsiemi.

Definizione 9.5. Dato un insieme A, si chiama *insieme delle parti* l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e A quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di A.

Esempio 9.15. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Esempio 9.16. Dato l'insieme $A = \{a\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$ allora $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$.

Esempio 9.17. Dato l'insieme $B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$, $S_3 = \{\text{matita}\}$, $S_4 = \{\text{penna}\}$ allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Esempio 9.18. Dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$, $S_5 = \{3\}$, $S_6 = \{1, 2\}$, $S_7 = \{1, 3\}$, $S_8 = \{2, 3\}$ allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{7,}, S_8\}$.

Riassumendo:

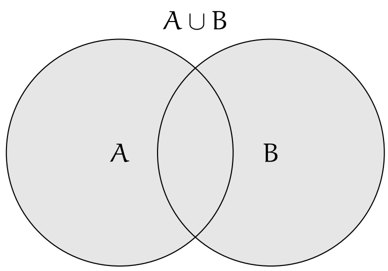
- se $A = \emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8.

Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

9.3.3 Insieme unione

Prendiamo l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari e l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari; allora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi $\mathbb{P}$ e $\mathbb{D}$.

Definizione 9.6. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme unione* l'insieme C, composto da tutti gli elementi appartenenti ad A o a B o a entrambi. In simboli: $C = A \cup B$, si legge "A unito a B" o "A unione B".

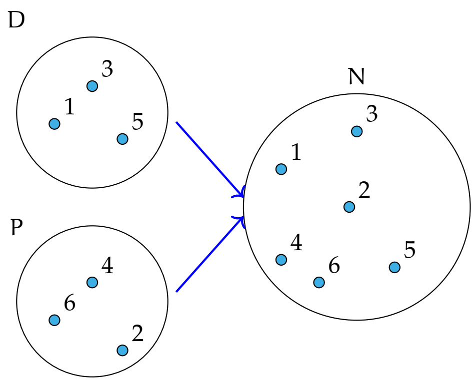


Mediante la proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cup B = \{x/(x \in A) \text{ o } (x \in B)\}$.

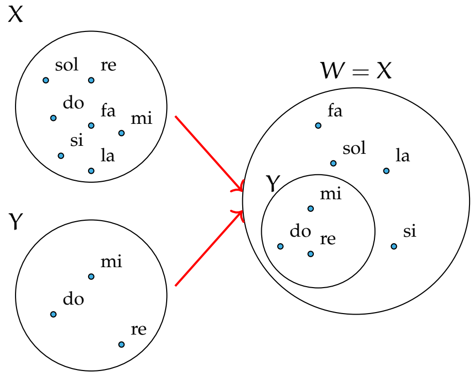
Proprietà dell'unione tra insiemi

a) $A \cup B = B \cup A$: proprietà *commutativa* dell'unione;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: proprietà *associativa* dell'unione;
c) se $B \subset A$, allora $A \cup B = A$
d) $A \cup \emptyset = A$
e) $A \cup A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'unione.

Esempio 9.19. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Esempio 9.20. Siano $X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$, allora, poiché $Y \subset X$, $W = X \cup Y = X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$.

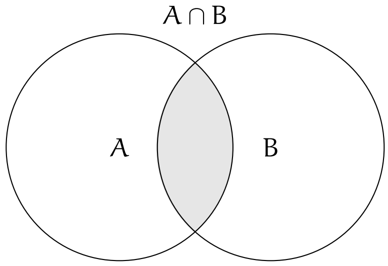


9.3.4 Insieme intersezione

Esempio 9.21. Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

- L'insieme degli elementi di A che stanno in B è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi di B che stanno in A è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è $\{m, a, t, e, i\}$.

Definizione 9.7. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme intersezione* di A e B, l'insieme C composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C = A \cap B$, che si legge "A intersecato a B" o "A intersezione B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cap B = \{x/(x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$, ossia se A e B non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono *disgiunti*.

Proprietà dell'intersezione tra insiemi

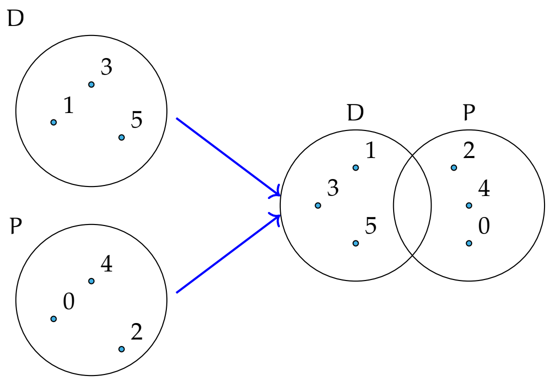
a) $A \cap B = B \cap A$: proprietà *commutativa* dell'intersezione;
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: proprietà *associativa* dell'intersezione;
c) Se $B \subset A$, allora $A \cap B = B$
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$
e) $A \cap A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'intersezione;
f) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

9.3.5 Proprietà distributiva tra intersezione e unione

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: proprietà *distributiva* dell'intersezione rispetto l'unione;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: proprietà *distributiva* dell'unione rispetto l'intersezione.

Esempio 9.22. Siano $X = \{$do, re, mi. fa, sol, la, si$\}$ e $Y = \{$do, re, mi$\}$. Allora poiché, $Y \subset X$, si ha: $W = X \cap Y = Y = \{$do, re, mi$\}$.

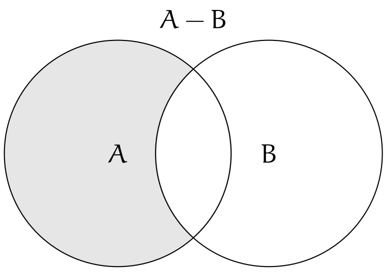
Esempio 9.23. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cap D = \emptyset$.



9.3.6 Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi A e B formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: A ={a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z} e B ={b, c, d, f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z}, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme A ma non in B formano un nuovo insieme chiamato insieme *differenza*.

Definizione 9.8. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme differenza* l'insieme C, composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B. In simboli: $C = A - B$ che si legge "A differenza B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A - B = \{x / (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.

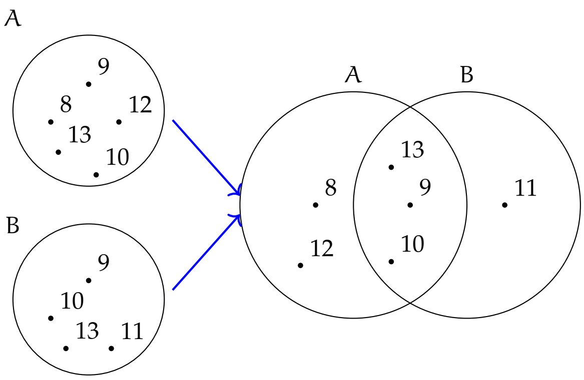
Proprietà della differenza tra insiemi

a) Se $A \cap B = \emptyset$, ossia sono disgiunti allora $A - B = A$, e $B - A = B$
b) se $B \subset A$, ossia B è sottoinsieme proprio di A allora $B - A = \emptyset$
c) $A - A = \emptyset$
d) $A - \emptyset = A$.

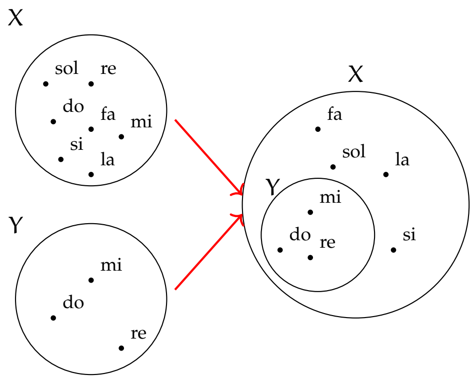
Esempio 9.24. Siano $A = \{8, 9, 10, 12, 13\}$ e $B = \{9, 10, 11, 13\}$ allora $C = A - B = \{8, 12\}$ e $D = B - A = \{11\}$.

Poiché $A - B \neq B - A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempio 9.25. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4\}$. I due insiemi sono disgiunti $P \cap D = \emptyset$ allora $D - P = \{1, 3, 5\} = D$ e $P - D = \{0, 2, 4\} = P$.



Esempio 9.26. Siano $X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$ allora poiché $Y \subset X$, $W = X - Y = \{\text{fa, sol, la, si}\}$.



9.3.7 Insieme complementare

Sia $W = \{\text{sabato, domenica}\}$ l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per "dì". L'insieme W può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana G ={lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}.

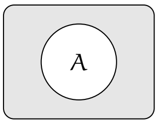
L'insieme degli elementi di G che non appartengono a W forma un insieme che chiameremo *complementare* di W rispetto a G. L'insieme G invece si dice in questo caso insieme *universo*. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A = \{x \in N / x \leqslant 100\}$, N è l'insieme universo di A.

Definizione 9.9. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono A come sottoinsieme si dice *insieme universo* o *insieme ambiente*.

Definizione 9.10. Dato l'insieme A e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A si dice *insieme complementare* di A rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $\complement_U A$.

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:

U



Nella figura la parte in grigio è il complementare di A rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$. Come si può vedere dal disegno, essendo $A \subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.

Esempio 9.27. Insiemi complementari.

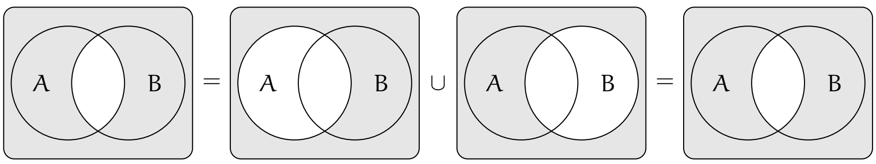
a) Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$
b) Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme C delle consonanti: $\overline{V}_U = C$
c) Dati gli insiemi $U = \{x \in N / 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in N / 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, poiché $B \subset U$ si può determinare $\overline{B}_U = \{x \in N / 6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

9.3.8 Leggi di De Morgan

Dati due insiemi A e B ci sono alcune proprietà, dette *leggi di De Morgan* che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: Prima legge di De Morgan;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: Seconda legge di De Morgan.

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.



$(\overline{A \cap B})$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cup \overline{B}$

9.3.9 Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce - Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3, 2\}$ e $\{2, 3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una *coppia ordinata* di numeri.

Definizione 9.11. Un insieme di due elementi a e b presi in un certo ordine si dice *coppia ordinata*. Se il primo elemento della coppia è a ed il secondo è b si scrive: (a, b).

Definizione 9.12. Dati due insiemi A e B non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B. In simboli: $A \times B$ che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in B\}$. Nel caso in cui $B = A$, il prodotto cartesiano diventa $A \times A = A^2 = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Esempio 9.28. Sia $C = \{x, y, z\}$, il prodotto cartesiano $C \times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$.

Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

a) $A \times \emptyset = \emptyset$
b) $\emptyset \times A = \emptyset$
c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 9.29. Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$.

Si può notare che $A \times B \neq B \times A$.

Poiché $A \times B \neq B \times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

Tabulazione delle coppie ordinate Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di A con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di A con tutti gli elementi di B e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}.$$

Diagramma a frecce Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.

