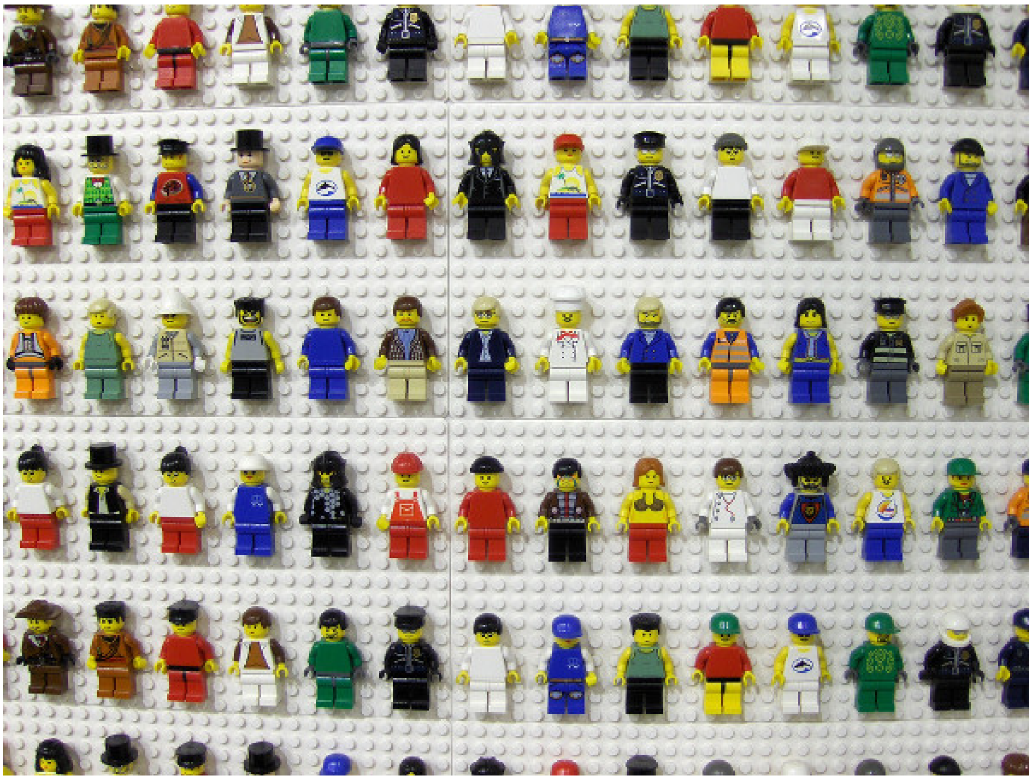
Geometria analitica



"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

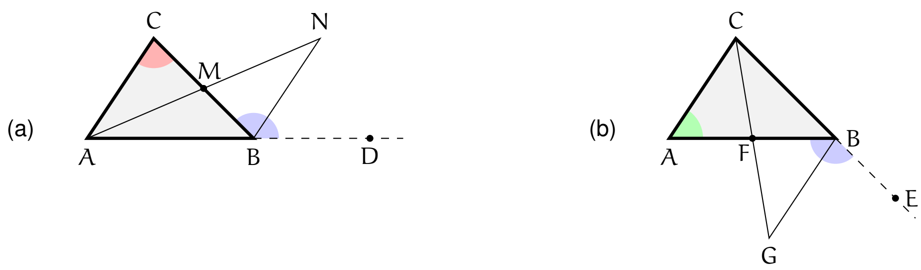
Rette parallele 1

"Intersection de deux parallèles"
Foto di OliBac
http://www.flickr.com/photos/olibac/3244014009/

1.1 Primo teorema dell'angolo esterno

Ricordiamo che un angolo esterno di un poligono è un angolo che ha come vertice un vertice del poligono ed è adiacente ad un angolo interno.

Teorema 1.1 (dell'angolo esterno). *In un triangolo, un angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.*



Dimostrazione. Sia ABC un triangolo (figura a). Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un qualsiasi punto D sul prolungamento. Vogliamo dimostrare che l'angolo $C\widehat{B}D$ è maggiore sia dell'angolo $C\widehat{A}B$ sia dell'angolo $A\widehat{C}B$. A tal fine prendiamo il punto medio del lato CB, lo chiamiamo M; uniamo A con M e prolunghiamo AM dalla parte di M, prendendo un punto N sul prolungamento in modo che AM sia congruente a MN; uniamo N con B.

Osserviamo che i triangoli AMC e BNM sono congruenti per il primo criterio, infatti: $CM \cong MB$ perché M è un punto medio per costruzione, $AM \cong MN$ per costruzione e $C\widehat{M}A \cong B\widehat{M}N$ perché opposti al vertice. Di conseguenza i restanti elementi dei due triangoli sono ordinatamente congruenti, in particolare $A\widehat{C}M \cong M\widehat{B}N$. Ma l'angolo $M\widehat{B}N$ è una parte propria dell'angolo esterno $C\widehat{B}D$ che risulta pertanto maggiore di $M\widehat{B}N$ e dell'angolo interno di vertice C.

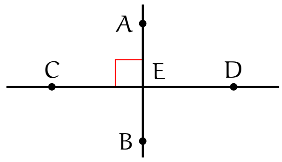
Rimane ora da dimostrare che $C\widehat{B}D$ è anche maggiore di $C\widehat{A}B$ ma per farlo occorre un'altra costruzione (figura b). Prolunghiamo il segmento CB dalla parte di B viene individuato un altro angolo esterno $A\widehat{B}E$, che però è congruente al precedente: è anch'esso adiacente all'angolo interno di vertice B ed è opposto al vertice di $C\widehat{B}D$. Usiamo tale angolo ed una costruzione analoga alla precedente a partire dal punto medio F del segmento AB e dal punto G sul prolungamento di CF, con $CF \cong FG$, in modo da ottenere, dal confronto dei triangoli congruenti AFC e FGB, che l'angolo interno di vertice A è congruente all'angolo $F\widehat{B}G$ che è una parte propria dell'angolo esterno di vertice B, $A\widehat{B}E \cong C\widehat{B}D$. □

1.2 Rette perpendicolari

Ricordiamo che due rette giacenti su uno stesso piano si dicono *perpendicolari* se si incontrano dividendo il piano in quattro angoli congruenti. In realtà è sufficiente sapere che uno dei quattro angoli che si vengono a formare è retto, per concludere che sono tutti retti.

Proprietà 1.2. *Siano AB e CD due rette incidenti di intersezione E, se risulta che l'angolo $A\widehat{E}C$ è retto, allora sono retti anche gli angoli $A\widehat{E}D$, $B\widehat{E}C$ e $B\widehat{E}D$.*

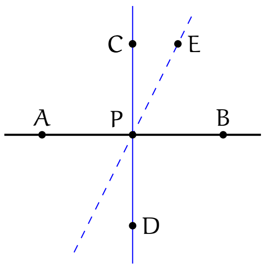
Dimostrazione.
L'angolo $A\widehat{E}D$ è retto perché adiacente all'angolo retto $A\widehat{E}C$.
L'angolo $D\widehat{E}B$ è retto perché opposto al vertice all'angolo retto $A\widehat{E}C$.
L'angolo $C\widehat{E}B$ è retto perché adiacente all'angolo retto $A\widehat{E}C$. □



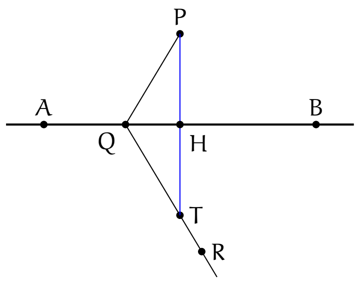
Quindi, se due rette incidenti formano un angolo retto allora tutti gli angoli che si formano sono retti.

L'esistenza e l'unicità della perpendicolare sono assicurate dal seguente teorema.

Teorema 1.3. *Nel piano, data una retta ed un punto, esiste ed è unica la retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.*



(a)



(b)

Dimostrazione. Per la dimostrazione, distinguiamo due casi.

Primo caso: il punto appartiene alla retta (figura a). Sia AB una retta del piano e sia P un suo punto. Allora se tracciamo la bisettrice dell'angolo piatto $A\widehat{P}B$, questa è certamente perpendicolare ad AB, in quanto i due angoli che si vengono a formare sono retti. Prolungando questa bisettrice, si viene a formare una retta CD perpendicolare ad AB. Supponiamo per assurdo che la retta CD non sia l'unica perpendicolare ad AB passante per il punto P ma che ne esista un'altra. Detto E un punto su tale ipotetica retta distinto da P, se E appartenesse anche alla retta CD, allora PE coinciderebbe con CD, quindi PE non sarebbe distinta dalla retta CD; se invece E non appartenesse a CD, unendo E con P si verrebbero a formare due angoli $A\widehat{P}E$ e $E\widehat{P}B$ di cui uno acuto ed uno ottuso e quindi la retta EP non risulterebbe perpendicolare ad AB.

Secondo caso: il punto non appartiene alla retta (figura b). Sia AB una retta nel piano e sia P un punto del piano non appartenente ad essa. Costruiamo la perpendicolare ad AB passante per P e dimostriamo che è unica. Possiamo prendere un punto Q appartenente ad AB e congiungere P con Q. Se gli angoli $A\widehat{Q}P$ e $P\widehat{Q}B$ sono retti, abbiamo già trovato la perpendicolare. Altrimenti, vuol dire che gli angoli $A\widehat{Q}P$ e $P\widehat{Q}B$ sono uno acuto ed uno ottuso. Tracciamo la semiretta QR, di origine Q e giacente nel semipiano individuato da AB non contenente il punto P: essa lo divide in due angoli, $A\widehat{Q}R$ e $R\widehat{Q}B$, rispettivamente congruenti a $A\widehat{Q}P$ e $P\widehat{Q}B$. Prendiamo un punto T su tale semiretta in modo che $QT \cong QP$. Uniamo P con T e chiamiamo H il punto di intersezione tra PT ed AB. Allora il triangolo QPT è isoscele sulla base PT e il segmento QH è la bisettrice dell'angolo al vertice $P\widehat{Q}T$, che risulta pertanto essere anche mediana ed altezza relativa alla base PT. Dunque gli angoli $P\widehat{H}Q$ e $T\widehat{H}Q$ sono retti e quindi la retta PT è perpendicolare ad AB. Abbiamo quindi trovato la perpendicolare ad AB passante per P. Per dimostrare che è unica possiamo ricorrere al ragionamento fatto nel primo caso, dove ora H è il punto P della dimostrazione precedente.

Il teorema è pertanto dimostrato. □

1.3 Rette parallele

Secondo la definizione di Euclide, due rette nel piano sono parallele se non hanno punti in comune. In maniera più moderna il concetto di parallelismo è interpretato come l'avere la stessa direzione. Si può anche dare una formulazione che unifichi le due definizioni precedenti; si deve però ricorrere al concetto di distanza: due rette nel piano sono parallele se mantengono sempre la stessa distanza. Se la distanza è nulla, le due rette sono coincidenti. Noi utilizzeremo la seguente:

Definizione 1.1. Due rette giacenti nello stesso piano si dicono *parallele* se sono coincidenti oppure non si incontrano mai.

Assumendo dunque questa come definizione di parallelismo, abbiamo bisogno di precisare il concetto di distanza. Dati due punti P e Q, la *distanza* tra P e Q è la lunghezza del *percorso più breve* che unisce i due punti. Questo concetto è valido anche se si riferisce alle distanze tra due città che si trovano negli stradari: sono riportate le lunghezze dei percorsi minimi tra tutte le strade alternative che collegano due città. Naturalmente, nel piano, ove si "dispone" di tutti i punti da poter "attraversare", il percorso più breve che collega due punti P e Q è il segmento PQ; quindi nella geometria euclidea assumiamo come distanza tra due punti la lunghezza del segmento avente per estremi i due punti.

Se vogliamo parlare di distanza tra due insiemi di punti, allora va considerato il percorso più breve tra tutti i percorsi che collegano un qualsiasi punto del primo insieme con un qualsiasi punto del secondo: in pratica la distanza è la lunghezza del più piccolo segmento tra tutti quelli che collegano i due insiemi di punti.

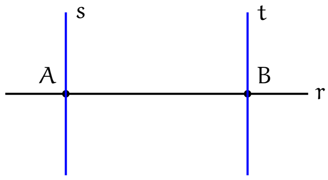
Nel caso particolare di un punto A ed una retta BC, se il punto appartiene alla retta allora la distanza di A da BC è uguale a zero, altrimenti si considera come distanza la lunghezza del segmento AH, dove H è il punto in cui la perpendicolare a BC passante per A interseca la stessa retta BC: il motivo si intuisce in base a quanto detto, ma risulterà chiaro più avanti, quando affronteremo lo studio delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Analogamente, come distanza tra due rette parallele si assume la lunghezza di un qualunque segmento che unisce il punto di una delle due rette con il piede della perpendicolare mandata da esso sull'altra retta. Affermare che tali segmenti sono tutti congruenti è un modo più preciso per dire che le due rette mantengono sempre la stessa distanza.

Ricordiamo la versione "moderna" del V Postulato di Euclide: *dati una retta r ed un punto P, allora esiste una ed una sola retta parallela ad r e passante per P.*

Proposzione 1.4. *Se due rette nel piano sono perpendicolari alla stessa retta, esse sono parallele tra loro.*

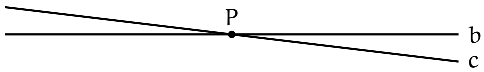
Dimostrazione. Sia r una retta, e siano s e t due rette, entrambe perpendicolari ad r. Se s e t intersecano r nello stesso punto P, allora per il teorema precedente necessariamente coincidono, e dunque sono parallele, secondo la nostra definizione di parallelismo.



Consideriamo ora il caso in cui s e t intersecano r in due punti distinti, rispettivamente A e B. Supponendo per assurdo che s e t si intersechino in un punto C, risulterebbero due distinte rette passanti per C e perpendicolari alla stessa retta, assurdo per il teorema precedente. Dunque deve risultare $s \parallel t$. □

Analoghe proprietà valgono per rette parallele e per rette incidenti qualunque. Precisamente:

Proposzione 1.5. *Siano date due rette parallele, se una terza retta è parallela ad una delle due, è parallela anche all'altra; inoltre, ogni retta che interseca una delle due, interseca anche l'altra.*



Dimostrazione. Siano a, b, c tre rette, con $a \parallel b$. Se a coincide con b, la tesi è banale. Supponiamo quindi che a e b non abbiano punti in comune. Vogliamo dimostrare che se $c \parallel a$ allora $c \parallel b$. La tesi è banale se c coincide con a oppure con b. Supponiamo dunque che c sia distinta da entrambe. Dimostriamo che se c non ha punti in comune con a, allora non può avere punti in comune neppure con b. Se per assurdo c avesse un punto P in comune con b, allora esisterebbero due rette distinte passanti per P entrambe parallele alla stessa retta a, cosa che contraddice il V postulato di Euclide.

Dimostriamo ora che se c interseca la retta a allora interseca anche la retta b. Detto Q il punto di intersezione tra le rette a e c, se per assurdo c non intersecasse la retta b, cioè se fosse $c \parallel b$, allora a e c sarebbero due rette distinte passanti per Q entrambe parallele alla retta b, contrariamente a quanto dice il V postulato di Euclide. □

❑ **Osservazione** La proposizione precedente rappresenta una sorta di proprietà transitiva del parallelismo. In realtà si è scelto di considerare parallele sia rette nel piano che non hanno punti in comune sia rette coincidenti proprio per fare in modo che la relazione di parallelismo sia una relazione di equivalenza: riflessiva, simmetrica, transitiva. Con la definizione di parallelismo data da Euclide, al contrario, sarebbe stata solo simmetrica, ma non riflessiva né transitiva. Per convincersi della non transitività, basta considerare tre rette a, b, c con a e c coincidenti e b parallela ad entrambe e distinta da esse: allora $a \parallel b$ e $b \parallel c$, ma a e c non sono parallele secondo la definizione di Euclide.

1.3.1 Rette parallele tagliate da una trasversale

Due rette parallele a e b vengono intersecate da una retta c (detta *trasversale*) che non è parallela ad esse,

- se la retta c è perpendicolare (ad entrambe), si vengono a formare otto angoli retti;
- se la retta c non è perpendicolare ad esse, si vengono a formare otto angoli, di cui quattro acuti e quattro ottusi, rispetto alla posizione che occupano alle coppie vengono attribuiti i seguenti nomi (figura 1.1):
  - le coppie di angoli 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 si dicono *corrispondenti* (perché occupano posizioni analoghe da una parallela all'altra);
  - le coppie di angoli 3 e 5, 4 e 6 si dicono *alterni interni* (alterni perché occupano posizioni opposte rispetto alla trasversale, interni perché si trovano all'interno delle due parallele);
  - le coppie di angoli 1 e 7, 2 e 8 si dicono *alterni esterni* (alterni perché sono opposti rispetto alla trasversale; esterni perché si trovano all'esterno della zona tra le due parallele);
  - le coppie di angoli 3 e 6, 4 e 5 si dicono *coniugati interni* (si dicono coniugati perché stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale);
  - le coppie di angoli 1 e 8, 2 e 7 si dicono *coniugati esterni*.

Inoltre le coppie 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 sono angoli opposti al vertice.

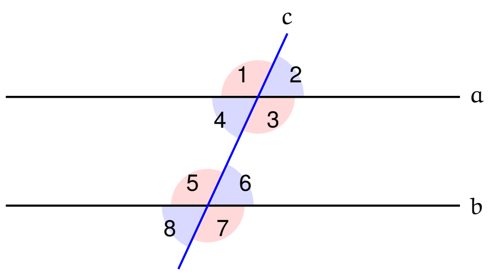
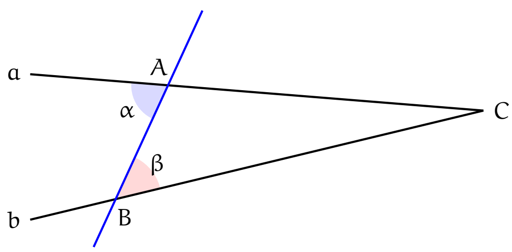


FIGURA 1.1: Le rette parallele a e b sono tagliate dalla trasversale c

Teorema 1.6 (delle parallele [diretto]). *Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.*



Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette a e b non siano parallele. Se non sono parallele si incontreranno in un punto C e quindi tra esse e la trasversale si viene a formare il triangolo ABC. Per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, l'angolo (esterno) α è maggiore dell'angolo (interno) β. Questa conseguenza contraddice l'ipotesi del teorema, secondo la quale gli angoli alterni interni α e β sono congruenti. Allora abbiamo sbagliato a negare la tesi, che perciò risulta vera. □

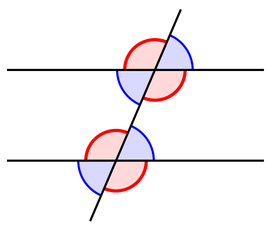
Possiamo generalizzare il teorema precedente ad altri casi.

Teorema 1.7 (Criterio di parallelismo)**.** *Se due rette tagliate da una trasversale danno origine ad una tra le seguenti coppie di angoli*

- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari*

allora sono parallele.

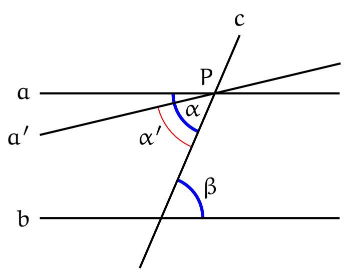
Dimostrazione. Tenendo conto che due angoli opposti al vertice sono congruenti e due angoli adiacenti sono supplementari, se risulta che due angoli corrispondenti qualsiasi sono congruenti, allora i quattro angoli acuti sono tutti congruenti ed i quattro angoli ottusi sono congruenti, e quindi anche angoli alterni interni. Pertanto, per il teorema precedente, le rette sono parallele.



Analogamente, se risultano supplementari due qualsiasi angoli coniugati (interni o esterni) risulta sempre che i quattro angoli acuti sono tutti congruenti tra loro come i quattro angoli ottusi, pertanto gli angoli alterni interni sono congruenti e, sempre per il teorema precedente, le due rette sono parallele. □

Teorema 1.8 (delle parallele [inverso])**.** *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualsiasi due angoli alterni interni congruenti.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che esista una coppia di angoli alterni interni α e β con $\alpha > \beta$. Per il punto P, vertice dell'angolo α si potrà allora tracciare una retta a' in modo che l'angolo da essa formato α' sia congruente a β. Ne segue che a' e b sono parallele perché formano angoli alterni interni congruenti. Allora esisterebbero due rette distinte, a e a', passanti per lo stesso punto P, entrambe parallele alla retta b. Questa conclusione contraddice il V postulato di Euclide, secondo il quale per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. In altre parole la tesi è vera. □



In generale possiamo enunciare il seguente

Teorema 1.9. *Se due rette sono parallele allora esse formano con una trasversale qualunque*

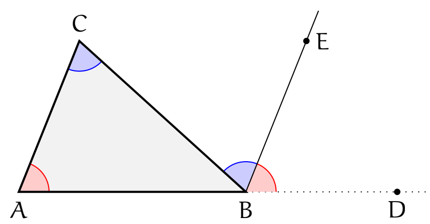
- *angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;*
- *angoli corrispondenti congruenti;*
- *angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono congruenti gli angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale. Tenendo conto che gli angoli opposti al vertice sono congruenti e gli angoli adiacenti sono supplementari, si possono dedurre facilmente tutte le tesi di questo teorema. □

1.4 Somma degli angoli interni di un triangolo

Passiamo ora a dimostrare il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

Teorema 1.10. *In un triangolo, un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.*



Dimostrazione. Sia ABC un triangolo e sia $C\widehat{B}D$ un angolo esterno. Tracciamo la semiretta $BE \parallel AC$ che divide l'angolo $C\widehat{B}D$ in due parti, $C\widehat{B}E$ ed $E\widehat{B}D$. L'angolo $C\widehat{B}E$ risulta congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ in quanto i due angoli sono alterni interni rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale CB; analogamente l'angolo $E\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $C\widehat{A}B$ in quanto i due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale AD. Dunque $C\widehat{B}D$ è congruente alla somma degli angoli interni di vertici A e C. □

Corollario 1.11. *La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.*

Dimostrazione. Dalla figura precedente $A\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + C\widehat{B}E + E\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B$, pertanto la somma degli angoli interni è congruente all'angolo piatto $A\widehat{B}D$. □

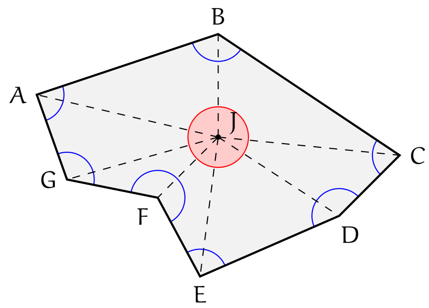
Corollario 1.12. *Un triangolo non può avere più di un angolo retto e/o ottuso.*

Dunque, necessariamente almeno due angoli sono acuti. Di conseguenza, gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

1.5 Somma degli angoli interni di un poligono

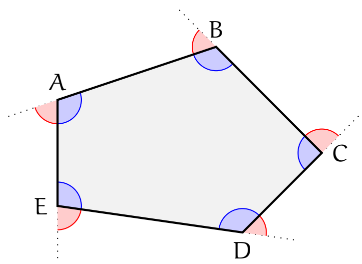
Teorema 1.13. *Dato un poligono P di n lati, la somma degli angoli interni di P è $n-2$ angoli piatti.*

Dimostrazione. Infatti, dato un qualunque poligono (anche concavo) di n lati, scelto un opportuno punto interno J in modo che, congiunto con esso ciascun vertice il poligono resti diviso in n triangoli, si può osservare che la somma degli angoli interni del poligono è data dalla somma degli angoli interni di n triangoli (n angoli piatti) meno l'angolo giro (2 angoli piatti) in J. □



Teorema 1.14. *La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso, indipendentemente dal numero dei lati, è congruente ad un angolo giro.*

Dimostrazione. Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno, per cui se si hanno m lati, e quindi m vertici, la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è pari ad m angoli piatti. Essendo la somma degli angoli interni congruente a $m-2$ angoli piatti (per il teorema precedente), la somma degli angoli esterni sarà di due angoli piatti, cioè un angolo giro. □

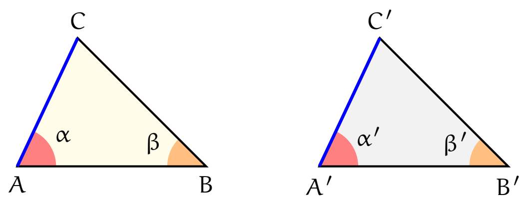


1.6 Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente due angoli congruenti, allora anche i terzi angoli saranno congruenti nei due triangoli, in quanto supplementari della somma di angoli congruenti.

