Dai Naturali agli Iperreali 1

1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Riprendiamo i diversi insiemi numerici che abbiamo imparato a conoscerete mettendo in evidenza il loro ruolo come modelli per risolvere alcune classi di problemi e le loro caratteristiche.

1.1.1 I numeri naturali $\mathbb{N}$

I primi numeri che abbiamo incontrato sono i numeri naturali. Sono quelli che permettono di contare oggetti. Se sul banco ho un quaderno, una penna e un libro posso dire che ci sono 3 oggetti. Si può capire come il numero Zero abbia avuto difficoltà a farsi accettare come numero: serve per contare un gruppo di oggetti dove non c'è niente da contare. Ma ora abbiamo capito che è molto comodo considerare lo zero come un numero. Questi numeri sono chiamati numeri *naturali* e l'insieme di questi numeri viene indicato con $\mathbb{N}$.

Nei numeri naturali sono definite l'addizione, la moltiplicazione che sono sempre possibili. In queste due *strutture* $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \times)$ valgono le proprietà: associativa, commutativa e l'esistenza dell'elemento neutro.

Nei numeri naturali è definita anche la *potenza* ma questa operazione non è definita quando sia la base sia l'esponente sono uguali a zero.

Oltre a queste, sono definite anche le loro operazioni inverse: la sottrazione, la divisione e la radice, queste non sono definite per ogni coppia di numeri.

D'altra parte se su un tavolo ho 5 oggetti posso toglierne 3 e ne restano 2:

$$5 - 3 = 2$$

Ma se sul tavolo ho 3 oggetti non ha senso cercare di toglierne 5!

1.1.2 I numeri interi $\mathbb{Z}$

I numeri possono però essere utilizzati anche come modelli di altre situazioni. Supponiamo di avere la sequenza di oggetti e di voler riferirmi ad ognuno con un numero che equivale al suo indirizzo o indice. In certi casi potrei cercare il primo elemento della sequenza e chiamarlo zero, quello che viene dopo lo chiamo uno e così via. Ma se ci trovassimo a lavorare principalmente con gli elementi compresi tra il 273° elemento e il 310° elemento, questo modo di fare sarebbe piuttosto scomodo. Molto più semplice è mettersi d'accordo di chiamare zero il 273° elemento e partire da lì a contarli. Ora i numeri che dovremo usare saranno quelli compresi tra 0 e 37. Ci sono inoltre delle situazioni in cui è difficile, o impossibile, determinare un *primo* elemento della sequenza e anche in questo caso ci si può mettere d'accordo di assegnare ad un preciso elemento della sequenza il valore zero.

E chiaro che lo *zero* non sarà il *primo* elemento della sequenza, ma un valore all'interno della sequenza. Quindi è possibile muoversi sia sopra lo zero, sia sotto lo zero. Per non inventare dei nomi completamente nuovi per questi nuovi numeri, sono stati aggiunti semplicemente due segni: "$+$" per i numeri dopo lo zero e "$-$" per i numeri prima dello zero. Questi nuovi numeri sono chiamati numeri *interi* e l'insieme di questi numeri viene indicato con $\mathbb{Z}$.

In questa situazione l'addizione può essere vista come muoversi nel verso di crescita dei numeri e la sottrazione come muoversi nel verso della decrescita dei numeri. Dato che lo zero è un elemento convenzionale non c'è nessun problema a togliere 5 da 3 semplicemente si arriverà nella posizione 2 prima dello zero detta anche -2.

In questo insieme di numeri è sempre definita anche la sottrazione, anzi la sottrazione diventa semplicemente un caso particolare di addizione.

I numeri interi permettono di risolvere sempre equazioni del tipo:

$$x + a = 0$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ formato dallo zero e da tutti i numeri positivi si comporta esattamente come l'insieme dei numeri Naturali. Diremo che questo sottoinsieme è isomorfo all'insieme $\mathbb{N}$ e questo ci permette di di usare indifferentemente $+7$ o 7 senza dover precisare che $+7$ è un elemento di $\mathbb{Z}$ mentre 7 è un elemento di $\mathbb{N}$.

Anche questi numeri però non riescono a realizzare un modello in certe situazioni che invece nella pratica si possono risolvere facilmente con un po' di creatività. Ad esempio come possiamo dividere 3 uova, in parti uguali, tra 4 persone?

1.1.3 I numeri razionali $\mathbb{Q}$

Con le tre uova faccio una frittata che divido facilmente in 4 parti uguali. Possiamo costruire dei numeri che permettano di calcolare sempre il quoziente esatto di due numeri naturali anche quando la divisione tra i due dà un resto diverso da zero. Questi nuovi numeri sono chiamati numeri *razionali* e l'insieme di questi numeri viene indicato con $\mathbb{Q}$.

Mentre nei naturali e negli interi ad ogni numero corrisponde un *nome* ben preciso, nei razionali lo stesso numero può essere indicato con molti nomi diversi. Ad esempio il numero che si ottiene dividendo 1 in due parti uguali può essere indicato in in uno di questi modi:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{45}{90} = \frac{132}{264} = \cdots = 0,5$$

Ogni numero razionale può essere rappresentato con un numero con la virgola o con una qualunque delle infinite frazioni equivalenti.

Con i numeri razionali si può sempre calcolare il risultato della divisione tra due numeri (naturali, interi o razionali) tranne il caso particolare in cui il divisore sia uguale a zero. In questo caso la divisione non può essere eseguita.

I numeri razionali permettono di risolvere sempre equazioni del tipo:

$$ax + b = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

I razionali hanno una caratteristica particolare che non avevano né i naturali né gli interi: formano un insieme *denso* cioè tra due numeri razionali, per quanto vicini, se ne può trovare sempre almeno un altro.

Anche tra i razionali si può trovare un sottoinsieme isomorfo all'insieme degli interi, cioè che si comporta come l'insieme degli interi: è il sottoinsieme dei numeri che, scritti sotto forma di frazioni hanno come numeratore un multiplo del denominatore o che, ridotte ai minimi termini, hanno per denominatore uno. Questo fatto ci permette di poter scrivere: $-\frac{7}{1} = -7$ senza dover precisare che il primo numero appartiene a $\mathbb{Q}$ e il secondo a $\mathbb{Z}$.

Ma ci sono ancora situazioni in cui i numeri razionali non permettono di risolvere problemi relativamente semplici da risolvere praticamente. Ad esempio è stato dimostrato (già qualche millennio fa) che se il lato di un quadrato è un numero razionale allora la sua diagonale non lo è.

1.1.4 I numeri reali $\mathbb{R}$

Se prendiamo un quadrato di lato 1, la sua diagonale, per il teorema di Pitagora, risulta lunga $\sqrt{2}$. La radice di 2 è quel numero che elevato alla seconda dà come risultato 2. Ebbene, è stato dimostrato che nessun numero razionale moltiplicato per se stesso dà come risultato 2. Quindi, o dà un numero più piccolo o un numero più grande.

Possiamo quindi costruire due sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{Q}$ in modo da mettere in uno tutti i numeri minori di un certo valore e nell'altro tutti i numeri maggiori o uguali a quel valore. Nel caso della radice di 2:

Valore per difetto di $\sqrt{2}$	Valore per eccesso di $\sqrt{2}$
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
...	...

Due sottoinsiemi costruiti in questo modo si chiamano classi contigue di numeri razionali, cioè due sottoinsiemi di Q tali che ogni elemento dellprimo è minore di qualunque elemento del secondo e che nel primo sottoinsieme ci sono numeri che si avvicinano quanto si vuole a certi numeri del secondo sottoinsieme. Due classi contigue di numeri razionali definiscono un numero *reale* $\mathbb{R}$. Dato un *numero qualsiasi* possiamo sempre realizzare due classi contigue di numeri razionali. Se questo *numero qualsiasi* appartiene al secondo sottoinsieme è, evidentemente un numero razionale, se non appartiene ai due sottoinsiemi è un numero irrazionale. Ognuna di queste partizioni, dette anche sezioni di Dedekind, può essere considerata come un numero, cioè è possibile costruire un ordine tra le sezioni, sommarle, moltiplicarle, ...

I numeri reali formano un insieme *ordinato*, *denso* ma anche *completo* cioè il numero individuato da una qualunque sezione di Dedekind è un numero reale. Questo permette di far corrispondere ad ogni punto della *retta reale* un numero *reale* e viceversa ad ogni numero *reale* un punto della *retta reale*.

Anche l'insieme dei Reali contiene un sottoinsieme isomorfo ai numeri razionali.

Bene l'insieme dei numeri reali permette di risolvere tutti i problemi che possiamo incontrare?

Per fortuna no!

Ci sono tipi di problemi che non possono essere risolti con i numeri reali. Ad esempio calcolare la radice quadrata di numeri negativi. Anche questo all'apparenza è un problema del tutto assurdo: calcolare la radice quadrata di un numero equivale a trovare la lunghezza del lato di un quadrato di cui si conosce l'area.

Ora, trovare un quadrato con area piccola si può fare, magari anche con area nulla, impegnandosi un po', ma trovare un quadrato con area negativa è proprio impossibile. Ma come abbiamo visto per i naturali ci possono essere fenomeni nei quali hanno senso operazioni che in altri sistemi sono insensate.

Prima di procedere con i prossimi insiemi numerici, però, riflettiamo su una particolare proprietà degli insiemi visti fin'ora.

Il postulato di Eudosso-Archimede

Proviamo a fare un *semplice* esperimento mentale. Prendo un foglio di carta e lo piego su se stesso un po' di volte. Che spessore raggiungo? Per semplificarci i calcoli supponiamo che il foglio di carta abbia lo spessore di $0,1mm = 0,0001m = 10^{-4}m$. Che spessore otterrò piegando il foglio su se stesso 64 volte?

Il calcolo è abbastanza semplice:

Numero piegature	spessore ottenuto	in metri
0	1	10^{-4}
1	2	$2 \cdot 10^{-4}$
2	4	$4 \cdot 10^{-4}$
3	8	$8 \cdot 10^{-4}$
4	16	$1,6 \cdot 10^{-3}$
5	32	$3,2 \cdot 10^{-3}$
6	64	$6,4 \cdot 10^{-3}$
7	128	$1,28 \cdot 10^{-2}$
...	...	
n	2^n	...

Quindi piegando il foglio 64 volte ottengo uno spessore che è 2^{64} volte lo spessore di partenza quindi basta calcolare:

$$2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

che convertito in metri dà: $1.844.674.407.370.955m$ circa che è uno spessore considerevole, quasi duemila volte la distanza Terra-Sole: $149.600.000.000m$.

Si fa risalire ai matematici Eudosso e Archimede l'osservazione che per quanto piccolo si prenda un numero (ad esempio lo spessore di un foglio di carta), basta moltiplicarlo per un numero sufficientemente grande (2^{64}) per farlo diventare maggiore di qualsiasi numero (ad esempio la distanza Terra-Sole).