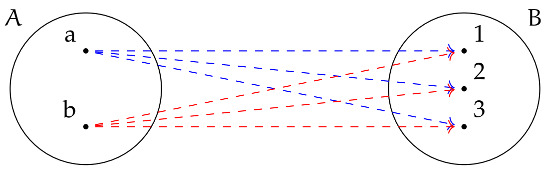


Tabella a doppia entrata Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

		B		
		1	2	3
A	a	(a; 1)	(a; 2)	(a; 3)
	b	(b; 1)	(b; 2)	(b; 3)

Diagramma cartesiano Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate *assi cartesiani*. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

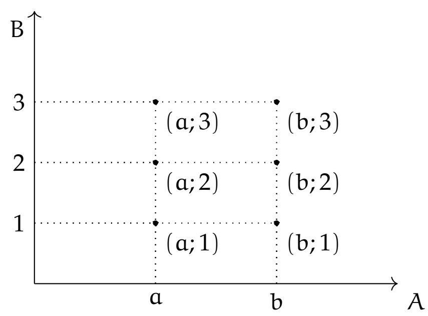
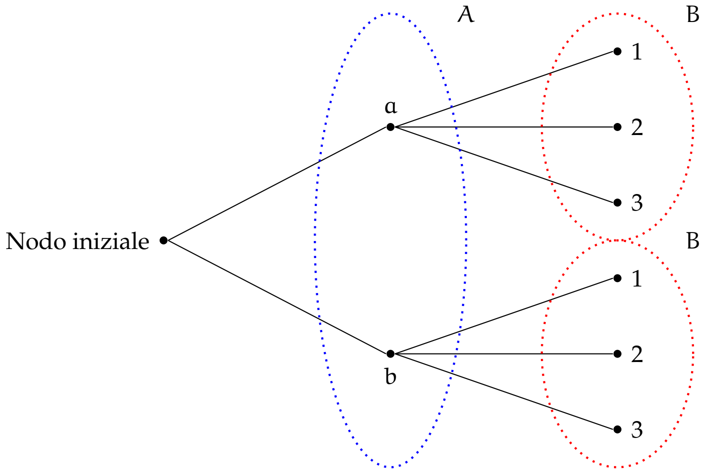


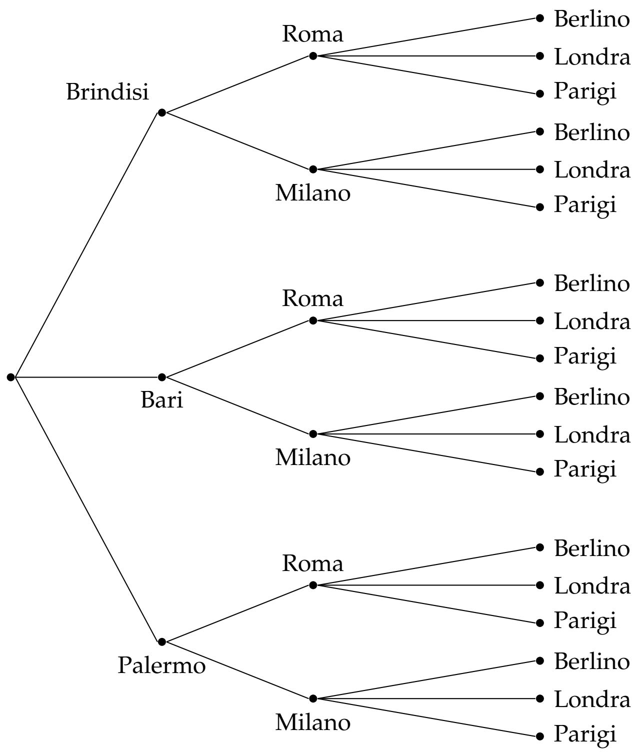
Diagramma ad albero È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.

Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



Esempio 9.30. Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P = \{\text{Brindisi}, \text{Bari}, \text{Palermo}\}$ l'insieme delle città di partenza, $S = \{\text{Roma}, \text{Milano}\}$ l'insieme delle città di scalo e $A = \{\text{Parigi}, \text{Berlino}, \text{Londra}\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P \times S \times A$. Rappresentiamo $P \times S \times A$ tramite un diagramma ad albero:



9.4 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

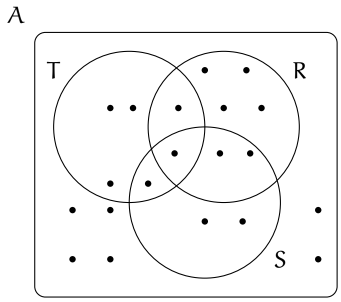
Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Esempio 9.31. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano

a) *nessuno* dei balli indicati?
b) *almeno uno* dei balli tango, samba, rumba?
c) *almeno* il samba?
d) *solo* la rumba?
e) la rumba *e* il tango?
f) *tutti* i balli indicati?



Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

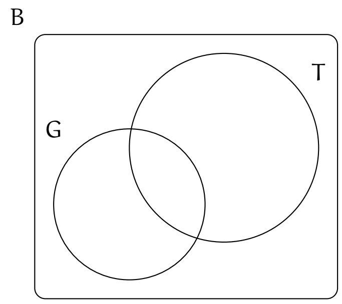
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno. Si ha $\text{card}\, A = 20$.

Rispondiamo ora alle altre domande.

a) Quanti tra loro ballano *nessuno* dei balli indicati? Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme A, ma in nessuno degli insiemi R, S,T quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme A, dunque $\text{card}(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.
b) Quanti tra loro ballano *almeno uno* dei balli tra tango, samba, rumba? Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $\text{card}(R \cup S \cup T) = 14$.
c) Quanti tra loro ballano *almeno* il samba? Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme S, quindi $\text{card}\, S = 6$.
d) Quanti tra loro ballano *solo* la rumba? Nell'insieme R sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme R gli elementi che stanno in S o in T: $\text{card}(R - (T \cup S)) = 4$.
e) Quanti tra loro ballano la rumba *e* il tango? Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap T) = 2$.
f) Quanti tra loro ballano *tutti* i balli indicati? Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap S \cap T) = 1$.

Esempio 9.32. A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?

Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con B l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che $\text{card}(G) = 7$, $\text{card}(G \cap T) = 3$, $\text{card}(T - G) = 3$ e $\text{card}(B - (G \cup T)) = 2$.



Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

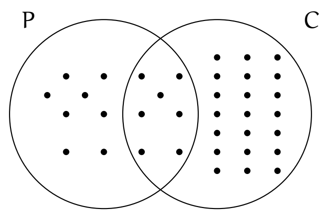
Esempio 9.33. Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi P e C sono disgiunti: $P \cap C = \emptyset$. Quindi: $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) = 15 + 28 = 43$.

Esempio 9.34. Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$ e $\text{card}(P \cap C) = 7$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

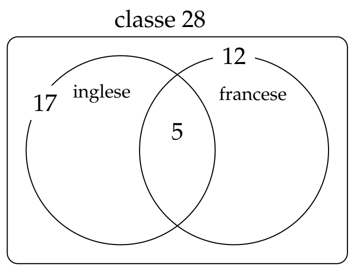
Soluzione $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) - \text{card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$.

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti A e B la cardinalità dell'insieme $A \cup B$ è data dalla seguente formula: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Esempio 9.35. A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso *non* sono $17+12=29$, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono $17+12-5=24$. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono $28-24=4$.

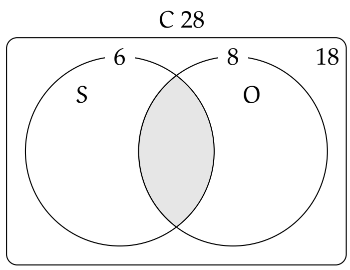


Esempio 9.36. Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi.

Gli elementi di $\overline{S \cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.



L'insieme $S \cup O$ è quindi costituito da $28-18=10$ elementi.

Ricordiamo che

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}(S \cup O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cap O) \\
\Rightarrow\ &\operatorname{card}(S \cap O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cup O) \\
\Rightarrow\ &\operatorname{card}(S \cap O) = 6+8-10 = 4.
\end{aligned}$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

9.5 Esercizi

9.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

9.1 Definizioni

9.1. Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi.

a) I fiumi più lunghi d'Italia;
b) le persone con più di 30 anni;
c) i numeri 1, 20, 39, 43, 52;
d) i libri più pesanti nella tua cartella;
e) i punti di una retta;
f) gli animali con 2 zampe;
g) le vocali dell'alfabeto italiano;
h) i professori bravi;
i) i gatti con due code;
j) i calciatori che hanno fatto pochi gol.

9.2. Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra "$\in$" e "$\notin$". A è l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano. b ... A, i ... A, j ... A, e ... A, w ... A, z ... A

9.3. Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

[A] sito [B] micio [C] zitto [D] fiocco [E] lecito [F] dito.

9.4. Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali:

a) vocali della parola "SASSO";
b) consonanti della parola "SASSO";
c) vocali della parola "PIETRA";
d) vocali della parola "PASSO".

9.5. Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce; [V] [F]
b) i laghi d'Italia; [V] [F]
c) le città vicine a Roma; [V] [F]
d) i calciatori della Juventus; [V] [F]
e) i libri di Mauro; [V] [F]
f) i professori bassi della tua scuola; [V] [F]
g) i tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M; [V] [F]
h) i tuoi compagni di classe che sono gentili; [V] [F]
i) gli zaini neri della tua classe. [V] [F]

9.6. Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra "$\in$" e "$\notin$".

a) La Polo ...... all'insieme delle automobili Fiat;
b) il cane ...... all'insieme degli animali domestici;
c) la Puglia ...... all'insieme delle regioni italiane;
d) Firenze ...... all'insieme delle città francesi;
e) il numero 10 ...... all'insieme dei numeri naturali;
f) il numero 3 ...... all'insieme dei numeri pari.

9.7. Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a) Essere città italiana il cui nome inizia per W; [V] [F]

b) essere un bravo cantante; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) essere un monte delle Alpi; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) essere un ragazzo felice; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) essere un numero naturale grande; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) essere un ragazzo nato nel 1985; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) essere gli alunni della classe 1^aC; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) essere le lettere dell'alfabeto inglese; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) essere le rette del piano; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
j) essere i libri interessanti della biblioteca; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
k) essere gli italiani viventi nati nel 1850; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
l) essere gli italiani colti. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

9.8. Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra "$=$" e "$\neq$".

a) L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono . . . . . . ;
b) l'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono . . . . . . ;
c) l'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono . . . . . . ;
d) l'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono . . . . . . ;
e) l'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono . . . . . . ;
f) l'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono . . . . . . ;
g) l'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono . . . . . . ;
h) l'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono . . . . . . ;
i) l'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono . . . . . . ;
j) l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono . . . . . .

9.9. Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

9.10. Indica se gli insiemi G = {gatti con 6 zampe} e P = {polli con 2 zampe} sono o non sono vuoti.

9.11. Barra con una croce gli insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri positivi minori di 0;
b) l'insieme dei numeri negativi minori di 100;
c) l'insieme dei numeri pari minori di 100;
d) l'insieme delle capitali europee della regione Lombardia;
e) l'insieme dei triangoli con quattro angoli;
f) l'insieme delle capitali italiane del Lazio
g) l'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

9.12. Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?

$$\boxed{\text{A}}\ \emptyset \quad \boxed{\text{B}}\ 0 \quad \boxed{\text{C}}\ \{\emptyset\} \quad \boxed{\text{D}}\ \{0\} \quad \boxed{\text{E}}\ \{\,\}.$$

9.13. Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità.

a) L'insieme degli uccelli con 6 ali;
b) l'insieme delle lettere della parola "VOLPE";
c) l'insieme dei cani con 5 zampe;
d) l'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO";

e) l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano;
f) l'insieme degli abitanti della luna;
g) l'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino.

9.14. Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo.

a) l'insieme dei rettangoli;
b) l'insieme dei multipli di 3;
c) l'insieme delle lettere della parola "MATEMATICA";
d) l'insieme dei libri di matematica;
e) l'insieme dei ragazzi che hanno avuto un'insufficienza in matematica.

9.15. Dato l'insieme $A = \{0, 3, 5\}$ determina se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $0 \in A$	V	F	c) $\emptyset \in A$	V	F	e) $A \in A$	V	F
b) $5 \in A$	V	F	d) $\emptyset \in A$	V	F	f) $3,5 \in A$	V	F

9.2 Rappresentazione degli insiemi

9.16. Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme A dei numeri naturali minori di 6.

9.17. Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

a) delle vocali della parola "ESERCIZI";
b) delle lettere della parola "RIFLETTERE";
c) dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi;
d) dei numeri dispari compresi tra 10 e 20;
e) delle lettere dell'alfabeto italiano;
f) dei numeri naturali minori di 10;
g) dei multipli di 7;
h) delle preposizioni con più di due lettere.

9.18. Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$ ....
b) $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x < 5\}$ ....
c) $C = \{x \in \mathbb{N} / 5 \leqslant x \leqslant 10\}$ ....
d) $D = \{x \in \mathbb{N} / 2x \leqslant 10\}$ ....
e) $E = \{e \in \mathbb{N} / 5 \leqslant e < 10\}$ ....
f) $F = \{f \in \mathbb{N} / f$ è multiplo di 3 e $f < 15\}$ ....
g) $G = \{g \in \mathbb{N} / g$ è una cifra del numero $121231\}$ ....
h) $H = \{h \in \mathbb{N} / h = 3n + 1$, con $n \in \mathbb{N}\}$ ....

9.19. Elenca per tabulazione gli elementi di $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x$ è pari, $x \leqslant 10, x \neq 0\}$.