Dunque, se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli, anche se il lato congruente non è compreso tra i due angoli congruenti, risultano congruenti. Precisamente, vale la seguente proposizione.

Teorema 1.15 (Generalizzazione del 2° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti una coppia di lati e due coppie di angoli ugualmente posti rispetto ai lati congruenti.*



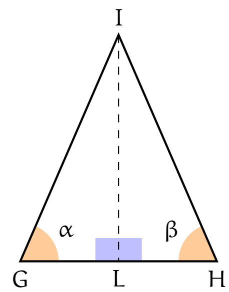
Dimostrazione. Il caso in cui il lato congruente è compreso tra gli angoli congruenti è stato già dimostrato (2° criterio di congruenza dei triangoli) ed utilizzato per la dimostrazione di varie proprietà. Ora consideriamo l'altro caso.

In figura abbiamo rappresentato due triangoli, ABC e $A'B'C'$ che hanno per ipotesi i lati $AC \cong A'C'$ e gli angoli $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$. I due triangoli risultano congruenti, poiché deve risultare $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$, in quanto tali angoli sono supplementari alla somma di angoli congruenti per ipotesi (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto). Ci riconduciamo quindi al caso del 2° criterio di congruenza, già dimostrato in precedenza. □

Riprendiamo una proprietà dei triangoli isosceli che abbiamo enunciato ma non abbiamo dimostrato.

Proposzione 1.16. *In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.*

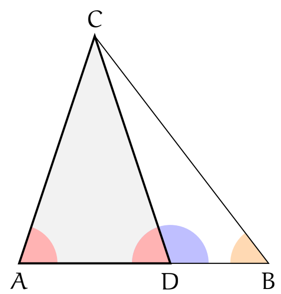
Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha \cong \beta$, $IL \perp GH$.
Tesi: $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$, $GL \cong LH$.



Dimostrazione. I triangoli GLI e LHI sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo congruenti un lato (quello obliquo, $IG \cong IH$) e due angoli ($\alpha \cong \beta$ e $I\widehat{L}G \cong I\widehat{L}H$). Di conseguenza, i restanti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare $GL \cong LH$ e $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$. □

❑ **Osservazione** Dall'esame dei primi tre criteri di congruenza dei triangoli, nonché dalla generalizzazione del secondo criterio, si potrebbe essere indotti a pensare che due triangoli sono congruenti se hanno tre coppie di elementi rispettivamente congruenti, se almeno una delle tre coppie di elementi è costituita da lati.

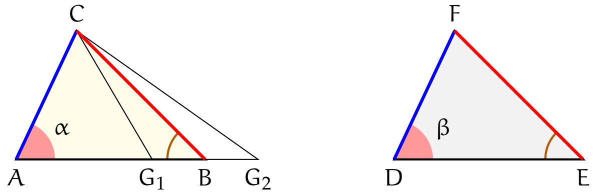
In realtà, il primo criterio non si può generalizzare come il secondo. Basta pensare alla figura a lato: ADC è un triangolo isoscele, B è un punto sul prolungamento della base AD. Unendo B con C, vengono individuati due nuovi triangoli, ABC e BCD che hanno in comune il lato CB e l'angolo di vertice B, ed hanno inoltre congruenti i lati AC e CD, ma evidentemente non sono congruenti. Quindi se due triangoli hanno due lati ed un angolo qualsiasi congruenti, non è detto che siano congruenti. Però nei due triangoli citati in figura, gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{D}B$ sono supplementari.



Tale osservazione fa da premessa al 4° criterio di congruenza dei triangoli.

Teorema 1.17 (4° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi, a patto che l'angolo opposto all'altra coppia di lati congruenti sia della stessa specie (cioè sia, in entrambi i triangoli, acuto, retto, oppure ottuso).*

Ipotesi: $AC \cong DF$, $CB \cong FE$, $\alpha \cong \beta$, $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ della stessa specie.
Tesi: $ABC \cong DEF$.



Dimostrazione. Sulla semiretta AB prendiamo il punto G in maniera tale che AG sia congruente a DE. I triangoli AGC e DEF saranno congruenti per il primo criterio, poiché $AC \cong DF$ e $\alpha \cong \beta$ per ipotesi e $AG \cong DE$ per costruzione. Di conseguenza anche i rimanenti elementi risulteranno congruenti, in particolare $CG \cong FE$ e $C\widehat{G}A \cong F\widehat{E}D$.

Se il punto G coincide con B, abbiamo dimostrato la congruenza dei triangoli ABC e DEF. Altrimenti, il segmento CG, dovendo essere congruente ad FE, risulta congruente a CB. Dunque il triangolo CGB è isoscele sulla base GB e quindi gli angoli alla base $C\widehat{G}B$ e $C\widehat{B}G$, congruenti, sono necessariamente acuti. Distinguiamo due casi:

- se G è interno al segmento AB (G_1 nella figura), $C\widehat{G}B$ è esterno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è interno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ ottuso e $A\widehat{B}C$ acuto;
- se G è esterno al segmento AB (G_2 nella figura), $C\widehat{G}B$ è interno al triangolo AGC e $C\widehat{B}G$ è esterno al triangolo ABC, quindi $D\widehat{E}F \cong A\widehat{G}C$ acuto e $A\widehat{B}C$ ottuso.

Dunque, in nessuno dei due casi viene rispettata l'ipotesi, quindi $C\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}D$ sono della stessa specie. □

1.6.1 Congruenze di triangoli rettangoli

Per quanto affermato nelle proposizioni precedenti, sappiamo che i triangoli rettangoli hanno una coppia di angoli congruenti (quelli retti, essendo tutti congruenti fra loro, come affermato dal IV postulato di Euclide) e gli altri angoli necessariamente acuti, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto (come segue dal secondo teorema dell'angolo esterno e dai corollari).

Tenendo conto dunque dei criteri di congruenza dei triangoli, si possono riformulare dei criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli.

Teorema 1.18 (Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli)**.** *Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti almeno uno tra:*

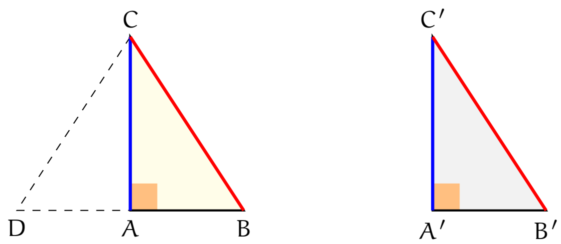
- *i due cateti (1^o criterio);*
- *l'ipotenusa e un angolo acuto (2^o criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto adiacente (2^o criterio);*
- *un cateto e l'angolo acuto opposto (2^o criterio);*
- *un cateto e l'ipotenusa (4^o criterio).*

L'ultimo criterio dell'elenco è detto anche *criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli* (ha naturalmente una formulazione più semplice del 4^o criterio di congruenza dei triangoli perché si sa già che le coppie di angoli non citati nell'ipotesi sono "della stessa specie", perché certamente acuti). Due triangoli rettangoli che hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi (l'angolo retto, opposto all'ipotenusa), ed hanno gli angoli opposti all'altra coppia di lati congruenti della stessa specie (gli angoli opposti ai cateti congruenti sono acuti in entrambi i triangoli).

Data l'importanza di tale criterio, nonché la sua semplice dimostrazione, indipendente dal quarto criterio di congruenza dei triangoli qualunque, lo riformuliamo a parte e ne proponiamo una dimostrazione:

Teorema 1.19 (Criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli). *Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.*

Ipotesi: $C\widehat{A}B \cong C'\widehat{A'}B'$ retto, $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$.
Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.



Dimostrazione. Si prolunga il cateto AB di un segmento AD congruente ad $A'B'$, quindi si congiunge D con C. Il triangolo ADC è anch'esso rettangolo in A, in quanto l'angolo $D\widehat{A}C$ è adiacente ad un angolo retto ($C\widehat{A}B$). I triangoli rettangoli ADC e $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio, in quanto hanno i due cateti ordinatamente congruenti: $AC \cong A'C'$ per ipotesi e $AB \cong A'B'$ per costruzione. Di conseguenza risulterà $CB \cong C'B'$ e dunque $CD \cong CB$ (per la proprietà transitiva della congruenza, essendo $CB \cong C'B'$ per ipotesi). Quindi il triangolo DCB è isoscele sulla base DB, e di conseguenza, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, i suoi angoli alla base sono congruenti: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{D}C$.

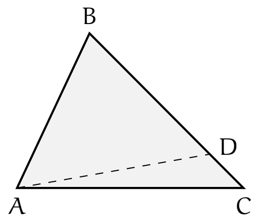
Allora i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo ordinatamente congruenti due coppie di angoli e il lato opposto ad uno di essi (l'ipotenusa). □

1.7 Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

Teorema 1.20. *In un triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore.*

Ipotesi: $BC > AB$. Tesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$.

Dimostrazione. Scegliamo opportunamente un punto D sul lato maggiore BC in modo che BD sia congruente ad AB. Se uniamo A con D, poiché il segmento AD è interno al triangolo ABC, il triangolo ABC viene diviso in due nuovi triangoli, ADB e ACD. Il triangolo ADB è isoscele sulla base AD pertanto ha gli angoli alla base congruenti, per cui risulta $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$. Ma $B\widehat{A}D$ è una parte propria di $B\widehat{A}C$, mentre $A\widehat{D}B$, come angolo esterno al triangolo ACD è maggiore dell'angolo $A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$, interno non adiacente, per il primo teorema dell'angolo esterno. Si ha dunque: $B\widehat{A}C > B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B > A\widehat{C}B$ e quindi la tesi (in maniera del tutto analoga si può dimostrare che $B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$). □



Teorema 1.21. *In un triangolo, ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.*

Ipotesi: $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Tesi: $BC > AB$.

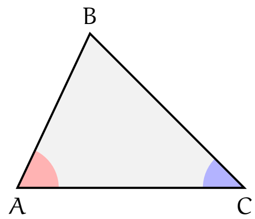
Dimostrazione. Dimostriamo la tesi in maniera indiretta, facendo uso del teorema precedente e del teorema del triangolo isoscele. Supponiamo vera l'ipotesi $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$. Facciamo un confronto tra i segmenti BC e AB considerando tutte le possibilità. È possibile che sia:

(i) $BC \cong AB$; (ii) $BC < AB$; (iii) $BC > AB$.

Se fosse vera la (i), il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base AC e risulterebbe $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, per il teorema del triangolo isoscele, contro l'ipotesi.

Se fosse vera la (ii), per il teorema precedente risulterebbe $B\widehat{A}C < A\widehat{C}B$, contro l'ipotesi.

Rimane solo la possibilità che sia vera la (iii), la quale infatti non contraddice il teorema precedente, anzi lo conferma. Quindi la tesi è dimostrata. □

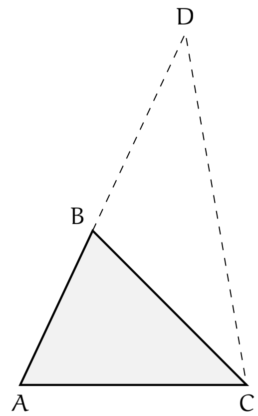


Da questo teorema discende la proprietà che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre maggiore di ciascuno dei due cateti, in quanto l'ipotenusa è il lato che si oppone all'angolo maggiore, l'angolo retto.

Ora dimostriamo una proprietà importante dei triangoli, nota come *disuguaglianza triangolare*.

Teorema 1.22 (Disuguaglianza triangolare). *In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Dimostrazione. In riferimento alla figura a lato, dimostriamo che nel triangolo ABC, $AC < AB + BC$. Se AC fosse minore di un altro lato, sicuramente sarebbe minore della somma degli altri due e il teorema sarebbe dimostrato. Esaminiamo il caso in cui AC è maggiore sia di AB che di BC. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un punto D sul prolungamento in modo che il segmento BD sia congruente a BC. Unendo D con C abbiamo il triangolo ACD nel quale il lato AD è congruente alla somma dei lati AB e BC. La tesi si riconduce dunque a dimostrare che il lato AC è minore di AD. Osserviamo che il triangolo CBD è isoscele sulla base CD, per cui i suoi angoli alla base sono congruenti: $B\widehat{C}D \cong B\widehat{D}C$. Ma l'angolo $B\widehat{C}D$ è una parte propria di $A\widehat{C}D$ che quindi risulta maggiore di $B\widehat{C}D \cong A\widehat{D}C$. Dunque, nel triangolo ACD, il lato AD, che si oppone ad angolo maggiore, è maggiore del lato AC, che si oppone ad angolo minore, per il teorema precedente.



Visto che la costruzione fatta si può ripetere tale e quale rispetto a qualsiasi lato, si può concludere che $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$ e dunque, sottraendo ad ambo i membri della prima disuguaglianza il lato BC si ha $AC - AB < BC$, analogamente, sottraendo uno stesso segmento, si hanno $AC - BC < AB$, $AC - BC < AB$, $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$, $BC - AC < AB$, $BC - AB < AC$. Leggendo le relazioni da destra verso sinistra, ogni lato è maggiore della differenza degli altri due (abbiamo scritto tutte le disuguaglianze, anche se ovviamente ogni lato ha misura positiva mentre la differenza tra due lati può essere anche nulla o negativa). □

Proponiamo ora un teorema sulle disuguaglianze tra gli elementi di due triangoli.

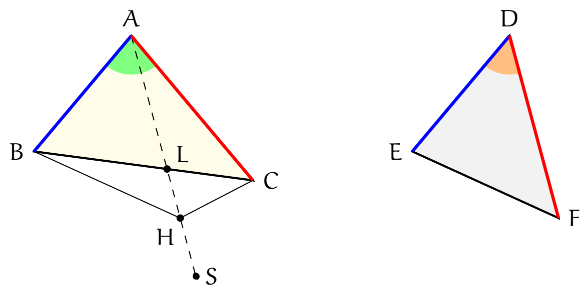
Supponiamo di avere due triangoli aventi due coppie di lati rispettivamente congruenti. Allora, se anche gli angoli compresi sono congruenti, i due triangoli risultano congruenti per il primo criterio. Altrimenti, se i due angoli compresi tra i lati congruenti non sono congruenti, i due triangoli non sono congruenti, ed i terzi lati sono diseguali nello stesso verso degli angoli opposti ad essi (cioè compresi tra i lati congruenti).

Teorema 1.23. *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente congruenti a due lati di un altro triangolo, e l'angolo tra essi compreso è nel primo triangolo maggiore che nel secondo, allora il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$ $(AB \leqslant AC)$. Tesi: $BC > EF$.

Dimostrazione. Tracciamo la semiretta AS di origine A, interna all'angolo $B\widehat{A}C$, in modo tale che $B\widehat{A}S \cong E\widehat{D}F$. Se prendiamo su AS il punto H tale che $AH \cong DF$ ed uniamo H con B, otteniamo un triangolo ABH congruente a DEF per il primo criterio.

È importante dimostrare che il punto H è esterno al triangolo ABC. Per dimostrare ciò, prendiamo il punto L, intersezione tra la semiretta AS ed il lato BC. Notiamo che abbiamo iniziato la costruzione a partire dal lato AB avendo supposto $AB \leqslant AC$, ma da questa disuguaglianza segue la corrispondente disuguaglianza tra gli angoli opposti: $A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$. L'angolo $A\widehat{L}C$ è esterno al triangolo ABL, pertanto è maggiore dell'angolo $A\widehat{B}C$ per il primo teorema dell'angolo



esterno. Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha $A\widehat{L}C > A\widehat{B}C \geqslant A\widehat{C}B$, dunque nel triangolo ALC vale la seguente relazione tra due angoli: $A\widehat{L}C > A\widehat{C}B$. Vale quindi anche la corrispondente relazione tra i lati opposti, per cui $AC > AL$. Poiché $AX \cong DF \cong AC$, il punto L è interno al segmento AH, e dunque H è esterno al triangolo ABC.

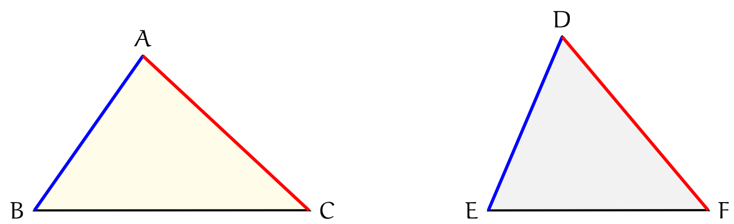
Abbiamo già unito H con B, uniamo H anche con C e ragioniamo sul triangolo BHC. Essendo BH congruente ad EF, la tesi è ricondotta a dimostrare che BC è maggiore di BH. Confrontiamo i rispettivi angoli opposti. Poiché il triangolo AHC è isoscele sulla base HC, gli angoli alla base risultano congruenti $A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H$, dunque risulta $B\widehat{H}C \cong B\widehat{C}H$ perché:

$$B\widehat{H}C = B\widehat{H}A + A\widehat{H}C > A\widehat{H}C \cong A\widehat{C}H = A\widehat{C}B + B\widehat{C}H > B\widehat{C}H.$$

Dalla precedente disuguaglianza tra gli angoli segue la corrispondente disuguaglianza tra i lati opposti $BC > BH$ e dunque la tesi. □

Teorema 1.24. *Se due lati di un triangolo sono, rispettivamente, congruenti a due lati di un altro triangolo, e il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato del secondo, allora l'angolo opposto al lato diseguale (compreso tra i lati congruenti) è nel primo triangolo maggiore che nel secondo.*

Ipotesi: $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC > EF$. Tesi: $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.



Dimostrazione. Procediamo per esclusione, in maniera analoga a come abbiamo fatto nel teorema inverso sulle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

Supponiamo vera l'ipotesi e studiamo i vari casi delle possibili relazioni tra gli angoli citati nella tesi. Sono possibili tre casi:

(i) $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$; (ii) $B\widehat{A}C < E\widehat{D}F$; (iii) $B\widehat{A}C > E\widehat{D}F$.

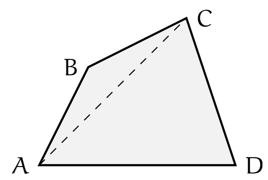
Se valesse l'ipotesi (i), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, i triangoli risulterebbero congruenti per il primo criterio, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

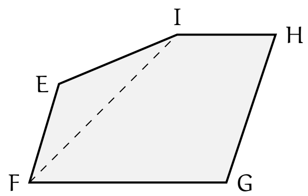
Se valesse l'ipotesi (ii), essendo anche $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, per il teorema precedente risulterebbe $BC < EF$, contrariamente all'ipotesi $BC > EF$.

Rimane l'ipotesi (iii), che non contraddice il teorema precedente e che anzi lo conferma. Dunque la tesi è dimostrata. □

Dalla disuguaglianza triangolare seguono alcune proprietà riguardanti i lati di poligoni.

Teorema 1.25. *In un qualsiasi poligono, ciascun lato è minore della somma dei rimanenti.*





Nel quadrilatero $ABCD$ a fianco, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato AD è minore della somma degli altri tre, tracciamo la diagonale AC che divide il quadrilatero in due triangoli. Risulta $AD < AC + CD$, ed anche $AC < AB + BC$, per la disuguaglianza triangolare, per cui $AD < AB + BC + CD$.

Ma la proprietà non è limitata ai quadrilateri. Nel pentagono $EFGHI$ a fianco, se vogliamo dimostrare ad esempio che il lato EI è minore della somma degli altri quattro, possiamo tracciare la diagonale EG che divide il pentagono in un quadrilatero ed un triangolo. Se supponiamo che la tesi sia vera per i quadrilateri, verifichiamo che la tesi vale anche per i pentagoni. Infatti risulta $EI < EG + GH + HI$, in quanto la tesi è vera per i quadrilateri, e $EG < EF + FG$, per la disuguaglianza triangolare. Dunque $EI < EF + FG + GH + HI$, come volevasi dimostrare.

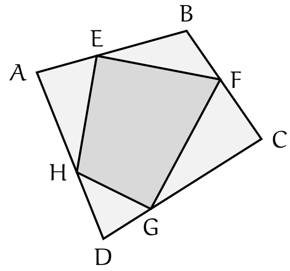
In realtà, il passaggio che abbiamo fatto dai quadrilateri ai pentagoni vale anche per passare dai pentagoni agli esagoni ecc. seguendo il procedimento per induzione. Più precisamente, poiché vale la disuguaglianza triangolare, la tesi è vera per i triangoli. Supponendo la tesi vera per tutti i poligoni di n lati (con $n \geqslant 3$) si dimostra che la tesi vale anche per i poligoni di $n + 1$ lati. Allora, la tesi è vera per tutti i poligoni (aventi un numero qualsiasi di lati).

Definizione 1.2. Un poligono convesso si dice *inscritto* in un altro se ogni vertice del primo giace sul contorno del secondo. Il secondo poligono è detto *circoscritto* al primo.

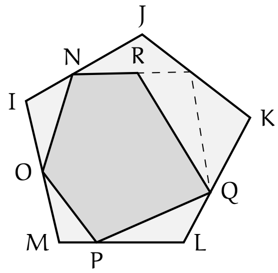
Teorema 1.26. *Se un poligono convesso è inscritto in un altro, il perimetro del primo è minore di quello del secondo.*

Illustriamo con un semplice esempio il contenuto del teorema. Non è da escludere il caso che un lato del primo poligono giaccia interamente su un lato del secondo (e nemmeno che la stessa situazione valga per più lati), però è semplice dimostrare la disuguaglianza anche senza considerare le parti del contorno perfettamente sovrapposte.

Osserviamo i quadrilateri $EFGH$ e $ABCD$ (il primo inscritto nel secondo) in figura; per la disuguaglianza triangolare $EF < EB + BF$, $FG < FC + CG$, $GH < GD + DH$, $HE < HA + AE$. La somma dei primi membri delle quattro disuguaglianze rappresenta il perimetro di $EFGH$, la somma dei secondi membri rappresenta il perimetro di $ABCD$.



La tesi del teorema precedente vale anche se il poligono, anziché essere inscritto, è semplicemente contenuto nell'altro. Illustriamo questa proprietà con un semplice esempio: il poligono $NOPQR$ è contenuto in $IJKLM$. Il lato RQ è minore di $RS + SQ$ per la disuguaglianza triangolare. Dunque il perimetro del poligono $NOPQR$ è minore del perimetro di $NOPQS$, e quest'ultimo poligono è inscritto in $IJKLM$, per cui il perimetro di $NOPQS$ è minore del perimetro di $IJKLM$. Dalle due disuguaglianze segue la tesi.

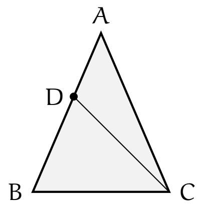


Esempio 1.1. Nel triangolo ABC, isoscele sulla base BC, sia D un punto qualsiasi sul lato AB. Dimostra che $DC > DB$.