Postulato 1.1 (Eudosso-Archimede)**.** *Dati due numeri positivi* a, b *si può sempre trovare un multiplo del più piccolo che sia maggiore del più grande:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad | \quad na > b$$

Vale anche il contrario: per quanto grande sia un numero posso dividerlo per un numero abbastanza grande da farlo diventare più piccolo di un qualunque numero.

Ma questa osservazione di Eudosso-Archimede non è un teorema, non è un'osservazione dimostrata, è un postulato, un accordo fatto tra matematici che può essere utile in moltissimi casi e che vale per tutti gli insiemi numerici visti fin'ora. Ma cosa succede se ci accordiamo che *non* valga il postulato di Eudosso-Archimede?

1.1.5 I numeri complessi $\mathbb{C}$

Riprendiamo il problema della radice di numeri negativi. Si può ampliare l'insieme dei numeri reali aggiungendo i numeri che sono le radici di tutti i numeri anche di quelli negativi. Per fare ciò si devono aggiungere molti altri numeri (infiniti) tutti questi nuovi numeri sono stati chiamati numeri *immaginari* che combinati con i numeri reali formano l'insieme dei numeri *complessi* insieme che viene indicato con $\mathbb{C}$. Anche per i numeri complessi tutti gli infiniti nuovi numeri si ottengono con la semplice aggiunta di un solo nuovo numero: *l'unità immaginaria* indicato con il simbolo i o con il simbolo j.

Definizione 1.1. L'**unità immaginaria** è quel numero che elevato alla seconda dà come risultato -1:

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Questi numeri hanno molte applicazioni tecniche, ma risultano anche affascinanti da un punto di vista estetico. La ripetizione di un paio di calcoli aritmetici tra numeri complessi produce il sorprendente insieme di Mandelbrot.

Ma dato che l'insieme dei reali oltre che essere un campo ordinato è anche completo, non è possibile aggiungere elementi ai reali senza perdere qualche proprietà dell'insieme numerico. Nel caso dei complessi l'insieme ottenuto non è totalmente ordinato.

Inutile dire che possiamo prendere un sottoinsieme dei Complessi che sia isomorfo ai Reali.

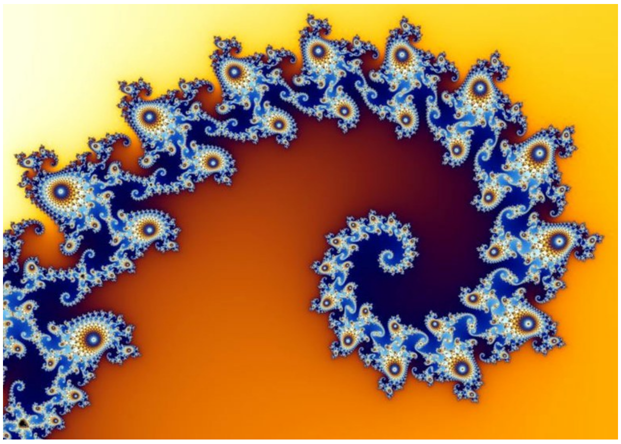


FIGURA 1.1: Porzione dell'insieme di Mandelbrot.

1.2 I numeri iperreali *$\mathbb{R}$

In questa sezione vedremo, e useremo, un nuovo insieme di numeri, utile a modellizzare e risolvere nuove classi di problemi. Rispetto a quanto già sappiamo dell'insieme $\mathbb{R}$, dovremo adattare alcune regole di calcolo e riscontreremo proprietà nuove, mentre dovremo abbandonarne il postulato di Eudosso-Archimede.

1.2.1 Il problema della velocità

Alla fine del 1600 Newton e Leibniz studiavano problemi legati alla meccanica. Una delle grandezze alla base della meccanica è la *velocità*. Ma cosa è la velocità? Se l'oggetto A percorre più strada dell'oggetto B possiamo dire che A è più veloce di B? No, non basta misurare lo spazio percorso da un oggetto per calcolare la sua velocità, bisogna anche misurare il tempo impiegato a percorrere quello spazio. Infatti sappiamo che:

$$velocità = \frac{spaziopercorso}{tempoimpiegato}$$

La grandezza calcolata in questo modo è *la velocità media* dell'oggetto, ma in ogni istante del percorso l'oggetto ha una propria velocità. Come faccio a calcolarla? Posso misurare lo spazio percorso in un tempo molto piccolo, in questo modo avrò una velocità media tenuta in un percorso molto breve. Più restringo l'intervallo di tempo, più la velocità media si avvicina alla velocità istantanea... ma resta sempre una velocità media.

Per trovare la velocità istantanea dovrei dividere lo spazio percorso per un tempo (positivo) più piccolo di qualunque numero. L'unico numero reale più piccolo, in valore assoluto, di qualunque numero è lo zero, ma non posso usarlo per il calcolo della velocità, perché la divisione per zero non è definita: i numeri reali non ci permettono di calcolare una grandezza così semplice e evidente come la velocità di un oggetto in un dato istante.

Servirebbe un insieme numerico con numeri positivi più piccoli di un qualsiasi altro numero positivo, ma diversi da zero! Ma è possibile trovare tali numeri nell'insieme dei reali che, come abbiamo visto, è un insieme (già) completo?

1.2.2 Infinitesimi... e infiniti

Se accettiamo che possa **non** valere il postulato di Eudosso-Archimede, possiamo costruire un insieme numerico non archimedeo. Per farlo, possiamo aggiungere all'insieme dei numeri reali un nuovo numero (non reale) maggiore di zero ma più piccolo di qualunque numero reale positivo:

$$\varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \text{per qualunque } n \in \mathbb{N}$$

tradotto in simboli:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad | \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un numero siffatto lo chiameremo un *infinitesimo* e lo indicheremo con una lettera minuscola dell'alfabeto greco, per esempio ε. Per quanto è già stato detto, un tale numero non può essere un numero reale.

❑ **Osservazione** In un insieme che contenga numeri infinitesimi non vale il postulato di Eudosso-Archimede infatti se $\varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ moltiplicando entrambi i membri per n si ottiene: $n\varepsilon < 1$.

La prima conseguenza dell'introduzione di un infinitesimo è che allora ce ne sono infiniti! Infatti anche la metà di un infinitesimo è un infinitesimo e sono infinitesimi anche il suo doppio o un suo sottomultiplo o un suo multiplo.

Altra conseguenza dell'aggiunta di un elemento infinitesimo all'insieme dei reali è che, se si possono fare le normali operazioni con questi nuovi numeri, allora esiste anche un numero maggiore di qualunque numero reale:

$$\text{se} \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{allora} \quad \frac{1}{\varepsilon} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi se aggiungiamo all'insieme dei reali un numero infinitesimo e possiamo usarlo nelle usuali 4 operazioni, allora in quell'insieme avremo un numero infinito di infinitesimi e un numero infinito di infiniti.

Chiamiamo *iperreali* questi numeri e indichiamo l'insieme degli iperreali con il simbolo: $^*\mathbb{R}$ ("erre star").

1.2.3 Tipi di Iperreali

Abbiamo visto che l'introduzione di un elemento nuovo, così piccolo da poterlo pensare trascurabile, ha reso piuttosto affollato il nuovo insieme numerico. Cerchiamo di fare un po' di ordine. L'insieme degli Iperreali contiene diversi tipi di numeri li vediamo qui di seguito.

Infinitesimi: numeri che, in valore assoluto, sono minori di qualunque numero reale positivo.
Infiniti: numeri che, in valore assoluto, sono maggiori di qualunque numero reale.
Zero: l'unico numero reale infinitesimo.
Infinitesimi non nulli: numeri infinitesimi senza lo zero.
Finiti: numeri che non sono infiniti.
Finiti non infinitesimi: numeri che non sono né infiniti né infinitesimi.

Per semplificare la scrittura (e complicare la lettura) adotteremo delle sigle e delle convenzioni per indicare questi diversi tipi di numeri:

tipo	sigla	simboli
zero		0
infinitesimi	*i*	
infinitesimo non nullo	*inn*	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$
finito non infinitesimo	*fni*	$a, b, c, d, \dots$
finito	*f*	$a, b, c, d, \dots$
infinito	*I*	$A, B, C, \dots$
qualsiasi		$x, y, z, \dots$

Esempio 1.1. Individua il tipo delle seguenti espressioni:

1. $\pi + \varepsilon$
2. $4\varepsilon + \varepsilon \cdot \delta$
3. $M - 7$
4. $M + \dfrac{1}{\varepsilon}$

Vediamo i vari casi:

1. $\pi + \varepsilon$ è un numero finito perché π è un numero finito ($3,141592653589793\dots$) con infinite cifre decimali, ma ε è più piccolo della più piccola cifra di π che possiamo pensare quindi aggiungere un infinitesimo ad un numero reale non cambia il numero reale che rimane un numero finito, in questo caso non infinitesimo.
2. $4\varepsilon + \varepsilon \cdot \delta$ qui abbiamo la somma di due quantità, la prima è formata da 4 infinitesimi, ma per come abbiamo definito l'infinitesimo, anche 4 infinitesimi sono ancora un infinitesimo; la seconda è formata dal prodotto di un infinitesimo per un altro infinitesimo che indica quindi un infinitesimo di un infinitesimo che è un infinitesimo ancora più infinitesimo di ciascuno dei due. La loro somma quindi è un infinitesimo con lo stesso segno di ε.

3. $M - 7$ Possiamo distinguere due casi:
   - ➡ se M è un infinito negativo, allora $M - 7$ sarà un numero in valore assoluto ancora più grande,
   - ➡ se M è un infinito positivo, $M - 7$ sarà numero più piccolo di M ma che non può essere un numero finito. Infatti, supponiamo che $M - 7$ sia un numero finito, chiamiamolo x ma se x è finito allora anche $x + 7$ è finito e questo avrebbe come conseguenza che anche M sia finito contraddicendo le nostre convenzioni.
4. $M + \frac{1}{\varepsilon}$ In questo caso dobbiamo fare una distinzione:
   - ➡ se M e ε hanno lo stesso segno il calcolo precedente equivale a sommare due infiniti entrambi positivi (o negativi) e darà come risultato un infinito positivo (o negativo).
   - ➡ se M e ε hanno segni diversi bisogna avere più informazioni per poter stabilire il tipo del risultato.

1.2.4 Numeri infinitamente vicini

Nei numeri reali, due numeri o sono uguali o sono diversi (ovviamente). Nel primo caso, la differenza tra i due numeri è zero, nel secondo, la differenza è un numero reale diverso da zero.

Negli Iperreali, se due numeri sono diversi, la loro differenza può essere un numero finito non infinitesimo o un numero infinitesimo.