9.20. Elenca per tabulazione gli elementi di $L = \{l$ è una lettera della parola MATEMATICA$\}$

9.21. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme $D = \{S, T, U, D, I, A, R, E\}$

$$D = \{x / x \text{ è } \ldots\}$$

9.22. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme:
$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \Rightarrow X = \{x \in \mathbb{N} / x \dots$

9.23. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

9.24. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} / n$ è divisore di $12\}$

9.25. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} / n$ è multiplo di 3 minore di $20\}$

9.26. Dato l'insieme $A = \{2,4,8,16,32,64\}$ quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?

a) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è numero pari minore di $65\}$
b) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è una potenza di $2\}$
c) $A = \{n \in \mathbb{N} / n$ è una potenza di 2 minore di $65\}$
d) $A = \{n \in \mathbb{N} / n = 2^m$, con $m = 1,2,3,4,5,6\}$

9.27. Indica con una proprietà caratteristica l'insieme $B = \{5,10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$

9.28. Indica con una proprietà caratteristica l'insieme $B = \{4,9,16,25,36,49,64,81\}$

9.29. Quale delle seguenti frasi indica la proprietà caratteristica di $A = \{0,4,8,12,16,20,\dots\}$

$\boxed{A}$ I multipli di 2; $\boxed{B}$ i numeri pari; $\boxed{C}$ i multipli di 4; $\boxed{D}$ i divisori di 20

9.30. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

a) $A = \{5,6,7,8,9,10\}$
b) $B = \{0,1,2,3,4,5,\dots,98,99,100\}$
c) $C = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

9.31. Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme

$$D = \{0,3,6,9,12,15,18\}.$$

a) $D = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 18\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di 3 e $x < 20\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3x\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{N} / x = 3\}$

9.32. Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica.

a) $A =$ {gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto}
b) $B =$ {Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine}
c) $C =$ {sabato, domenica}
d) $D = \{10,20,30,40,50\}$
e) $E =$ {Puglia, Piemonte}

9.33. Individua una proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici.

a) $A = \{4,9,16,25,\dots\}$
b) $B = \left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\dots\right\}$
c) $C = \left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\dots\right\}$
d) $D = \left\{\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20},\dots\right\}$

e) $E = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \dots\right\}$

f) $F = \{+1, -2, +4, -8, +16, -32, +64, \dots\}$

9.34. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leqslant x < 2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} / -4 \leqslant x \leqslant 1 \text{ o } 5 < x \leqslant 7\}$

9.35. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

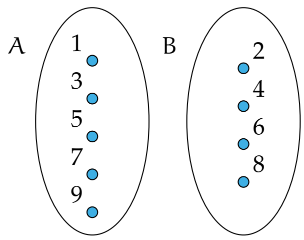
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$
c) $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
d) $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$
e) $E = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$
f) $F = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

9.36. Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:

a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
b) delle note musicali;
c) dei numeri primi minori di 20;
d) delle consonanti della parola "MATEMATICA";
e) delle province della Toscana.

9.37. In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn, stabilisci quali affermazioni sono vere.

a) $5 \notin B$ V F
b) $A = \emptyset$ V F
c) $3 + 2 \in A$ V F
d) $B \neq \emptyset$ V F
e) $6 \in B$ V F
f) $9 \notin A$ V F



9.3 Operazioni con gli insiemi

9.38. Siano $T = \{t / t \text{ un triangolo}\}$, $R = \{r / r \text{ un rettangolo}\}$, $E = \{e / e \text{ un triangolo equilatero}\}$ Quale affermazione è vera?

a) $R \subset T$ b) $E \subset T$ c) $E \subset R$ d) $T \subset E$

9.39. Se $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x < 3\}$, allora $\wp(A)$ ha:

A 2 elementi, B 3 elementi, C 4 elementi, D 8 elementi

9.40. Considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 5\}$ e $\wp(B)$ Quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

a) $\{1\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $\emptyset \subset \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $\{2,5\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\{\emptyset\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $0 \in \emptyset$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $\emptyset \subseteq B$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\{1,2,3\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $\{1,2,3\} \notin \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

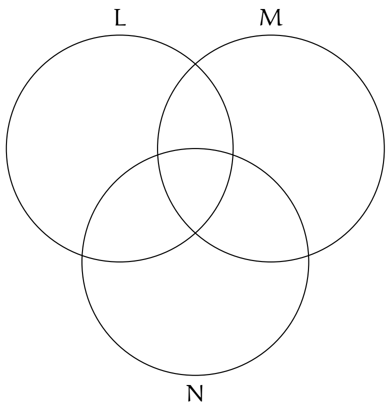
9.41. Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{8,10\}, \{8\}, \{10\}\}$

9.42. Dato $H = \{h / h$ è una lettera della parola "MAMMA"$\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$

9.43. Dato $A = \{x \in \mathbb{N} / n < 5$ e n divisore di $12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$

9.44. Dati $A = \{1,2,4,5\}$ e $B = \{1,3,4,5,8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

9.45. Dati gli insiemi $L = \{1,2,5,6,7,8\}$, $M = \{4,5,6,7,10\}$ e $N = \{2,3,5,7,9,10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



9.46. Considerando i 3 insiemi $S = \{a, b, c, e, f, s, t\}$, $T = \{a, c, g, h, l, s\}$ e $U = \{b, c, d, g, s, t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

9.47. Determina l'intersezione tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}$, $B = \{-2,-1,0,+1,+2,+3,+4\}$ $A \cap B = \dots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 7\}$ $B \cap A = \dots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -15 \leqslant x < 3\}$ $A \cap B = \dots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 20\}$ $B \cap A = \dots$
e) $A = \{l$ lettera di "SATURNO"$\}$, $B = \{l$ lettera di "NETTUNO"$\}$ $A \cap B = \dots$

9.48. Dati gli insiemi $E = \{x / x$ è una lettera della parola "cartellone"$\}$ e $F = \{x / x$ è una lettera della parola "martello"$\}$, determina $E - F$ e $F - E$

9.49. Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che

a) $\overline{A}_U \cup A = U$
b) $(A - B) \cup (B - A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$

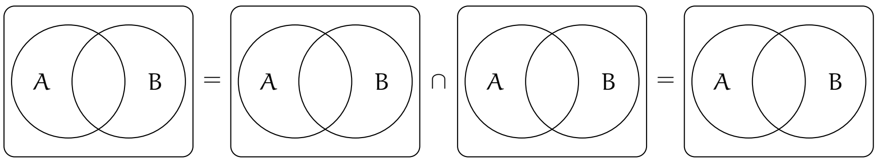
9.50. Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E \cap F}$ è uguale a:

A $E \cup F$ B $\overline{E \cup F}$ C $E \cap F$ D $\overline{E} \cup \overline{F}$

9.51. Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G \cup H}$ è uguale a:

A $\overline{G \cap H}$ B $\overline{G} \cap \overline{H}$ C $\overline{G \cap \overline{H}}$ D nessuno dei precedenti

9.52. Dimostra la seconda legge di De Morgan, annerendo gli spazi opportuni.



$(\overline{A \cup B})$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

9.53. Sia $E = \{x \in N/1 \leqslant x < 3\}$, $F = \{x/x$ è una vocale della parola "TELEFONO"$\}$ e $G = \{x \in N/x < -6\}$ Allora:

a) $E = \{1, \ldots\}$
b) $F = \{e, \ldots\}$
c) $G = \{\ldots\}$
d) $E \times F = \{(1; e), \ldots\}$
e) $F \times E = \{(e; 1), \ldots\}$
f) $F \times G = \{\ldots\}$
g) $G \times E = \{\ldots\}$

9.54. Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$, dove A ha 6 elementi, B ne ha 3:

A 9 B 18 C 6 D Non si può sapere.

9.55. Sapendo che $E \times F = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z)\}$, indica gli elementi di E e di F:

a) $E = \{\ldots\}$
b) $F = \{\ldots\}$

9.56. Se $A \times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti A e B?

A 1; 5 B 3; 2 C 6; 1 D 2; 3.

9.57. Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{-2, 1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A \times B$ ed elencane gli elementi.

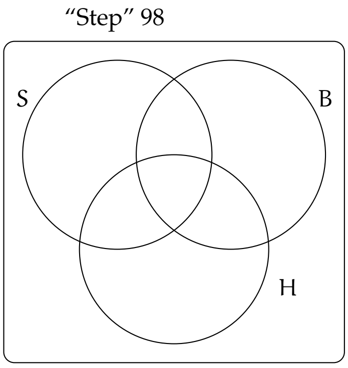
9.58. Dato $A = \{0, 1, 2\}$ calcola $A \times A$

9.4 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

9.59. La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

a) Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98;
b) 6 frequentano tutti e tre i corsi;
c) 37 frequentano il corso di Salsa;
d) 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop;
e) 7 solo i corsi Salsa e Break Dance;
f) 9 almeno Hip Hop e Break Dance;
g) 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?
Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.



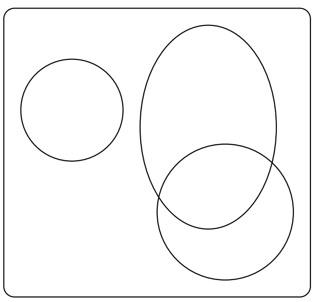
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, B l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

9.60. Il club "Argento vivo" ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

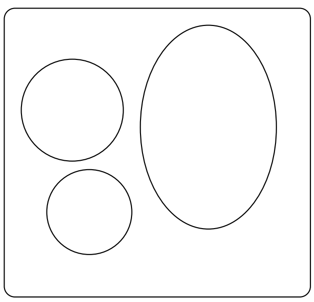
9.61 (*). In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:

a) che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
b) iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
c) che frequentano il corso di violino sono 46;
d) che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

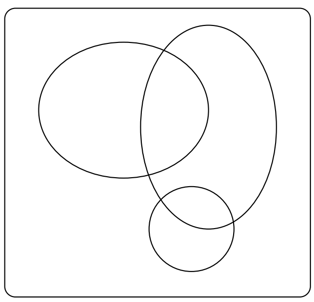
Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



A



B



C

[3; A]

9.62. In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 3 non frequentano alcun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanto allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

9.63. In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn, assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

9.64. In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

9.65 (Test di ammissione a architettura 2008)**.** Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?

$\boxed{A}$ 13 $\boxed{B}$ 9 $\boxed{C}$ 16 $\boxed{D}$ 22 $\boxed{E}$ 6

9.66 (Test di ammissione a medicina 2008)**.** In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:

$\boxed{A}$ $N > 14$ $\boxed{B}$ $N < 14$ $\boxed{C}$ $N > 22$ $\boxed{D}$ $N = 22$ $\boxed{E}$ $N \geqslant 14$

9.67. In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

9.68. In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

9.69. In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

9.5.2 Esercizi riepilogativi

9.70. Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x/x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{x/x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x/x = 2n^2, n \in \mathbb{N}\}$

d) $D = \{x/x = 2n + 2, n \in \mathbb{N}\}$

e) $E = \{x/x = n^2 - n, n \in \mathbb{N}\}$

f) $E = \{x/x = \dfrac{n+1}{n-1}, x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

9.71. Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica.

a) Insieme A dei divisori di 30;
b) insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10;
c) l'insieme C delle province della Puglia;
d) l'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

9.72. Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:

a) i numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000;
b) i colori dell'arcobaleno;
c) i numeri razionali maggiori o uguali a $2/7$;
d) i punti di una superficie S
e) le lettere di cui è composto il tuo nome.

9.73. Rappresenta con una modalità a tua scelta l'insieme dei numeri interi multipli di 5 maggiori di 10 e minori di 100 che non sono dispari.

9.74. Dati gli insiemi: $X = \{8, 9, 10\}$, $Y = \{0, 8, 9, 10\}$, $H = \{10, 9, 8\}$, $W = \{w \in \mathbb{N} / \ 8 \leqslant w \leqslant \ 10\}$, $Z = \{z \in \mathbb{N} / \ 8 < z \leqslant 10\}$ e $J = \{j \in \mathbb{N} / \ 7 < j < 11\}$, individua le uguaglianze corrette.

a) $X = Y$
b) $X = H$
c) $W = H$
d) $X = Z$
e) $\text{card}\, Z = 2$
f) $X = J$

9.75. Dati gli insiemi: $A = \{g, a, t, o\}$, $B = \{o, g, t, a\}$, $C = \{c/c$ è una lettera della parola "gatto"$\}$, $D = \{g, t\}$, $E = \{\text{gatto}\}$, $F = \{f/f$ è una consonante della parola "gatto"$\}$, segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

a) $A = B$
b) $A = D$
c) $A = C$
d) $E = A$
e) $C = E$
f) $D = F$
g) $C = D$:
h) $D = E$
i) $\text{card}\, C = 5$
j) $\text{card}\, E = 5$

9.76. Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X = \{x \in \mathbb{N} / \ x - 1$ è pari $\}$ ....
b) $Y = \{y \in \mathbb{N} / \ y = 3n, \text{ con } \ n \in \mathbb{N}\}$ ....
c) $Z = \{z \in \mathbb{N} / \ z = 3n$ e z non è divisibile per $\ 2, n \in \mathbb{N}\}$ ....
d) $W = \{w \in \mathbb{N} / \ w < 0\}$ ....