Individuiamo ipotesi, tesi e costruiamo il disegno.

Ipotesi: $AB \cong AC$, $D \in AB$. Tesi: $CD > BD$.

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ABC e DBC a lato.
Poiché $B\widehat{C}D < B\widehat{C}A$ e $B\widehat{C}A \cong A\widehat{B}C$ si ha che $B\widehat{C}D < D\widehat{B}C$. Quindi, poiché in un triangolo ad angolo maggiore si oppone lato maggiore, considerando il triangolo DBC si ha $CD > BD$. □



1.8 Esercizi

1.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 - Primo teorema dell'angolo esterno

1.1. Vero o falso? In un triangolo:

a) Per ogni lato c'è un solo angolo esterno $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Un angolo esterno è maggiore della somma degli angoli interni $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) L'angolo esterno non può essere acuto $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei tre angoli interni $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) L'angolo interno è minore di ciascuno degli angoli esterni non adiacenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.2. Per ciascun vertice del triangolo nella figura 1.2 disegna un angolo esterno.

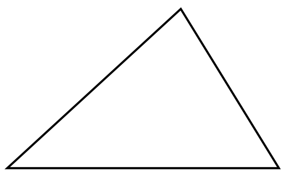


FIGURA 1.2: Esercizio 1.2

1.3. Nel triangolo isoscele ABC di base AB prolunga il lato CB fino a un punto D. Dimostra che: $A\widehat{B}D > A\widehat{C}B$, $C\widehat{B}A > A\widehat{D}B$, $C\widehat{A}B > B\widehat{A}D$, $C\widehat{A}B > B\widehat{D}A$.

1.4. Internamente a un triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Il prolungamento di AE incontra il lato BC nel punto E. Dimostra che: $B\widehat{D}E > B\widehat{A}D$, $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$, $A\widehat{E}B > C\widehat{D}B$.

1.5. Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AP dell'angolo in A. Dimostra che nel triangolo APC, l'angolo in P è maggiore dell'angolo in A.

1.6. Dimostra che la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto. (Considera l'angolo esterno a uno dei due angoli).

1.7. Dimostra che un triangolo non può avere più di due angoli retti.

1.8. Dimostra che un triangolo non può avere due angoli ottusi.

1.9. Dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

1.2 - Rette perpendicolari

1.10. Vero o falso?

a) Dati un punto P e una retta r esiste sempre una retta perpendicolare a r e passante per P [V] [F]

b) Dati un punto P e una retta r esistono infinite rette passanti per P e perpendicolari a r [V] [F]

c) L'unicità della perpendicolare per un punto a una retta è un assioma [V] [F]

d) L'unicità della parallela per un punto a una retta è un assioma [V] [F]

1.11. Una retta a è perpendicolare a una retta b, la quale a sua volta è perpendicolare a una terza retta c. Tra loro, le rette a e c sono:

a) parallele; b) perpendicolari; c) né parallele né perpendicolari.

1.12. Disegna le rette passanti per P e perpendicolari alle altre rette presenti nella figura 1.3.

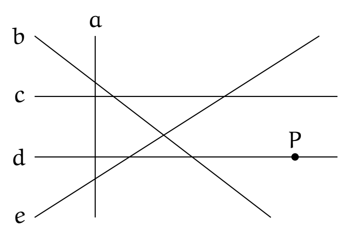


FIGURA 1.3: Esercizio 1.12

1.13. Per ognuno dei punti di intersezione delle tre rette nella figura 1.4 traccia la perpendicolare a ciascuna retta (aiutati con una squadretta).

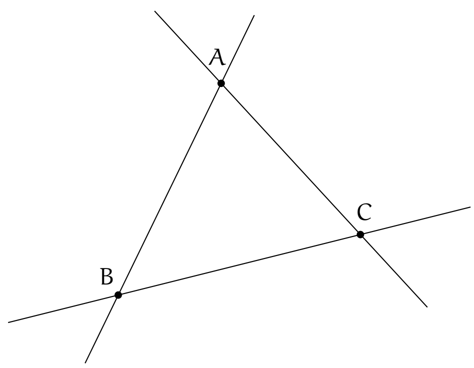


FIGURA 1.4: Esercizio 1.13

1.14. Dimostra che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

1.3 - Rette parallele

1.15. Vero o Falso?

a) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano quattro angoli alterni interni V F
b) Gli angoli corrispondenti sono a due a due interni o esterni V F
c) Gli angoli interni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
d) Gli angoli esterni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale V F
e) Due rette parallele possono anche coincidere V F
f) La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza V F
g) Due rette distinte hanno sempre un punto in comune V F
h) Una retta che incontra due rette parallele forma angoli alterni interni supplementari V F
i) Per ogni retta è possibile tracciare una sola retta parallela V F
j) Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni allora sono parallele V F
k) Nel ragionamento per assurdo si nega l'ipotesi per dimostrare che la tesi è vera V F
l) Ragionando per assurdo si nega la tesi e si ottenere una contraddizione con l'ipotesi V F

1.16. Nella figura 1.5 disegna una parallela e una perpendicolare alla retta r passanti per P e una parallela e una perpendicolare a s passanti per Q.

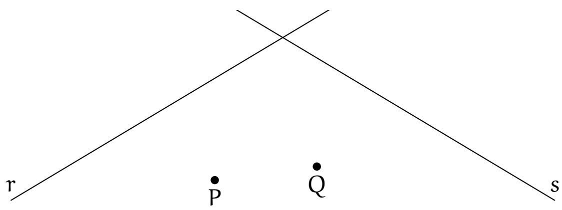


FIGURA 1.5: Esercizio 1.16

1.17. Nella figura 1.6 sono state tracciate due rette parallele e una trasversale. Indica con un arco gli angoli corrispondenti.

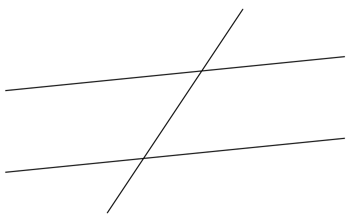
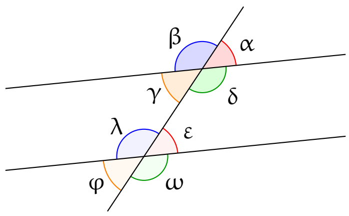


FIGURA 1.6: Esercizio 1.17

1.18. Nella figura a fianco sono state tracciate due rette parallele e una trasversale, sapendo che $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, dove π è l'angolo piatto, indica che frazione dell'angolo piatto sono gli altri angoli:

$\alpha = \frac{1}{3}\pi$
$\beta = \dots$
$\gamma = \dots$
$\delta = \dots$
$\varepsilon = \dots$
$\lambda = \dots$
$\varphi = \dots$
$\omega = \dots$



1.19. Nella figura 1.7 ABC è un triangolo isoscele, IF è parallela a BC. Individua tutti gli angoli congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$.

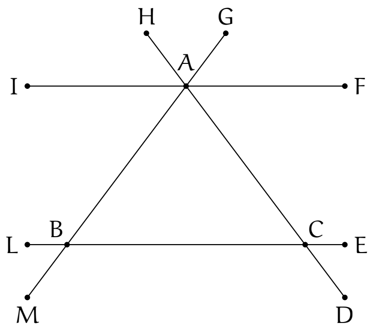
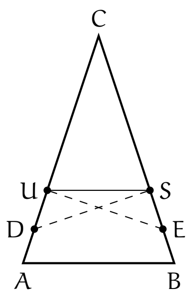


FIGURA 1.7: Esercizio 1.19

1.20. Completa ipotesi e tesi e metti in ordine le tre parti della dimostrazione:
In un triangolo ABC, isoscele su base AB, si prendano rispettivamente su AC e BC i punti D ed E equidistanti da C. Indicata con S la proiezione di D su BC e con U quella di E su AC. Dimostrare che il segmento US è parallelo ad AB.

Ipotesi: $AC \cong \dots$, $D \in AC$, $E \in \dots$, $S \in BC$, $DS \perp BC$, $U \in \dots$, $EU \perp \dots$ Tesi: $US \parallel AB$.

Parte 1. I triangoli CDS e CEU hanno: l'angolo $\widehat{C}$ in comune, $CD \dots\ CE$ per ......, $D\widehat{S}C$ .... perché angoli ......, quindi tali triangoli sono congruenti per il ...., ne segue $CS \dots CU$ e pertanto $C\widehat{U}S \cong \dots$
Parte 2. Applicando il teorema sulla somma degli angoli interni ai triangoli ABC e CUS, si ha che $C\widehat{U}S + C\widehat{S}U \dots C\widehat{A}B + C\widehat{B}A$ perché supplementari dello stesso angolo $\widehat{C}$, ed essendo $\widehat{A} \dots\ \widehat{B}$ perché .... ed essendo $C\widehat{U}S$ ...... perché ...., risulta che $C\widehat{A}B \dots\ C\widehat{U}S$ perché ....
Parte 3. Gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{U}S$ (congruenti perché dimostrato) sono angoli ......rispetto alle rette AB e US tagliate dalla trasversale ..., quindi le rette AB e US sono parallele.



1.21 (Prove invalsi 2005). A, B e C sono tre punti nel piano tali che per i seguenti tre angoli, tutti minori di un angolo piatto, valga la relazione $B\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B$. Quanto vale $B\widehat{A}C$?

a) $70°$; b) $80°$; c) $90°$; d) $100°$.

Dimostra le seguenti affermazioni sul parallelismo nei poligoni

1.22. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli corrispondenti (o alterni interni o alterni esterni) sono parallele.

1.23. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli coniugati interni (o coniugati esterni) sono perpendicolari.

1.24. Nel triangolo isoscele ABC traccia una parallela alla base AB, che incontra i lati obliqui in D ed E. Dimostra che anche DCE è un triangolo isoscele.

1.25. Se due rette r e s sono incidenti allora lo sono anche due qualsiasi rette u e v, con $u \parallel r$ e $v \parallel s$.

1.26. Sia M il punto medio del segmento AB. Sia r una retta che incontra AB in M. Sulla retta r da parti opposte rispetto a M prendi due punti C e D in modo che $AC \parallel BD$. Dimostra che $AC \cong BD$.

1.27. Dal vertice C di un triangolo isoscele ABC conduci la parallela alla base AB. Dimostra che tale parallela è bisettrice dell'angolo esterno in C al triangolo.

1.28. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Sia r la semiretta di origine C bisettrice dell'angolo formato dal prolungamento di BC e dal lato AC. Dimostra che la retta per AB è parallela a r.

1.29. Dato il triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prolunga la base AB dalla parte di A di un segmento AD. Sia E un punto interno all'angolo $D\widehat{A}C$ in modo che $E\widehat{A}D \cong C\widehat{A}B$. Dimostra che $EA \parallel CB$.

1.30. Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Detti D, E ed F i punti di intersezione delle parallele, dimostra che il triangolo DEF ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC.

1.31. Sia AD la bisettrice dell'angolo in A del triangolo ABC. Dal punto D traccia la parallela al lato AB, essa incontra il lato AC in E. Dimostra che il triangolo EDC ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC. Dimostra anche che ADE è un triangolo isoscele.

1.32. In un triangolo ABC rettangolo in A traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che il triangolo ABH ha gli angoli congruenti a quelli di ABC.

1.33. Sulla base BC di un triangolo isoscele ABC prendi un punto D e traccia da esso la perpendicolare p alla base. La suddetta perpendicolare incontra il lato AB in E e il lato AC in F. Dimostra che il triangolo AFE è isoscele.

1.34. In un triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Da un punto N del lato AC traccia la parallela alla bisettrice AD, essa incontra che retta per AB in E e la retta per BC in F. Dimostra che AEN è un triangolo isoscele. Dimostra che ADC e NFC hanno angoli congruenti.

1.35. In un triangolo ABC sia E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC. Sia D un punto del lato AB tale che $DE \cong DB$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

1.36. In un triangolo ABC traccia le bisettrici agli angoli nei vertici B e C. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici. Da D traccia la parallela al lato BC e indica con E ed F i punti di intersezione di questa parallela con i lati rispettivamente AB e AC. Dimostra che $FE \cong EB + FC$.

1.37. Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento $AD \cong AB$, prolunga poi il lato AC dalla parte di A di un segmento $AE \cong AC$. Dimostra che $DE \parallel BC$.

1.38. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Si prolunghi AM dalla parte di M di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che CD è parallelo ad AB.

1.39. Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli, uno di essi è $1/3$ dell'angolo retto. Determina le misure degli altri angoli.

1.40. Siano α e β due angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è parallela alla bisettrice di β.

1.41. Siano α e β due angoli coniugati formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è perpendicolare alla bisettrice di β.

1.42. Disegna due segmenti AB e CD disposti in modo che si incontrino nel loro punto medio comune M. Congiungi A con D e B con C, dimostra che AD è parallelo a CB.

1.43. Disegna un angolo acuto $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi l'asse del segmento OP. Indica con Q e R i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con la semiretta a e la semiretta b. Dimostra che OQ è parallelo a RP.

1.44. Disegna un angolo convesso $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi le perpendicolari PR e PQ rispettivamente alle semirette a e b. Dimostra che c è asse del segmento QR.

1.45. Sia ABC un triangolo equilatero. Traccia una parallela al lato AB che incontra il lato BC in D e AC in E. Dimostra che anche il triangolo CDE è equilatero.

1.46. Prolunga i lati AB e AC del triangolo ABC, entrambi i prolungamenti siano oltre il lato BC. Traccia le bisettrici degli angoli esterni ottenuti e sia P il loro punto di incontro. Da P traccia la parallela al lato BC, essa incontra AB in E e AC in F. Dimostra che $EF = EB + FC$.

1.4 - Somma degli angoli interni di un triangolo

1.47. Vero o Falso?

a) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo esterno $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

b) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a 3 angoli piatti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

c) La somma degli angoli esterni di un pentagono è congruente a 5 angoli piatti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

d) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a due angoli retti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

e) Un triangolo isoscele non può avere un angolo ottuso $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.48. Sia ABC un triangolo equilatero. Si prolunghi AB di un segmento BD congruente al lato stesso e si congiunga D con C. Si dimostri che ACD è un triangolo rettangolo.

1.49. Calcola la misura degli angoli di un triangolo ABC sapendo che l'angolo interno in A è $4/5$ del relativo angolo esterno e che l'angolo interno in B è la metà dell'angolo interno in A.

1.50 (I Giochi di Archimede 2003)**.** Sia data una stella a 5 punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?

1.51 (I Giochi di Archimede 2005)**.** Nella figura seguente, quanto misura l'angolo α?

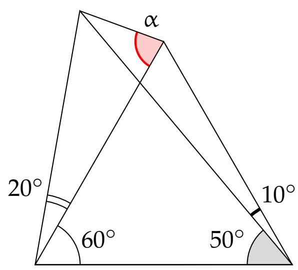


FIGURA 1.8: Esercizio 1.31

?? - Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

1.52. Vero o Falso?

a) Un triangolo rettangolo ha due angoli complementari V F
b) Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno almeno un lato congruente V F
c) Due triangoli rettangoli che hanno un cateto in comune sono congruenti V F
d) Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune sono congruenti V F
e) Due triangoli rettangoli isosceli sono sempre congruenti V F
f) Due triangoli rettangoli isosceli che hanno un lato in comune sono congruenti V F
g) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari V F

Dimostra le seguenti affermazioni sui teoremi di congruenza generalizzati

1.53. Dimostra che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti.

1.54. Dimostra che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.

1.55. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l'angolo al vertice.

1.56. In un triangolo isoscele, le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

1.57. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

1.58. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e la mediana relativa ad esso.

1.59. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo acuto e la sua bisettrice.

1.60. Se due triangoli hanno congruenti due coppie di lati e le mediane relative ai lati rimanenti, allora sono congruenti.

1.61. Dimostra che, in un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo adiacente all'angolo al vertice è parallela alla base.

1.62. Dimostra che sono congruenti due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice congruenti e congruenti le altezze relative a uno dei lati obliqui.

1.63. In un triangolo qualsiasi ABC si prenda un qualsiasi punto del lato AB e da esso si tracci la parallela r alla bisettrice dell'angolo interno in C. Detto P il punto di intersezione di r con AC e Q il punto di intersezione di r con BC, dimostra che $PC \cong QC$.

1.64. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli in A e in B di un triangolo qualsiasi ABC. Per D disegna la parallela al lato AB, indica con E ed F le intersezioni di questa parallela rispettivamente con il lati AC e BC. Dimostra che $AF \cong AE + BF$.

1.65. Dimostra che, se per i vertici di un triangolo si conducono le parallele ai lati opposti, queste parallele determinano, assieme al triangolo dato, quattro triangoli congruenti.

1.66. Dimostra che in un triangolo isoscele la congiungente i punti medi dei lati congruenti è parallela alla base del triangolo.

1.67. Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli rettangolo che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.

1.68. Dato un triangolo ABC, si prolunghi il lato CA dalla parte di A, si tracci la bisettrice dell'angolo interno di vertice A e si conduca da B la parallela a tale bisettrice, che incontri il prolungamento di CA nel punto D. Dimostrare che il triangolo ADB è isoscele.

1.69. Dato un angolo convesso $a\widehat{O}b$ traccia la sua bisettrice c. Per un punto P della bisettrice traccia la perpendicolare alla bisettrice stessa. Chiama A e B i punto di intersezione della perpendicolare con i lati a e b dell'angolo convesso. Dimostra che P è punto medio di AB.

1.70. Dato il triangolo isoscele ABC, di base AB, sul prolungamento dell'altezza relativa ad AB prendi un punto P. Traccia le rette PA e PB. Dimostra che l'angolo formato dalle rette PA e CA è congruente all'angolo formato dalle rette per PB e CB.

1.71. Nel triangolo isoscele ABC di vertice A e lati congruenti AB e AC, traccia le bisettrici degli angoli alla base. Sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che anche il triangolo DBC è isoscele.

1.72. Dato un triangolo qualsiasi ABC dimostra che la bisettrice dell'angolo interno in A è perpendicolare alla bisettrice di uno degli angoli esterni in A.

1.73. Prolunga la mediana M del triangolo ABC di un segmento MD. Dimostra che se $AM \cong MD$ allora BD è parallela a CA.

1.74. Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Dimostra che se ABM è isoscele il triangolo ABC è rettangolo e viceversa, se il triangolo ABC è rettangolo in A allora ABM è isoscele.

1.75. Una retta t incontra due rette a e b rispettivamente in A e B. Dal punto medio M di AB traccia una retta che interseca a e b rispettivamente in C e D. Dimostra che se M è punto medio di CD allora a e b sono parallele.

1.76. Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento BD congruente a BC. Dimostra che l'angolo in C esterno al triangolo ADC è il triplo dell'angolo ADC.

1.77. Dato il triangolo ABC traccia la retta r perpendicolare ad AB passante per B, la retta s perpendicolare ad AB passante per A, la retta t perpendicolare ad AC passante per C. Detti D il punto di intersezione tra r e t, E il punto di intersezione tra s e t, dimostra che $D\widehat{A}C + C\widehat{B}E + B\widehat{C}E$ è un angolo retto.

1.78. Nel triangolo ABC traccia la media CM e il suo prolungamento MD a piacere. Da A conduci la perpendicolare alla mediana che la incontra in E, da B conduci un'altra perpendicolare alla mediana che la incontra in F. Dimostra che i triangoli AEM e BFM sono congruenti.

1.79. Sul prolungamento della base AB di un triangolo isoscele individua un punto D qualsiasi dalla parte di B. Traccia la perpendicolare per D a questo prolungamento, essa incontra i lati obliqui del triangolo AC e BC rispettivamente in E e in F. Dimostra che il triangolo CEF è isoscele.

1.80. Siano r e s due rette incidenti in un punto O. Su r prendi da parte opposta rispetto ad O i punti A e B tali che $AO \cong OB$. Su s prendi da parte opposta rispetto ad O i punti C e D tali che $CO \cong OD$. Quale delle seguenti coppie di rette sono parallele? Dimostralo. ($CA \parallel BD$, $CB \parallel AD$)

1.81. Sia ABC un triangolo acutangolo. Nel semipiano di origine AB che non contiene C individua un punto D in modo che $B\widehat{A}D \cong C\widehat{B}A$. Dimostra che $CB \parallel AD$. Nell'ipotesi in cui $AD \cong CB$ dimostra che anche $AC \parallel BD$.

1.7 - Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo

1.82. Vero o Falso?

a) Esiste un triangolo i cui lati misurano 10 cm, 3 cm e 15 cm [V] [F]
b) Un triangolo isoscele può essere ottusangolo [V] [F]
c) Dati tre segmenti di cui almeno uno maggiore degli altri è sempre possibile costruire un triangolo che ha lati congruenti ai tre segmenti dati [V] [F]
d) Dai tre segmenti di cui due uguali e uno maggiore degli altri due è sempre possibile costruire un triangolo isoscele che ha lati congruenti ai tre segmenti dati [V] [F]
e) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è minore della somma dei due cateti [V] [F]
f) Un triangolo di perimetro 100 cm non può avere un lato di 60 cm [V] [F]
g) In un triangolo l'angolo che si oppone al lato maggiore è sempre acuto [V] [F]
h) In un triangolo rettangolo i cateti sono sempre congruenti [V] [F]
i) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa può essere congruente ad un cateto [V] [F]
j) Un triangolo può avere due lati disuguali e due angoli uguali [V] [F]

Dimostra le seguenti affermazioni

1.83. Sono dati due triangoli ABC e DEF di cui si sa che $\widehat{B} > \widehat{A}$, $\widehat{F} > \widehat{D}$, $BC \cong ED$. Dimostra che $AC > EF$.

1.84. Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

1.85. Dimostra che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore della semisomma dei cateti.

1.86. In un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.

1.87. Dimostra che in un triangolo il doppio di un lato è minore del perimetro del triangolo.

1.88. Dimostra che in un triangolo il doppio di una qualsiasi altezza è minore del perimetro del triangolo.

1.89. Dimostra che in un poligono convesso una qualunque diagonale è minore del semiperimetro

1.90. Se in un triangolo due mediane sono congruenti, il triangolo è isoscele.

1.91. Se due lati di un triangolo sono disuguali, la mediana uscente dal loro vertice comune forma con il lato opposto angoli disuguali ed è maggiore quello dalla parte del lato maggiore.

1.92. In un triangolo ogni lato è minore del semiperimetro.

1.93. In un triangolo l'altezza è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

1.94. In un triangolo, la mediana è minore della semisomma dei due lati che hanno un vertice in comune con essa.

1.95. In un triangolo ABC traccia la bisettrice BE dell'angolo in B. Dimostra che $AB > AE$. (Per la dimostrazione utilizza il teorema dell'angolo esterno).

1.96. Nel triangolo ABC traccia la mediana AM. Dimostra che se AC è maggiore di AB allora l'angolo $A\widehat{M}C$ è maggiore dell'angolo $A\widehat{M}B$.

1.97. Nel triangolo ABC prendi un punto D interno al triangolo. Dimostra che il perimetro del triangolo ADB è minore del perimetro del triangolo ABC. (Prolunga il lato AD fino a incontrare il lato BC in E. Ragionando opportunamente sui triangoli che si vengono a formare dimostra che $AD + DB < AC + CB$).

1.98. Esternamente al triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Dimostra che il perimetro di ABC è minore del doppio della somma delle distanze di D dai tre vertici del triangolo.

1.99. Nel triangolo ABC traccia la mediana AM relativa al lato BC, dimostra che AM è minore della semisomma degli altri due lati AB e AC. (Prolunga la mediana di un segmento congruente alla mediana stessa.)