Esempio 1.2. Calcola la distanza tra $a = 7 + \varepsilon$ e $b = 10 - 5\varepsilon$:
$|b - a| = |(10 + \varepsilon) - (7 - 5\varepsilon)| = |10 + \varepsilon - 7 + 5\varepsilon| = |10 - 7 + \varepsilon + 5\varepsilon| = |3 + 6\varepsilon|$
La distanza tra a e b, è uguale a 3 più un infinitesimo.

Esempio 1.3. Calcola la distanza tra $a = 5 + \varepsilon$ e $b = 5 + \delta$:
$|b - a| = |(5 + \delta) - (5 + \varepsilon)| = |5 + \delta - 5 - \varepsilon| = |5 - 5 + \delta - \varepsilon| = |0 + \delta - \varepsilon| = |\gamma|$
In questo caso la distanza tra a e b, è un infinitesimo.

Negli Iperreali possiamo distinguere:

- ➡ a e b sono uguali: $b - a = 0$;
- ➡ a e b sono diversi, in questo caso possiamo distinguere ulteriormente:
  - ➠ $a - b$ è un finito non infinitesimo;
  - ➠ $a - b$ è un infinitesimo non nullo.

Quando la differenza di due numeri è un infinitesimo, diciamo che i due numeri sono *infinitamente vicini*.

Definizione 1.2. Due numeri si dicono **infinitamente vicini** (simbolo: $\approx$) se la loro differenza è un infinitesimo:

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y = \varepsilon$$

Tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro e sono infinitamente vicini allo zero.

Due numeri infinitamente vicini, sono diversi tra di loro, ma la loro differenza è minore di qualunque numero reale positivo.

1.2.5 Iperreali finiti e parte standard

Tra i vari tipi di Iperreali, hanno un ruolo particolare gli Iperreali finiti perché sono quelli che assomigliano di più ai numeri che già conosciamo e possono essere facilmente tradotti in numeri reali e approssimati con numeri razionali.

Definizione 1.3. Un numero iperreale si dice **finito** se è un numero compreso tra due numeri Reali:

$$\text{Se } x \in {}^*\mathbb{R} \ \wedge \ a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a < x < b \quad \text{allora } x \text{ è un Iperreale finito.}$$

Esempio 1.4. Individua quali dei seguenti numeri sono finiti (considerando, per semplicità ε positivo):

1. $8 + 5\varepsilon$
2. $(8 + 5\varepsilon)^2$
3. $8 + \frac{5}{\varepsilon}$

Vediamo i tre casi:

1. $(8 + 5\varepsilon)$ è un numero finito perché:
$$\left(8 - \frac{1}{10^6}\right) < (8 + 5\varepsilon) < \left(8 + \frac{1}{10^6}\right)$$
2. Eseguiamo il quadrato: $(8 + 5\varepsilon)^2 = 64 + 80\varepsilon + 25\varepsilon^2$ ma: 80ε è sicuramente un infinitesimo e anche $25\varepsilon^2$ lo è e sarà un infinitesimo anche la loro somma, chiamiamo δ questa somma quindi: $(8 + 5\varepsilon)^2 = 64 + \delta$ e:
$$63 < (64 + \delta) < 65$$
3. Nell'ultimo caso possiamo osservare che, essendo ε in valore assoluto minore di qualunque numero reale, $\frac{5}{\varepsilon}$ è un numero maggiore di qualunque numero reale e la somma di 8 più un numero maggiore di qualunque altro, non può essere minore di un determinato numero reale:
$$\nexists y \in \mathbb{R} \quad | \quad 8 + \frac{5}{\varepsilon} < y$$
perciò $8 + \frac{5}{\varepsilon}$ non è un numero finito.

Ogni numero finito può essere visto come un numero *reale* più un *infinitesimo*.

Se x è finito allora $x = a + \varepsilon$ dove:

- ➡ x è un numero iperreale finito;
- ➡ a è un numero reale;
- ➡ ε è un infinitesimo (anche zero).

Se $x = a + \varepsilon$ allora potremmo dire che x è infinitamente vicino ad a infatti la differenza tra i due dà un infinitesimo:

$$x = a + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x - a = a + \varepsilon - a \;\Leftrightarrow\; x - a = \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \approx a$$

Un numero Iperreale finito non può essere infinitamente vicino a due numeri reali diversi (perché?) quindi esiste un solo numero Reale infinitamente vicino ad un dato numero Iperreale. Questo numero reale si chiama *parte standard* del numero Iperreale.

Definizione 1.4. Si dice che a è la **parte standard** di x, e si scrive: $\mathrm{st}(x) = a$, se a è un numero reale e x è infinitamente vicino ad a:

$$\mathrm{st}(x) = a \;\Leftrightarrow\; a \in \mathbb{R} \wedge x \approx a$$

❑ **Osservazione**

- ➡ La parte standard di un infinitesimo è zero infatti: $\varepsilon = 0 + \varepsilon$.
- ➡ Un numero iperreale infinito non ha parte standard poiché non esiste nessun numero reale infinitamente vicino a un infinito.

Si può immaginare ogni Iperreale finito come una nuvola contenente un numero standard a e tutti gli infinitesimi che lo circondano, così vicini ad a da non potersi confondere con gli altri infiniti iperreali di una nuvola vicina, appartenenti per esempio al numero iperreale $y = b + \delta$.

1.2.6 Retta Iperreale e strumenti ottici

In un paragrafo precedente abbiamo visto che si può accettare l'idea che ad ogni numero reale corrisponda un punto della retta e ad ogni punto della retta corrisponda un numero reale. Questa affermazione non è un teorema dimostrato, è un postulato. Fa parte del modello di numeri usato, questa idea è caratteristica dei numeri reali. Ma dato che ora stiamo cambiando modello, cambiamo anche questo postulato. Lo riformuliamo così:

Postulato 1.2. *Ad ogni numero Iperreale corrisponde un punto della retta (iperreale) e ad ogni punto della retta (iperreale) corrisponde un numero Iperreale.*

Oppure:

Postulato 1.3 (Retta iperreale)**.** *C'è una corrispondenza biunivoca tra i numeri Iperreali e i punti della retta (iperreale).*

Abbiamo già una certa abitudine a rappresentare numeri reali sulla retta, per rappresentare i numeri Iperreali dobbiamo procurarci degli strumenti particolari: *microscopi*, *telescopi*, *grandangoli*.

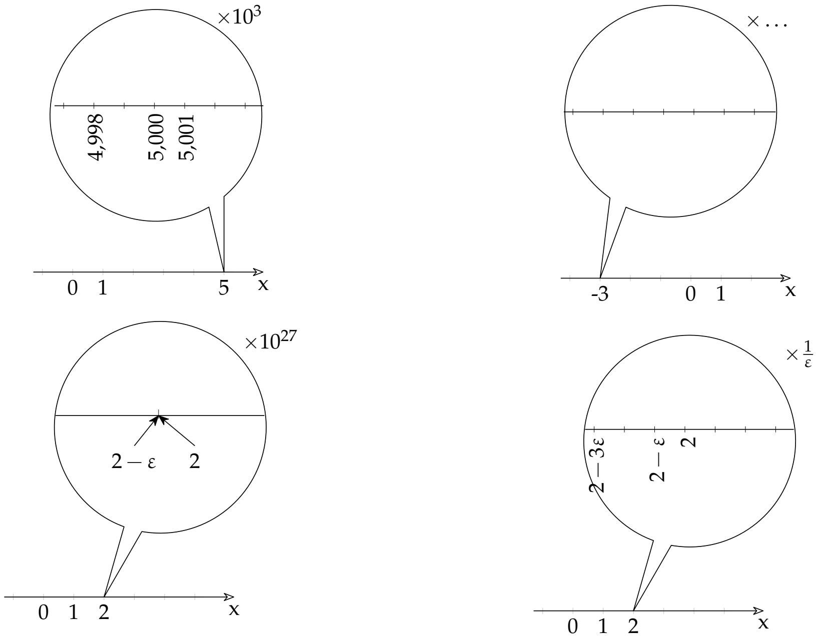
Diamo una sbirciata al loro manuale di istruzioni.

Microscopi

Il microscopio permette di ingrandire una porzione di retta. Per esempio un microscopio permette di visualizzare i seguenti numeri:

Esempio 1.5.

➡ $+4,998$ ➡ $-3,000002$ ➡ $2-3\varepsilon$ ➡ $-4+2\delta$



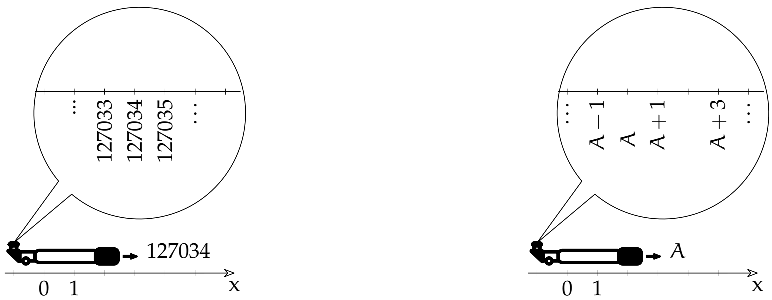
Si può osservare come ci siano microscopi "standard" che ingrandiscono un numero *naturale* di volte e microscopi "non standard" che ingrandiscono infinite volte (ricordiamoci che $\frac{1}{\varepsilon}$ è un infinito.

Telescopi

Il telescopio permette di avvicinare una porzione di retta senza cambiare la sua scala. Con un telescopio possiamo visualizzare i seguenti numeri:

Esempio 1.6.

➡ $+127034$ ➡ -3600 ➡ $A+3$ ➡ $-B+2$

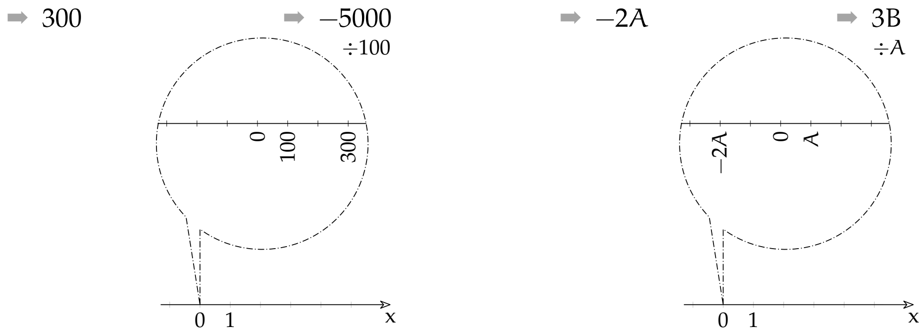


Anche per i telescopi, i modelli più moderni offrono la possibilità di operare ingrandimenti "standard" o "non standard" a piacere.