9.77. Quali delle seguenti scritture sono vere?

a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $15 \in \{n \in \mathbb{N}/n \geqslant \ 10\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $7 \in \{n \in \mathbb{N}/n + 5 < 10\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $l \notin \{x/x$ appartiene a "scuola"$\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

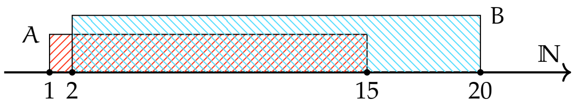
9.78. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{1 + 3, 5 - 2, 1 + 1, 9 - 8, 1 - 1\}$
b) $B = \{n \in \mathbb{N}/n < 5\}$
c) $C = \{6 - 4, 6 + 4, 6 - 6\}$

9.79. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / \ 3 \leqslant x \leqslant \ 12\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3n \ \text{ con } 1 \leqslant n \leqslant \ 4\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{N} / \ 2 < x < 13\}$
d) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n \text{ con } n = 1, 2, 3, 4\}$

9.80. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x \leqslant \ 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant \ 20\}$



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \not\subset A$

9.81. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è pari e } (1 \leqslant x \leqslant \ 20)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è multiplo di } 6 \text{ e } (2 \leqslant x \leqslant \ 18)\}$ Quale affermazione è vera?

A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \subset A$

9.82. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leqslant x \leqslant \ 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant \ 20\}$ Quali delle seguenti affermazioni è vera:

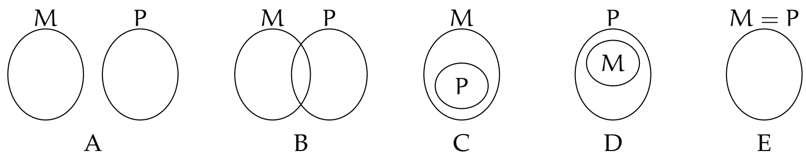
A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \not\subset A$

9.83. Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme C ={a, e, i, o, u}.

9.84. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di A

9.85. Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica. Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.

a) $M \subset P$ A B C D E
b) $P \supseteq M$ A B C D E
c) $M \subseteq (M \cup P)$ A B C D E
d) $M \not\subset P$ A B C D E
e) $P \subset (P \cup M)$ A B C D E
f) $M \neq P$ A B C D E



9.86. Determina l'unione tra i seguenti insiemi.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$ $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant \ 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 7\}$ $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -15 \leqslant x < 3\}$ $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 20\}$ $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
e) $A = \{l \text{ lettera di SATURNO}\}$, $B = \{l \text{ lettera di NETTUNO}\}$.$A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9.87. Sia M_3 l'insieme dei multipli 3 e M_4 l'insieme dei multipli di 4, in generale M_n l'insieme dei multipli del numero n

a) Calcola $M_3 \cap M_4$ Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
b) calcola $M_6 \cap M_4$ Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
c) calcola $M_{60} \cap M_{48}$
d) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli $M_m \cap M_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

9.88. Sia D_4 l'insieme dei divisori di 4 e D_6 l'insieme dei divisori di 6, in generale D_n l'insieme dei divisori del numero n

a) Calcola $D_4 \cap D_6$ Si tratta di $D \dots$ l'insieme dei divisori di $\dots$;
b) calcola $D_{60} \cap D_{48}$
c) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli $D_m \cap D_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

9.89. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \frac{3}{2}\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

9.90. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 0\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

9.91. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -5 < x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

9.92. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x \leqslant 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

9.93. Dato l'insieme $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32\}$ e il suo sottoinsieme B dei multipli di 3, determina gli insiemi $A - B$ e $B - A$

9.94. Dato l'insieme $X = \{x \in N/10 \leqslant x \leqslant 100\}$ e $Y = \{y \in N/10 < y < 100\}$ determina $X - Y$ e $Y - X$

9.95. Determina la differenza tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$ $A - B = \dots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N}/2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 7\}$ $B - A = \dots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-15 \leqslant x < 3\}$ $A - B = \dots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/10 < x < 20\}$ $B - A = \dots$
e) $A = \{l$ lettera di SATURNO$\}$, $B = \{l$ lettera di NETTUNO$\}$ $A - B = \dots$

9.96. Dati gli insiemi C e D tali che $C \subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D - C =$
b) $D \cap \overline{C} =$
c) $\overline{C \cap D} =$
d) $C \cup \overline{C} =$
e) $C - D =$
f) $C \cap \overline{C} =$

9.97. Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X \cap \overline{Y}}$:

a) $\overline{X} \cup \overline{Y}$
b) $\overline{X} \cap \overline{Y}$
c) $\overline{X} \cup Y$
d) $X \cup \overline{Y}$

9.98. Esegui le operazioni indicate $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 6, 9\}$
b) $A =$\{a,e,i,o,u\} $B =$\{a,b,c,d,e\}
c) $A = \emptyset$ $B = \{0\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è pari}\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è dispari}\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è multiplo di } 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è multiplo di } 4\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}/-2 \leqslant x \leqslant 8\}$
g) $A = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è lettera di casa}\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è lettera di caserma}\}$

9.99. Dato $A = \{x \in \mathbb{N}/x \text{ è multiplo di } 2\}$ determina $\complement_{\mathbb{N}} A$

9.100. Dato $A = \{I, II, III\}$ e $B = \{a, b\}$ determina $A \times B$

9.101. Dato $B = \{1, 2, 3\}$ calcola $(B \cup B) \cap B$

9.102. $A =$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}, $B =$\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, $C =$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} calcola $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

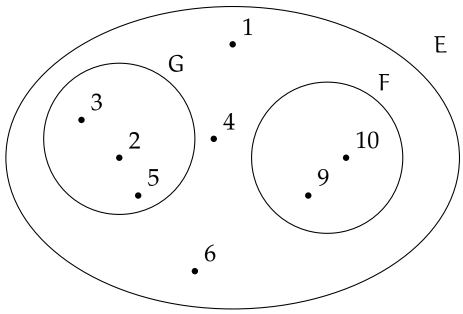
9.103. $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/-3 < x \leqslant 2\}$ calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $\complement_A B$, $A \times (A \cap B)$ e $\wp(B - A)$

9.104. Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio.

a) $A \cup B = A$
b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$
c) se x è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4;
d) se $\text{card}\, A = 2$ e $\text{card}\, B = 5$ allora $\text{card}\, A \cup B = 7$
e) se $\text{card}\, A = 2$ e $\text{card}\, B = 5$ allora $\text{card}\, A \cap B = 2$

9.105. In base alla figura rispondi alle domande:

a) L'insieme E ha 5 elementi $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $2 \in E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $3 \notin G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $F \subset G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $F \subset E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $\emptyset \subseteq G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\text{card}(E) = 8$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $10 \in E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $F \cap E = F$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) $F \cup G = E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
k) $(E - F) - G = \{1, 4\}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$



9.106. Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A
$B \subset A$	L'insieme B è ...... nell'insieme A, ovvero B è un ...... di A
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A
....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B
$D = A \cap B$	L'insieme D è ....degli insiemi A e B
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi ....cioè non hanno ....
$L = \complement_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra A e B

9.107. Rappresenta graficamente l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 25 \text{ e } x \text{ è pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 27 \text{ e } x \text{ è multiplo di } 4\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$

9.108. Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$ Le relazioni valgono anche se il simbolo $\subset$ viene sostituito con $\subseteq$?

9.109. Dato $A = \{do, re, mi\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$

9.110. Considerato gli insiemi $X = \{a, c, d, t, o\}$ e $Y = \{x/x \text{ è una vocale della parola "CAROTA"}\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $Y \subset X$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ c) $\{a, t\} \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ e) $\emptyset \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $\{a, t\} \not\subset \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ d) $0 \in X$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ f) $X \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

9.111. Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$ c) $\overline{L \cup D \cup S}$ e) $\overline{L} \cap S$
b) $L \cap D$ d) $L - S$ f) $\overline{L \cap D \cap S}$

9.112. Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

$\boxed{A}$ 49 $\boxed{B}$ 64 $\boxed{C}$ 128 $\boxed{D}$ 7 $\boxed{E}$ 14

9.113. Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{Mauro\}, \{Mario\}\{Mauro, Mario\}\}$

9.114. Se $A \cup B = B$ cosa puoi dire di A e B?

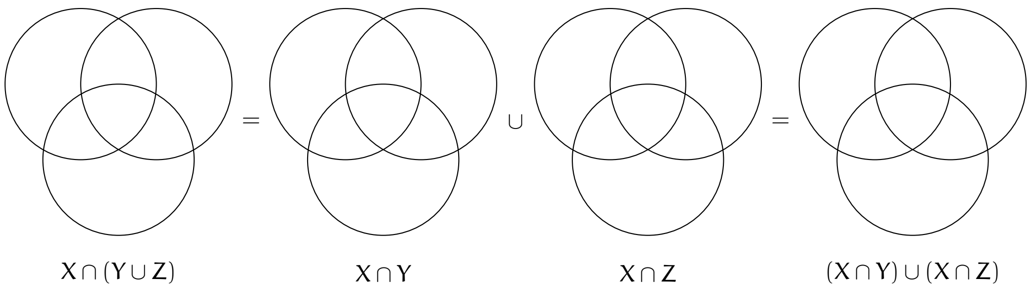
$\boxed{A}$ $B \subseteq A$ $\boxed{B}$ $A \notin B$ $\boxed{C}$ $A \subseteq B$ $\boxed{D}$ $A \subset B$ $\boxed{E}$ $A \cap B = \emptyset$

9.115. Dati gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, $B = \{20, 30, 50\}$, determina un insieme C tale che:

a) $B \cup C = A$ b) $A \cap C = B$ c) $C \cup C = B$ d) $C \cap C = A$

9.116. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 10 \text{ e } x \text{ pari}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 20 \text{ e } x \text{ divisibile per } 4\}$, $C = \{1, 2\}$ determina $(A \cap B)xC$

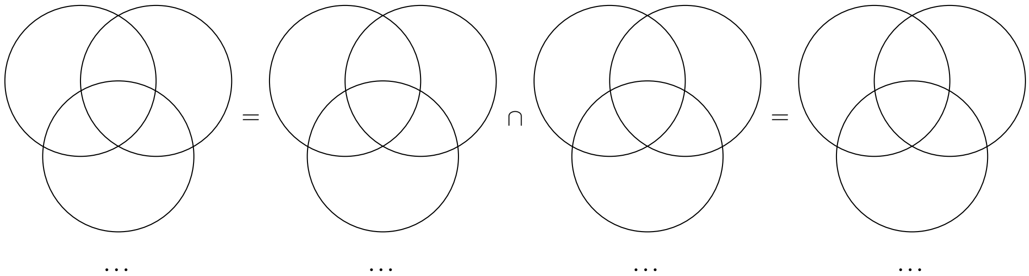
9.117. Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.



9.118. Se $E - F = E$ cosa puoi dire di E e F?

$\boxed{A}$ $E \cup F = E$ $\boxed{B}$ $E = F$ $\boxed{C}$ $E \subseteq F$ $\boxed{D}$ $F \subset E$ $\boxed{E}$ $E \cap F = \emptyset$

9.119. Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



9.120. Dati i seguenti insiemi $A = \{x \in N / x \leqslant 25\}$, $B = \{x \in N / 4 < x \leqslant 9\}$, $C = \{x \in N / x < 25\}$ e $D = \{x \in N / x > 7\}$. Scegli fra i seguenti i loro complementari.

a) $E = \{x \in N / x \geqslant 25\}$
b) $F = \{x \in N / x \leqslant 6\}$
c) $G = \{x \in N / x > 25\}$
d) $H = \{x \in N / x < 7\}$
e) $I = \{x \in N / x < 4 \text{ e } x \geqslant 8\}$
f) $L = \{x \in N / x < 4 \text{ o } x \geqslant 10\}$

9.121. Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

$\boxed{A}$ multipli di 4 $\boxed{B}$ multipli di 3 $\boxed{C}$ multipli di 6 $\boxed{D}$ numeri primi

9.122. In una classe di 32 allievi 14 hanno debito in matematica, 10 in italiano, 16 non hanno avuto nessun debito. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanti allievi:

a) hanno debito in entrambe le materie;
b) hanno almeno un debito;
c) non hanno debito in italiano;
d) non hanno debito in matematica.