1.100. In ogni triangolo, la somma delle mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

1.101. Dimostra che in un triangolo acutangolo, la somma delle altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

1.102. Dato un triangolo ABC in cui $AB < AC$ traccia l'altezza AH relativa alla base BC. Dimostra che l'angolo $H\widehat{A}C$ è maggiore dell'angolo $H\widehat{A}B$.

1.103. Dato il triangolo isoscele ABC unisci il vertice A con un punto D della base BC. Dimostra che AD è minore di ciascuno dei due lati congruenti, AB e AC.

1.104. Dimostra in un poligono convesso, una qualunque diagonale è minore del semiperimetro.

1.105. In un triangolo ABC si ha che $AB > AC$. Si tracci la bisettrice AD dell'angolo in A. Si dimostri che $A\widehat{D}B > A\widehat{D}C$.

1.106. Due triangoli rettangoli hanno un cateto in comune e l'angolo opposto al cateto in comune è maggiore nel primo triangolo. Dimostra che l'ipotenusa del primo triangolo è minore di quella del secondo.

1.107. Dimostra che in ogni triangolo la somma dei tre lati è sempre maggiore del doppio di un lato.

1.108. Sia AM la mediana di un triangolo generico ABC. Dimostra che se $AB > AC$ allora $A\widehat{M}C < A\widehat{M}B$.

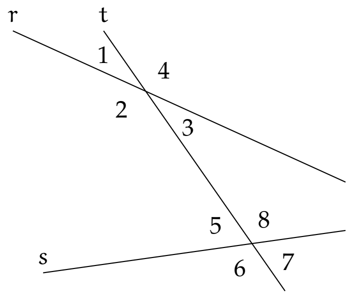
1.109. Disegna un punto D interno a un triangolo ABC qualsiasi. Dimostra che $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$.

1.110. Sui lati AB, BC, CA di un triangolo ABC qualsiasi, scegli a caso tre punti, rispettivamente D, E ed F. Dimostra che il perimetro di ABC è maggiore del perimetro di DEF.

1.111. Un quadrilatero $ABCD$ si compone di un triangolo isoscele ABC di base BC e di un triangolo rettangolo isoscele ACD con l'angolo retto in C. Dimostra che se l'angolo in A del triangolo isoscele è acuto allora $BC < CD$, se l'angolo in A del triangolo isoscele è ottuso risulta $CD < BC$.

1.112 (Prove invalsi 2004).

Le rette r ed s sono tagliate dalla trasversale t. Quale delle seguenti condizioni permette di stabilire, per qualunque posizione di t, che r ed s sono parallele?
Gli angoli ...

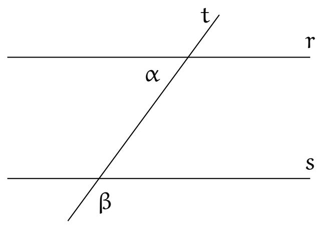


a) 1 e 5 sono supplementari;
b) 2 e 8 sono uguali;
c) 3 e 7 sono supplementari;
d) 4 e 7 sono uguali.

1.113 (Prove invalsi 2006)**.** Per un triangolo ottusangolo qualsiasi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) La somma dei suoi due angoli più piccoli è minore dell'angolo più grande.
b) Il punto di incontro degli assi dei lati è certamente interno al triangolo.
c) Il triangolo è necessariamente isoscele.
d) Il triangolo può essere rettangolo.

1.114 (Prove invalsi 2006)**.**
r ed s sono due rette parallele tagliate da una trasversale t. Quale tra le seguenti proposizioni è vera qualunque sia la posizione di t? Gli angoli α e β sono ...



a) supplementari;
b) uguali;
c) complementari;
d) corrispondenti.

1.115 (Prove invalsi 2004)**.** In un triangolo, le misure dei lati sono a, b e c, con $a = b < c$. Detti α, β e γ gli angoli interni del triangolo, rispettivamente opposti ai lati a, b e c, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\alpha = \gamma$; b) $\beta = \gamma$; c) $\gamma > \alpha$; d) $\alpha > \beta$.

1.116 (Prove invalsi 2010)**.** Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm. Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato?

a) 6,5 cm; b) 10 cm; c) 15,5 cm; d) 17 cm.

1.117 (Prove invalsi 2005)**.** In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo?

a) $72°, 72°, 36°$; b) $30°, 60°, 90°$; c) $36°, 36°, 72°$; d) $90°, 45°, 45°$.

1.8.2 Risposte

1.1. a) F, b) F, c) F, d) F, e) F, f) V.

1.10. a) V, b) F, c) F, d) V.

1.11. a.

1.15. a) F, b) F, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V.

1.18. $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, $\beta = \frac{2}{3}\pi$, $\gamma = \frac{1}{3}\pi$, $\delta = \frac{2}{3}\pi$, $\varepsilon = \frac{1}{3}\pi$, $\lambda = \frac{2}{3}\pi$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, $\omega = \frac{2}{3}\pi$.

1.21. c.

1.47. a) F, b) F, c) F, d) V, e) F.

1.49. $60°, 30°, 90°$.

1.50. $180°$.

1.51. $80°$.

1.52. a) V, b) F, c) F, d) V, e) F, f) V, g) V.

1.82. a) F, b) V, c) F, d) F, e) V, f) V, g) F, h) F, i) F, j) V.

1.112. b.

1.113. a.

1.114. a.

1.115. c.

1.116. d.

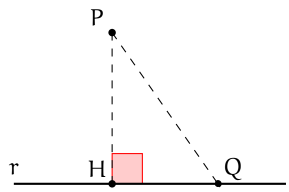
1.117. a.

2 Quadrilateri

"In geometry, a rhombus or rhomb is a quadrilateral whose four sides all have the same length"
Foto di pursanovd
http://www.flickr.com/photos/pursanovd/3669422214/

2.1 Generalità sui quadrilateri

2.1.1 Distanza di un punto da una retta e altezza di una striscia di piano



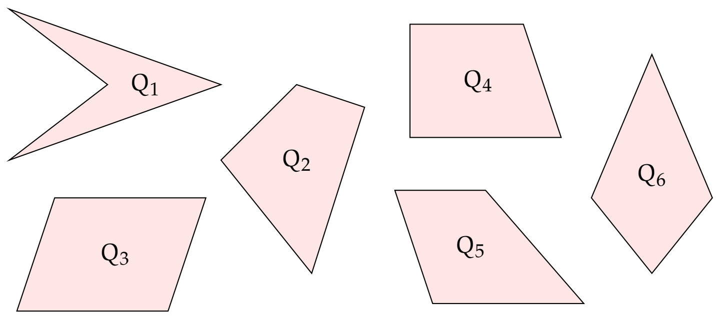
Ricordiamo che come definizione di (*misura* della) *distanza di un punto da una retta* è stata presa la lunghezza del segmento congiungente il punto con il piede della perpendicolare mandata dal punto alla retta (vedi figura). Analogamente, per *distanza tra due rette parallele*, detta anche *altezza della striscia di piano individuata dalle due rette parallele*, si intende la distanza di un punto qualsiasi di una retta dall'altra retta. Vogliamo far vedere ora che queste definizioni sono coerenti con il concetto di distanza tra due insiemi di punti come *percorso più breve* che congiunge un qualsiasi punto del primo insieme con un generico punto appartenente al secondo insieme. Se congiungiamo, infatti, un generico punto P sia con H, piede della perpendicolare alla retta r, che con un altro punto $Q \in r$, viene individuato un triangolo rettangolo PHQ, di cui PH è un cateto e PQ l'ipotenusa. Dal teorema sulle disuguaglianze degli elementi di un triangolo, l'ipotenusa è certamente maggiore di un cateto in quanto lato che si oppone ad angolo maggiore (quello retto). Dunque PH è il segmento di lunghezza minore tra tutti quelli che congiungono P con un punto della retta r.

2.1.2 Generalità sui poligoni

Se un poligono ha più di tre lati, allora può anche essere concavo. Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è $360°$.

Definizione 2.1. Due lati non consecutivi di un quadrilatero si dicono *opposti*; analogamente sono detti *opposti* due angoli non adiacenti allo stesso lato.

Nella figura seguente sono rappresentati un quadrilatero concavo (Q_1), un generico quadrilatero convesso (Q_2), un quadrilatero particolare a forma di "aquilone" (Q_6) e tre quadrilateri "notevoli": Q_3 ha i lati opposti paralleli (a due a due), Q_4 e Q_5 hanno una coppia di lati opposti paralleli.



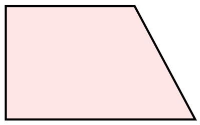
I quadrilateri che, come Q_6, hanno due lati consecutivi congruenti ed altri due lati consecutivi anch'essi congruenti, si dicono *deltoidi*; i quadrilateri che, come Q_3, hanno i lati opposti paralleli si dicono *parallelogrammi*; i quadrilateri che, come Q_4 e Q_5, hanno una coppia di lati opposti paralleli si dicono *trapezi*.

❑ **Osservazione** In analogia alla definizione di triangolo isoscele (come triangolo avente “almeno” due lati congruenti), alcuni autori definiscono trapezio un quadrilatero avente “almeno” una coppia di lati opposti paralleli: con questa definizione un parallelogramma è un particolare tipo di trapezio. Ricordiamo anche che Euclide, al contrario, classificava come trapezi tutti i quadrilateri che non fossero parallelogrammi. Noi useremo come definizione di *trapezio* quella di un *quadrilatero avente “solo” una coppia di lati opposti paralleli*. Ci riferiremo al parallelogramma come a una figura piana costituita dall’intersezione di due strisce di piano non parallele fra loro; al trapezio come intersezione tra una striscia di piano ed un angolo convesso con vertice esterno alla striscia e lati che intersecano la striscia stessa. Poiché le strisce di piano sono convesse, sia i parallelogrammi sia i trapezi, come intersezioni di figure convesse, sono convessi.

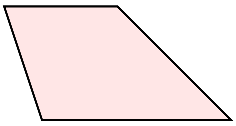
2.2 Trapezio e deltoide

Osserviamo le figure seguenti. I quadrilateri $ABCD$, $EFGH$, $IJKL$ e $MNOP$ sono trapezi perché hanno una coppia di lati opposti paralleli. Tali lati paralleli si dicono *basi* e si distinguono in *base maggiore* e *base minore*. Gli altri lati si dicono *lati obliqui*. La distanza tra le rette parallele si dice *altezza* del trapezio. Un trapezio avente i lati obliqui congruenti si dice *isoscele*. Un trapezio avente un lato perpendicolare alle basi si dice *rettangolo*. Un trapezio che non è né isoscele né rettangolo si dice *scaleno*.

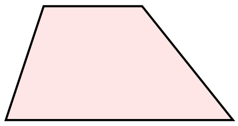
trapezio isoscele



trapezio rettangolo



trapezio scaleno



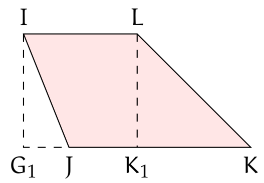
trapezio scaleno

2.2.1 Proprietà del trapezio

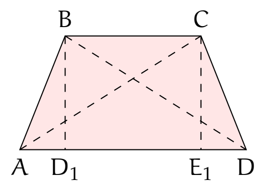
In ogni trapezio, gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari. Essi, infatti, sono coniugati interni rispetto alle rette delle basi tagliate dalla trasversale individuata dal lato obliquo.

In un trapezio rettangolo, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono uno retto ed uno acuto e gli angoli adiacenti alla base minore sono uno retto ed uno ottuso. Se un trapezio avesse quattro angoli retti, i lati obliqui sarebbero entrambi perpendicolari alle basi e di conseguenza paralleli tra loro. Dunque in questo caso il trapezio risulterebbe essere un parallelogramma.

Un trapezio scaleno può avere gli angoli adiacenti alla base maggiore entrambi acuti (e quindi gli angoli adiacenti alla base minore entrambi ottusi) oppure due angoli opposti entrambi acuti e gli altri ottusi (i due tipi di trapezio scaleno sono rappresentati nella figura precedente). I quattro angoli sono comunque non congruenti, altrimenti il trapezio risulterebbe isoscele nel primo caso e un parallelogramma nel secondo caso.



In un trapezio isoscele, gli angoli adiacenti alla base maggiore sono acuti e quelli adiacenti alla base minore sono ottusi. A tal proposito, facciamo riferimento al trapezio $IJKL$ nella figura a fianco per dire che non può esistere un trapezio isoscele con due angoli acuti opposti e due angoli ottusi opposti. Infatti, se fosse $IJ \cong LK$, i triangoli IG_1J e LK_1K risulterebbero congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio IJ e LK) ed una coppia di cateti (le altezze IG_1 e LK_1), da cui seguirebbe in particolare che $I\widehat{J}G_1 \cong L\widehat{K}K_1$, e pertanto l'angolo in K sarebbe supplementare dell'angolo in J, cosa che garantirebbe il parallelismo dei lati obliqui. Dunque, un ipotetico trapezio isoscele con due angoli acuti opposti sarebbe un parallelogramma.

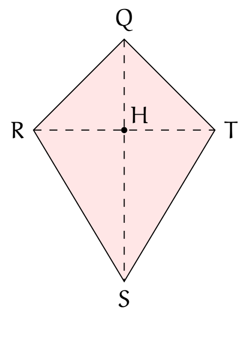


Inoltre, se il trapezio è isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono congruenti. Infatti, in riferimento al trapezio $ABCD$, traccia le altezze BD_1 e CE_1 (tra loro congruenti perché entrambe rappresentano la distanza tra due rette parallele), i triangoli AD_1B e E_1DC risultano congruenti per il criterio particolare dei triangoli rettangoli, avendo congruenti le ipotenuse (i lati obliqui del trapezio) ed una coppia di cateti (le altezze del trapezio). Pertanto i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti: $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}C$, $A\widehat{B}D_1 \cong D\widehat{C}E_1$, $AD_1 \cong E_1D$.

Dunque sono congruenti anche le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore. Quindi anche $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D$ in quanto somme di angoli congruenti $A\widehat{B}D_1 + \widehat{R} \cong D\widehat{C}E_1 + \widehat{R}$.

In un trapezio isoscele, inoltre, anche le due diagonali sono congruenti. Infatti, in riferimento sempre al trapezio $ABCD$ in figura, i triangoli ABC e DCB risultano congruenti per il primo criterio, avendo BC in comune, $AB \cong CD$ per ipotesi e gli angoli compresi (adiacenti alla base minore) congruenti per quanto appena dimostrato. Di conseguenza, i rimanenti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare i terzi lati (che sono, appunto, le diagonali AC e BD del trapezio).

2.2.2 Proprietà del deltoide



Il poligono $QRST$ nella figura a fianco è un deltoide, ha i lati a due a due congruenti $QR \cong QT$ e $RS \cong TS$. Tracciamo le diagonali QS ed RT. I triangoli QRT e STR sono isosceli sulla base comune RT. Dunque, se chiamiamo H il punto medio di RT, QH ed SH sono mediane, bisettrici e altezze (relative alla base ed agli angoli al vertice dei due triangoli isosceli), per cui QS è perpendicolare ad RT e passa per il punto H. Quindi le due diagonali sono perpendicolari e si incontrano nel punto medio di RT. Inoltre i triangoli SQR ed STQ sono congruenti per il terzo criterio, pertanto $Q\widehat{R}S \cong Q\widehat{T}S$.

I quattro lati di un deltoide non potrebbero essere tutti congruenti, in quanto, dalla congruenza degli angoli opposti banalmente deducibile, risulterebbero i lati opposti paralleli, e quindi il deltoide sarebbe un parallelogramma. Non è al contrario escluso che un angolo possa essere retto (ma non più di uno, altrimenti il deltoide sarebbe un parallelogramma), mentre gli angoli ottusi possono essere uno, due o tre (come pure gli angoli acuti).

Lasciamo al lettore il compito di provare queste semplici proprietà, costruendo vari tipi di deltoidi.

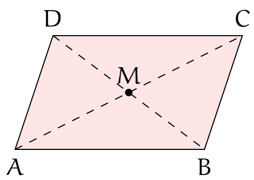
2.3 Proprietà dei parallelogrammi

Ricordiamo che, per definizione, un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

Teorema 2.1. *In ogni parallelogramma:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà.*

Ipotesi: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



Dimostrazione.

1. Tesi: $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, $B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong \pi$ (π è l'angolo piatto).
   Se $AB \parallel CD$, gli angoli in A e D sono supplementari, e così pure gli angoli in B e C, in quanto coniugati interni rispetto alle due rette parallele tagliate rispettivamente dalle trasversali AD e BC. Analogamente, se $AD \parallel BC$, gli angoli in A e B sono supplementari, ed anche gli angoli in C e D. La tesi 1 è pertanto dimostrata.
2. Tesi: $A\widehat{B}C \cong C\widehat{D}A$, $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 1. Da queste segue che gli angoli opposti sono congruenti in quanto supplementari dello stesso angolo: gli angoli in A e C sono supplementari entrambi dell'angolo in B, gli angoli in B e in D sono entrambi supplementari dell'angolo in A. La tesi 2 è pertanto dimostrata.
3. Tesi: $ABC \cong CDA$, $DAB \cong BCD$.
   Tracciamo ora una diagonale, ad esempio AC, e consideriamo i due triangoli che si vengono a formare, ABC e ACD. Essendo $AB \parallel CD$, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ ed essendo $AD \parallel BC$, risulta $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, in quanto sono coppie di angoli alterni interni, i primi rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC, gli altri rispetto alle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC. I due triangoli dunque, avendo in comune il lato AC, risultano congruenti per il secondo criterio. Analogamente, applicando il ragionamento precedente ai triangoli ABD e DBC dopo aver tracciato la diagonale DB, concludiamo che anche i due triangoli ADB e DBC risultano congruenti per il secondo criterio. Pertanto la tesi 3 è dimostrata.

4. Tesi: $AB \cong CD$, $AD \cong BC$.
   Dunque, se è vera l'ipotesi, possiamo considerare verificate le congruenze della tesi 3. Dalla congruenza dei triangoli ABC e CDA segue la congruenza dei lati AB e CD, dalla congruenza dei triangoli DAB e BCD segue la congruenza dei lati AD e BC. Pertanto la tesi 4 è dimostrata.
5. Tesi: $AM \cong MC$, $DM \cong MB$.
   Dopo aver tracciato entrambe le diagonali, chiamiamo M il loro punto di intersezione. Confrontiamo i triangoli ABM e CDM: essi risultano congruenti per il secondo criterio, in quanto $AB \cong CD$ (tesi 4), $D\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$ e $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ (come visto nel punto 3 della dimostrazione). Quindi anche i rimanenti elementi risultano ordinatamente congruenti, in particolare $AM \cong MC$ e $DM \cong MB$. Pertanto anche la tesi 5 è dimostrata.

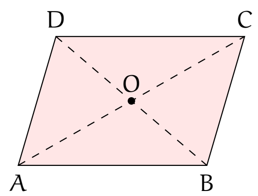
□

Il teorema precedente è invertibile. Precisamente vale il teorema seguente:

Teorema 2.2. *Se in un quadrilatero è verificata una delle seguenti ipotesi:*

1. *gli angoli adiacenti allo stesso lato (a ciascun lato) sono supplementari;*
2. *gli angoli opposti sono congruenti;*
3. *ciascuna diagonale divide il quadrilatero in due triangoli congruenti;*
4. *i lati opposti sono congruenti;*
5. *le diagonali si dividono scambievolmente per metà;*
6. *due lati opposti sono paralleli e congruenti;*

allora il quadrilatero è un parallelogramma.



Dimostrazione.

1. Sia per ipotesi $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$ (dove π è l'angolo piatto). Tali angoli, rispetto alle rette AD ed BC tagliate dalla trasversale AB sono coniugati interni, allora per quanto visto nel capitolo precedente sul parallelismo, le rette AD e BC sono parallele perché formano angoli coniugati interni supplementari con la trasversale AB. Analogamente, se $A\widehat{B}C + B\widehat{C}D \cong \pi$, le rette AB ed DC sono parallele. Dunque $ABCD$ è un parallelogramma, avendo i lati opposti paralleli.
2. Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura $360°$, se gli angoli opposti sono congruenti, vuol dire che $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C + B\widehat{C}D + C\widehat{D}A \cong 2D\widehat{A}B + 2A\widehat{B}C \cong 2\pi$, per cui $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C \cong \pi$, cioè gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari e per la dimostrazione precedente $ABCD$ è un parallelogramma.

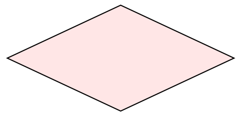
3. Essendo i triangoli ABC e BDC congruenti, l'angolo $A\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $B\widehat{D}C$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD allora le due rette AB e CD saranno parallele. In maniera analoga $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$ e quindi, essendo alterni interni rispetto alle rette BC e AD intersecate dalla trasversale BD si ha che anche $BC \parallel AD$. Quindi $ABCD$ è un parallelogramma. allora i vertici E e G cadranno su semipiani opposti rispetto alla retta FH. Nel caso in cui i due triangoli FHE e FHG, oltre che congruenti, sono isosceli sulla base FH, il quadrilatero $EFGH$ ha gli angoli opposti congruenti, per cui è un parallelogramma per la tesi 2. Se, al contrario, FHE e FHG non sono isosceli sulla base FH, allora dobbiamo considerare due sottocasi distinti, evidenziati in figura, con quattro diversi quadrilateri. Se fosse $EH \cong HG$ e $EF \cong FG$, la figura risulterebbe un deltoide e l'altra diagonale EG non dividerebbe il quadrilatero in due triangoli congruenti. Rimane l'altro sottocaso possibile, $EF \cong HG$ e $EH \cong FG$, ed inoltre $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C$, $A\widehat{B}D \cong B\widehat{D}C$ e $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D$, pertanto il quadrilatero risulta essere un parallelogramma per la 2. Dunque in ogni caso possibile la tesi è dimostrata.
4. Consideriamo la diagonale AC. Il quadrilatero $ABCD$ è diviso in due triangoli ABC e ACD congruenti per il terzo criterio. Pertanto $A\widehat{C}D \cong C\widehat{A}B$ e $A\widehat{C}B \cong C\widehat{A}D$, coppie di angoli alterni interni, nell'ordine rispetto alle rette AB e CD e rispetto alle rette AD ed BC, tagliate dalla trasversale AC. Dunque i lati opposti del quadrilatero $ABCD$ risultano paralleli, cioè è un parallelogramma.
5. Detto O il punto di incontro delle diagonali, i triangoli OAB ed OCD risultano congruenti per il primo criterio, in quanto $OA \cong OC$, $OD \cong OB$ e gli angoli tra essi compresi sono congruenti perché opposti al vertice. Di conseguenza, risulta anche $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$, che sono angoli alterni interni rispetto alle rette DC ed AB tagliate dalla trasversale AC, pertanto $DC \parallel AB$. Analogamente, considerando i triangoli congruenti OBC ed ODA si ha anche $BC \parallel AD$. Dunque $ABCD$ è un parallelogramma.
6. Supponiamo AB e CD paralleli e congruenti. Tracciata la diagonale AC, risulta $D\widehat{C}A \cong C\widehat{A}B$ e dunque i triangoli ACD e CAB risultano congruenti per il primo criterio. Di conseguenza risulta $AD \cong BC$, per cui il quadrilatero ha anche l'altra coppia di lati opposti congruenti. $ABCD$ è dunque un parallelogramma per la 4.

□

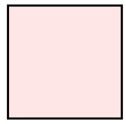
2.4 Parallelogrammi particolari

I parallelogrammi possono essere sia equiangoli sia equilateri.

rettangolo



rombo



quadrato

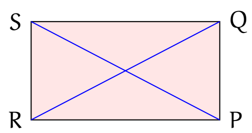
Se un parallelogramma è equiangolo, dato che la somma degli angoli interni è $360°$, deve avere quattro angoli retti: questo succede quando due lati opposti, paralleli tra loro, sono perpendicolari all'altra coppia di lati opposti. Un tale parallelogramma si chiama *rettangolo*.