Grandangoli (Zoom)

Il Grandangolo permette di cambiare la scala della visualizzazione della retta, in questo modo possiamo far rientrare nel campo visivo anche numeri molto lontani. Possiamo usare uno zoom per visualizzare i seguenti numeri:

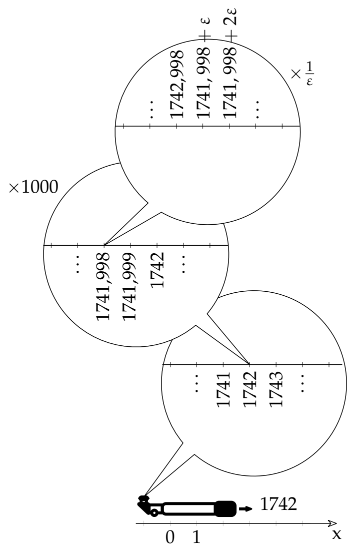
Esempio 1.7.



Anche per i grandangoli utilizzeremo versioni che permettono zoomate "standard" e "non standard".

Combinazione di strumenti

Questi strumenti sono "modulari", possono essere combinati a piacere. Per esempio per visualizzare il numero non standard: $1741,998 + 2\varepsilon$ posso utilizzare in sequenza un telescopio per avvicinarmi al numero, un microscopio standard per poter vedere i millesimi e un microscopio non standard per vedere il numero infinitamente vicino al numero standard.



1.2.7 Operazioni

Vediamo di seguito alcune regole relative alle operazioni che valgono nei numeri Iperreali.

Addizione

Alcune osservazioni:

1. Le regole relative all'addizione valgono anche per la sottrazione, se uno degli addendi è negativo.
2. Zero è l'elemento neutro dell'addizione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x + 0 = 0 + x = x$.
3. Un infinitesimo più un altro infinite-

simo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha + \beta = \gamma$.

4. Un infinitesimo non nullo più un altro infinitesimo non nullo può dare per risultato anche zero: ...
5. Un finito più un infinitesimo dà come risultato un finito.
6. Un finito più un finito dà come risultato un finito.
7. Un finito più un finito può dare come risultato un infinitesimo.
8. Un infinito più un finito dà come risultato un infinito.
9. Un infinito più un infinito può dare come risultato zero, un infinitesimo, un finito non infinitesimo, un infinito.

Nel precedente elenco abbiamo visto che alcune addizioni danno un risultato che dipende solo dai tipi degli operandi, altre operazioni danno dei risultati che dipendono dal valore degli operandi. Possiamo costruire una tabella che organizza le precedenti osservazioni.

+	0	inn	fni	I
0	0	inn	fni	I
inn	inn	i	fni	I
fni	fni	fni	f	I
I	I	I	I	?

Moltiplicazione

Alcune osservazioni:

1. Zero è l'elemento assorbente: il prodotto di un iperreale per zero dà come risultato zero: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. Uno è l'elemento neutro della moltiplicazione nei Reali e continua ad esserlo anche negli Iperreali: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3. Un infinitesimo per un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha \cdot \beta = \gamma$.
4. Un infinitesimo non nullo per un altro infinitesimo non nullo dà per risultato un infinitesimo non nullo.
5. ...
6. ...
7. Il prodotto fra un finito e un infinitesimo richiama le osservazioni fatte sul postulato di Eudosso-Archimede.

E la tabella corrispondente:

×	0	1	inn	fni	I
0	0	0	0	0	0
1	0	1	inn	fni	I
inn	0	inn	inn	inn	?
fni	0	fni	inn	fni	I
I	0	I	?	I	I

Divisione

Alcune osservazioni:

1. Anche negli Iperreali la divisione per zero non è definita.
2. Uno può essere visto come un elemento neutro solo destro: $x \div 1 = x$.
3. Per cercare i risultati possiamo rifarci alla definizione di quoziente.
4. ...

E la tabella corrispondente:

$\div$	0	1	inn	fni	I
0		0	0	0	0
1		1	I	fni	inn
inn		inn	?	inn	inn
fni		fni	I	fni	inn
I		I	I	I	?

Reciproco

Alcune osservazioni:

1. Dalla tabella precedente si può estrarre la riga corrispondente a 1 e si ottiene la tabella del reciproco.
2. Una volta convinti della regola del reciproco, si può ricavare la tabella della divisione attraverso la regola: $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$.

E la tabella corrispondente:

numero	0	1	inn	fni	I
reciproco		1	I	fni	inn

❑ **Osservazione** Non ci sono regole immediate per le seguenti operazioni:

➡ $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ➡ $\frac{A}{B}$ ➡ $A \cdot \varepsilon$ ➡ $A + B$

In questi casi il tipo di risultato dipende dall'effettivo valore degli operandi. Ad esempio, nel caso del quoziente tra due infinitesimi possiamo trovarci nelle seguenti situazioni:

➡ $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$ (i) ➡ $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2$ (fni) ➡ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}$ (I)

Possiamo ora esercitarci nel calcolo con questi nuovi numeri. Continuiamo ad utilizzare la convenzione di indicare gli infinitesimi con lettere greche minuscole ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$), i finiti non infinitesimi con lettere latine minuscole ($a, b, c, \dots, m, n, \dots$) e gli infiniti con lettere latine maiuscole ($A, B, C, \dots, M, N, \dots$).

Semplifichiamo le seguenti espressioni scrivendo il tipo di risultato ottenuto.

Esempio 1.8. $3\varepsilon + 5 + 6M - 2\varepsilon + 7 - 2M = 4M + 12 + \varepsilon \quad (tipo = I)$

❑ **Osservazione** Quando il risultato è la somma di più elementi, li scriviamo, ordinandoli dal più grande, in valore assoluto, al più piccolo. scrivendoli

Esempio 1.9. $7 + 8M - 5\varepsilon - 4 + 3\varepsilon - 2N = 8M - 2N + 3 - 2\varepsilon$ (tipo non definito)

Esempio 1.10. $(3M + 2\varepsilon)(3M - 2\varepsilon) = 9M - 4\varepsilon \quad$ (tipo=I)

Esempio 1.11. $(M+3)(M-3) - (M+2)^2 + 4(M+3) =$
$= M^2 - 9 - M^2 - 4M - 4 + 4M + 12 = -1 \quad$ (tipo=fni)

Esempio 1.12. $10a - (A+1)^2 - 3a + 2(a + 2\alpha) + A^2 + 6(b - 3\alpha) + 2A =$
$= 10a - A^2 - 2A - 1 - 3a + 2a + 4\alpha + A^2 + 6b - 18\alpha + 2A = 9a + 6b - 14\alpha \quad$ (tipo=fni)

1.2.8 Confronto

L'insieme dei numeri Reali ha un ordinamento completo, se a e b sono due numeri reali qualunque è sempre valida una e una sola delle seguenti affermazioni:

$$a < b \quad a = b \quad b < a$$

Per confrontare due numeri Reali possiamo utilizzare le seguenti regole:

1. qualunque numero negativo è minore di qualunque numero positivo;
2. se due numeri sono negativi, è minore quello che ha il modulo maggiore;
3. se a e b sono due numeri positivi,

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \quad (\text{o} \quad b - a > 0\,)$$

oppure

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad (\text{o} \quad \frac{b}{a} > 1\,)$$

❑ **Osservazione** Le prime due regole ci permettono di restringere le nostre riflessioni al solo caso del confronto tra numeri positivi. Nei prossimi paragrafi assumeremo che le variabili si riferiscano solo a numeri positivi.

❑ **Osservazione** Nella terza regola abbiamo presentato due criteri. Quello usato di solito è il primo, ma useremo anche il secondo perché il rapporto tra due grandezze permette di ottenere informazioni interessanti.

Anche negli Iperreali valgono le proprietà dei Reali richiamate sopra. Ma l'insieme degli Iperreali non ha un ordinamento completo: se di ε e δ sappiamo solo che sono due infinitesimi, non è possibile dire se $\varepsilon < \delta$ o $\varepsilon > \delta$. E questo si ripercuote anche su tutti gli altri numeri: senza ulteriori informazioni non possiamo dire se $a + \varepsilon$ è maggiore minore o uguale a $a + \delta$. Problemi analoghi si incontrano nel confronto degli infiniti. Vediamo allora come è possibile affrontare il problema del confronto tra Iperreali.

Restringendo l'osservazione ai numeri positivi possiamo affermare che gli infinitesimi sono più piccoli dei non infinitesimi e i finiti sono più piccoli degli infiniti:

$$i \quad < \quad fni \quad < \quad I$$

Passiamo ora al confronto all'interno dei diversi tipi di numeri Iperreali.

Confronto tra finiti non infinitesimi

Se due numeri Iperreali hanno parte standard diversa allora è maggiore quello che ha la parte standard maggiore:

$$x < y \;\Leftrightarrow\; st(x) < st(y)$$

Nel caso i due numeri abbiano la stessa parte standard si deve studiare l'ordinamento degli infinitesimi, cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

Confronto tra infinitesimi

Di seguito vediamo i diversi casi in cui ci possiamo imbattere quando vogliamo confrontare i numeri infinitesimi.

Zero Zero è minore di qualunque infinitesimo positivo:

$$\varepsilon - 0 = \varepsilon > 0$$

Somma La somma di infinitesimi positivi è maggiore di ognuno dei due:

$$(\varepsilon + \delta) - \varepsilon = \delta > 0$$

Multiplo Il multiplo di un infinitesimo positivo è maggiore dell'infinitesimo di partenza. Usando il primo metodo per il confronto:

$$\forall n > 1 \quad n\varepsilon - \varepsilon = (n-1)\,\varepsilon > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\forall n > 1 \quad \frac{n\varepsilon}{\varepsilon} = n > 1$$

Sottomultiplo Il sottomultiplo di un infinitesimo è minore dell'infinitesimo di partenza. Usando il primo metodo per il confronto:

$$\forall n > 1 \quad \frac{\varepsilon}{n} - \varepsilon = \frac{\varepsilon - n\varepsilon}{n} = \frac{(1-n)\,\varepsilon}{n} < 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\forall n > 1 \quad \frac{\varepsilon}{n} : \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n\varepsilon} = \frac{1}{n} < 1$$

Definizione 1.5. Diremo che γ e ε sono **infinitesimi dello stesso ordine** se il rapporto tra γ e ε è un finito non infinitesimo.

Parte infinitesima di un infinitesimo La parte infinitesima di un infinitesimo positivo è minore dell'infinitesimo di partenza:

$$\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon} = \delta < 1$$

In questo caso il rapporto non solo è più piccolo di 1 ma è addirittura un *infinitesimo*, cioè γ è una parte infinitesima di ε. In questo caso si dice che γ è un infinitesimo di *ordine superiore* a ε e si scrive:

$$\gamma = o(\varepsilon)$$

Definizione 1.6. Diremo che γ è un **infinitesimo di ordine superiore** a ε se il rapporto tra γ e ε è un infinitesimo:

$$\gamma = o(\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \frac{\gamma}{\varepsilon} = \delta$$

Diremo anche che ε è un **infinitesimo di ordine inferiore** a γ.