9.123. Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei:

a) quadrati;
b) rombi;
c) trapezi;
d) triangoli equilateri;
e) poligoni;
f) parallelogrammi.

9.124. Dati gli insiemi $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $B = \{x / x \in \mathbb{N}, 5 < x \leqslant 16\}$, $C = \{x / x \in \mathbb{N}, x \geqslant 7\}$ determina:

a) $A \cup B \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $(B \cap C) \cup A$

9.125. Dato $A = \{x / x$ è un numero naturale, x è pari e $x > 12\}$ determina l'insieme complementare di A

9.126. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

9.127. $A = \{x/x \text{ è divisore di } 12\}$, $B = \{x/x \text{ è divisore di } 6\}$, $C = \{x/x \text{ è divisore di } 15\}$, determina:

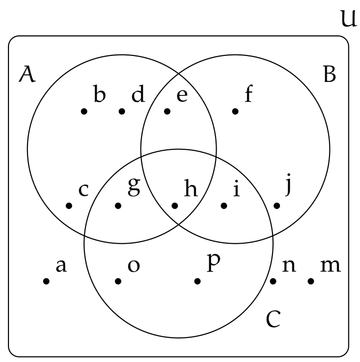
a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cup B \cup C$
d) $A \cap B$
e) $B \cap C$
f) $A \cap C$
g) $A \cap B \cap C$
h) $A \cap (B \cup C)$

9.128. Dato l'insieme $U = \{x/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant 5\}$:

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri A e B di U tali che $A \cap B = \emptyset$
c) determina $A \cup B$ e $A - B$, dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

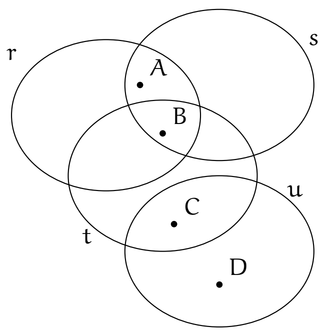
9.129. In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A \cup B$
b) $\overline{A \cup B \cup C}$
c) $A \cap B$
d) $B \cap C$
e) $A \cap B \cap C$
f) $A \cap (B \cup C)$
g) $A \cup (B \cap C)$
h) $B \cap \overline{C}$
i) $(A \cup B) - C$
j) $B \cap \overline{C}$
k) $C - (A \cap B)$
l) $\overline{(A \cup B)} - C$



9.130. Determina l'insieme $\wp(A)$, insieme delle parti di A, dove A è l'insieme delle lettere della parola "NONNA".

9.131. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi r, s, t sono rette, gli elementi A, B, C, D sono punti. Dai una rappresentazione geometria, rappresentando le rette e che corrispondono alla seguente situazione.



10 Identità, equazioni

10.1 Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) "cinque è uguale alla differenza tra sette e due";
b) "la somma di quattro e due è uguale a otto";
c) "il doppio di un numero naturale è uguale alla differenza tra nove e il numero stesso";
d) "la somma di due numeri interi è uguale a dieci".

Notiamo che sono tutte costruite con il predicato "essere uguale a". Riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) $5 = 7 - 2$ b) $4 + 2 = 8$ c) $2x = 9 - x$ d) $x + y = 10$.

Notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.

Le formule del primo tipo si dicono *chiuse* e di esse si può subito stabilire se sono vere o false; così in $\mathbb{N}$ la formula $5 = 7 - 2$ è vera, mentre $4 + 2 = 8$ è falsa.

Definizione 10.1. Le *formule chiuse* costruite con il predicato «essere uguale» si chiamano *uguaglianze*; stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio 10.1. La formula chiusa $1 - 6 = -5$ è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono *aperte*; le variabili che compaiono sono chiamate *incognite*. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.

Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio 10.2. Nella formula $2x = 9 - x$ sostituiamo alla variabile x il valore 0 otteniamo: $2 \cdot 0 = 9 - 0 \Rightarrow 0 = 9$, falsa.

Sostituiamo ora alla variabile x il valore 3 otteniamo $2 \cdot 3 = 9 - 3 \Rightarrow 6 = 6$, vera.

Esempio 10.3. Nella formula $x + y = 10$ sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come $x = 2$ e $y = 5$ otteniamo $2 + 5 = 10 \Rightarrow 7 = 10$, falsa. Se sostituiamo $x = 4$ e $y = 6$ ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è *vera*. Esistono molte altre coppie di numeri interi rendono vera l'uguaglianza.

Definizione 10.2. Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano *equazioni*; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente *primo membro* e *secondo membro*.

L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'*insieme soluzione* (I. S.) o più semplicemente la *soluzione* dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in *una sola incognita* che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a *grado* 1 e i cui *coefficienti* sono *numeri razionali*. Cercheremo la sua soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempio 10.4. Cercare le soluzioni nell'insieme indicato.

a) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{N}$. Risulta vera solo se a x sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è $\{1\}$.
b) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{Z}$. Risulta vera se a x sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1 infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è $\{-1, 1\}$.
c) $x^2 + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$. Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, si ottiene sempre un numero $\geqslant 1$ e non si può ottenere 0, pertanto è impossibile trovare una soluzione.
d) $2x + 3 = (3 + x) + x$ con $x \in \mathbb{Q}$. Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è $\mathbb{Q}$.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

a) *determinata*, quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio dell'insieme numerico considerato;
b) *impossibile*, quando l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$
c) *indeterminata* o *identità*, quando l'insieme soluzione coincide con l'insieme considerato.

Esempio 10.5. Analizziamo le equazioni:

a) $3 \cdot x = 0$ b) $0 \cdot x = 5$ c) $0 \cdot x = 0$.

Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.

a) Per trovare l'insieme soluzione della prima equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. L'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\{0\}$. L'equazione è determinata.

b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.

c) Per trovare l'insieme soluzione della terza equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.

10.1.1 Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando semplicemente le proprietà delle operazioni.

Esempio 10.6. Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x - 1 = 17$ con $x \in \mathbb{N}$.
Si opera sul valore incognito x per ottenere 17:

$$\textit{entra } x, \text{ si moltiplica per tre} \rightarrow\ 3 \cdot x \text{ si sottrae } 1 \rightarrow\ 3 \cdot x - 1 \text{ si ottiene } 17.$$

Qual è il valore in ingresso?
Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:

$$\textit{da } 17 \text{ aggiungi } 1 \rightarrow\ 18 \text{ dividi per tre } \rightarrow\ 18 : 3 \rightarrow x.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 6$ e I. S. (insieme soluzione) è $\{6\}$.

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot (-5 + x) = 12x + \frac{1}{2}x^2$ con $x \in \mathbb{Q}$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita alcuni valori scelti a caso e verificando se il valore assunto dal primo membro risulta uguale a quello assunto dal secondo membro. È evidente però che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

❑ **Osservazione** Per risolvere un'equazione, cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni, si procede applicando i principi d'equivalenza.

10.2 Prinicipi di equivalenza

Definizione 10.3. Due equazioni sono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Principio 10.1 (Primo principio di equivalenza)**.** *Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione data uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Principio 10.2 (Secondo principio di equivalenza)**.** *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

La forma più semplice di un'equazione di primo grado in un'incognita è del tipo:

$$x = \text{ numero.}$$

L'insieme soluzione di una equazione di questo tipo è semplicemente:

$$\text{I. S.} = \{\text{ numero}\}.$$

Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è $\text{I. S.} = \{-3\}$.

I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata.

10.2.1 Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d'equivalenza prima enunciati per condurre un'equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

Definizione 10.4. Risolvere un'equazione significa determinare il suo Insieme Soluzione.

Cominciamo con alcuni esempi.

Esempio 10.7. Applicazione del 1° principio di equivalenza.

a) $x - 5 = 3$: aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $x - 5 + 5 = 3 + 5 \Rightarrow x = 8$, $\text{I. S.} = \{8\}$.
b) $3x = 2 + 2x$: sottraiamo $2x$ a entrambi i membri: $3x - 2x = 2 + 2x - 2x \Rightarrow x = 2$, $\text{I. S.} = \{2\}$.

Esempio 10.8. Applicazione del 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 12$ dividiamo entrambi i membri per 3, si ha

$$\frac{3}{3}x = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \rightarrow \text{I. S.} = \{4\}.$$

b) $\frac{1}{2}x = 2$ moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 4 \rightarrow \text{I. S.} = \{4\}.$$

Esempio 10.9. $-2x + 1 = 3x - 5$.

a) Sottraiamo 1 a entrambi i membri $-2x + 1 - 1 = 3x - 5 - 1$ quindi $-2x = 3x - 6$
b) sottraiamo $3x$ a entrambi i membri $-2x - 3x = 3x - 3x - 6$ quindi $-5x = -6$
c) dividiamo entrambi i membri per -5: $\frac{-5}{-5}x = \frac{-6}{-5} \Rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow \text{I. S.} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

Esempio 10.10. Prendiamo l'equazione $(x + 1) + 3 \cdot (2 + x) = 12x - 1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica "$x =$ numero" applicando i principi di equivalenza.

1. svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x + 1 + 6 + 3x = 12x - 1$.

2. sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x + 7 = 12x - 1$.
3. sottraiamo ad ambo i membri il monomio $12x$, applicando il primo principio: $4x - 12x + 7 = 12x - 1 - 12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x + 7 = -1$.
4. sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x + 7 - 7 = -1 - 7 \Rightarrow -8x = -8$.
5. dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x = \frac{-8}{-8} \Rightarrow x = 1$.

L'equazione assegnata $(x + 1) + 3 \cdot (2 + x) = 12x - 1$ risulta equivalente all'ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è $\text{I. S.} = \{1\}$.

❑ **Osservazione** La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune *regole pratiche* che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che discendono direttamente dal primo principio d'equivalenza.

a) Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.

$2x - 3 = 2$, per lasciare da sola la x al primo menbro devo aggiungere $+3$ al primo e al secondo membro, ottengo $2x - 3 + 3 = 2 + 3$ da cui $2x = 2 + 3$.

L'effetto che si ha è che si è spostato il -3 al secondo membro cambiandolo di segno.

b) Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.

Infatti: $2x - 3 + x = 2 + x$. La x che sta al secondo membro va portata al primo, cambiandola di segno $2x - 3 + x - x = 2$ da cui $2x - 3 = 2$.

L'effetto che si ha è che si possono eliminare le due x che stanno una al primo membro e una al secondo membro.

c) Se il coefficiente dell'incognita è -1, l'equazione si presenta nella forma $-x = n$, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma $x = -n$. Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.

Infatti:

$x - 3 = 2x + 1$. Dobbiamo portare $2x$ al primo membro e -3 al secondo membro, otteniamo $x - 2x = 3 + 1$ da cui $-x = 4$.

Poiché il coefficiente della x è negativo moltiplichiamo per -1 primo e secondo membro $-1 \cdot (-x) = -1 \cdot (4)$ da cui $x = -4$.

Problema 10.11. Risolvi la seguente equazione applicando queste regole pratiche.

$$5x + 2 \cdot (3 - x) + 1 = -(4x - 1) + 2 \cdot (6 - x).$$

Soluzione I passi da effettuare sono

1. svolgiamo i calcoli: $5x + 6 - 2x + 1 = -4x + 1 + 12 - 2x$
2. eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:
$$5x + 6 \cancel{-2x} \cancel{+1} = -4x \cancel{+1} + 12 \cancel{-2x} \Rightarrow 5x + 6 = -4x + 12;$$
3. spostiamo il monomio $-4x$ del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero $+6$ da sinistra a destra, ottenendo: $5x + 4x = -6 + 12$
4. sommando i termini simili nei due membri, otteniamo $9x = +6$ da cui dividendo per nove ambo i membri si ottiene
$$x = \frac{2}{3} \rightarrow \text{I. S.} = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

♦

10.3 Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede.