Se un parallelogramma è equilatero, vuol dire che ciascuna diagonale lo divide in due triangoli isosceli. Un tale parallelogramma si chiama *rombo*.

Un parallelogramma sia equiangolo sia equilatero deve essere contemporaneamente un rettangolo ed un rombo: l'unico tipo di quadrilatero regolare, il *quadrato*. Infatti un quadrilatero, per essere regolare, deve necessariamente avere quattro angoli retti; è quindi un parallelogramma, prima ancora che un rettangolo, perché due angoli retti, oltre ad essere congruenti, sono anche supplementari; inoltre è un rombo in quanto è un parallelogramma con quattro lati congruenti.

A parte le proprietà particolari insite nelle stesse definizioni, il rettangolo e il rombo si distinguono tra loro e dagli altri parallelogrammi per alcune proprietà riguardanti le diagonali. Naturalmente il quadrato gode delle proprietà sia del rettangolo sia del rombo. Ricordiamo che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente per metà. Ora mostreremo che in un rettangolo le diagonali sono congruenti ed in un rombo sono perpendicolari.

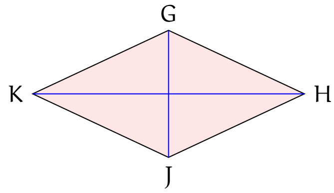
Teorema 2.3. *In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.*



Dimostrazione. Sia $RPQS$ un rettangolo; tracciate le diagonali RQ e PS, confrontiamo i triangoli SRP e RPQ. Tali triangoli rettangoli hanno il cateto RP in comune ed hanno gli altri cateti, SR e PQ, rispettivamente congruenti in quanto lati opposti di un rettangolo. Dunque SRP e RPQ sono congruenti per il primo criterio e di conseguenza devono avere congruenti anche le ipotenuse SP e RQ, le quali sono le diagonali del rettangolo.

Sia $RPQS$ un parallelogramma avente le diagonali RQ e PS congruenti, sempre confrontando i triangoli SRP e RPQ, possiamo affermare che tali triangoli sono congruenti per il terzo criterio, perché hanno il lato RP in comune, i lati RS e QP congruenti in quanto lati opposti di un parallelogramma ed i lati SP e RQ congruenti per ipotesi. Dunque anche gli angoli devono essere ordinatamente congruenti, in particolare perché opposti ai lati congruenti SP e RQ. Ma tali angoli sono anche supplementari in quanto adiacenti allo stesso lato RP di un parallelogramma e pertanto devono risultare retti. Dunque il quadrilatero $RPSQ$ è un rettangolo. □

Teorema 2.4. *In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari e sono anche bisettrici degli angoli aventi per vertici i loro estremi. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari è un rombo; inoltre, se un angolo di un parallelogramma è diviso a metà dalla diagonale passante per il suo vertice, allora il parallelogramma è un rombo.*



Dimostrazione. Notiamo che, in ciascuna delle fasi della dimostrazione, è tra le ipotesi del teorema che $JHGK$ sia un parallelogramma. Ricordiamo che le diagonali di $JHGK$ vengono divise a metà dal loro punto di intersezione, che chiamiamo M, per cui risulta $JM \cong MG$ e $HM \cong MK$.

a) Se supponiamo che $JHGK$ sia un rombo, i triangoli JHG, HGK, GKJ e KJH risultano isosceli, per cui le mediane HM, GM, KM e JM sono anche altezze e bisettrici, per cui la prima parte del teorema è dimostrata.
b) Se supponiamo che JG e HK siano perpendicolari, in particolare i triangoli rettangoli JHM, HGM, GKM e KJM risultano congruenti per il primo criterio, avendo congruenti i cateti. Dunque risultano congruenti anche le ipotenuse, che sono i lati del parallelogramma $JHGK$, il quale pertanto risulta essere un rombo.
c) Se supponiamo ad esempio $K\widehat{G}J \cong J\widehat{G}H$, essendo anche $K\widehat{G}J \cong G\widehat{J}H$ in quanto alterni interni rispetto alle rette parallele KG e JH tagliate dalla trasversale GJ, dalla proprietà transitiva della congruenza segue che $G\widehat{J}H \cong J\widehat{G}H$, per cui il triangolo JGH risulta isoscele sulla base JG. Dunque il parallelogramma $JHGK$ ha due lati consecutivi congruenti, e quindi i quattro lati congruenti, ed è pertanto un rombo.

□

I teoremi precedenti si estendono automaticamente ai quadrati.

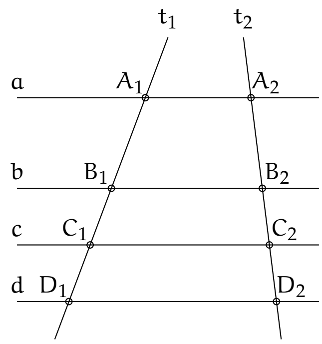
Corollario 2.5. *Le diagonali di un quadrato sono fra loro congruenti e perpendicolari e dividono per metà gli angoli. Viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari, allora è un quadrato; inoltre, se le diagonali di un parallelogramma sono congruenti ed un angolo è diviso a metà da una diagonale, allora il parallelogramma è un quadrato.*

2.5 Corrispondenza di Talete

Definizione 2.2. Nel piano, si definisce *fascio improprio di rette* un insieme di rette tutte parallele tra loro.

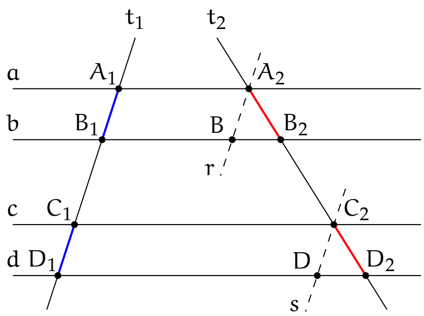
Ricordiamo che una retta contenuta nello stesso piano e non appartenente al fascio improprio è necessariamente incidente rispetto a ciascuna retta del fascio ed ha quindi uno ed un solo punto in comune con ogni singola retta del fascio: una tale retta è dunque una trasversale.

Dato un fascio di rette parallele a, b, c, d, $\dots$, considerate due generiche trasversali, t_1 e t_2, è possibile definire una funzione tra l'insieme dei punti di una trasversale e quello dei punti dell'altra trasversale, che associ a ciascun punto di t_1 il punto di t_2 che appartiene alla medesima retta del fascio (ad esempio al punto A_1 si associa il punto A_2 se, come nella figura a fianco, $A_1 = a \cap t_1$ e $A_2 = a \cap t_2$). Tale funzione è una corrispondenza biunivoca e si estende facilmente ai segmenti: infatti l'immagine del segmento A_1B_1 è il segmento A_2B_2 (se, come nella figura, anche gli estremi B_1 e B_2 appartengono alla stessa retta b del fascio). La corrispondenza biunivoca così definita tra punti e tra segmenti di due trasversali che tagliano un fascio di rette parallele è nota come *corrispondenza di Talete*.



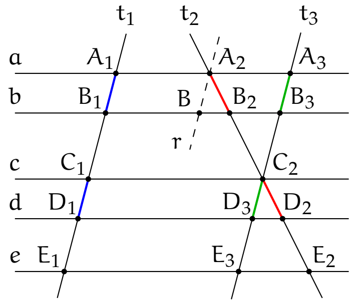
Teorema 2.6. *Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.*

Ipotesi: $A \parallel b \parallel c \parallel d$, t_1 e t_2 trasversali, $A_1B_1 \cong C_1D_1$.
Tesi: $A_2B_2 \cong C_2D_2$.



Dimostrazione. Se fosse $t_1 \parallel t_2$, allora la tesi seguirebbe facilmente dalle proprietà dei quadrilateri particolari e dalla proprietà transitiva della congruenza. Infatti i quadrilateri $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sarebbero due parallelogrammi, ed avrebbero dunque i lati opposti congruenti. Altrimenti, tracciamo la retta r passante per A_2 e la retta s passante per C_2, entrambe parallele a t_1; chiamiamo B il punto di intersezione tra b ed r e D il punto di intersezione tra d ed s. I quadrilateri $A_1B_1BA_2$ e $C_1D_1DC_2$ sono due parallelogrammi, per cui da $A_1B_1 \cong C_1D_1$ segue, per la proprietà transitiva della congruenza, $A_2B \cong C_2D$. Dunque, se confrontiamo i triangoli A_2BB_2 e C_2DD_2, questi risultano congruenti per il secondo criterio (generalizzato), in quanto gli angoli in A_2 e in C_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele r e s tagliate dalla trasversale t_2, mentre gli angoli in B_2 e D_2 sono corrispondenti rispetto alle rette parallele b e d tagliate dalla trasversale t_2 e pertanto congruenti. Di conseguenza $A_2B_2 \cong C_2D_2$. $\square$

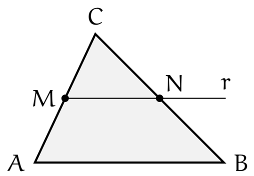
❑ **Osservazione** Nella figura precedente, i trapezi $A_1B_1B_2A_2$ e $C_1D_1D_2C_2$ sono stati "decomposti" in parallelogrammi e triangoli. La sostanza del teorema non cambia però se le figure che si ottengono sono diverse. Nella figura seguente, si considerino, oltre alla corrispondenza tra i segmenti su t_1 e t_2, anche le corrispondenze tra i segmenti su t_1 e t_3 (parallele) e quella tra i segmenti su t_2 e t_3 (con C_3 coincidente con C_2).



2.6 Conseguenze della corrispondenza di Talete

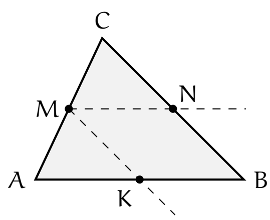
Corollario 2.7. *Se dal punto medio di un lato di un triangolo tracciamo la parallela ad un altro lato del triangolo, questa interseca il terzo lato nel suo punto medio.*

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AC, sia r la parallela ad AB passante per M, sia N il punto di intersezione tra r e CB, sia s la parallela ad AB passante per C. Poiché per ipotesi $CM \cong MA$, per la corrispondenza di Talete risulta $CN \cong NB$, per cui N è il punto medio di CB. □

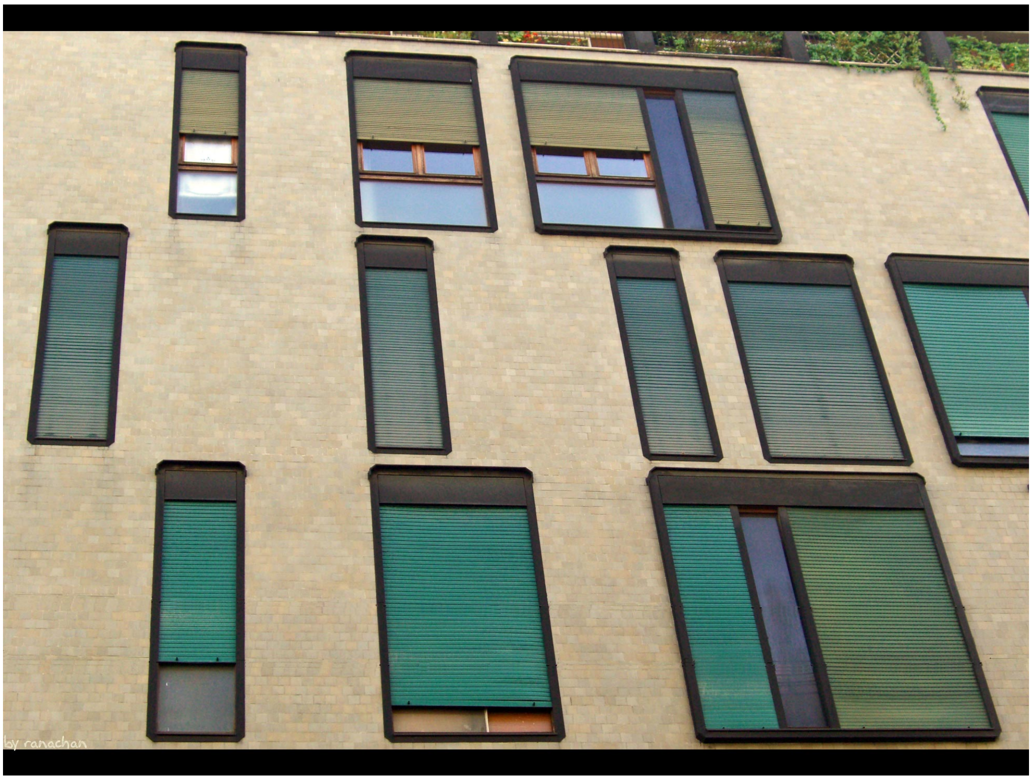


Corollario 2.8. *Il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.*

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AC e sia N il punto medio di CB. Poiché, per il corollario precedente, la parallela ad AB passante per M passa anche per N, il segmento MN è parallelo ad AB (in quanto una retta è ben individuata da due punti ed inoltre, per il quinto postulato di Euclide, esiste una ed una sola retta passante per M e parallela ad AB). Rimane da dimostrare che $MN \cong \frac{1}{2}AB$. Sempre per il corollario precedente, se da M tracciamo la parallela a CB, questa interseca AB nel suo punto medio K. Il quadrilatero $MKBN$ è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti paralleli. Per le proprietà dei parallelogrammi, $MN \cong KB \cong \frac{1}{2}AB$. □



3 Equiestensione e aree



“Window geometry”
Foto di midori.no.kerochan
http://www.flickr.com/photos/28661972@N05/2751042868/

3.1 Estensione superficiale

Il *tangram* è un antichissimo gioco cinese. Il nome con cui lo conosciamo si pensa derivato dall'unione della parola *tang* o *tan*, che significa *cinese*, e *gram* che significa *immagine*. Anticamente in Cina era chiamato "schema intelligente a sette pezzi" o anche "le sette pietre della saggezza" poiché si riteneva che la padronanza del gioco fosse la chiave per ottenere saggezza e talento. Il gioco è costituito da un quadrato ritagliato in 7 pezzi poligonali aventi in comune solo punti del loro contorno (figura 3.1).

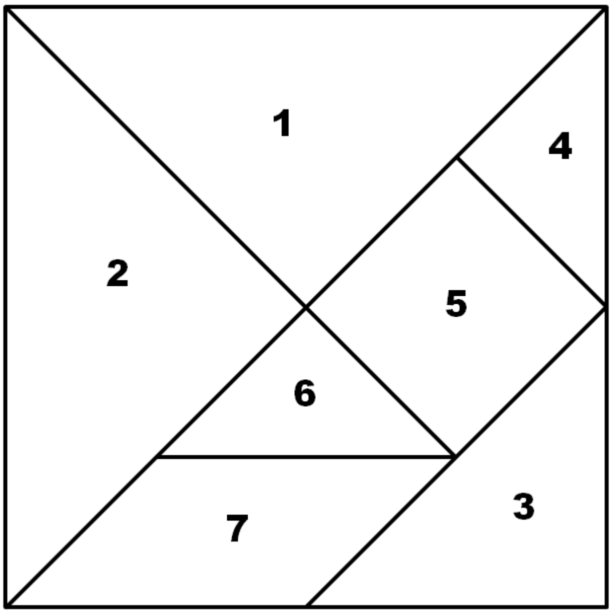


FIGURA 3.1: Il gioco del tangram

I pezzi possono essere disposti e accostati gli uni agli altri senza sovrapposizioni in modo da ottenere una grande varietà di figure; la regola base è che devono essere utilizzati tutti i 7 pezzi. Si possono così formare alcuni disegni come mostrato nella figura 3.2.

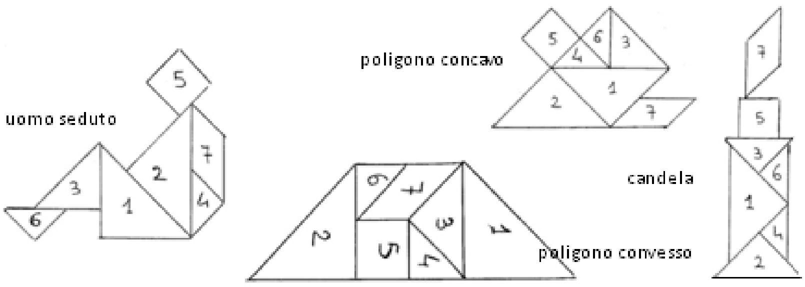


FIGURA 3.2: Alcune figure realizzabili con il tangram

Potete osservare che si forma un poligono quando i singoli pezzi vengono accostati mediante un lato: l'uomo seduto è un poligono, ma non la candela; i due poligoni rappresentati sono l'uno concavo e l'altro convesso.

Con tutti i 7 pezzi del gioco si possono costruire 13 poligoni convessi, compreso il quadrato iniziale, provate a costruirli: fotocopiate la pagina precedente e ritagliate i 7 pezzi del tangram.

Evidentemente i 13 poligoni che avrete costruito non sono congruenti, né hanno la stessa forma; potete dire che sono formati dalle stesse parti poligonali, ciascuno può cioè essere pensato come unione dei *tan* aventi in comune almeno un punto del loro perimetro, ma nessun punto interno.

Definizione 3.1. Con *somma* di due *figure piane* X e Y, non aventi punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, intendiamo la figura Z unione dei punti di X e Y e la indicheremo con

$$\boxed{Z = X + Y}$$

Diremo inoltre che X è la *differenza* tra Z e Y e scriveremo

$$\boxed{X = Z - Y}$$

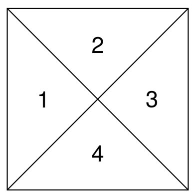
Definizione 3.2. Due poligoni p_1 e p_2 sono *equicomposti* se sono formati dalle stesse parti poligonali (figure piane). Sono *equiscomponibili* se è possibile decomporre uno di essi in un numero finito di parti poligonali con le quali si possa ricoprire l'altro. In simboli

$$\boxed{p_1 \doteq p_2}$$

che si legge "p_1 equicomposto p_2"

Tutte le figure poligonali costruite con i pezzi del tangram $p_1, p_2, \ldots$ sono dunque poligoni equicomposti, ma possono anche essere considerati poligoni equiscomponibili, quindi $p_1 \doteq p_2 \doteq \ldots$

Esempio 3.1. Ritagliate da un quadrato i quattro triangoli rettangoli isosceli che si ottengono tracciando le sue diagonali (fotocopia e ritaglia la figura a fianco). Disponendo fianco a fianco i triangoli ottenuti in modo che i due lati comuni abbiano la stessa lunghezza, si ottengono 14 figure diverse. Due di esse sono riportate nella figura 3.3. Realizzate tutte le altre figure.



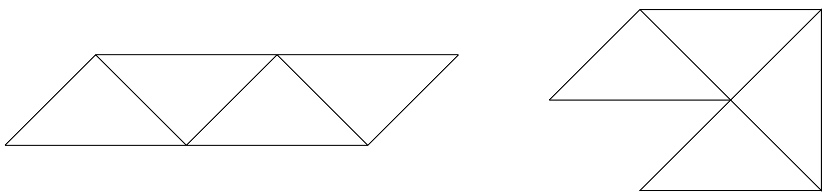


FIGURA 3.3: Alcune figure realizzabili (esempio 3.1)

Le figure ottenute sono .... perché sono formate da ....
(da: Prova di allenamento della gara di "Matematica senza frontiere" del 9/02/1994)

Esempio 3.2. Nella figura 3.4 sono disegnati un quadrato $ABCD$, un rettangolo $PQRS$ avente $PQ = 2AB$ e $SP = AB/2$ e un rombo $FGHK$ avente una diagonale uguale al lato del quadrato e l'altra il doppio. Mostra come sia possibile scomporre ciascuno dei tre poligoni in parti tali da poter ricoprire gli altri due. Puoi concludere che i tre poligoni assegnati sono equiscomponibili? ......

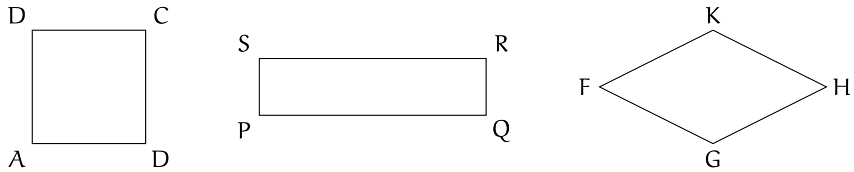


FIGURA 3.4: Esempio 3.2

Esempio 3.3. Dato l'insieme $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ delle figure poligonali disegnate a lato, segui le seguenti istruzioni:

ripeti:

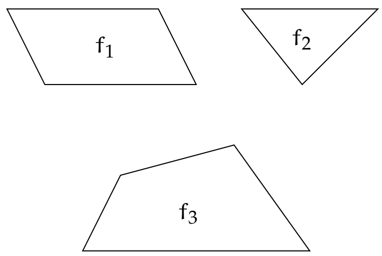
scegli una figura dell'insieme F*;*

traccia alcuni segmenti che la decompongano in parti poligonali;

forma con le parti ottenute altre 3 figure poligonali;

finché non hai esaurito le figure.

Costruisci l'insieme G di tutti i poligoni ottenuti con questa procedura e indica con simboli arbitrari i suoi elementi.



Nell'insieme $S = F \cup G$ (dove F e G sono gli insiemi definiti nell'esempio 3.3) la relazione R espressa dal predicato: «essere equicomposti» gode della proprietà

- riflessiva, infatti ....
- simmetrica, infatti ....
- transitiva, infatti ....

Si può dunque concludere che R è una relazione di equivalenza e quindi si possono costruire sia l'insieme delle parti $P(S)$, sia l'insieme quoziente $E = S/R$ avente come elementi le tre classi di equivalenza, ciascuna rappresentata dal poligono iniziale (figura 3.5):

$$[f_1] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_1\};$$

$$[f_2] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_2\};$$

$$[f_3] = \{x : x \text{ è un poligono equicomposto con } f_3\}.$$

Definizione 3.3. Diciamo che due qualunque poligoni p_1 e p_2 appartenenti alla stessa classe sono *equivalenti* e useremo la scrittura $p_1 \doteq p_2$ per esprimere questa caratteristica (*equivalenza per scomposizione*); essi hanno una caratteristica comune che chiamiamo *estensione superficiale* (ES).

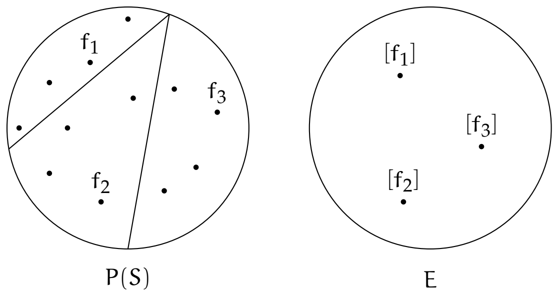


FIGURA 3.5: Rappresentazione dell'insieme delle parti di S e del quoziente $E = S/R$

I poligoni costruiti con i pezzi del tangram appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato iniziale. Anche i 14 poligoni realizzati nell'esempio 3.1 appartengono alla stessa classe di equivalenza; essi sono dunque poligoni equivalenti e hanno la stessa estensione superficiale del quadrato assegnato.

❑ **Osservazione** Sin dalla scuola elementare avete usato termini come "superficie", "estensione" e "area" quando vi siete accostati allo studio dei poligoni, probabilmente ritenendoli sinonimi. Lo studio di una particolare relazione di equivalenza vi ha mostrato che il concetto di estensione di un poligono si ottiene attraverso il procedimento di passaggio al quoziente nell'insieme dei poligoni piani.