Confronto tra infiniti

Anche tra gli infiniti possiamo effettuare il confronto calcolando la differenza tra due numeri o il quoziente e anche tra gli infiniti l'uso del quoziente ci dà delle informazioni interessanti.

Infinito più finito Se a è un finito positivo (anche infinitesimo), confrontiamo $M + a$ con M. Usando il primo metodo:

$$M + a - M = a > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{M+a}{M} = \frac{M}{M} + \frac{a}{M} = 1 + \frac{a}{M} > 1$$

Somma di infiniti Se M e N sono due infiniti positivi, confrontiamo $M + N$ con M. Usando il primo metodo:

$$M + N - M = N > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{M+N}{M} = \frac{M}{M} + \frac{N}{M} = 1 + \frac{N}{M} > 1$$

Multiplo Se $n > 1$, confrontiamo nM con M. Usando il primo metodo:

$$\forall n > 1 \quad nM - M = (n-1)\,M > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{nM}{M} = n > 1$$

Definizione 1.7. Diremo che M e N sono **infiniti dello stesso ordine** se il rapporto tra M e N è un finito non infinitesimo.

Infinito di infinito Confrontiamo MN con M. Usando il primo metodo:

$$MN - M = (N-1)\,M > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{MN}{M} = N > 1$$

In questo caso il rapporto non solo è più maggiore di 1 ma è addirittura un *infinito*.

Definizione 1.8. Diremo che M è un **infinito di ordine superiore** a N se il rapporto tra M e N è un infinito:

$$M = \omega(N) \;\Leftrightarrow\; \frac{M}{N} = I$$

Diremo anche che N è un **infinito di ordine inferiore** a M.

A volte il confronto tra due Iperreali è meno immediato dei casi precedenti:

Esempio 1.13. Confrontare M e 2^M. Dobbiamo calcolare: $\frac{M}{2^M}$. Possiamo usare un duplice trucco:

- invece di confrontare M e 2^M confrontiamo M^2 e 2^M;
- invece che confrontare direttamente i due valori richiesti, vediamo come si comportano, con numeri naturali piccoli, le due funzioni $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2^x$

x^2	0	1	4	9	16	25	36
2^x	1	2	4	8	16	32	64

Possiamo vedere che dal quinto elemento in poi la prima successione è sempre maggiore della seconda ed essendo l'infinito più grande di cinque otteniamo che $2^M > M^2$ quindi possiamo scrivere:

$$\frac{M}{2^M} < \frac{M}{M^2} = \frac{1}{M} < 1$$

Ma $\frac{1}{M}$ è un infinitesimo quindi possiamo affermare che M è un infinito di ordine inferiore a 2^M.

In conclusione, possiamo confrontare fra di loro i numeri Iperreali utilizzando la differenza o il quoziente tra i numeri. L'uso del quoziente ci permette di ricavare un'informazione interessante l'ordine di infinitesimo o di infinito.

- un infinitesimo di ordine superiore è un infinitesimo infinitamente più piccolo;
- un infinito di ordine superiore è un infinito infinitamente più grande.

1.2.9 Indistinguibili

Quando risolviamo un problema pratico, a noi serve, alla fine dei calcoli, ottenere un numero razionale, con un certo numero di cifre significative. È chiaro che se il risultato di un calcolo è $4,37 + 5\varepsilon$ sostituire questo risultato con il più semplice 4,37 non ci fa perdere in precisione, in questo caso 5ε può essere trascurato. Ben diverso è se all'interno di un calcolo otteniamo: $\varepsilon + 5\varepsilon$, in questo caso non posso trascurare 5ε anche se è una quantità infinitesima.

In certi casi posso avere due espressioni diverse che, in prima approssimazione, possono essere considerate equivalenti. Quando è così dirò che i due numeri iperreali sono *indistinguibili*. Due numeri sono indistinguibili quando la differenza tra i due è infinitesima rispetto a ciascuno dei due.

Definizione 1.9. Due numeri si dicono **indistinguibili** (simbolo: ~) se il rapporto tra la loro differenza e ciascuno di essi è un infinitesimo:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{y-x}{x} = \varepsilon \quad \wedge \quad \frac{y-x}{y} = \delta\right)$$

❑ **Osservazione** È importante osservare che per poter applicare la definizione entrambi i numeri che vogliamo confrontare devono essere diversi da *zero*. Cioè nessun numero diverso da zero può essere considerato indistinguibile da zero: $\nexists\, x \neq 0 \mid x \sim 0$

Di seguito esploriamo i tre casi possibili.

Finiti non infinitesimi

Se due numeri finiti non infinitesimi differiscono per un infinitesimo, sono indistinguibili.

Teorema 1.4. *Due numeri x e y, finiti non infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se sono infinitamente vicini:*

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; x \sim y$$

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che se sono infinitamente vicini allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (x,\ y:\ \mathtt{fni} \wedge y = x + \varepsilon) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } x \sim y.$$

Dimostrazione

$$\frac{y-x}{x} = \frac{x-(x+\varepsilon)}{x} = \frac{\varepsilon}{x} = \gamma \quad \wedge \quad \frac{y-x}{x} = \frac{x-(x+\varepsilon)}{y} = \frac{\varepsilon}{y} = \delta$$

Il teorema inverso dirà:

$$\text{Ipotesi: } (x,\ y:\ \mathtt{fni} \wedge x \sim y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } x \approx y.$$

Dimostrazione

$$\frac{y-x}{x} = \varepsilon \;\Rightarrow\; y - x = \varepsilon x \;\Rightarrow\; x = y + \varepsilon x = y + \beta$$

□

Infinitesimi

Per quanto riguarda gli infinitesimi, non basta che siano infinitamente vicini infatti tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro. Per essere indistinguibili serve una condizione più ristretta.

Teorema 1.5. *Due numeri α e β, infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se la loro differenza è un infinitesimo di ordine superiore.*

$$\beta - \alpha = o(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \alpha \sim \beta$$

❑ **Osservazione** Se due infinitesimi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore allora sono dello stesso ordine, quindi la differenza sarà di ordine superiore sia al primo sia al secondo infinitesimo.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che se differiscono per un infinitesimo di ordine superiore allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (\alpha,\ \beta:\ \mathtt{inn} \wedge \beta = \alpha + o(\alpha)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } \alpha \sim \beta$$

Dimostrazione

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha-(\alpha+o(\alpha))}{\alpha}=\frac{o(\alpha)}{\alpha}=\gamma \quad \wedge \quad \frac{\beta-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha-(\alpha+o(\beta))}{\beta}=\frac{o(\beta)}{\beta}=\delta$$

Il teorema inverso dirà:

$$\text{Ipotesi: } (\alpha,\ \beta:\ inn \wedge \alpha \sim \beta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } \beta-\alpha=o(\alpha)$$

Dimostrazione

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\varepsilon \Rightarrow \beta-\alpha=\varepsilon\alpha \Rightarrow \beta-\alpha=o(\alpha)$$

□

Infiniti

La situazione si ribalta se i due numeri sono infiniti infatti, in questo caso, sono indistinguibili anche se differiscono di un valore finito o addirittura infinito.

Si può dimostrare il seguente

Teorema 1.6. *Due numeri* M *e* N*, infiniti, sono indistinguibili se e solo se la loro differenza è un finito o un infinito di ordine inferiore.*

$$M-N=a \Rightarrow M\sim N$$

e vale anche:

$$(M-N=P \text{ con } P \text{ infinito di ordine inferiore }) \Rightarrow M\sim N$$

Dimostrazione. Di seguito dimostriamo che se differiscono per un finito allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (M,\ N:\ I \wedge N=M+a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } M\sim N$$

Dimostrazione

$$\frac{M-N}{M}=\frac{M-(M+a)}{M}=-\frac{a}{M}=\varepsilon \quad \wedge \quad \frac{M-N}{N}=\frac{M-(N+a)}{N}=-\frac{a}{N}=\delta$$

In modo analogo si può procedere con la second parte del teorema. □

1.2.10 Principio di tranfer

Abbiamo applicato agli Iperreali le operazioni aritmetiche con grande naturalezza estendendo i metodi e i risultati che già conosciamo nei Reali. Ma è possibile fare ciò per qualunque funzione? Sì, è possibile assumere che per ogni funzione definita nei Reali esista una corrispondente funzione con dominio e codominio negli Iperreali che, ristretta ai Reali, coincida con la funzione reale. In questo modo tutto quello che è possibile fare con i numeri Reali lo si può fare anche con gli Iperreali.

❑ **Osservazione** Non vale il viceversa. Dato che gli Iperreali estendono i Reali, ci sono delle funzioni che, definite negli Iperreali, non hanno un valore corrispondente nei Reali. Ad esempio la funzione iperreale *parte standard* non ha una funzione corrispondente nei numeri reali.

Esempio 1.14. Consideriamo ad esempio la funzione: $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$
È facile costruire la funzione $^*f$ (*effe star*) con dominio e codominio negli Iperreali:
$^*f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R}$, definita per $x \neq 0$.
Ogni volta che $^*f$ è applicata a numeri standard (fni), si comporta come la funzione f, applicata a $x \in \mathbb{R}$; ma, in più, la funzione $^*f$:

- è definita anche per valori infinitamente vicini a zero e in questo caso dà come risultato un valore infinito che non è un numero reale;
- è definita anche per valori infiniti e in questo caso dà come risultato un valore infinitesimo che non è un numero reale.

1.3 Applicazioni

Dopo aver dato un'occhiata a cosa sono e come funzionano i numeri iperreali vediamo qualche problema che si può convenientemente risolvere con gli Iperreali.

1.3.1 Problemi con gli Iperreali

Esempio 1.15. Calcola l'area iperreale di una cornice quadrata, di lato interno pari a l e spessore infinitesimo ε. Calcola infine l'area reale.
Chiamiamo dS l'area iperreale della cornice: $dS = \left(l + \varepsilon^2\right) - l^2 = l^2 + 2l\varepsilon + \varepsilon^2 - l^2 = 2l\varepsilon + \varepsilon^2$.
Chiamiamo ΔS la corrispondente area reale: $\Delta S = \mathrm{st}\,(dS) = \mathrm{st}\left(2l\varepsilon + \varepsilon^2\right) = \mathrm{st}(2l\varepsilon) + \mathrm{st}(\varepsilon^2) = 0 + 0 = 0$.
Poiché la differenza di area dS è la somma di due infinitesimi, uno del primo e l'altro del secondo ordine, la parte standard di entrambi è nulla e la somma risulta nulla. In conclusione, se l'incremento del lato è infinitesimo, cioè infinitamente vicino a zero, a maggior ragione sarà infinitamente vicino a zero l'incremento dell'area.