Esempio 10.12. $\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x = \frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1.$

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

1. Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso mcm(2,3) = 6
2. Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione:
$$6\left(\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x\right) = 6\left(\frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1\right).$$
3. Eseguiamo i calcoli: $4x + 24 - 3 + 12x = 2x + 4 - 15x + 6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti. Il risultato è $x = -\frac{11}{25}$.

10.3.1 Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio 10.13. $(2x + 1) \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 5x.$

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

1. svolgiamo i calcoli e otteniamo: $2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 + 4x + 2 - 5x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - x + 2$.

2. applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x + x = +2 + 2$.

   Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I. S..

3. . . . .

10.3.2 Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio 10.14. $\frac{4}{5} - \frac{x}{2} = \frac{2-5x}{10}$.

1. Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(5, 2, 10) = 10$.
2. Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5} - \frac{x}{2}\right) = 10\left(\frac{2-5x}{10}\right)$.
3. Eseguiamo i calcoli: $8 - 5x = 2 - 5x$.
4. Applichiamo la regola pratica: $-5x + 5x = 2 - 8$ i monomi in x si annullano!
5. Sommando i monomi simili si ottiene: $0 \cdot x = -6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi I. S. $= \emptyset$, l'equazione risulta impossibile.

Esempio 10.15. $\frac{x}{6} - \frac{2x}{3} = -\frac{x}{2}$.

1. Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(6, 3, 2) = 6$.
2. Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6} - \frac{2x}{3}\right) = 6\left(-\frac{x}{2}\right)$.
3. Eseguiamo i calcoli: $x - 4x = -3x$.
4. Applicando il primo principio si ottiene $0 \cdot x = 0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi I. S. $= \mathbb{Q}$, l'equazione è indeterminata (identità).

10.3.3 Riassunto

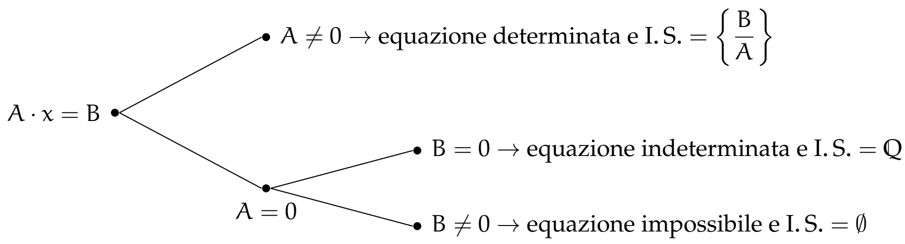
$A \cdot x = B$ con A e B numeri razionali è la forma canonica dell'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici.

Possono presentarsi i casi:

➡ se $A \neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi I. S. $= \left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.

- se $A = 0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:
  - $B = 0$ allora $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.
  - $B \neq 0$ allora $\text{I. S.} = \emptyset$. L'equazione è impossibile.

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:



10.4 Problemi di I grado in un'incognita

10.4.1 Un po' di storia e qualche aneddoto

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.

Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.

Il *papiro di Rhind* [1], testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.

Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19. Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è .

Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di 'filius Bonacci' o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi "algoritmi" presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco. Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:

«Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?».

[1] Dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858.

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota come successione di Fibonacci.

Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5050". Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100×101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato: Buttner rimase sgomento.

Risoluzione dei problemi

> La risoluzione dei problemi
> ... serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose.
>
> R. DESCARTES

I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze del problema.

Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

a) una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
b) la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);
c) la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione dell'equazione risolvente;
d) la risoluzione dell'equazione trovata;
e) il confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 10.16. Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Soluzione La situazione può essere materialmente descritta con una figura. Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.

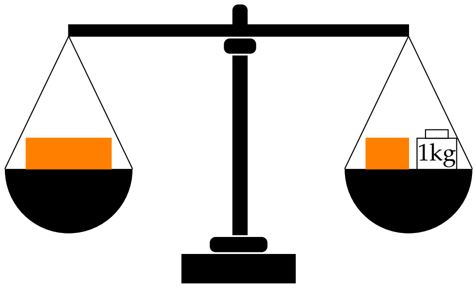


Figura 1

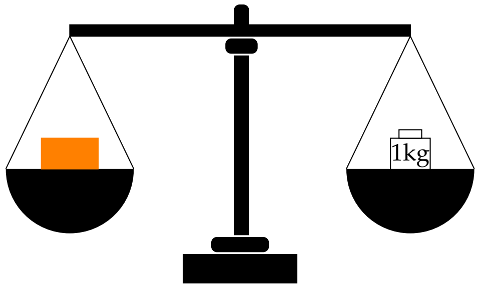


Figura 2

Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:
Dati: peso di un mattone = peso di mezzo mattone +1kg.
Obiettivo: peso del mattone.
Procedura risolutiva:

Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p. Il valore di p dovrà essere un numero positivo. L'equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell'unica relazione contenuta nel testo del problema: $p = \frac{1}{2}p + 1$.

Risolviamo l'equazione: $p - \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}p = 1 \Rightarrow p = 2$Kg. La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 10.17. Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

Soluzione L'ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con n l'incognita cerchiamo quindi $n \in \mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull'incognita e che traduciamo nei dati:

Dati: $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.
Obiettivo: $n \in \mathbb{N}$.
Procedura risolutiva:
L'equazione risolvente è già indicata nei dati $n + \dfrac{3}{4}n = 2n + 10$.
Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:

$$4n + 3n - 8n = 40 \Rightarrow -n = 40 \Rightarrow n = -40.$$

La soluzione non è accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

♦

Problema 10.18. Il 1° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell'età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent'anni più di Aldo. Quale sarà l'età di Chiara il 1° gennaio 2010?

Soluzione Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l'età di Chiara e l'età di Aldo. Indichiamo perciò con a l'età di Chiara al 1990 e con p quella di Aldo.

Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell'insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:

Dati: nel 1990: $a = 2p$, nel 2000: $a + 10 = (p + 10) + 20$.

Obiettivo: L'età di Chiara nel 2010.

Procedura risolutiva: Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è $a + 20$. Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2p + 10 = p + 10 + 20 \Rightarrow 2p - p = 20 \Rightarrow p = 20$. L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi $a = 40$. Infine, l'età di Chiara nel 2010 è $40 + 20 = 60$. La soluzione è accettabile; il problema è determinato.

♦

Problema 10.19. Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera $\frac{1}{3}$ della base di 8m e il perimetro è $\frac{20}{7}$ della base stessa.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:

Dati: $AD = \frac{1}{3}AB + 8$, $2p = \frac{20}{7}AB$.

Obiettivo: L'$\text{Area}(ABCD)$.

Procedura risolutiva: $\text{Area}(ABCD) =$ misura base $\cdot$ misura altezza $= \overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB} = x$ con x numero reale positivo.

Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati: $\overline{AD} = \frac{1}{3}x + 8$ e $2p = \frac{20}{7}x$.

Sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione: $2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}x + 8\right) = \frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.

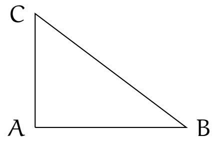
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4x = 21 \cdot 16 \Rightarrow x = 84 \Rightarrow \overline{AB} = 84$ e quindi $\overline{AD} = 36$. Ottenute le misure della base e dell'altezza calcoliamo $\text{Area}(ABCD) = 36 \cdot 84 = 3024\text{m}^2$.

♦

Problema 10.20. In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm e un cateto è 3/5 dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.

Soluzione Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:

Dati: $C\hat{A}B = 90°$, $2p = 120$, $AC = \dfrac{3}{5}CB$.



Obiettivo: L'Area(ABC).

Procedura risolutiva: Dato che Area$(ABC) = \dfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, dobbiamo calcolare la lunghezza dei cateti.

Il dato $AC = \dfrac{3}{5}CB$ può essere scritto come: $AC = 3x \wedge CB = 5x$. L'altro cateto si può calcolare con il teorema di Pitagora: $AB = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = \sqrt{16x2} = 4x$

Il perimetro è: $2p = 4x + 5x + 3x = 12x = 120$ e da questa equazione ricaviamo $x = 10$ da cui: $AB = 40, BC = 50, CA = 30$

Da cui si ricava facilmente l'area: Area $= AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 40 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} = 600$

♦

10.5 Esercizi

10.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

10.1 Identità ed equazioni

10.1. Risolvi in $\mathbb{Z}$ la seguente equazione: $-x+3=-1$

Suggerimento. Lo schema operativo è: entra x, cambia il segno in $-x$, aggiunge 3, si ottiene -1 Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 togli 3 ottieni …cambia segno ottieni come soluzione $x = \dots$

10.2 Prinicipi di equivalenza

10.2. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $x+2=7$
b) $2+x=3$
c) $16+x=26$
d) $x-1=1$
e) $3+x=-5$
f) $12+x=-22$
g) $3x=2x-1$
h) $8x=7x+4$
i) $2x=x-1$
j) $5x=4x+2$
k) $3x=2x-3$
l) $3x=2x-2$
m) $7+x=0$
n) $7=-x$
o) $-7=x$
p) $1+x=0$
q) $1-x=0$
r) $0=2-x$
s) $3x-1=2x-3$
t) $7x-2x-2=4x-1$
u) $-5x+2=-6x+6$
v) $-2+5x=8+4x$
w) $7x+1=6x+2$
x) $-1-5x=3-6x$

10.3. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $2x=8$
b) $2x=3$
c) $6x=24$
d) $0x=1$
e) $\frac{1}{3}x=-1$
f) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$
g) $\frac{3}{2}x=12$
h) $2x=-2$
i) $3x=\frac{1}{6}$
j) $\frac{1}{2}x=4$
k) $\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$
l) $2x=\frac{1}{2}$
m) $3x=6$
n) $\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}$
o) $\frac{2}{5}x=\frac{10}{25}$
p) $-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$
q) $0,1x=1$
r) $0,1x=10$
s) $0,1x=0,5$
t) $-0,2x=5$

10.4. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $2x+1=7$
b) $3-2x=3$
c) $6x-12=24$
d) $3x+3=4$
e) $5-x=1$
f) $7x-2=5$
g) $2x+8=8-x$
h) $2x-3=3-2x$
i) $6x+24=3x+12$
j) $2+8x=6-2x$
k) $6x-6=5-x$
l) $-3x+12=3x+18$
m) $3-2x=8+2x$
n) $\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{3}x+1$
o) $\frac{6}{5}x=\frac{24}{5}-x$
p) $3x-2x+1=2+3x-1$
q) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{10}$
r) $\frac{5}{6}x+\frac{3}{2}=\frac{25}{3}-\frac{10}{2}x$

10.5. Risolvi l'equazione $10x + 4 = -2 \cdot (x + 5) - x$ seguendo la traccia:

1. svolgi i calcoli al primo e al secondo membro: . . . . ;
2. somma i monomi simili in ciascun membro dell'equazione: . . . . ;
3. applica il primo principio d'equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l'incognita e nell'altro membro solo numeri: . . . . ;
4. somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro: . . . . ;
5. applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . . in forma canonica: . . . . ;
6. scrivi l'Insieme Soluzione: I. S. = ...

10.6. Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x - (3x + 5) = (4x + 8) - 4 \cdot (x + 1)$:

1. svolgi i calcoli: . . . . ;
2. somma i monomi simili: . . . . ;
3. porta al primo membro i monomi con la x e al secondo quelli senza: . . . .
4. somma i monomi simili al primo membro e al secondo membro: . . . .
5. dividi ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . .
6. l'insieme soluzione è: . . . .