Definizione 3.4. Chiamiamo *area* di un poligono p il numero reale positivo $A(p)$ che esprime la misura della sua estensione superficiale.

Possiamo concludere che ad ogni classe di equivalenza, generata con la relazione «essere equicomposti» o «essere equiscomponibili», può essere associato un numero: l'area della figura scelta come rappresentante della classe di equivalenza. In tal modo trasformeremo una relazione di equivalenza tra poligoni, espressa con il simbolo $\doteq$ in una relazione di uguaglianza tra numeri. Ad esempio, riferendoci ai poligoni costruiti con i pezzi del tangram possiamo trasformare la relazione di equivalenza $p_1 \doteq p_2 \doteq p_3 \doteq \ldots$ in un'uguaglianza tra le aree scrivendo $A(p_1) = A(p_2) = A(p_3) = \ldots$

3.2 Poligoni equivalenti

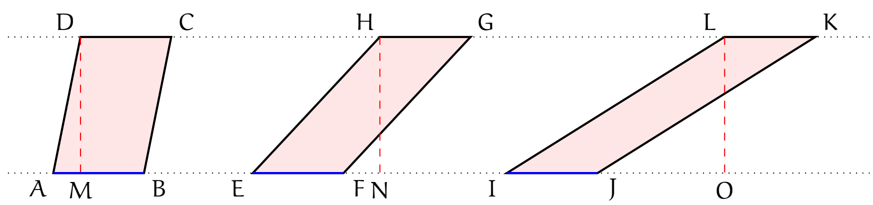
Premettiamo alcuni assiomi:

1. Poligoni congruenti sono equivalenti.
2. Un poligono non è equivalente ad una sua parte propria.
3. Somma e differenza di poligoni equivalenti originano poligoni equivalenti.

Teorema 3.1. *Due parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le rispettive altezze, sono equivalenti.*

Nella figura sottostante sono rappresentati alcuni degli infiniti parallelogrammi aventi basi e altezze congruenti; le loro basi appartengono a rette parallele.

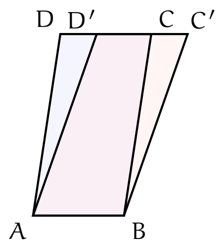
Ipotesi: $AB \cong EF \cong IJ$, $DM \perp AB$, $HN \perp EF$, $LO \perp IJ$, $DM \cong HN \cong LO$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH \doteq IJLK$.



Dimostrazione. Per dimostrare l'equivalenza tra questi parallelogrammi, costruiamo su $ABCD$ un altro parallelogramma, facendo sovrapporre le loro basi. Avremo tre casi:

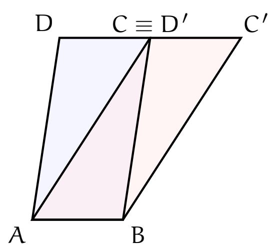
Primo caso

Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice D' è un punto interno a DC. $ABCD$ è scomposto in $ADD' + ABCD'$; $ABC'D'$ è scomposto in $BCC' + ABCD'$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADD' e BCC' potremo concludere che i due parallelogrammi, essendo equicomposti, sono equivalenti. Consideriamo i due triangoli ADD' e BCC', essi sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, infatti: $AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$; $AD' \cong BC'$ perché lati opposti del parallelogramma $ABC'D'$; $DD' \cong CC'$ perché differenza di segmenti congruenti, precisamente $DD' = DC - D'C$ e $CC' = C'D' - CD'$. Dalla congruenza dei triangoli segue anche la loro equivalenza $ADD' \cong BCC' \Rightarrow ADD' \doteq BCC'$. Possiamo allora concludere che $ABCD \doteq ABC'D'$.

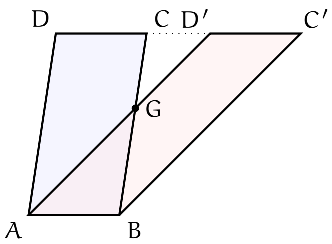


Secondo caso

Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice C coincide con D' e $ABCD$ è scomposto in $ADC + ACB$; $ABC'D'$ è scomposto in $ABD' + BC'D'$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli ADC e $BC'D'$ possiamo concludere che i due parallelogrammi, essendo equicomposti, sono equivalenti. Infatti, ADC e $BC'D'$ hanno $AD \cong CB$ perché lati opposti di uno stesso parallelogramma, $DC \cong C'D'$, $AC \cong BC'$, pertanto ADC e $BC'D'$ sono triangoli congruenti.



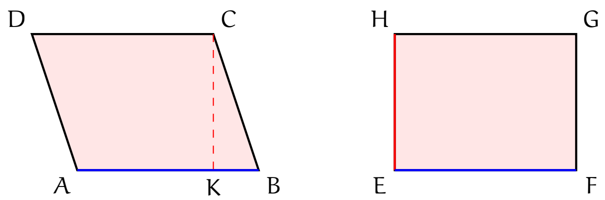
Terzo caso
Costruiamo su $ABCD$ il parallelogramma $ABC'D'$ avente la stessa base AB e la stessa altezza; il vertice D' è esterno al lato DC e i lati AD' e BC si intersecano nel punto G. $ABCD$ è scomposto in $ADCG + AGB$ mentre $ABC'D'$ è scomposto in $BGD'C' + AGB$, inoltre $ADCG$ si può scomporre in $ADD' - CGD'$ come $BGD'C'$ si può scomporre in $BCC' - CGD'$. Quindi $ABCD$ è scomposto in $ADD' - CGD' + AGB$ e $ABC'D'$ è scomposto in $BCC' - CGD' + AGB$. Basta allora dimostrare la congruenza dei triangoli ADD' e BCC' per dire che $ABCD$ e $ABC'D'$ sono equiscomposti e dunque equivalenti. Infatti ADD' e BCC' sono congruenti perché hanno $AD \cong BC$, lati opposti del parallelogramma, analogamente $AD' \cong BC'$ e $DD' \cong CC'$ perché somma di segmenti congruenti.



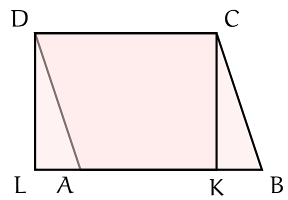
□

Corollario 3.2. *Ogni parallelogramma è equivalente al rettangolo avente un lato congruente alla sua base e l'altro lato congruente alla sua altezza.*

Ipotesi: $AB \cong EF$, $CF \perp AB$, $CK \cong HE$.
Tesi: $ABCD \doteq EFGH$.



Dimostrazione. Dal vertice D tracciamo l'altezza DL relativa alla base AB; il quadrilatero $DLKC$ è un rettangolo congruente a $EFGH$; dimostrando che $ABCD \doteq DLKC$ si ottiene la tesi.
Completate la dimostrazione.
Osserviamo che $ABCD$ è composto da .... e $DLKC$ è composto da .... Consideriamo i triangoli ....
Sono congruenti perché .... quindi .... □

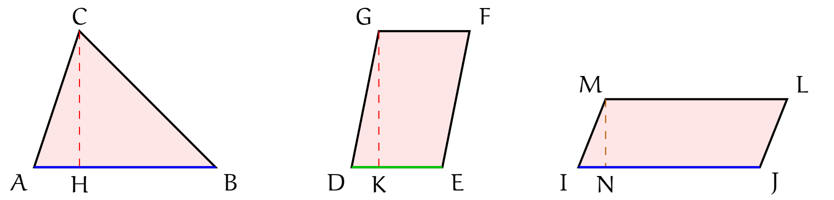


Il teorema 3.1 e il suo corollario 3.2 ci assicurano che i parallelogrammi aventi rispettivamente congruenti le basi e le relative altezze formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo che ha un lato congruente alla base del parallelogramma e l'altro lato congruente alla sua altezza. Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq EFGH \Rightarrow A_{ABCD} = A_{EFGH}$.

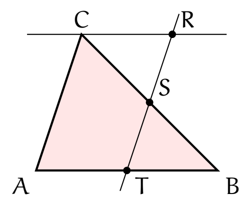
Teorema 3.3. *Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente:*

a) base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, oppure
b) base congruente alla base del triangolo e altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo.

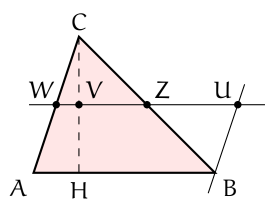
Nella figura sono rappresentati il triangolo ABC, il parallelogramma $DEFG$ avente base congruente alla metà della base del triangolo e altezza congruente all'altezza del triangolo, il parallelogramma $IJLM$ avente altezza congruente alla metà dell'altezza del triangolo e base congruente alla base del triangolo.
Ipotesi: $AB \perp CH$, $DE \cong \frac{1}{2}AB$, $GK \perp DE$, $GK \cong CH$, $IJ \cong AB$, $MN \perp IJ$, $MN \cong \frac{1}{2}CH$.
Tesi: a) $ABC \doteq DEFG$; b) $ABC \doteq IJLM$.



Dimostrazione.
Caso a.
Dal punto medio T della base AB tracciamo la parallela al lato AC che incontra CB in S; dal vertice C tracciamo la parallela alla base AB che interseca in R la retta ST; il parallelogramma $ATRC$ soddisfa le ipotesi del caso a) ed è equivalente a $DEFG$ per il teorema 3.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da $CATS + BST$ e $ATRC$ composto da $CATS + CSR$. Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CSR e BST potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $TB \cong CR$ infatti .... $SB \cong CS$ infatti .... $T\widehat{B}S \cong S\widehat{C}R$ infatti .... Allora per il primo criterio di congruenza $TBS \cong SCR$ e quindi $ATRC \doteq BST$.



Caso b.
Dal punto medio V dell'altezza CH tracciamo la parallela alla base AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente in W e Z; da B tracciamo la parallela al lato AC che interseca la retta WZ in U; il parallelogramma $AWUB$ soddisfa le ipotesi del caso b) ed è equivalente a $IJLM$ per il teorema 3.1. Confrontiamo il triangolo e il parallelogramma: possiamo pensare ABC composto da .... e $AWUB$ composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli CWZ e ZBU potremo concludere che triangolo e parallelogramma, essendo equicomposti, sono equivalenti. $CW \cong \ldots$ infatti .... $CZ \cong \ldots$ infatti .... $\ldots \cong Z\widehat{B}U$ infatti .... Pertanto ....

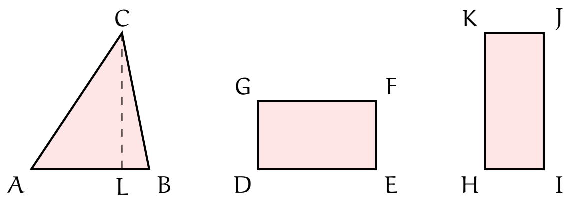


□

Corollario 3.4. *I triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa proprietà.

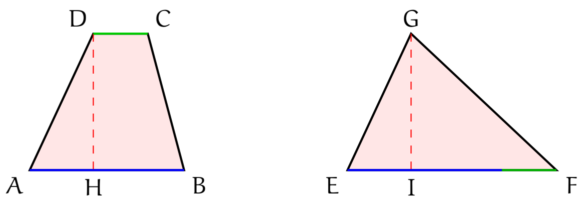
Il teorema 3.3 e il suo corollario (3.4) ci assicurano che i triangoli aventi rispettivamente congruenti la base e la rispettiva altezza formano una classe di equivalenza avente come rappresentante il rettangolo con un lato congruente alla base del triangolo e l'altro lato congruente a metà della sua altezza, oppure un lato congruente all'altezza del triangolo e l'altro lato congruente a metà della base.



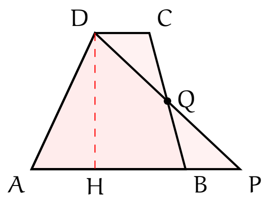
Ipotesi: $CL \perp AB$, $DE \cong AB$, $DG \cong \frac{1}{2}CL$, $KH \cong CL$, $HI \cong \frac{1}{2}AB$.
Tesi: $ABC \doteq DEFG \doteq HIJK \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DEFG} = \mathcal{A}_{HIJK}$.

Teorema 3.5. *Un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.*

Ipotesi: $EF \cong AB + CD$, $DH \perp AB$, $GI \perp EF$, $GI \cong DH$.
Tesi: $ABCD \doteq EFG$.



Dimostrazione. Prolunghiamo la base AB del segmento BP congruente a DC e congiungiamo D con P. APD è un triangolo equivalente a EFG avendo stessa base e stessa altezza, quindi basta dimostrare che $ABCD \doteq APD$. Confrontiamo il trapezio e il triangolo: possiamo pensare $ABCD$ composto da .... e APD composto da .... Se dimostriamo la congruenza dei triangoli .... potremo concludere che trapezio e triangolo, essendo equicomposti, sono equivalenti. I due triangoli sono congruenti perché hanno .... Possiamo quindi affermare che $ABCD \doteq APD \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{APD}$. □

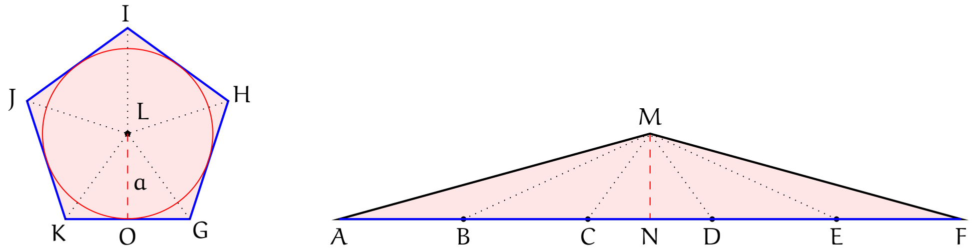


Pertanto, utilizzando il teorema 3.3 e il suo corollario (3.4) possiamo sempre determinare il rettangolo equivalente a un trapezio dato.

Teorema 3.6. *Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente per base il segmento somma dei lati del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.*

Caso del poligono regolare (pentagono).

Ipotesi: $LO \cong MN$, $AF \cong KG + GH + HI + IJ + LK$, $AB \cong KG$, $BC \cong GH$, $CD \cong HI$, $DE \cong IJ$, $EF \cong JK$.
Tesi : $KGHIJ \doteq AFM$.



Dimostrazione. I cinque triangoli che compongono il triangolo AFM sono equivalenti ai 5 triangoli che compongono il poligono assegnato, infatti hanno basi .... altezza .... Quindi .... □

Caso del poligono qualunque.

Lasciamo al lettore la costruzione di un poligono circoscritto a una circonferenza e del triangolo equivalente.

Possiamo quindi affermare che ogni poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente ad un triangolo e per il teorema 3.3 è anche equivalente a un rettangolo.

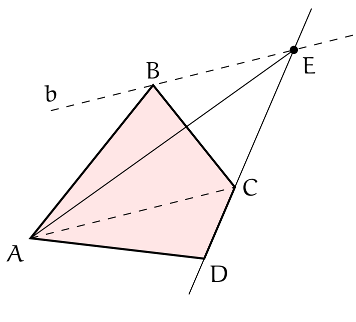
Si pone ora la questione: è possibile trasformare un qualunque poligono in un rettangolo equivalente?

3.2.1 Costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono assegnato

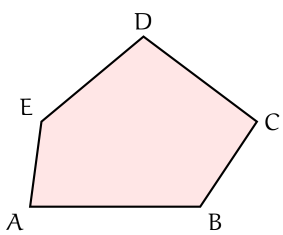
Caso 1: poligono convesso

Un qualunque poligono convesso può essere trasformato in un poligono equivalente avente un lato di meno.

Quadrilatero. In figura è rappresentato il quadrilatero convesso $ABCD$, ci proponiamo di costruire un triangolo equivalente ad esso. Dal vertice B tracciamo la parallela b alla diagonale AC; il vertice E è il punto di intersezione di b con la retta per DC. I triangoli ABC e ACE sono equivalenti in quanto hanno la stessa base AC e stessa altezza, poiché i loro vertici si trovano sulla retta b parallela alla base. Il quadrilatero $ABCD$ si può pensare composto da $ADC + ACB$; il triangolo ADE è composto da ....; poiché sono poligono equicomposti possiamo concludere che $ABCD \doteq ADE$.



Pentagono. Costruzione di un triangolo equivalente al pentagono convesso $ABCDE$ rappresentato in figura. Tracciare la diagonale DB. Dal vertice C tracciare la parallela a DB. Prolungare il lato AB fino a incontrare in F la retta r. Congiungere D con F. Si ha che infatti



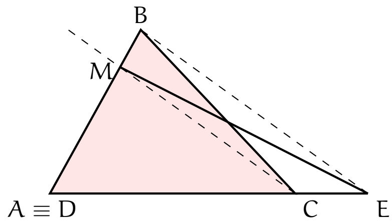
. . . . Sul quadrilatero FDE si può procedere come descritto precedentemente.

Conclusione: ogni poligono convesso è equivalente a un triangolo e quindi (corollario 3.4) a un rettangolo.

Caso 2: poligono concavo

Premettiamo la costruzione di un triangolo con base assegnata equivalente ad un triangolo ABC dato.

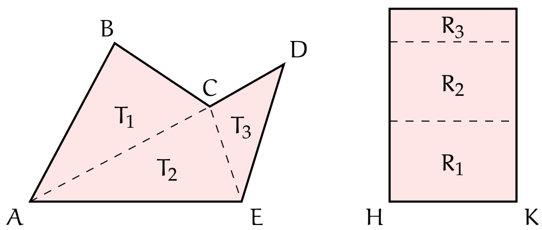
Sia ABC il triangolo e DE il segmento che vogliamo come base del triangolo equivalente. Sovrapponiamo il segmento DE al lato AC facendo coincidere D con A; l'estremo E è esterno al triangolo assegnato. Dopo aver congiunto B con E, da C tracciamo la parallela a BE che incontra in M il lato AB. Il triangolo MDE è equivalente ad ABC.



Completate il ragionamento.
Si ha per costruzione: $DBE = ABC + BCE$ e $DBE = DME + BME$. Quindi $ABC = DBE - BCE$ e $DME - BME$. I triangoli BCE e BME sono equivalenti, avendo stessa base BE e stessa altezza perché . . . . Possiamo quindi concludere che . . . .

Passiamo ora alla costruzione di un rettangolo equivalente a un poligono concavo.

Dato il poligono concavo $ABCDE$, suddividiamolo in 3 triangoli tracciando due diagonali e fissiamo arbitrariamente un segmento HK. Ciascun triangolo in cui è suddiviso $ABCDE$ può essere trasformato in un triangolo equivalente avente HK come base e dunque in un rettangolo con base HK; con tali rettangoli possiamo costruire, impilandoli uno sull'altro, il rettangolo equivalente ad $ABCDE$.

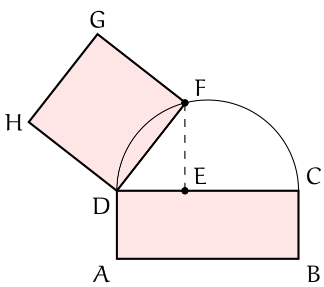


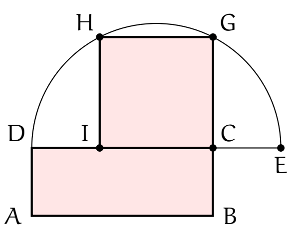
Possiamo quindi concludere che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo.

3.2.2 Da un poligono al quadrato equivalente

Nella classe di equivalenza di un qualsiasi poligono c'è sempre un quadrato. Ossia, dato un poligono possiamo sempre trovare un quadrato equivalente. Abbiamo dimostrato che un qualunque poligono è equivalente a un rettangolo, ora vogliamo dimostrare che, dato un rettangolo esiste sempre un quadrato equivalente ad esso. Vediamo due possibili costruzioni.

1° modo Dopo aver disegnato il rettangolo $ABCD$ equivalente al poligono considerato, costruiamo la semicirconferenza di diametro DC. Fissiamo su DC il punto E tale che $DE \cong AD$. Dal punto E tracciamo la perpendicolare al diametro che interseca la semicirconferenza in F. Il triangolo DFE





è retto in E perché ....
Il quadrato avente come lato DF è equivalente al rettangolo $ABCD$ perché ....

2º modo Dato il rettangolo $ABCD$ equivalente al poligono considerato, prolunghiamone il lato DC fino al punto E tale che $CE \cong AD$. Quindi tracciamo la semicirconferenza di diametro DE. Dal punto C tracciamo la perpendicolare al diametro che interseca la semicirconferenza in G. Il triangolo DGE è retto in G perché ....
Il quadrato avente come lato CG è equivalente al rettangolo $ABCD$ perché ....

Costruite il quadrato equivalente al poligono $ABCDE$ riportato nella figura a fianco.

3.3 Aree dei principali poligoni

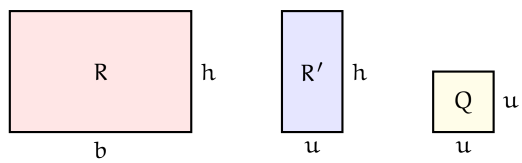
Per *area* di una qualunque figura piana intendiamo il numero reale che esprime la misura dell'estensione superficiale della figura data.

Per calcolare le aree dei principali poligoni si ricava per prima l'area del rettangolo e poi, basandosi sui teoremi relativi all'equivalenza delle figure piane, da questa si ricavano le aree di altri poligoni fondamentali.

3.3.1 Area del rettangolo

Teorema 3.7. *L'area del rettangolo è data dal prodotto della misura delle sue dimensioni*

$$\boxed{A = b \cdot h}$$



Dimostrazione. A questo scopo ricorriamo al teorema **??** «I rettangoli aventi una dimensione congruente sono direttamente proporzionali all'altra dimensione». Consideriamo allora un rettangolo R le cui misure della base e dell'altezza sono rispettivamente b e h, il rettangolo R' che otteniamo da R trasformando una dimensione, ad esempio la sua base, in quella unitaria u, di misura 1, ed infine il quadrato Q di lato u. Applichiamo il teorema enunciato in precedenza a R ed a R' ottenendo $R : R' = b : u$. Quindi applichiamo lo stesso teorema al rettangolo R' ed al quadrato unitario Q, così abbiamo $R' : Q = h : u$. Passiamo dalla proporzione tra le grandezze alla proporzione tra le loro misure, iniziando dall'ultima proporzione e chiamando rispettivamente A ed A' le misure delle estensioni superficiali di R ed R'. Si ha $A' : 1 = h : 1$, da cui ricaviamo $A' = h$. Sostituiamo dunque nella prima proporzione le misure di R', b e u, si ha $A : A' = b : 1 \Rightarrow A : h = b : 1$, da cui ricaviamo $A = b \cdot h$ che è proprio ciò che volevamo dimostrare. □

3.3.2 Area del quadrato

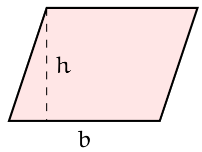
Poiché il quadrato è un particolare rettangolo avente le dimensioni congruenti tra loro, $b = h = l$, anche la sua area si calcolerà in modo analogo a quella del rettangolo $A = b \cdot h = l \cdot l$ ovvero

$$\boxed{A = l^2}$$

Dunque l'area del quadrato è data dal quadrato del lato.

3.3.3 Area del parallelogramma

Ricordando il teorema 3.1 sull'equivalenza tra parallelogrammi, secondo il quale due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno un lato (base) e l'altezza ad esso relativa tra loro congruenti, da cui deriva il corollario 3.2 che un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruenti a quelle del parallelogramma stesso, è immediato dedurre che anche l'area del parallelogramma si calcola moltiplicando un lato, ritenuto la base, per l'altezza ad esso relativa, cioè



$$\boxed{A = b \cdot h}$$

3.3.4 Area del triangolo

Anche in questo caso ci si deve rifare al teorema 3.3 sull'equivalenza tra un triangolo e un parallelogramma «Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente come base metà della base del triangolo ed altezza congruente a quella del triangolo». Appare allora evidente che l'area del triangolo è

$$\boxed{A = \frac{b}{2} \cdot h}$$

dove $b/2$ è la base del parallelogramma ad esso equivalente.