Esempio 1.16. Calcola di quanto diminuisce rispetto al raggio una circonferenza di raggio r, quando il raggio subisce una contrazione infinitesima $dr = -\varepsilon$.
Chiamiamo dC (differenza di C) la contrazione della circonferenza: $dC = 2\pi r - 2\pi(r - \varepsilon) = 2\pi r - 2\pi r + 2\pi\varepsilon = 2\pi\varepsilon$. Dunque la circonferenza si riduce di un infinitesimo, cioè 0 in numeri standard. Ma se misuriamo la riduzione della circonferenza in termini di riduzione del raggio, si ha: $\frac{dC}{dr} = \frac{2\pi\varepsilon}{-\varepsilon} = -2\pi$: ogni unità di variazione del raggio, comporta una variazione della circonferenza pari a 2π.

Esempio 1.17. Quanto volume acquisisce un guscio sferico di raggio r nel gonfiarsi progressivamente?
Volume iniziale: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se il raggio aumenta e diventa $r + \varepsilon$, la variazione di volume sarà:
$V(r + \varepsilon) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$.
Per sapere quanto varia il volume per ogni variazione infinitesima di raggio, si calcola:

$\frac{dV}{dr} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon+3r\varepsilon^2+\varepsilon^3)}{\varepsilon} = \frac{4}{3}\pi(3r^2+3r\varepsilon+\varepsilon^2)$, che è un numero di tipo inn. La sua parte standard è $\operatorname{st}\left(\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi r^2$. Nota che questa è l'espressione dell'area della superficie sferica. Come era prevedibile, infatti, un guscio sferico di spessore infinitesimo approssima la superficie sferica.

1.3.2 Espressioni con gli Iperreali

I numeri iperreali semplificano la ricerca della soluzione di molti problemi. Il calcolo delle soluzioni ci porta a risultati espressi quasi sempre da numeri standard, che corrispondono ai reali. Infatti ,quasi sempre, il calcolo termina ricorrendo alla funzione st().
Questo metodo, cioè ricorrere ad un insieme più astratto di $\mathbb{R}$, svolgervi i calcoli secondo le nuove regole e alla fine esprimere i risultati in $\mathbb{R}$, sembra inutilmente complicato, ma in realtà semplifica la soluzione di molti problemi (come vedremo più avanti).

Vediamo, con alcuni esempi, come si possono applicare le regole presentate in precedenza al calcolo di espressioni contenenti numeri Iperreali. Di seguito richiamiamo le convenzioni già presentate:

- ➡ con le lettere greche minuscole indichiamo gli infinitesimi non nulli;
- ➡ con x, y, z indichiamo un numero iperreale qualsiasi;
- ➡ con le altre lettere latine minuscole indichiamo i numeri finiti non infinitesimi;
- ➡ con le lettere latine maiuscole indichiamo gli infiniti.;
- ➡ con $\operatorname{st}(x)$ indichiamo la parte standard di x.

Esempio 1.18. $\operatorname{st}\left(\frac{7-2\varepsilon}{9+3\delta}\right) \overset{1}{=} \frac{\operatorname{st}(7-2\varepsilon)}{\operatorname{st}(9+3\delta)} \overset{2}{=} \frac{\operatorname{st}(7-\alpha)}{\operatorname{st}(9+\beta)} \overset{3}{\sim} \operatorname{st}\left(\frac{7}{9}\right) \overset{4}{=} \frac{7}{9}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la parte standard di un quoziente, con il divisore finito non infinitesimo, è uguale al quoziente delle parti standard;
2. se ε e δ sono infinitesimi, anche 3ε e 2δ sono infinitesimi;
3. la somma algebrica di un numero non infinitesimo e un numero infinitesimo è indistinguibile dal numero non infinitesimo;
4. la parte standard di un numero reale è quel numero reale.

Esempio 1.19. $\operatorname{st}\left(\frac{4\varepsilon^4-7\varepsilon^3+\varepsilon^2}{5\varepsilon}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\left(4\varepsilon^3-7\varepsilon^2+\varepsilon\right)\varepsilon}{5\varepsilon}\right) \overset{2}{=}$

$\overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{4\varepsilon^3-7\varepsilon^2+\varepsilon}{5}\right) \overset{3}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\alpha}{5}\right) \overset{4}{=} \operatorname{st}(\beta) \overset{5}{=} 0$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. si può raccogliere ε al numeratore;
2. dato che ε è diverso da zero, si può semplificare la frazione;
3. i prodotti tra un finito e un infinitesimo sono infinitesimi e la somma di infinitesimi è un infinitesimo;
4. il quoziente tra un infinitesimo e un non infinitesimo è un infinitesimo;
5. la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 1.20. Allo stesso risultato si perviene utilizzando la relazione: *essere indistinguibili*:

$$\operatorname{st}\left(\frac{4\varepsilon^4-7\varepsilon^3+\varepsilon^2}{5\varepsilon}\right) \overset{1}{\sim} \operatorname{st}\left(\frac{\varepsilon^2}{5\varepsilon}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \overset{3}{=} 0$$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. tengo solo la parte principale del numeratore e del denominatore, cioè ignoro gli infinitesimi di ordine superiore;
2. riduco la frazione semplificando i fattori uguali;
3. il quoziente tra un infinitesimo e un non infinitesimo è un infinitesimo e la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 1.21. $\operatorname{st}\left(\frac{5\varepsilon-3\varepsilon^2+6\varepsilon^3}{2\varepsilon+4\varepsilon^2}\right) \overset{1}{\sim} \operatorname{st}\left(\frac{5\varepsilon}{2\varepsilon}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{5}{2}\right) \overset{3}{=} \frac{5}{2}$

1. Tengo solo la parte principale dei polinomi ottenendo un'espressione indistinguibile;
2. riduco la frazione semplificando i fattori uguali;
3. la parte standard di un numero reale è il numero stesso.

Esempio 1.22. $\operatorname{st}\left(\frac{-6\varepsilon^2+4\varepsilon^3-8\varepsilon^5}{7\varepsilon^3+2\varepsilon^4}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{-6\varepsilon^2}{7\varepsilon^3}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(-\frac{6}{7\varepsilon}\right) \xrightarrow{3} \infty$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. tengo solo la parte principale dei polinomi ottenendo un'espressione indistinguibile;
2. semplifico i fattori uguali;
3. il quoziente tra un finito e un infinitesimo non nullo è un infinito. L'infinito non ha parte standard ma viene indicato in analisi con il simbolo: ∞ (che, comunque, non è un numero reale).

❑ **Osservazione** In questo caso, se ε è positivo, l'infinito sarà negativo, se ε è negativo, l'infinito sarà positivo.

Esempio 1.23. $\operatorname{st}\left(\frac{-3H^2-4H}{2H^2+4H-3}\right) \overset{1}{\sim} \operatorname{st}\left(\frac{-3H^2}{2H^2}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{-3}{2}\right) \overset{3}{=} -\frac{3}{2}$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. teniamo la parte principale delle espressioni tenendo solo gli infiniti ordine maggiore;
2. semplifichiamo i fattori uguali al numeratore e al denominatore;
3. teniamo la parte standard.

Esempio 1.24. $\operatorname{st}((7-3\varepsilon)-(7+8\varepsilon))$

❑ **Osservazione** Si potrebbe pensare che essendo $7-3\varepsilon$ indistinguibile da 7 e $7+8\varepsilon$ indistinguibile da 7 la precedente espressione sia indistinguibile da $7-7=0$. Ma il concetto di indistinguibile non si può mai applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che $(7-3\varepsilon)-(7+8\varepsilon)\sim 0$ e tanto meno: $(7-3\varepsilon)-(7+8\varepsilon)=0$.

In questo caso la soluzione è semplice...
$\operatorname{st}((7-3\varepsilon)-(7+8\varepsilon)) \overset{1}{=} \operatorname{st}(7-3\varepsilon-7-8\varepsilon) \overset{2}{=} \operatorname{st}(-11\varepsilon) \overset{3}{=} 0$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:
1. semplifichiamo l'espressione eliminando le parentesi;

2. 7 e -7 si annullano;
3. la parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 1.25. $\sqrt{4H^2-3H}-\sqrt{4H^2+1}$

❑ **Osservazione** Anche qui si potrebbe pensare che essendo $4H^2-3H$ indistinguibile da $4H^2$ e $4H^2+1$ indistinguibile da $4H^2$ la precedente espressione sia indistinguibile da
$\sqrt{4H^2}-\sqrt{4H^2}=0$
Ma il concetto di indistinguibile, per come è definito, non si può mai applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che $\sqrt{4H^2-3H}-\sqrt{4H^2+1}\approx 0$.

In questo caso usiamo un trucco una specie di inverso della razionalizzazione:

$$\sqrt{4H^2-3H}-\sqrt{4H^2+1} \overset{1}{=} \left(\sqrt{4H^2-3H}-\sqrt{4H^2+1}\right)\cdot 1 \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \left(\sqrt{4H^2-3H}-\sqrt{4H^2+1}\right)\cdot \frac{\sqrt{4H^2-3H}+\sqrt{4H^2+1}}{\sqrt{4H^2-3H}+\sqrt{4H^2+1}} \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} \frac{\cancel{4H^2}-3H-\cancel{4H^2}-1}{\sqrt{4H^2-3H}+\sqrt{4H^2+1}} \overset{4}{\sim} \frac{-3H}{\sqrt{4H^2}+\sqrt{4H^2}} \overset{5}{=} \frac{-3\cancel{H}}{4\cancel{H}} = -\frac{3}{4}$$

Dove le uguaglianze hanno i seguenti motivi:

1. la prima uguaglianza è banale essendo 1 l'elemento neutro della moltiplicazione;
2. al posto del numero 1 sostituiamo una frazione con il numeratore e il denominatore uguali;
3. eseguendo il prodotto magari tenendo conto di uno dei prodotti notevoli imparati in prima otteniamo questa frazione;
4. tenendo conto che $+H$ e $-H$ si annullano otteniamo una nuova frazione che, a prima vista non sembra aver semplificato il problema iniziale, ma a denominatore non ho una differenza tra due radici ma una somma e quindi posso ottenere un'espressione più semplice indistinguibile da quella originale;
5. estraiamo le radici, sommiamo, semplifichiamo.