10.7 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $3(x - 1) + 2(x - 2) + 1 = 2x$ [2]
b) $x - (2x + 2) = 3x - (x + 2) - 1$ $[\frac{1}{3}]$
c) $-2(x + 1) - 3(x - 2) = 6x + 2$ $[\frac{2}{11}]$
d) $x + 2 - 3(x + 2) = x - 2$ $[-\frac{2}{3}]$
e) $2(1 - x) - (x + 2) = 4x - 3(2 - x)$ $[\frac{3}{5}]$
f) $(x + 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ [0]
g) $5(3x - 1) - 7(2x - 4) = 28$ [5]
h) $(x + 1)(x - 1) + 2x = 5 + x(2 + x)$ [Impossibile]
i) $2x + (x + 2)(x - 2) + 5 = (x + 1)^2$ [Indeterminata]
j) $4(x - 2) + 3(x + 2) = 2(x - 1) - (x + 1)$ $[-\frac{1}{6}]$
k) $(x + 2)(x + 3) - (x + 3)^2 = (x + 1)(x - 1) - x(x + 1)$ [Impossibile]
l) $x^3 + 6x^2 + (x + 2)^3 + 11x + (x + 2)^2 = (x + 3)\left(2x^2 + 7x\right)$ [−2]
m) $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = 9(x + 1)^2 - 9x$ [Indeterminata]
n) $(x + 1)^2 + 2x + 2(x - 1) = (x + 2)^2$ $[\frac{5}{2}]$
o) $2(x - 2)(x + 3) - 3(x + 1)(x - 4) = -9(x - 2)^2 + \left(8x^2 - 25x + 36\right)$ [Indeterminata]
p) $(2x - 3)^2 - 4x(2 - 5x) - 4 = -8x(x + 4)$ []
q) $(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) - 3x^2 = (x - 1)^3 + 1$ []
r) $(2x - 1)\left(4x^2 + 2x + 1\right) = (2x - 1)^3 - 12x^2$ []

10.3 Equazioni a coefficienti frazionari

10.8. Risolvi l'equazione $\dfrac{3 \cdot (x - 11)}{4} = \dfrac{3 \cdot (x + 1)}{5} - \dfrac{1}{10}$

1. calcola $\text{mcm}(4,5,10) = \dots\dots$
2. moltiplica ambo i membri per $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ e ottieni: $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$;
3. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

10.9. Risolvi le seguenti equazioni.

a) $2x+2=2x+3$
b) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{x+1}{2}$
c) $\dfrac{2x+1}{2}=x+1$
d) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=3x-\dfrac{1}{2}$
e) $\pi x=0$
f) $2\pi x=\pi$
g) $0,12x=0,1$
h) $-\dfrac{1}{2}x-0,3=-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{20}$
i) $892x-892=892x-892$
j) $892x-892=893x-892$
k) $348x-347=340x-347$
l) $2x+3=2x+4$
m) $2x+3=2x+3$
n) $2(x+3)=2x+5$
o) $2(x+4)=2x+8$
p) $3x+6=6x+6$
q) $-2x+3=-2x+4$
r) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}$
s) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$
t) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=3\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$
u) $\dfrac{x}{200}+\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{200}$

10.10 (*). Risolvi le seguenti equazioni.

a) $x-5(1-x)=5+5x$ [10]
b) $2(x-5)-(1-x)=3x$ [Impossibile]
c) $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$ $[\frac{7}{5}]$
d) $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$ $[-12]$
e) $\dfrac{x+1000}{3}+\dfrac{x+1000}{4}=1$ $[-\frac{6988}{7}]$
f) $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{2x+1}{3}$ $[-\frac{17}{7}]$
g) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{1}{10}$ $[-\frac{2}{7}]$
h) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6}$ [2]
i) $8x-\dfrac{x}{6}=2x+11$ $[\frac{66}{35}]$
j) $3(x-1)-\dfrac{1}{7}=4(x-2)+1$ $[\frac{27}{7}]$
k) $537x+537\dfrac{x}{4}-\dfrac{537x}{7}=0$ [0]
l) $\dfrac{2x+3}{5}=x-1$ $[\frac{8}{3}]$
m) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6}-1=\dfrac{x}{3}$ [Impossibile]
n) $\dfrac{4-x}{5}+\dfrac{3-4x}{2}=3$ $[-\frac{7}{22}]$
o) $\dfrac{x+3}{2}=3x-2$ $[\frac{7}{5}]$
p) $\dfrac{x+0,25}{5}=1,75-0,\bar{3}x$ $[\frac{51}{16}]$
q) $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$ $[\frac{26}{5}]$

10.11 (*). Risolvi le seguenti.

a) $\dfrac{3}{2}(x+1)-\dfrac{1}{3}(1-x)=x+2$ [1]
b) $\dfrac{1}{2}(x+5)-x=\dfrac{1}{2}(3-x)$ [Impossibile]
c) $(x+3)^2=(x-2)(x+2)+\dfrac{1}{3}x$ $[-\frac{39}{17}]$
d) $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{2+3x}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{4}$ $[-2]$
e) $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x}{4}=5\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}\right)-x$ $[\frac{30}{7}]$
f) $(2x-3)(5+x)+\dfrac{1}{4}=2(x-1)^2-\dfrac{1}{2}$ $[\frac{65}{44}]$

g) $(x-2)(x+5)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}$ $[\frac{37}{12}]$

h) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}$ $[-\frac{1}{4}]$

i) $\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2-1}{2}=1$ $[0]$

j) $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{3}(x^2-1)$ $[-1]$

10.12 (*). Risolvi le seguenti equazioni.

a) $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$ $[-1]$

b) $\frac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)$ [Indeterminata]

c) $(x+1)^2=x^2-1$ $[-1]$

d) $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$ [Impossibile]

e) $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right)+\frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x(x+3)$ $[0]$

f) $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\frac{1}{3}x-1\right)=-\frac{3}{2}x+1$ $[\frac{23}{28}]$

g) $3+2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{x+3}{2}$ $[4]$

h) $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x+\frac{2-x}{3}\right)$ $[-\frac{5}{2}]$

i) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\frac{1}{2}$ $[-\frac{9}{8}]$

j) $\frac{2\,(x-1)}{3}+\frac{x+1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{x-1}{5}+\frac{7}{15}x$ $[\frac{13}{3}]$

k) $\frac{1}{2}(x-2)-\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2-x}{6}+\frac{1+x}{3}$ [Impossibile]

l) $-\left(\frac{1}{2}x+3\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{4}(4x+1)=\frac{1}{2}(x-1)$ $[2]$

m) $\frac{(x+1)(x-1)}{9}-\frac{3x-3}{6}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{2-2x}{6}$ $[1]$

n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\frac{-5}{2}x(x+1)$ $[\frac{3}{26}]$

o) $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(-1+x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2=\frac{2}{3}x$ $[\frac{19}{7}]$

p) $(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5$ $[-1]$

q) $(x-3)(x-4)-\frac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\frac{1}{3}x-5\left(\frac{2x-9}{6}\right)$ $[\frac{23}{20}]$

r) $\frac{2w-1}{3}+\frac{w-5}{4}=\frac{w+1}{3}-4$ $[-\frac{25}{7}]$

10.13 (*). Risolvi le seguenti equazioni.

a) $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25$ [Indeterminata]

b) $\dfrac{(x-3)(x+3)+(x-2)(2-x)-3(x-2)}{\dfrac{1}{3}-3}=\dfrac{\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}x}{2}$ $\left[\frac{63}{23}\right]$

c) $2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2-\dfrac{(x+2)(x-2)}{2}+2x=x+\dfrac{1}{2}$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

d) $(0,\bar{1}x-10)^2+0,1(x-0,2)+\left(\dfrac{1}{3}x+0,3\right)^2=\dfrac{10}{81}x^2+0,07$ $\left[\frac{9000}{173}\right]$

e) $5x+\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3x-1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}x+(2x-1)(2x+1)=(2x+1)^2+\dfrac{1}{36}$ $[-6]$

f) $\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x=\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^2$ $\left[-\frac{20}{3}\right]$

g) $\dfrac{3}{20}+\dfrac{6x+8}{10}-\dfrac{2x-1}{12}+\dfrac{2x-3}{6}=\dfrac{x-2}{4}$ $[-2]$

h) $\dfrac{x^3-1}{18}+\dfrac{(x+2)^3}{9}=\dfrac{(x+1)^3}{4}-\dfrac{x^3+x^2-4}{12}$ $\left[-\frac{3}{7}\right]$

i) $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5x-1}{3}+\dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{1}{3}(x+2)(x-2)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ $\left[\frac{2}{7}\right]$

j) $\dfrac{5}{12}x-12+\dfrac{x-6}{2}-\dfrac{x-24}{3}=\dfrac{x+4}{4}-\left(\dfrac{5}{6}x-6\right)$ $[12]$

k) $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+3}{3}-1$ [...]

l) $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}x$ [...]

m) $\dfrac{3}{2}=2x-\left[\dfrac{x-1}{3}-\left(\dfrac{2x+1}{2}-5x\right)-\dfrac{2-x}{3}\right]$ [...]

n) $\dfrac{x+5}{3}+3+\dfrac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$

o) $\dfrac{1}{5}x-1+\dfrac{2}{3}x-2=\dfrac{10}{15}+\dfrac{3}{5}x$ [...]

p) $\dfrac{1}{2}(x-2)^2-\dfrac{8x^2-25x+36}{18}+\dfrac{1}{9}(x-2)(x+3)=\dfrac{1}{6}(x+1)(x-4)$ [...]

q) $\left(1-\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\right)\left(1+\dfrac{\dfrac{1}{2}x+1}{\dfrac{1}{2}-1}\right)+\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}x+1}{\dfrac{1}{2}+1}-1\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}+x}{\dfrac{1}{2}-1}-\dfrac{x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)}{\dfrac{1}{2}+1}=x^2$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

10.14. Per una sola delle seguenti equazioni, definite in $\mathbb{Z}$, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

$\boxed{\text{A}}$ $x=x+1$ $\boxed{\text{B}}$ $x+1=0$ $\boxed{\text{C}}$ $x-1=+1$ $\boxed{\text{D}}$ $x+1=1$

10.15. Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado nella sola incognita x Quale?

A $x+y=5$ B $x^2+1=45$ C $x-\frac{7}{89}=+1$ D $x+x^2=1$

10.16. Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

A $\frac{1}{2}x-1=3x$ B $6x=x-2$ C $x-2x=3x$ D $3x=\frac{1}{2}(x-2)$

10.17. Da $8x=2$ si ottiene:

A $x=-6$ B $x=4$ C $x=\frac{1}{4}$ D $x=-\frac{1}{4}$

10.18. Da $-9x=0$ si ottiene:

A $x=9$ B $x=-\frac{1}{9}$ C $x=0$ D $x=\frac{1}{9}$

10.19. L'insieme soluzione dell'equazione $2\cdot(x+1)=5\cdot(x-1)-11$ è:

A $\text{I.S.}=\left\{-6\right\}$ B $\text{I.S.}=\left\{6\right\}$ C $\text{I.S.}=\left\{\frac{11}{3}\right\}$ D $\text{I.S.}=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

10.20. Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

a) $\frac{x+5}{2}+\frac{1}{5}=0, \quad Q=\left\{1,-5,7,-\frac{27}{5}\right\}$

b) $x-\frac{3}{4}x=4, \quad Q=\left\{1,-1,0,16\right\}$

c) $x(x+1)+4=5-2x+x^2, \quad Q=\left\{-9,3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

Gli esercizi indicati con (†) sono tratti da *Matematica 1*, Dipartimento di Matematica, ITIS V. Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12][S-A11], pg. 90; licenza CC,BY-NC-BD, per gentile concessione dei professori che hanno redatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

10.4 Problemi di I grado in un'incognita

10.21 (*). Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e il secondo supera di 16 il doppio del primo. [18; 52]

10.22 (*). Determina due numeri, sapendo che il secondo supera di 17 il triplo del primo e che la loro somma è 101. [21; 80]

10.23 (*). Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore supera di 10 i $\frac{3}{7}$ del maggiore. [19; 21]

10.24 (*). Sommando 15 al doppio di un numero si ottengono i $\frac{7}{2}$ del numero stesso. Qual è il numero? [10]

10.25. Determinare due numeri consecutivi sapendo che i $\frac{4}{9}$ del maggiore superano di 8 i $\frac{2}{13}$ del minore. [...]