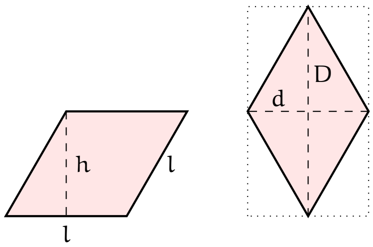
3.3.5 Area del trapezio

Sempre dai teoremi sull'equivalenza, sappiamo che «Un trapezio è equivalente ad un triangolo la cui base è congruente alla somma delle basi del trapezio e la cui altezza ad essa relativa è congruente all'altezza del trapezio» (teorema 3.5). Dunque l'area del trapezio sarà

$$\boxed{A = \frac{B + b}{2} \cdot h}$$

dove $B + b$ è la somma delle basi del trapezio, e quindi $(B + b)/2$ è la base del triangolo ad esso equivalente.

3.3.6 Area del rombo



Poiché il rombo è un particolare parallelogramma, la sua area si trova moltiplicando uno dei suoi lati per l'altezza ad esso relativa, cioè $A = l \cdot h$. Possiamo però notare che un rombo si può considerare come la metà di un rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alle diagonali del rombo (D e d). Come si può facilmente dimostrare, le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti ai quattro triangoli rettangoli esterni al rombo, e quindi il rombo è equivalente alla metà del rettangolo, per cui la sua area può essere espressa come

$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Si può inoltre dimostrare, in maniera del tutto analoga a quanto precedentemente descritto, che l'area di un qualsiasi quadrilatero che abbia le diagonali perpendicolari è determinabile in questo modo.

3.3.7 Area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza

Ricordiamo anche in questo caso il teorema 3.6 «un poligono circoscrivibile ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza inscritta». Da qui segue immediatamente che l'area di questo tipo di poligono è data da

$$\boxed{A = \frac{2p \cdot r}{2} = p \cdot r}$$

dove, come di consuetudine, p indica il semiperimetro.

In particolare, se il poligono è regolare, sarà sempre possibile calcolare l'area per mezzo della formula

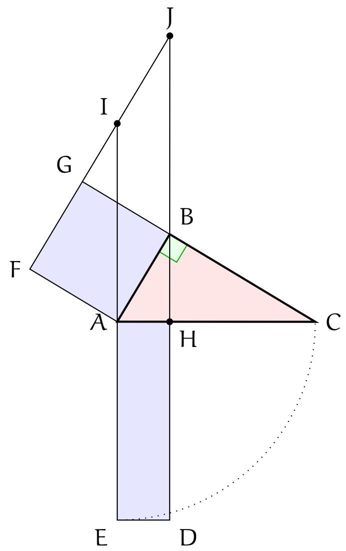
$$\boxed{A = p \cdot a}$$

dove a è l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta nel poligono regolare.

3.4 Teoremi di Pitagora e di Euclide

Teorema 3.8 (Primo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola di un segmento HD congruente all'ipotenusa stessa e costruiamo il rettangolo $AEDH$. Sul cateto AB costruiamo il quadrato $ABGF$. Prolunghiamo i lati HD ed AE del rettangolo ed il lato FG del quadrato e chiamiamo I e J i punti di intersezione tra questi prolungamenti. Otteniamo il parallelogramma $ABJI$. La tesi da dimostrare è che il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$.



Consideriamo innanzitutto i triangoli AIF e ABC, essi sono congruenti in quanto hanno entrambi un angolo retto ($A\widehat{F}I$ e $A\widehat{B}C$), $AF \cong AB$ in quanto lati di un quadrato, $F\widehat{A}I \cong B\widehat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\widehat{A}B$. Dunque i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, ed in particolare avranno $AI \cong AC$.

Consideriamo ora il parallelogramma $ABJI$ ed il quadrato $ABGF$; essi sono equivalenti in quanto hanno il lato AB in comune e la stessa altezza BG relativa a questo lato. Consideriamo poi il parallelogramma $ABJI$ ed il rettangolo $AHDE$; anch'essi sono equivalenti poiché hanno basi congruenti AE e AI, entrambe congruenti ad AC, e stessa altezza AH. Allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che anche il quadrato $ABGF$ è equivalente al rettangolo $AEDH$ e così la tesi è provata. □

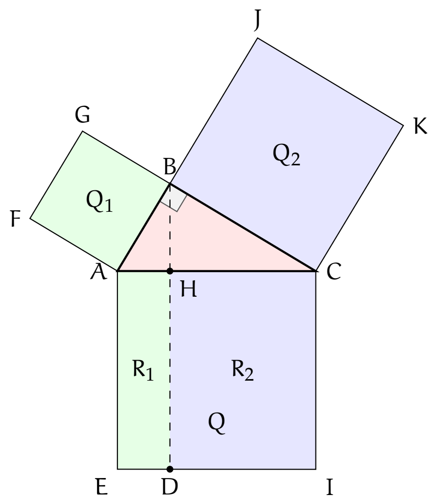
Vale anche il teorema inverso.

Teorema 3.9 (Primo teorema di Euclide [inverso])**.** *Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni il lato maggiore del triangolo e la proiezione del primo lato su di esso, allora il triangolo è rettangolo.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si usa la stessa costruzione fatta per il teorema diretto. Si inizia dimostrando nello stesso modo l'equivalenza tra il quadrato $ABGF$ ed il parallelogramma $ABJI$. Poiché per ipotesi il rettangolo $AHDE$ è equivalente al quadrato $ABGF$, allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che il rettangolo $AHDE$ ed il parallelogramma $ABJI$ sono equivalenti. Poiché parallelogramma e rettangolo hanno la stessa altezza AH, essendo equivalenti dovranno avere congruenti le basi $HD \cong BJ$. Ma per costruzione $HD \cong AC$, e quindi sarà anche $BJ \cong AC$, da cui segue $AI \cong BJ \cong AC$. Quindi i triangoli AIF ed ABC saranno congruenti per il primo criterio in quanto hanno $AI \cong AC$ e $AB \cong AF$, poiché lati di un quadrato, e $F\widehat{A}I \cong B\widehat{A}C$ in quanto complementari dello stesso angolo $I\widehat{A}B$. Dunque avranno anche gli angoli $A\widehat{F}I \cong A\widehat{B}C$ e poiché $A\widehat{F}I$ è retto lo sarà anche $A\widehat{B}C$. □

Teorema 3.10 (di Pitagora)**.** *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione. Dopo aver disegnato i quadrati Q_1 e Q_2 sui cateti e Q sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, tracciamo l'altezza BH relativa all'ipotenusa AC e prolunghiamola finché non incontra il lato IE del quadrato Q, il quale risulta così diviso in due rettangoli R_1 ed R_2. Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC avremo che $Q_1 \doteq R_1$ e che $Q_2 \doteq R_2$ in quanto, per costruzione, R_1 ed R_2 hanno la stessa altezza, pari alla lunghezza dell'ipotenusa AC e ognuno di essi ha la base pari alla proiezione sull'ipotenusa stessa del relativo cateto. Sommando quindi ambo i membri di queste due equivalenze otteniamo che $Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$. Ma $R_1 + R_2 \doteq Q$, da cui segue, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, $Q \doteq Q_1 + Q_2$, che è proprio quanto volevamo dimostrare. □

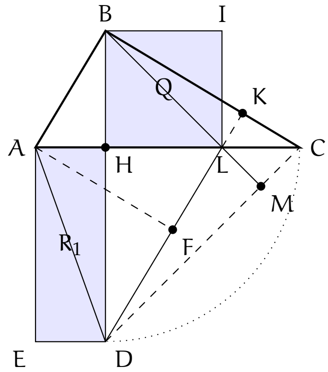


Anche per il teorema di Pitagora vale il teorema inverso.

Teorema 3.11 (di Pitagora [inverso])**.** *Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo.*

Dimostrazione. Sia ABC il triangolo per cui vale il teorema di Pitagora; vogliamo dimostrare che questo triangolo è rettangolo. Consideriamo il triangolo rettangolo $A'B'C'$, i cui cateti $A'B'$ e $A'C'$ siano rispettivamente congruenti ai due lati del triangolo AB e AC. Al triangolo $A'B'C'$ possiamo applicare il teorema di Pitagora, per cui abbiamo che il quadrato costruito su $B'C'$ è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti $A'B'$ e $A'C'$. I quadrati costruiti sui lati congruenti AB e $A'B'$ sono congruenti, così come lo sono i quadrati costruiti su AC e $A'C'$, quindi avremo che: $Q_{AB} + Q_{AC} \doteq Q_{A'B'} + Q_{A'C'}$. Poiché per ipotesi $Q_{AB} + Q_{AC} \doteq Q_{BC}$ e, avendo applicato il teorema di Pitagora al triangolo $A'B'C'$, sarà anche $Q_{A'B'} + Q_{A'C'} \doteq Q_{B'C'}$. Per la proprietà transitiva dell'equivalenza avremo che: $Q_{BC} \doteq Q_{B'C'}$. Poiché due quadrati sono equivalenti quando hanno lo stesso lato, avremo che $BC \cong B'C'$, e quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio. Allora saranno congruenti anche gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$, e poiché $\widehat{A'}$ è retto, lo sarà anche $\widehat{A}$. Quindi ABC è un triangolo rettangolo. □

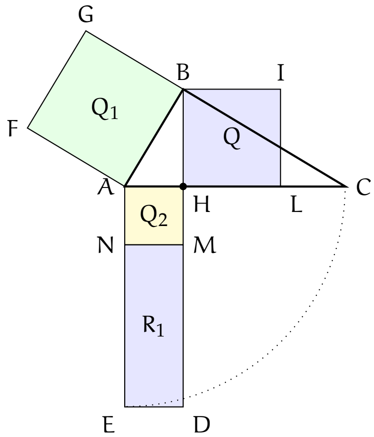
Teorema 3.12 (Secondo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*



Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che il quadrato Q che ha come lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo R_1 che ha come lati le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

La costruzione è la seguente: dopo aver disegnato il quadrato Q si disegnano anche il quadrato Q_1, che ha come lato il cateto AB, ed il rettangolo R, che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione AH di AB sull'ipotenusa. All'interno di questo rettangolo possiamo individuare il quadrato Q_2, di lato AH, ed il rettangolo R_1, che ha come dimensioni $NM \cong AH$ e $MD \cong HD - HM \cong HC$, in quanto $HD \cong AC$ e $HM \cong AH$.

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABH, e applichiamo ad esso il teorema di Pitagora, risulta $Q_1 \doteq Q + Q_2$. Applichiamo ora al triangolo ABC il primo teorema di Euclide, si ha $Q_1 \doteq R$. Confrontiamo le due relazioni ed applichiamo la proprietà transitiva dell'equivalenza $Q + Q_2 \doteq R$. Ma $R \doteq Q_2 + R_1$, quindi sostituendo avremo $Q + Q_2 \doteq Q_2 + R_1$ e sottraendo ad ambo i membri la stessa quantità Q_2 otteniamo la tesi $Q \doteq R_1$. □



Anche per questo teorema vale il teorema inverso.

Teorema 3.13 (Secondo teorema di Euclide [inverso])**.** *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, il triangolo è rettangolo.*

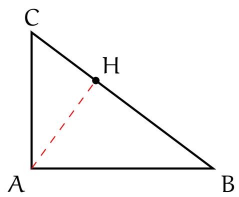
Dimostrazione. Costruiamo il quadrato $BILH$ sull'altezza relativa all'ipotenusa ed il rettangolo $AHDE$ che ha come lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa; essi sono equivalenti per ipotesi. Dobbiamo dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo.

Congiungiamo D con C, tracciamo la diagonale BL del quadrato e prolunghiamola finché non incontra DC in M. Tracciamo infine la diagonale AD del rettangolo. Consideriamo i triangoli ADH e BHL: sono equivalenti in quanto metà di figure equivalenti. Ora consideriamo i triangoli ADL e BDL, sono equivalenti in quanto somme di figure equivalenti: i triangoli ADH, BHL a cui aggiungiamo lo stesso triangolo HDL. Essendo equivalenti ed avendo la stessa base DL dovranno avere anche la stessa altezza $AF \cong BK$, cioè la stessa distanza tra AB e DK e quindi AB e DK sono paralleli.

Detto M il punto intersezione tra le rette DC e BL, notiamo che, essendo BHL e HDC triangoli rettangoli isosceli, avranno gli angoli alla base di $45°$; ma è anche $H\widehat{L}B \cong M\widehat{L}C = 45°$ in quanto opposti al vertice, perciò $L\widehat{M}C = 90°$. Allora BM e CH sono due altezze del triangolo BDC, e poiché si incontrano nel punto L questo risulta essere l'ortocentro del triangolo, e poiché il segmento BK passa per l'ortocentro deve essere a sua volta altezza relativa a BC. Ma poiché avevamo già dimostrato che DK è parallelo al AB, se DK è perpendicolare a BC lo sarà anche AB e quindi il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. □

3.5 Applicazioni dei teoremi di Euclide e Pitagora

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC nella figura a fianco. Supponiamo di conoscere la misura dell'ipotenusa BC e della proiezione CH del cateto AC, sull'ipotenusa; allora possiamo applicare il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza del cateto AC: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$.



Se invece conosciamo la lunghezza del cateto AC e quella della sua proiezione CH e vogliamo trovare l'ipotenusa, allora avremo $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}}$.

Supponiamo ora di conoscere le misure delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, BH e CH, e di voler trovare la misura di AH, altezza relativa all'ipotenusa, applicando il secondo teorema di Euclide avremo $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$, da cui si ricava $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}}$.

Se invece conosciamo l'altezza relativa all'ipotenusa ed una delle due proiezioni dei cateti, ad esempio CH, e vogliamo trovare la lunghezza dell'altra (BH), avremo $BH = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}}$.

Per quanto riguarda poi le applicazioni del teorema di Pitagora, che sicuramente lo studente conosce già dalle scuole medie, ricordiamo che se abbiamo la misura dei due cateti avremo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, da cui $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$; viceversa, conoscendo l'ipotenusa ed un cateto, ad esempio AC, avremo $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$.

Esempio 3.4. Calcolare perimetro ed area di un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo 10 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa lunga 8 cm.

Facendo riferimento alla figura 3.6, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{CH} = 8$ cm.

Applichiamo il primo teorema di Euclide per trovare la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}} = \dfrac{10^2}{8} = \dfrac{100}{8} = 12{,}5$ cm. Per trovare l'altro cateto possiamo applicare il teorema di Pitagora $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4} - 100} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ cm. Quando il teorema di Pitagora viene applicato per trovare un cateto si può anche semplificare il calcolo scomponendo la differenza di quadrati

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(\overline{BC} - \overline{AC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{AC})} = \sqrt{\left(\frac{25}{2} - 10\right) \cdot \left(\frac{25}{2} + 10\right)} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{45}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^2}{2^2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

A questo punto conosciamo tutti i lati, quindi possiamo calcolare il perimetro $2p = 8 + 7{,}5 + 12{,}5 = 30$ cm e l'area $A = (\text{cateto} \times \text{cateto})/2 = 37{,}5$ cm^2.

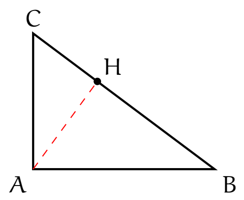


FIGURA 3.6: Esempi 3.4 e 3.5

Esempio 3.5. Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12 cm. Il perimetro del triangolo formato dall'altezza e da uno dei cateti è 36 cm. Determina la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa e il perimetro del triangolo ABC.

Dai dati si ha che $AH = 12$ cm, e $2p_{ABH} = 36$ cm (figura 3.6). Questo vuol dire che $AB + BH = 2p - AH = 24$ cm. Posso allora porre $AB = x$, da cui $BH = 24–x$. Applichiamo il teorema di Pitagora ed otteniamo l'equazione

$$x^2 = 12^2 + (24 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12^2 + 24^2 - 48x + x^2$$

sviluppando i calcoli, il termine in x^2 si elimina e otteniamo l'equazione di primo grado $48x = 24^2 + 12^2$. Per evitare i calcoli raccogliamo al secondo membro 12^2, quindi ricaviamo $x = \dfrac{12^2 \cdot (2^2 + 1)}{4 \cdot 12} = 15$ cm.

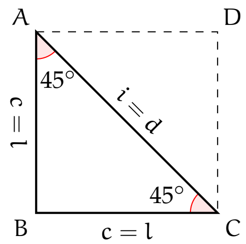
A questo punto possiamo ottenere $BH = 24 - x = 24 - 15 = 9$ cm. Oppure, ricorrendo alla terna pitagorica fondamentale 3, 4, 5, di cui i lati del triangolo ABH sono multipli secondo il numero 3, ho $BH = 3 \cdot 3 = 9$ cm.

Per ricavare CH applichiamo il secondo teorema di Euclide $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{BH}} = \dfrac{144}{9} = 16$ cm.

Sommando CH con BH troviamo l'ipotenusa $BC = 25$ cm. Per ricavare l'altro cateto ricorriamo alla terna pitagorica fondamentale $AB = 3 \cdot 5 = 15$ cm, $BC = 5 \cdot 5 = 25$ cm, da cui $AC = 4 \cdot 5 = 20$ cm. Il perimetro vale quindi $2p = 15 + 25 + 20 = 60$ cm.

3.6 Applicazioni dell'algebra alla geometria

3.6.1 Triangoli rettangoli con angoli di 45°

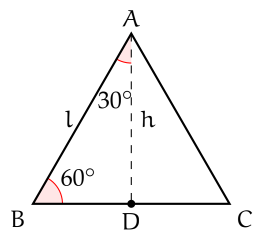


Un triangolo rettangolo avente un angolo di $45°$ è necessariamente isoscele, in quanto anche il terzo angolo varrà $45°$, infatti $180° - (90° + 45°) = 45°$. Indicando con i l'ipotenusa e con c ognuno dei due cateti, applicando il teorema di Pitagora avremo $i = \sqrt{c^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$.

Viceversa, se conosciamo l'ipotenusa e vogliamo ricavare i cateti, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $c = \dfrac{i}{\sqrt{2}} = i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Un triangolo rettangolo isoscele può anche essere interpretato come metà di un quadrato, di cui i cateti sono i lati e l'ipotenusa è la diagonale. Indicando con l il lato e d la diagonale, anche per un quadrato varranno quindi le precedenti relazioni, ovvero $d = l\sqrt{2}$ e $l = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.6.2 Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°



Un triangolo rettangolo con un angolo di $30°$ avrà il secondo angolo acuto di $60°$, infatti $180° - (90° + 30°) = 60°$. Questo triangolo può essere interpretato come metà di un triangolo equilatero: l'ipotenusa coincide con il lato di questo triangolo, il cateto adiacente all'angolo di $60°$ è metà del lato del triangolo equilatero ed il cateto adiacente all'angolo di $30°$ è l'altezza del triangolo equilatero. Dunque, indicando con i l'ipotenusa, il cateto BD, adiacente all'angolo di $60°$, varrà $\dfrac{i}{2}$, mentre il cateto AD, opposto all'angolo di $60°$ e adiacente a quello di $30°$, applicando il teorema di Pitagora, varrà $AD = \sqrt{i^2 - \left(\dfrac{i}{2}\right)^2} = \sqrt{i^2 - \dfrac{i^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3i^2}{4}} = i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Viceversa, se conosciamo il cateto AD e vogliamo ricavare l'ipotenusa, passando alla formula inversa e razionalizzando avremo $i = \dfrac{2AD}{\sqrt{3}} = 2AD\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicando quindi con l il lato del triangolo equilatero e con h la sua altezza avremo analogamente $h = l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $l = 2h\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

In questo modo possiamo anche determinare l'area di un qualunque triangolo equilatero conoscendone soltanto il lato $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot l \cdot l\dfrac{\sqrt{3}}{2} = l^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Esempio 3.6. Gli angoli adiacenti alla base minore di un trapezio isoscele misurano $135°$. Determinare area e perimetro del trapezio, sapendo che le basi misurano 4 cm e 20 cm.

Tracciamo l'altezza AH (figura 3.7); si verrà così a determinare il triangolo rettangolo ABH. Poiché $A\widehat{B}H = 45°$, anche $B\widehat{A}H = 45°$. Avremo quindi $\overline{BH} = \overline{AH}$; ma $\overline{BH} = \dfrac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2} = 8$ cm, quindi $\overline{AH} = 8$ cm. L'area vale dunque $A = \dfrac{(20+4) \cdot 8}{2} = 96$ cm^2.

Per calcolare il perimetro ricordiamo che $\overline{AB} = \overline{BH}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm e $\overline{CD} = \overline{AB}$. Dunque $2p = 20 + 4 + 2 \cdot 8\sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2} = 8(3 + 2\sqrt{2})$ cm.

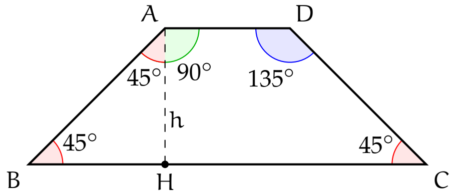


FIGURA 3.7: Esempio 3.6

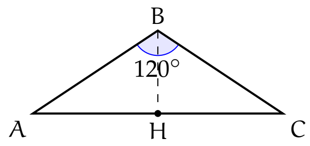


FIGURA 3.8: Esempio 3.7

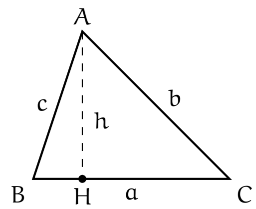
Esempio 3.7. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di $120°$. Determina perimetro ed area sapendo che la base è lunga 60 cm.

Tracciamo l'altezza BH (figura 3.8). Poiché il triangolo è isoscele, l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi $AH \cong HC$; ma BH è anche bisettrice dell'angolo al vertice B, quindi si ottengono due triangoli rettangoli tra loro congruenti, ciascuno dei quali ha in B un angolo di $60°$. Consideriamo uno dei due triangoli, ad esempio ABH; il cateto $\overline{AH} = 30$ cm; poiché l'angolo $\widehat{A} = 30°$, per calcolare $\overline{AB}$ si deve usare la formula inversa $\overline{AB} = \dfrac{2\overline{AH}\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$ cm. Il perimetro vale dunque $2p = 60 + 40\sqrt{3} = 20(3 + 2\sqrt{3})$ cm.

Per calcolare l'area bisogna prima trovare $\overline{BH}$, che è congruente a metà ipotenusa $\overline{BH} = 10\sqrt{3}$ cm. Quindi $A = \dfrac{60 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3}$ cm^2.

3.6.3 Formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo

La *formula di Erone* permette di calcolare l'area di un triangolo qualsiasi se si conoscono le misure dei suoi lati.