1.4 Esercizi

1.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

1.1. Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

1.2. Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Esempio: $\sqrt{3}$: $A = \{1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205\}$, $B = \{2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206\}$

a) $\sqrt{5}$: $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
b) $\dfrac{6}{7}$: $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
c) $\dfrac{1}{7}$: $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

1.3. Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

1.4. Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio: $5 < \sqrt{30} < 6$

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{47}$
c) $\sqrt{91}$
d) $\sqrt{73}$
e) $\sqrt{107}$
f) $\sqrt{119}$
g) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
h) $2\sqrt{7}$
i) $2 + \sqrt{7}$
j) $\sqrt{20} - \sqrt{10}$
k) $\sqrt{\frac{7}{10}}$
l) $7 + \sqrt{\frac{1}{2}}$

1.5. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

a) $\sqrt{2}$, 1, $\dfrac{2}{3}$, $2,0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\dfrac{3}{2}$ $0,75$
b) π, $\sqrt{3}$, $\dfrac{11}{5}$, $0,\overline{9}$, $\sqrt{10}$, $3,1\overline{4}$, $\sqrt[3]{25}$

1.6. Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π, $0,\overline{3}$, $3,14$, $\frac{3}{2}$, -2

1.7. Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale;
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale;
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

1.2 I numeri iperreali $^*\mathbb{R}$

Di seguito sono riportate alcune domande, scrivi sul quaderno una risposta e poi confrontala con quella riportata sotto.

Domande [1]

1.8. Enunciare l'assioma di Eudosso-Archimede per i segmenti e discutere in quale senso esso esclude l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.

1.9. Cosa intendiamo per numeri standard e per segmenti standard?

1.10. Che cos'è un segmento infinitesimo?

1.11. Che cos'è un segmento infinito?

1.12. Che cos'è un segmento finito?

1.13. Che cos'è un segmento non infinitesimo?

1.14. Che cos'è un segmento finito non infinitesimo?

1.15. Che cos'è un numero infinitesimo?

1.16. Che cos'è un numero infinito?

1.17. Che cos'è un numero finito?

1.18. Che cos'è un numero non infinitesimo?

1.19. Che cos'è un numero finito non infinitesimo?

1.20. Cosa sono i numeri iperreali?

1.21. Che cos'è la retta iperreale?

1.22. Come vengono classificati in tipi i numeri iperreali?

1.23. Come si comportano i tipi di numeri iperreali con le operazioni aritmetiche?
Addizione/sottrazione:
Moltiplicazione:
Reciproco:
Divisione:

1.24. Che cosa si intendono per forme indeterminate?

1.25. Quando due numeri si dicono infinitamente vicini($\approx$)?

1.26. Di quali proprietà gode la relazione $x \approx y$?

1.27. Che cos'è una monade e che cosa si intende per monade principale?

1.28. Quando due numeri si dicono a distanza finita ($\approx$)?

1.29. Di quali proprietà gode la relazione $x \approx y$?

1.30. Che cos'è una galassia e che cosa si intende per galassia principale?

1.31. Come si confrontano due infinitesimi non nulli?

1.32. Come si confrontano due infiniti?

1.33. Che cos'è la parte standard di un numero finito?

1.34. Elencare le proprietà salienti della parte standard.

1.35. Quando due numeri non nulli si dicono indistinguibili ($\sim$)?

1.36. Di quali proprietà gode la relazione $x \sim y$?

1.37. Quando sostituiamo il simbolo $\sim$ con quello di uguaglianza?

1.38. Che cosa si intende per microscopio standard?

1.39. Che cosa si intende per telescopio standard?

[1] Queste domande e le rispettive risposte sono state messe a disposizione dal prof. Giorgio Goldoni

1.40. Che cosa si intende per zoom standard?

1.41. Che cosa si intende per microscopio non-standard?

1.42. Che cosa si intende per telescopio non-standard?

1.43. Che cosa si intende per zoom non-standard?

1.44. Cosa intendiamo per scala naturale di ingrandimento?

1.45. Come possiamo visualizzare un numero infinitesimo non nullo sulla retta iperreale?

1.46. Come possiamo visualizzare un numero infinito sulla retta iperreale?

1.47. Come possiamo visualizzare un numero finito non infinitesimo sulla retta iperreali?

1.48. Come possiamo visualizzare il fatto che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ?

1.49. Come possiamo visualizzare il fatto che ε e δ sono due infinitesimo dello stesso ordine?

1.50. Come possiamo visualizzare il fatto che M è un infinito di ordine superiore a N?

1.51. Come possiamo visualizzare il fatto che M e N sono due infiniti dello stesso ordine?

Risposte

1.8 *Enunciare l'assioma di Eudosso-Archimede per i segmenti e discutere in quale senso esso esclude l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.*

Assioma di Eudosso-Archimede: Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore o, equivalentemente, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. L'assioma nega l'esistenza di segmenti infiniti poiché afferma che, fissato un segmento arbitrario come unità di misura, ogni segmento, per quanto grande, risulta superato da un opportuno multiplo finito dell'unità di misura. Equivalentemente, esso nega l'esistenza di segmenti infinitesimi in quanto afferma che ogni segmento, per quanto piccolo, risulta maggiore di un opportuno sottomultiplo finito dell'unità di misura.

1.9 *Cosa intendiamo per numeri standard e per segmenti standard?*

I numeri standard sono i numeri reali $\mathbb{R}$ e i segmenti standard sono i segmenti la cui misura può essere espressa mediante un numero reale positivo.

1.10 *Che cos'è un segmento infinitesimo?*

Un segmento infinitesimo è un segmento minore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinitesimo.

1.11 *Che cos'è un segmento infinito?*

Un segmento infinito è un segmento maggiore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinito.

1.12 *Che cos'è un segmento finito?*

Un segmento finito è un segmento non infinito e quindi un segmento minore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi segmenti finiti.

1.13 *Che cos'è un segmento non infinitesimo?*

Un segmento non infinitesimo è un segmento maggiore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi non infinitesimi.

1.14 *Che cos'è un segmento finito non infinitesimo?*

Un segmento finito non infinitesimo è un segmento compreso tra due segmenti standard. Tutti i segmenti standard sono quindi finiti non infinitesimi.

1.15 *Che cos'è un numero infinitesimo?*

Un numero infinitesimo è un numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo. L'unico numero standard infinitesimo è lo zero.

1.16 *Che cos'è un numero infinito?*

Un numero infinito è un numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard. Nessun numero standard è quindi infinito.

1.17 *Che cos'è un numero finito?*

Un numero finito è un numero non infinito e quindi un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard. Tutti i numeri standard sono quindi numeri finiti.

1.18 *Che cos'è un numero non infinitesimo?*

Un numero non infinitesimo è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi non infinitesimi.

1.19 *Che cos'è un numero finito non infinitesimo?*

Un numero finito non infinitesimo è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi finiti non infinitesimi.

1.20 *Cosa sono i numeri iperreali?*

Negando l'Assioma di Eudosso/Archimede, accettiamo l'esistenza di segmenti maggiori di ogni multiplo dell'unità di misura e minori di ogni suo sottomultiplo e accettiamo quindi l'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi. Analogamente, accettiamo l'esistenza di numeri infiniti e infinitesimi. I numeri che si ottengono combinando i numeri standard con i numeri infiniti e infinitesimi mediante le operazioni aritmetiche sono chiamati numeri iperreali e il loro insieme si indica con $^*\mathbb{R}$.

1.21 *Che cos'è la retta iperreale?*

La retta iperreale è una retta i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i numeri iperreali.

1.22 *Come vengono classificati in tipi i numeri iperreali?*

I numeri iperreali si dividono in *finiti* (f) e *infiniti* (I). I finiti a loro volta si dividono in *finiti non infinitesimi* (fni) e in *infinitesimi* (i) e questi ultimi in *infinitesimi non nulli* (inn) e lo *zero*. Si distinguono quindi quattro tipi di iperreali:

- infiniti,
- finiti non infinitesimi,
- infinitesimi non nulli,
- zero.

1.23 *Come si comportano i tipi di numeri iperreali con le operazioni aritmetiche?*

Addizione/sottrazione:	Moltiplicazione:	Reciproco:	Divisione:
$\text{inn} \mp \text{inn} = \text{i}$	$\text{inn} \times \text{inn} = \text{inn}$	$\frac{1}{\text{inn}} = \text{I}$	$\text{inn} : \text{fni} = \text{inn}$
$\text{inn} \mp \text{fni} = \text{fni}$	$\text{inn} \times \text{fni} = \text{inn}$	$\frac{1}{\text{fni}} = \text{fni}$	$\text{inn} : \text{I} = \text{inn}$
$\text{inn} \mp \text{I} = \text{I}$	$\text{fni} \times \text{fni} = \text{fni}$	$\frac{1}{\text{I}} = \text{inn}$	$\text{fni} : \text{inn} = \text{I}$
$\text{fni} \mp \text{fni} = \text{f}$	$\text{fni} \times \text{I} = \text{I}$		$\text{fni} : \text{fni} = \text{fni}$
$\text{fni} \mp \text{I} = \text{I}$	$\text{I} \times \text{I} = \text{I}$		$\text{fni} : \text{I} = \text{inn}$
			$\text{I} : \text{inn} = \text{I}$
			$\text{I} : \text{fni} = \text{I}$

1.24 *Che cosa si intendono per forme indeterminate?*

Si chiamano forme indeterminate le operazioni per le quali la sola conoscenza dei tipi degli operandi non consente di determinare il tipo del risultato. Le forme indeterminate relative alle operazioni aritmetiche sono: $\text{I} \mp \text{I}$; $\text{inn} \times \text{I}$; $\text{inn} : \text{inn}$; $\text{I} : \text{I}$.

1.25 *Quando due numeri si dicono infinitamente vicini?*

Due numeri si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo. Indichiamo il fatto che x è infinitamente vicino a y con $x \approx y$. In particolare un numero x è infinitesimo se e solo se $x \approx 0$.

1.26 *Di quali proprietà gode la relazione* $x \approx x$?

La relazione $x \approx x$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ed è dunque una relazione di equivalenza. In simboli:

$x \approx x; \quad x \approx y \Rightarrow y \approx x; \quad x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$

Inoltre, se due numeri sono infinitamente vicini allora sono dello stesso tipo.

1.27 *Che cos'è una monade e che cosa si intende per monade principale?*

La monade di un numero è l'insieme di tutti i numeri infinitamente vicini ad esso ed è quindi una classe di equivalenza della relazione $x \approx y$. Ne segue che due monadi sono sempre disgiunte o coincidenti e che le monadi formano una partizione dei numeri iperreali. In particolare la monade di un numero standard x consiste, oltre che del numero stesso, di tutti i numeri non standard ad esso infinitamente vicini, cioè dei numeri del tipo $x + \varepsilon$. La monade principale è la monade dello zero, che è costituita esattamente da tutti gli infinitesimi. Indichiamo la monade di x con $\text{mon}\,(x)$.

1.28 *Quando due numeri si dicono a distanza finita?*

Due numeri si dicono a distanza finita quando la loro differenza è un numero finito. Per indicare che due numeri x e y sono a distanza finita scriviamo $x \approx y$.

1.29 *Di quali proprietà gode la relazione* $x \approx y$?