10.26 (*). Se ad un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21, otteniamo 100 Qual è il numero? [11]

10.27 (*). Trova il prodotto tra due numeri, sapendo che: se al primo numero sottraiamo 50 otteniamo 50 meno il primo numero; se al doppio del secondo aggiungiamo il suo consecutivo, otteniamo 151. [2500]

10.28 (*). Se a $\frac{1}{25}$ sottraiamo un numero, otteniamo la quinta parte del numero stesso. Qual è questo numero? $\left[\frac{1}{30}\right]$

10.29 (*). Carlo ha 152 caramelle e vuole dividerle con le sue due sorelline. Quante caramelle resteranno a Carlo se le ha distribuite in modo che ogni sorellina ne abbia la metà delle sue? [76]

10.30 (*). Se a $\frac{5}{2}$ sottraiamo un numero, otteniamo il numero stesso aumentato di $\frac{2}{3}$ Di quale numero si tratta? $\left[\frac{11}{12}\right]$

10.31 (*). Se ad un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200 Qual è il numero? [159]

10.32 (*). Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15, otteniamo 45 Qual è il numero? [45]

10.33 (*). Se ad un numero sommiamo il doppio del suo consecutivo otteniamo 77 Qual è il numero? [25]

10.34 (*). Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà, otteniamo il numero aumentato di 2 Qual è il numero? [−12]

10.35 (*). Il doppio di un numero equivale alla metà del suo consecutivo più 1 Qual è il numero? [1]

10.36 (*). Un numero è uguale al suo consecutivo meno 1 Trova il numero. [Indeterminato]

10.37 (*). La somma tra un numero e il suo consecutivo è uguale al numero aumentato di 2 Trova il numero. [1]

10.38 (*). La somma tra un numero ed il suo consecutivo aumentato di 1 è uguale a 18 Qual è il numero? [8]

10.39. La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17 Qual è il numero? [...]

10.40 (*). La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27 Trova il numero. [72]

10.5.2 Problemi dalla realtà

10.41 (*). Luca e Andrea posseggono rispettivamente € 200 e € 180 Luca spende € 10 al giorno e Andrea € 8 al giorno. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma? [10]

10.42 (*). Ad un certo punto del campionato la Fiorentina ha il doppio dei punti della Juventus e l'Inter ha due terzi dei punti della Fiorentina. Sapendo che in totale i punti delle tre squadre sono 78, determinare i punti delle singole squadre. [36; 24; 18]

10.43 (*). Per organizzare una gita collettiva, vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare € 12 Sui pulmini restano, in tutto, quattro posti liberi. Se fossero stati occupati anche questi posti, ogni partecipante avrebbe risparmiato € 1,50 Quanti posti vi sono su ogni pulmino? ("La settimana enigmistica") [16]

10.44. Un rubinetto, se aperto, riempie una vasca in 5 ore; un altro rubinetto riempie la stessa vasca in 7 ore. Se vengono aperti contemporaneamente, quanto tempo ci vorrà per riempire $\frac{1}{6}$ della vasca? [...]

10.45 (*). L'età di Antonio è i $\frac{3}{8}$ di quella della sua professoressa. Sapendo che tra 16 anni l'età della professoressa sarà doppia di quella di Antonio, quanti anni ha la professoressa? [64]

10.46 (*). Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: " la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne". Quanti allievi aveva Pitagora? ("Matematica dilettevole e curiosa") [28]

10.47. Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle decine è inferiore di 3 rispetto alla cifra delle unità e sapendo che invertendo l'ordine delle cifre e sottraendo il numero stesso, si ottiene 27 ("Algebra riceativa") [...]

10.48. Al cinema "Matematico" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10% il numero degli spettatori è calato, però, del 10% È stato un affare? [...]

10.49. A mezzogiorno le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Quando saranno di nuovo sovrapposte? [...]

10.50. Con due qualità di caffè da 3 €/kg e 5 €/kg si vuole ottenere un quintale di miscela da 3,25 €/kg Quanti kg della prima e quanti della seconda qualità occorre prendere? [...]

10.51 (*). In un supermercato si vendono le uova in due diverse confezioni, che ne contengono rispettivamente 10 e 12 In un giorno è stato venduto un numero di contenitori da 12 uova doppio di quelli da 10, per un totale di 544 uova. Quanti contenitori da 10 uova sono stati venduti? [16]

10.52 (*). Ubaldo, per recarsi in palestra, passa sui mezzi di trasporto 20 minuti, tuttavia il tempo totale per completare il tragitto è maggiore a causa dei tempi di attesa. Sappiamo che Ubaldo utilizza 3 mezzi, impiega i $\frac{3}{10}$ del tempo totale per l'autobus, i $\frac{3}{5}$ del tempo totale per la metropolitana e 10 minuti per il treno. Quanti minuti è costretto ad aspettare i mezzi di trasporto? (*poni x il tempo di attesa*) [80′]

10.53 (*). Anna pesa un terzo di Gina e Gina pesa la metà di Alfredo. Se la somma dei tre pesi è 200kg, quanto pesa Anna? [20kg]

10.54. In una partita a dama dopo i primi 10 minuti sulla scacchiera restano ancora 18 pedine. Dopo altri 10 minuti un giocatore perde 4 pedine nere e l'altro 6 pedine bianche ed entrambi rimangono con lo stesso numero di pedine. Calcolate quante pedine aveva ogni giocatore dopo i primi 10 minuti di gioco. [...]

10.55 (*). Due numeri naturali sono tali che la loro somma è 16 e il primo, aumentato di 1, è il doppio del secondo diminuito di 3 Trovare i due numeri. [Impossibile]

10.56. Un dvd recoder ha due modalità di registrazione: SP e LP. Con la seconda modalità è possibile registrare il doppio rispetto alla modalità SP. Con un dvd dato per 2 ore in SP, come è possibile registrare un film della durata di 3 ore e un quarto? Se voglio registrare il più possibile in SP (di qualità migliore rispetto all'altra) quando devo necessariamente passare all'altra modalità LP? [...]

10.57 (*). Tizio si reca al casinò e gioca tutti i soldi che ha; dopo la prima giocata, perde la metà dei suoi soldi. Gli vengono prestati € 2 e gioca ancora una volta tutti i suoi soldi; questa volta vince e i suoi averi vengono quadruplicati. Torna a casa con € 100 Con quanti soldi era arrivato al casinò? [e 46]

10.58 (*). I sette nani mangiano in tutto 127 bignè; sapendo che il secondo ne ha mangiati il doppio del primo, il terzo il doppio del secondo e così via, quanti bignè ha mangiato ciascuno di loro? $[1, 2, 4, 6, 16, \ldots]$

10.59 (*). Babbo Natale vuole mettere in fila le sue renne in modo tale che ogni fila abbia lo stesso numero di renne. Se le mette in fila per quattro le file sono due di meno rispetto al caso in cui le mette in fila per tre. Quante sono le renne? []

10.60 (*). Cinque fratelli si devono spartire un'eredità di €180000 in modo tale che ciascuno ottenga € 8000 in più del fratello immediatamente minore. Quanto otterrà il fratello più piccolo? [e 20000]

10.61 (*). Giovanni ha tre anni in più di Maria. Sette anni fa la somma delle loro età era 19 Quale età hanno attualmente? [15; 18]

10.62 (*). Lucio ha acquistato un paio di jeans e una maglietta spendendo complessivamente € 518 Calcolare il costo dei jeans e quello della maglietta, sapendo che i jeans costano € 88 più della maglietta. [e 303; e 215]

10.63 (*). Francesca ha il triplo dell'età di Anna. Fra sette anni Francesca avrà il doppio dell'età di Anna. Quali sono le loro età attualmente? [7; 21]

10.64 (*). In una fattoria ci sono tra polli e conigli 40 animali con 126 zampe. Quanti sono i conigli? [23]

10.65 (*). Due anni fa ho comprato un appartamento. Ho pagato alla consegna $\frac{1}{3}$ del suo prezzo, dopo un anno $\frac{3}{4}$ della rimanenza; oggi ho saldato il debito sborsando € 40500 Qual è stato il prezzo dell'appartamento? [e 243000]

10.66 (*). Un ciclista pedala in una direzione a 30km/h, un marciatore parte a piedi dallo stesso punto e alla stessa ora e va nella direzione contraria a 6km/h Dopo quanto tempo saranno lontani 150km? [250′]

10.67 (*). L'epitaffio di Diofanto. "Viandante! Qui furono sepolti i resti di Diofanto. E i numeri possono mostrare, oh, miracolo! Quanto lunga fu la sua vita, la cui sesta parte costituì la sua felice infanzia. Aveva trascorso ormai la dodicesima parte della sua vita, quando di peli si coprì la guancia. E la settima parte della sua esistenza trascorse in un matrimonio senza figli. Passò ancora un quinquiennio e gli fu fonte di gioia la nascita del suo primogenito, che donò il suo corpo, la sua bella esistenza alla terra, la quale durò solo la metà di quella del padre. Il quale, con profondo dolore discese nella sepoltura, essendo sopravvenuto solo quattro anni al proprio figlio. Dimmi quanti anni visse Diofanto." [84]

10.68 (*, †). Un cane cresce ogni mese di $\frac{1}{3}$ della sua altezza. Se dopo 3 mesi dalla nascita è alto 64cm, quanto era alto appena nato?

massa

10.5.3 Problemi di geometria

10.69 (*). In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è $\frac{3}{7}$ dell'altro angolo acuto. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [$63°; 27°; 90°$]

10.70 (*). In un triangolo un angolo è il $\frac{3}{4}$ del secondo angolo, il terzo angolo supera di 10° la somma degli altri due. Quanto misurano gli angoli? [$36°, 43; 48°, 57; 95°$]

10.71. In un triangolo ABC, l'angolo in A è doppio dell'angolo in B e l'angolo in C è doppio dell'angolo in B Determina i tre angoli. [...]

10.72. Un triangolo isoscele ha il perimetro di 39 Determina le lunghezze dei lati del triangolo sapendo che la base è $\frac{3}{5}$ del lato. [...]

10.73 (*). Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122m, la base di 24m Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti? [49m]

10.74 (*). Un trapezio rettangolo ha la base minore che è $\frac{2}{5}$ della base minore e l'altezza è $\frac{5}{4}$ della base minore. Sapendo che il perimetro è 294,91m, calcola l'area del trapezio. $\left[4235\text{cm}^2\right]$

10.75 (*). Determina l'area di un rettangolo che ha la base che è $\frac{2}{3}$ dell'altezza, mentre il perimetro è 144cm [...]

10.76 (*). Un trapezio isoscele ha la base minore pari a $\frac{7}{13}$ della base maggiore, il lato obliquo è pari ai $\frac{5}{6}$ della differenza tra le due basi. Sapendo che il perimetro misura 124cm, calcola l'area del trapezio. $\left[683,38\text{cm}^2\right]$

10.77 (*). Il rettangolo $ABCD$ ha il perimetro di 78cm, inoltre sussiste la seguente relazione tra i lati: $\overline{AD} = \frac{8}{5}\overline{AB} + 12\text{cm}$ Calcola l'area del rettangolo. $\left[297,16\text{cm}^2\right]$

10.78 (*). Un rettangolo ha il perimetro che misura 240cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. $\left[2700\text{cm}^2\right]$

10.79 (*). In un rettangolo l'altezza supera di 3cm i $\frac{3}{4}$ della base, inoltre i $\frac{3}{2}$ della base hanno la stessa misura dei $\frac{2}{3}$ dell'altezza. Calcola le misure della base e dell'altezza. $\left[2;\ \frac{9}{2}\right]$

10.80 (*). In un triangolo isoscele la base è gli $\frac{8}{5}$ del lato ed il perimetro misura 108cm Trovare l'area del triangolo e la misura dell'altezza relativa ad uno dei due lati obliqui. $\left[432\text{cm}^2; 28,8\text{cm}\right]$

10.81 (*). In un rombo la differenza tra le due diagonali è di 3cm Sapendo che la diagonale maggiore è $\frac{4}{3}$ della minore, calcolare il perimetro del rombo. [30cm]

10.82 (*). Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che la minore è uguale a $\frac{1}{3}$ della maggiore e che la differenza tra il doppio della minore e la metà della maggiore è di 10cm Calcolare inoltre il lato del quadrato avente la stessa area del rettangolo dato. $\left[60\text{cm};\ 20\text{cm};\ 20\sqrt{3}\text{cm}\right]$

10.83 (*). Antonello e Gianluigi hanno avuto dal padre l'incarico di arare due campi, l'uno di forma quadrata e l'altro rettangolare. "Io scelgo il campo quadrato - dice Antonello, - dato che il suo perimetro è di 4 metri inferiore a quello dell'altro". "Come vuoi! - commenta il fratello - Tanto, la superficie è la stessa, dato che la lunghezza di quello rettangolare è di 18 metri superiore alla larghezza". Qual è l'estensione di ciascun campo? $\left[1600\text{m}^2\right]$

10.84 (*). In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la base minore hanno la stessa lunghezza. La base maggiore supera di 7cm i $\frac{4}{3}$ della base minore. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la somma delle basi è 42cm $\left[189\text{cm}^2\right]$

10.85 (*). L'area di un trapezio isoscele è 168cm^2, l'altezza è 8cm, la base minore è $\frac{5}{9}$ della maggiore. Calcolare le misure delle basi, del perimetro del trapezio e delle sue diagonali. [27cm; 15cm; 62cm; 22,47cm]