La relazione gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza. In simboli:

$x \approx x;$

$x \approx y \Rightarrow y \approx x;$

$x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z.$

Se un numero è a distanza finita da un finito è finito, se è a distanza finita da un infinito è un infinito.

1.30 *Che cos'è una galassia e che cosa si intende per galassia principale?*

Due numeri si dicono appartenere a una stessa galassia se sono a distanza finita tra loro. Una galassia è dunque una classe di equivalenza rispetto alla relazione di essere a distanza finita. In particolare, tutti i numeri standard appartengono a una stessa galassia, detta galassia principale. Indichiamo la galassia del numero x con $\text{Gal}\,(x)$.

1.31 *Come si confrontano due infinitesimi non nulli?*

Per confrontare due infinitesimi non nulli ε e δ si considera il loro quoziente $\frac{\varepsilon}{\delta}$.

Se è:

infinitesimo diciamo che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine inferiore a ε e scriviamo $\varepsilon = o(\delta)$.

finito non infinitesimo diciamo che ε e δ sono infinitesimi dello stesso ordine e scriviamo $\varepsilon = O(\delta)$ o $\delta = O(\varepsilon)$.

infinito allora diciamo ε è un infinitesimo di ordine inferiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine superiore a ε e scriviamo $\delta = o(\varepsilon)$.

1.32 *Come si confrontano due infiniti?*

Dati due infiniti M e N si considera il loro quoziente $\frac{M}{N}$.

Se è:

infinito diciamo che M è un infinito di ordine superiore a N o che N è un infinito di ordine inferiore a M e scriviamo $M \gg N$ o $N \ll M$.

finito non infinitesimo diciamo che M e N sono infiniti dello stesso ordine e scriviamo $M = O(N)$ o $N = O(M)$.

infinitesimo diciamo M è un infinito di ordine inferiore a N o che N è un infinito di ordine superiore a M e scriviamo $M \ll N$ o $N \gg M$.

1.33 *Che cos'è la parte standard di un numero finito?*

Ogni numero finito risulta infinitamente vicino a un numero standard, detto appunto sua parte standard. In altre parole, ogni numero finito x può essere scritto in modo unico nella forma $x = s + \varepsilon$, dove s è standard e ε è un infinitesimo eventualmente nullo. La parte standard di x si indica con $\mathrm{st}\,(x)$.

1.34 *Elencare le proprietà salienti della parte standard.*

Indicando con a e b due numeri finiti (eventualmente infinitesimi o nulli):

$\mathrm{st}(a) = a \Leftrightarrow a$ è standard
$\mathrm{st}(a) = 0 \Leftrightarrow a$ è infinitesimo
$\mathrm{st}(a \pm b) = \mathrm{st}(a) \pm \mathrm{st}(b)$
$\mathrm{st}(ab) = \mathrm{st}(a)\,\mathrm{st}(b)$
$\mathrm{st}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\mathrm{st}(a)}{\mathrm{st}(b)}$
$\mathrm{st}(a) > 0 \Rightarrow a > 0$
$a > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{st}(a) \geqslant 0$

1.35 *Quando due numeri non nulli si dicono indistinguibili?*

Due numeri non nulli si dicono indistinguibili se il loro rapporto è infinitamente vicino all'unità o, equivalentemente, se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi. Indichiamo il fatto che x è indistinguibile da y con $x \sim y$. In simboli $x \sim y$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $\dfrac{x}{y} \approx 1$
- $\mathrm{st}\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$
- $\dfrac{x-y}{x} \approx 0$
- $\dfrac{x-y}{y} \approx 0$

1.36 *Di quali proprietà gode la relazione $x \sim y$?*

Si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva e quindi di una relazione di equivalenza sugli iperreali non nulli. In simboli:

- $x \sim x$
- $x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$
- $x \sim y \,\wedge\, y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$

Inoltre, se due numeri sono indistinguibili allora sono dello stesso tipo, cioè entrambi infinitesimi, finiti non infinitesimi o infiniti.

1.37 *Quando sostituiamo il simbolo $\sim$ con quello di uguaglianza?*

Quando siamo portati a identificare due numeri indistinguibili e, in questo caso, sostituiamo un numero con uno da esso indistinguibile e il più possibile semplice.

1.38 *Che cosa si intende per microscopio standard?*

Per microscopio standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere una porzione di retta ingrandita di un fattore n. Il microscopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

1.39 *Che cosa si intende per telescopio standard?*

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte remota di retta nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

1.40 *Che cosa si intende per zoom standard?*

Per zoom standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita di un fattore n. Lo zoom standard può esser utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

1.41 *Che cosa si intende per microscopio non-standard?*

Per microscopio non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere un'opportuna porzione della monade di quel numero. Il microscopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

1.42 *Che cosa si intende per telescopio non-standard?*

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte di retta a distanza infinita nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

1.43 *Che cosa si intende per zoom non-standard?*

Per zoom non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita in modo tale da far entrare nel campo visivo numeri infiniti. Lo zoom non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

1.44 *Cosa intendiamo per scala naturale di ingrandimento?*

Una scala di rappresentazione della retta in cui il punto di coordinata 1 sia visibile e ben distinguibile dallo zero.

1.45 *Come possiamo visualizzare un numero infinitesimo non nullo sulla retta iperreale?*

Un numero infinitesimo non nullo può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero e che non può essere separato dallo zero con nessun microscopio standard. Occorre invece un microscopio non-standard per separarlo dallo zero.

1.46 *Come possiamo visualizzare un numero infinito sulla retta iperreale?*

Un numero infinito può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta esterno al campo visivo e che non può essere fatto entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Occorre invece uno zoom non-standard per farlo entrare nel campo visivo.

1.47 *Come possiamo visualizzare un numero finito non infinitesimo sulla retta iperreali?*

Un numero finito non infinitesimo può essere visualizzato come un numero che già nella scala naturale rientra nel campo visivo e ben separato dallo zero; oppure come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero, ma che è separabile con un microscopio standard; infine, come un numero che nella scala naturale non rientra nel campo visivo, ma che possiamo far rientrare nel campo visivo di uno zoom standard.

1.48 *Come possiamo visualizzare il fatto che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ?*

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero in numero δ, mentre il numero ε risulta non separato dallo zero e non si riesce a separarlo con nessun microscopio standard. In altri termini, nella scala in cui δ risulta visibile e separato dallo zero, ε risulta infinitesimo.

1.49 *Come possiamo visualizzare il fatto che ε e δ sono due infinitesimo dello stesso ordine?*

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a separane solo uno, mentre l'altro risulta ancora non separato dallo zero, ma basta un microscopio standard per separare anche il secondo.

1.50 *Come possiamo visualizzare il fatto che M è un infinito di ordine superiore a N?*

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli rientrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non standard possiamo far rientrare nel campo visivo in numero N, mentre il numero M continua a rimanere esterno al campo visivo e non si riesce a far rientrare con nessuno zoom standard. In altri termini, nella scala in cui N risulta visibile e separato dallo zero, M risulta infinito.

1.51 *Come possiamo visualizzare il fatto che M e N sono due infiniti dello stesso ordine?*

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non-standard riusciamo a far rientrare nel campo visivo e separati dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a farne entrare solo uno, separato dallo zero, mentre l'altro risulta ancora esterno al campo visivo, ma basta uno zoom standard per far rientrare anche il anche il secondo.

1.2.7 Operazioni

Nei problemi di questa sezione si assuma che: $\varepsilon, \delta \ldots$ siano *inn* postivi, $H, K, \ldots$ siano *I* postivi.

1.52. Determina se le seguenti espressioni sono equivalenti a un numero *inn*, *fni*, *I*.

a) $7,3 \cdot 10^23 \cdot \varepsilon$
b) $8 + \dfrac{1}{\varepsilon}$
c) $\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$
d) $\dfrac{H}{9^{9^9}}$
e) $\dfrac{5\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4}{7\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon}$
f) $(3+\varepsilon)(3-\varepsilon) - 6$
g) $\dfrac{4\varepsilon - 5\varepsilon^2}{2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3}$
h) $\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}$
i) $\dfrac{4}{5\varepsilon} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{6}$
j) $\dfrac{H+K}{HK}$
k) $H^2 - H$
l) $\dfrac{5H^4 - 4H + 7}{7H^3 - 4}$
m) $\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{4+\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$
n) $7\varepsilon + 5\delta$
o) $3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 4$
p) $(5-\varepsilon)^2 - 25$
q) $\dfrac{5\varepsilon^3 + 7\varepsilon^4}{2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4}$
r) $\dfrac{\sqrt{\varepsilon} - 4\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + 3}$
s) $\dfrac{H - 7 + \varepsilon}{H^2 + 3\varepsilon}$

1.3.2 Espressioni con gli Iperreali

1.53. Esegui i seguenti calcoli nell'insieme degli $^*\mathbb{R}$ sapendo che x è un infinitesimo non nullo.

a) $\mathrm{st}\,(9 - 3x)$
b) $\mathrm{st}\,(5 + 2x - x^2)$
c) $\mathrm{st}\,(7 + 2x^3)$
d) $\mathrm{st}\,(2 + 8x + x^2)$
e) $\mathrm{st}\left(\dfrac{2-5x}{6+7x}\right)$
f) $\mathrm{st}\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}\right)$
g) $\mathrm{st}\left(\dfrac{x^4 - x^2 + 4x}{3x^2 - 2x - 3}\right)$
h) $\mathrm{st}\left(\dfrac{x^4 - x^3 + x^2}{2x^2}\right)$
i) $\mathrm{st}\left(\dfrac{4x^4 - 3x^3 + 2x^2}{3x^4 - 2x^3 + x^2}\right)$
j) $\mathrm{st}\left((2+x)\left(3-x^2\right)\right)$

1.54. Esegui i seguenti calcoli nell'insieme degli $^*\mathbb{R}$ sapendo che x è un infinito positivo.

a) $\mathrm{st}\,(9 - 3x)$
b) $\mathrm{st}\,(5 + 2x - x^2)$
c) $\mathrm{st}\left(\dfrac{2x+4}{3x-6}\right)$
d) $\mathrm{st}\left(\dfrac{6x-7}{x^2+2}\right)$
e) $\mathrm{st}\left(\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2+1}\right)$
f) $\mathrm{st}\left(\dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{4x^4 + 2x^2 - 1}\right)$
g) $\mathrm{st}\left(\dfrac{x^4 - x^2 + 4x}{-3x^2 - 2x - 3}\right)$
h) $\mathrm{st}\left(\dfrac{x^4 - x^3 + x^2}{2x^2}\right)$
i) $\mathrm{st}\left(\dfrac{-4x^4 - 3x^3 + 2x^2}{3x^4 - 2x^3 + x^2}\right)$
j) $\mathrm{st}\left((2+x)\left(3-x^2\right)\right)$