Sia a la misura del lato BC e sia H il piede dell'altezza h del triangolo rispetto a BC. Ponendo $BH = x$ si avrà $HC = a - x$. Dal teorema di Pitagora si ha

$$h^2 = c^2 - x^2 \tag{3.1}$$

ma anche

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2.$$

Uguagliamo le due espressioni e svolgiamo i calcoli. Otteniamo

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

da cui

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Sostituendo questo valore di x nella (3.1), otteniamo

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{4a^2c^2 - \left(c^2 + a^2 - b^2\right)^2}{4a^2}.$$

Poiché il numeratore è una differenza di quadrati possiamo scomporlo ottenendo

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{\left[2ac-\left(c^2+a^2-b^2\right)\right]\cdot\left[2ac+\left(c^2+a^2-b^2\right)\right]}{4a^2}\\ &= \frac{\left[2ac-c^2-a^2+b^2\right]\cdot\left[2ac+c^2+a^2-b^2\right]}{4a^2}\\ &= \frac{\left[b^2-(a-c)^2\right]\cdot\left[(a+c)^2-b^2\right]}{4a^2}. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto nuovamente delle differenze di quadrati che possiamo ulteriormente scomporre

$$h^2 = \frac{(b+a-c)\cdot(b-a+c)\cdot(a+c+b)\cdot(a+c-b)}{4a^2}.$$

Al numeratore abbiamo

$$a+c+b = 2p$$

$$b+a-c = b+a+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$$

$$b-a+c = 2p-2a = 2(p-a)$$

$$a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$$

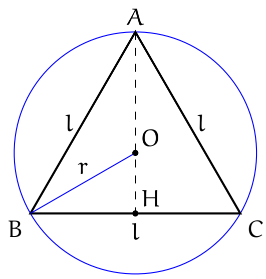
quindi

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4a^2}} = \sqrt{\frac{16p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{4a^2}}\\ &= \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

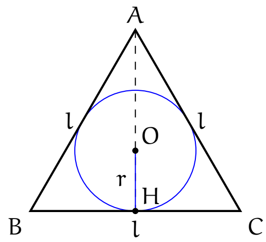
Infine calcoliamo l'area, ottenendo così la formula di Erone

$$A = \frac{1}{2}a\cdot h = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{a}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

3.6.4 Triangoli equilateri inscritti e circoscritti



Consideriamo un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e vediamo che relazione c'è tra il suo lato ed il raggio della circonferenza stessa. Poiché in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro, ricordando il teorema del baricentro, secondo il quale le tre mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso, il baricentro appunto, che le divide in modo tale che la parte che contiene il vertice è il doppio dell'altra, avremo che $AO = r$, $OH = r/2$, quindi l'altezza AH (che coincide con la mediana) è data da $AH = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r$. Per quanto visto precedentemente, il lato è dato da $l = \frac{3}{2}r \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = r\sqrt{3}$.



Consideriamo ora un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza. Per quanto detto prima, AO, parte della mediana che contiene il vertice, è il doppio di $OH = r$, raggio della circonferenza inscritta, e quindi, se conosciamo il raggio della circonferenza inscritta, avremo che AH (mediana e altezza del triangolo) vale $3r$. Da qui possiamo, anche in questo caso, ricavare il lato del triangolo $l = 3r\frac{2\sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}$.

Esempio 3.8. Determina l'area di un triangolo equilatero sapendo che il raggio della circonferenza inscritta è lungo 6 cm. Determina quindi anche il raggio della circonferenza circoscritta.

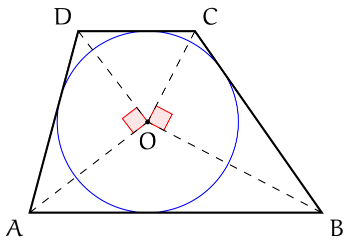
Facendo riferimento alla figura precedente, $AH = 3r$, quindi $AH = 18$ cm. Ognuno dei lati vale $2r$, quindi $BC = 12\sqrt{3}$ cm. L'area è $A = \frac{12\sqrt{3} \cdot 18}{2} = 108\sqrt{3}$ cm^2. Il raggio della circonferenza circoscritta è $R = AO = 2r = 12$ cm.

3.6.5 Trapezi circoscritti ad una circonferenza

Sappiamo che in un qualunque quadrilatero circoscrivibile ad una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due; questo teorema vale ovviamente per tutti i trapezi circoscrivibili. Inoltre possiamo dimostrare un'altra importante proprietà.

Proprietà 3.14. *In ogni trapezio circoscrivibile ad una circonferenza, ognuno dei due triangoli che si ottengono congiungendo gli estremi di un lato obliquo con il centro della circonferenza è un triangolo rettangolo.*

Infatti, considerando un trapezio $ABCD$ circoscritto ad una circonferenza di centro O, AO e DO sono le bisettrici degli angoli in A e in D, lo stesso dicasi per BO e CO (vedi il corollario **??** sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza, a pag. **??**). Poiché gli angoli in A e in D sono tra loro supplementari, così come gli angoli in B e in C, le loro metà saranno complementari, cioè $O\widehat{D}A + D\widehat{A}O = 90°$ e $O\widehat{C}B + C\widehat{B}O = 90°$. Quindi gli angoli $D\widehat{O}A$ e $C\widehat{O}B$ sono retti, per differenza tra $180°$ (somma degli angoli interni di un triangolo) e $90°$ (somma degli altri due angoli di ognuno dei triangoli considerati).



Queste importanti proprietà permettono di risolvere la maggior parte dei problemi sui trapezi circoscrivibili.

Esempio 3.9. In un trapezio rettangolo (figura 3.9), circoscrivibile ad una circonferenza di raggio 6 cm, il lato obliquo misura $25/2$ cm. Determina perimetro ed area del trapezio.

L'altezza CH è congruente al diametro della circonferenza inscritta, quindi $CH = AD = 12$ cm. Applicando il teorema sui quadrilateri circoscrivibili ad una circonferenza, abbiamo $BC + AD = AB + CD$. Poiché $BC + AD = (12 + 25/2) = 49/2$ cm, per trovare il perimetro basta moltiplicare questa misura per 2 e si ha $2p = 49/2 \cdot 2 = 49$ cm. Anche il calcolo dell'area è immediato: $A = \dfrac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \dfrac{\frac{49}{2} \cdot 12}{2} = 147$ cm^2.

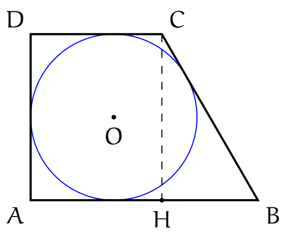


FIGURA 3.9: Esempio 3.9

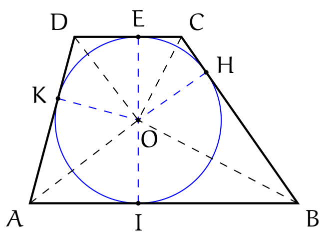


FIGURA 3.10: Esempio 3.10

Esempio 3.10. Nel trapezio $ABCD$ rappresentato nella figura 3.10, circoscritto ad una circonferenza, il punto E di tangenza con la base minore CD la divide in due parti: $CE = 6a$ e $DE = 12a$. Sapendo che la base maggiore AB è il doppio del lato obliquo AD, determina perimetro ed area del trapezio.

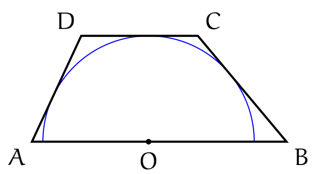
Dai dati si deduce immediatamente che la base minore $CD = 18a$. Per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza sappiamo che, se OH è il raggio, sarà $CE = CH = 6a$, $DE = DK = 12a$. Applichiamo ora il secondo teorema di Euclide prima al triangolo rettangolo BOC e poi al triangolo rettangolo AOD, si ha $\overline{OH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ e $\overline{OK}^2 = \overline{DK} \cdot \overline{AK}$. Poiché $\overline{OH} = \overline{OK}$ in quanto raggi, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo $\overline{BH} \cdot \overline{HC} = \overline{DK} \cdot \overline{AK}$. Sostituiamo i valori forniti dal testo ed abbiamo $\overline{BH} \cdot 6a = \overline{AK} \cdot 12a$, da cui ricaviamo $\overline{BH} = 2\overline{AK}$. Poniamo quindi $\overline{AK} = x$, allora sarà $\overline{AD} = x + 12a$, $\overline{BH} = 2x$ e $\overline{BC} = 2x + 6a$. Poiché inoltre $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, avremo $\overline{AB} = 2(x + 12a)$. Ma $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{BI}$, e cioè, sempre per il teorema delle tangenti, $\overline{AB} = \overline{BH} + \overline{AK}$, cioè $\overline{AB} = 2x + x = 3x$. Uguagliando anche in questo caso i secondi membri avremo $2(x+12a)=3x$, da cui $x=\overline{AK}=24a$. Sostituendo il valore di x nelle uguaglianze precedenti avremo: $\overline{AB}=72a$, $\overline{BC}=54a$ e $\overline{AD}=36a$.

Calcoliamo il perimetro: $2p=72a+54a+36a+18a=180a$.

Per calcolare l'area occorre determinare la lunghezza del raggio, in quanto l'altezza del trapezio è uguale al diametro della circonferenza. Applicando il secondo teorema di Euclide, poiché $\overline{BH}=2x=48a$, sarà $\overline{OH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}=48a\cdot 6a=288a^2$ e quindi $\overline{OH}=12a\sqrt{2}$. Dunque l'altezza del trapezio vale pertanto $2\overline{OH}=24a\sqrt{2}$. L'area allora sarà $A=\dfrac{(72a+18a)\cdot 24a\sqrt{2}}{2}=1\,080a^2\sqrt{2}$.

3.6.6 Trapezi circoscritti ad una semicirconferenza

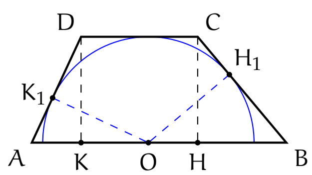
Definizione 3.5. Un *trapezio* si dice *circoscritto ad una semicirconferenza* se la sua base maggiore sta sulla retta che contiene il diametro della circonferenza e la base minore ed i lati obliqui sono tangenti alla semicirconferenza.



Per i trapezi appartenenti a questa categoria, sussiste la seguente proprietà.

Proprietà 3.15. *Dato un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, ognuna delle due parti in cui la base maggiore è divisa dal centro della semicirconferenza è congruente al lato obliquo ad essa adiacente.*

Dimostrazione. Dato il trapezio $ABCD$ nella figura a fianco ciò significa che $OB\cong BC$ e $OA\cong AD$. Dimostriamo la proprietà considerando i due triangoli OBH_1 e BCH (ragionamento analogo varrà per gli altri due triangoli OAK_1 e ADK); questi due triangoli sono entrambi rettangoli in quanto CH è altezza ($C\widehat{H}B$ è retto) e OH_1 è raggio che cade nel punto di tangenza ($O\widehat{H_1}B$ è retto); inoltre hanno $CH\cong OH_1$ in quanto entrambi raggi e l'angolo acuto $H\widehat{B}C$ in comune, quindi sono congruenti per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli (un cateto e l'angolo acuto ad esso opposto rispettivamente congruenti). Da qui segue la congruenza tra le due ipotenuse $OB\cong BC$. □

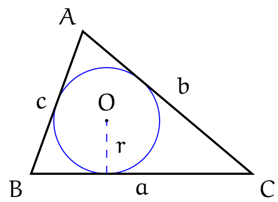


Esempio 3.11. Nel trapezio $ABCD$, circoscritto ad una semicirconferenza, la base minore ed un lato obliquo misurano entrambi 6 cm, mentre la base maggiore misura 15 cm. Calcolare perimetro ed area del trapezio.

Per quanto appena dimostrato, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui, dunque, considerando la figura precedente, avremo $AB = BC + AD$; sapendo che uno dei due lati obliqui, ad esempio AD, vale 6 cm, ricaviamo subito $BC = AB - AD = 15 - 6 = 9$ cm. Il perimetro dunque vale $2p = 15 + 9 + 6 + 6 = 36$ cm. Per calcolare l'area abbiamo bisogno dell'altezza. Poniamo $BH = x$, quindi sarà $AK = AB - (CD + BH) = 15 - 6 - x = 9 - x$. Applichiamo ora il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BCH e DAK, si ha $CH^2 = BC^2 - BH^2$; $DK^2 = AD^2 - DK^2$. Poiché $CH = DK$, l'uguaglianza varrà anche per i loro quadrati e quindi, per la proprietà transitiva, possiamo uguagliare i secondi membri ed avremo $BC^2 - BH^2 = AD^2 - DK^2$. Sostituiamo i valori $81 - x^2 = 36 - (9 - x)^2$. Svolgiamo i calcoli, semplifichiamo ed otteniamo $18x = 126$, da cui $x = 7$. Dunque $HB = 7$ cm. Poiché $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 81 - 49 = 32$, si ha $CH = 4\sqrt{2}$ (possiamo accettare solo la soluzione positiva in quanto si tratta di una lunghezza). Calcoliamo l'area $A_{ABCD} = \dfrac{(15+6) \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}$ cm^2.

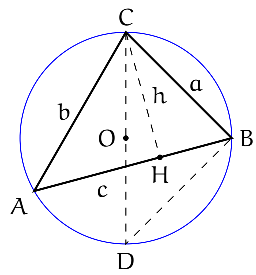
3.6.7 Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

Ricordando che l'area di un poligono circoscrivibile ad una circonferenza, e quindi in particolare l'area di un triangolo (che è sempre circoscrivibile), si può trovare come prodotto tra il semiperimetro e l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta, allora, applicando la formula inversa, il raggio della circonferenza inscritta sarà $r = \dfrac{2A}{2p}$, cioè sarà dato dal rapporto tra la doppia area ed il perimetro del triangolo.



3.6.8 Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo

Consideriamo il triangolo ACH, ottenuto tracciando l'altezza CH relativa alla base AB del triangolo ABC, ed il triangolo BCD, ottenuto tracciando il diametro CD. Questi due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine, in quanto hanno entrambi un angolo retto $C\widehat{H}A$ e $C\widehat{B}D$ (l'angolo è retto in quanto inscritto in una semicirconferenza), gli angoli $C\widehat{A}H \cong C\widehat{D}B$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC, quindi anche gli angoli $A\widehat{C}H$ e $D\widehat{C}B$ sono congruenti, poiché differenze di angoli congruenti. Possiamo dunque scrivere la proporzione tra i lati omologhi $CD : AC = BC : CH$.



Indicando con R il raggio della circonferenza circoscritta e con a, b, c le misure dei lati e con h quella dell'altezza relativa al lato AB, si avrà $CD = 2R$, $AC = b$, $BC = a$ e $CH = h$. Sostituendo questi valori nella proporzione otteniamo $2R : b = a : h$, dalla quale ricaviamo $R = \dfrac{a \cdot b}{h}$ che esprime il raggio della circonferenza circoscritta in funzione delle misure dei lati del triangolo e della sua altezza.

Se poi conoscessimo solo i lati del triangolo, allora dovremmo applicare la formula che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per il terzo lato $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{h \cdot c}$, in quanto $A = \dfrac{c \cdot h}{2}$.

3.7 Esercizi

3.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 - Poligoni equivalenti

3.1. Enunciate e dimostrate il teorema le cui ipotesi e tesi sono indicate di seguito.
Ipotesi: $AB \parallel DC$, $GH \perp AB$, $CJ \perp AB$, $AE \cong DE$, $CF \cong FB$.
Tesi: $ABCD \doteq GHJI$.

3.2. Dai vertici B e C dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC traccia le rette rispettivamente parallele ai cateti AC e AB; sia D il loro punto di intersezione. Dimostrare che $ABDC \doteq 2 \cdot ABC$ e che $MNPQ \doteq 2 \cdot ABC$ dove $MNPQ$ è il rettangolo avente un lato congruente all'ipotenusa BC e l'altro lato congruente all'altezza AH relativa all'ipotenusa.

3.3. Costruire un rettangolo equivalente ad un trapezio dato.

3.4. Dimostrare che la mediana relativa ad un lato di un triangolo divide il triangolo dato in due triangoli equivalenti.

3.5. Dimostrare che in un parallelogramma $ABCD$ sono equivalenti i quattro triangoli determinati dalle diagonali AC e BD.

3.6. Assegnato il trapezio $ABCD$, detto E il punto di intersezione delle diagonali DB e AC, dimostrare che DEA è equivalente a BEC.

3.7. Dimostra che le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli due dei quali sono equiestesi.

3.8. Dimostra che due triangoli sono equiestesi se hanno due lati ordinatamente congruenti e gli angoli tra essi compresi supplementari.

3.9. Dimostra che un triangolo ABC è diviso da una sua mediana in due triangoli equiestesi.

3.6 - Applicazioni dell'algebra alla geometria

3.10. Sia ABC un triangolo con $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm e $\overline{AC} = 3$ cm. Condurre una parallela ad AC che intersechi AB in D e BC in E. Sapendo che $CE = BD$, trovare il perimetro del triangolo BDE.

3.11. Nel trapezio $ABCD$, le basi misurano 5 cm e 15 cm e l'area vale 120 cm^2. Determina la distanza tra la base maggiore ed il punto di intersezione dei lati obliqui del trapezio.

3.12. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB = 8a$. Da un punto D di AC si tracci la parallela ad AB che incontri BC in E; sia $DE = 6a$. Sapendo che CDE e $ABED$ sono isoperimetrici, trovare l'area di ABC.

3.13. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ circoscritto ad una circonferenza la base maggiore è $4/3$ dell'altezza ed il perimetro misura 48 cm. Trovare l'area del trapezio.

3.14. Sia ABC un triangolo rettangolo con il cateto $AC = 32a$. Sapendo che $BC : AB = 5 : 3$, trovare il perimetro del triangolo. Tracciare poi la parallela ad AB, che intersechi CA in D e CB in E. Sapendo che CD è medio proporzionale tra CE ed AB, trovare l'area del trapezio $ABED$.

3.15. Sia ABC un triangolo isoscele di base $BC = 4$ cm e di area 40 cm^2. Dopo aver trovato la misura dell'altezza AH si tracci l'altezza CK e la si prolunghi di un segmento KD tale che l'angolo $H\widehat{A}D$ sia congruente ad uno degli angoli alla base. Dopo aver dimostrato che $C\widehat{A}D$ è retto, trovare il perimetro del triangolo CAD.

3.16. Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano $2a$ e $4a$ e l'angolo tra essi compreso misura $60°$. Trovare la misura dell'area e delle diagonali.

3.17. Determinare perimetro ed area di un trapezio rettangolo circoscritto ad una circonferenza, sapendo che il lato obliquo è diviso dal punto di tangenza in due parti che misurano rispettivamente $4a$ e $9a$.

3.18. Determinare perimetro ed area di un triangolo isoscele, sapendo che la base misura $10a$ e che l'angolo adiacente ad uno degli angoli alla base misura $150°$.

3.19. Nel trapezio $ABCD$ la base maggiore, AB, misura 15 cm e la minore, CD, misura 5 cm. Prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo rettangolo. Trovare il perimetro del trapezio e del triangolo rettangolo CDE sapendo che la differenza tra le due basi è uguale alla differenza tra il doppio di BC e AD.

3.20 (Giochi di Archimede 2011)**.** In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare ad AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?

3.21. È dato un trapezio isoscele avente un angolo di $45°$ e il lato obliquo che misura 2 cm. Trovare l'area sapendo che la base minore misura $\sqrt{3}$ cm.

3.22. Nella circonferenza di diametro BD sono inscritti i triangoli ABD e BDC, con A e C da parti opposte rispetto a BD. Sia H la proiezione di C su BD. Sapendo che $AB = 16$ cm e che il rapporto tra AD e BD e tra BH e HD è $3/5$, trovare il perimetro di $ABCD$.

3.23. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 2 m; costruite sul lato DC il triangolo isoscele DEC di base DC e avente $D\widehat{E}C = 120°$; siano F e G i punti di intersezione delle rette ED e EC con la retta AB. Determinate la misura dei lati del triangolo EFG.

3.24. È dato il triangolo equilatero ABC; la semiretta r di origine B è interna all'angolo ABC e lo divide in due parti di cui $ABP = 45°$, $P0r \cap AC$. Sapendo che la distanza di P dal lato AB è di 2 m, calcolate il perimetro del triangolo equilatero dato.

3.25. Su ciascun lato del triangolo equilatero ABC costruite un quadrato. Sapendo che l'altezza del triangolo equilatero misura $3\sqrt{3}$ m, determinate il perimetro e l'area dell'esagono che si forma congiungendo i vertici dei quadrati. Costruite il rettangolo equivalente all'esagono.

3.26. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ di base maggiore AB, l'angolo acuto di vertice B misura $45°$ e l'altezza è di 8 m. Sapendo che la base minore è $3/4$ dell'altezza, determinate perimetro e area del trapezio.

3.27. Nel parallelogramma $ABCD$ la diagonale minore AC è perpendicolare al lato BC e forma col lato AB un angolo di $45°$. Sapendo che $AC = 5$ m, calcolate il perimetro e l'area del parallelogramma.

3.28. Il trapezio $ABCD$ di base maggiore AB, ha $\widehat{A} = 45°$ e $\widehat{B} = 60°$; sapendo che la base minore è uguale all'altezza che misura 12 cm, determinate perimetro e area del trapezio.

3.29. Il quadrilatero $ABCD$ è spezzato dalla diagonale AC nel triangolo rettangolo isoscele ABC retto in B e nel triangolo ADC isoscele su AC, avente l'altezza DH doppia della base. Sapendo che $AB = 5$ m, calcolate il perimetro e l'area del quadrilatero.

3.30. Il triangolo isoscele ABC ha l'angolo in A opposto alla base BC di $120°$ ed è circoscritto ad una circonferenza di raggio $OH = \sqrt{6}$ m; calcolate perimetro e area del triangolo dato.

3.31. Nel triangolo ABC l'angolo in A misura $60°$ e sia AE la sua bisettrice (E su BC). Sapendo che $AE = 8$ m, determinate la misura delle distanze EH ed EK del punto E rispettivamente dai lati AB e AC e il perimetro del quadrilatero $AHEK$. È vero che tale quadrilatero è equivalente al triangolo equilatero di lato 8 m? È vero che tale quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza? Se la risposta è affermativa stabilite il suo centro e determinate la misura di detta circonferenza.

3.32. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la base minore è metà dell'altezza. Determinate perimetro e area in funzione della misura x della base minore nei casi in cui l'angolo acuto del trapezio è di

a) $45°$;
b) $30°$;
c) $60°$.

3.33. Il triangolo ABC è rettangolo e l'angolo di vertice C misura $30°$; detta AP la bisettrice dell'angolo retto, con P su BC, e sapendo che $\overline{AP} = a$, determinate, in funzione di a, perimetro e area del triangolo dato.

3.34. Il segmento AC è la diagonale del quadrilatero $ABCD$ avente $A\widehat{B}C = C\widehat{A}D = 90°$ e $B\widehat{C}A = A\widehat{D}C = 60°$. È vero che $ABCD$ è un trapezio rettangolo? Calcolate perimetro e area del quadrilatero sapendo che $\overline{AC} = 2a$.

3.35. Il quadrato $ABCD$ ha i suoi vertici sui lati del triangolo equilatero HKL (A e B appartengono a KL, C a HL e D a HK); sapendo che $\overline{AB} = 3a$, calcolate il perimetro e l'area del triangolo equilatero.

3.36. In un parallelogramma di area 12 m^2, le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra e uno degli angoli interni misura $60°$. Determina la lunghezza delle diagonali.

3.37. Nel triangolo ABC di altezza $CH = 8$ m, determina a quale distanza da C si deve condurre una parallela al lato AB in modo che il triangolo ottenuto sia equivalente alla metà di ABC.

3.38. La base di un rettangolo è più lunga di 8 cm dell'altezza ed è più corta di 10 cm della diagonale. Calcola perimetro ed area del rettangolo.

3.39. In un triangolo equilatero ABC di lato l individua sul lato AB un punto P tale che detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AC e BC risulti $\overline{PH}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PC}^2 + 12{,}67$

3.40. Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra le aree delle due figure?

3.41. In un triangolo rettangolo ABC, retto in A, si tracci una parallela DE al cateto AB. Sapendo che l'area di DEC è i $3/4$ di quella di ABC e che $\overline{AC}$ misura 1 m, quanto misura $\overline{DC}$?

3.42. Dato il quadrato $ABCD$ con M punto medio di AB ed N punto medio di CD, tracciare i segmenti AN, BN, DM e CM. Siano P l'intersezione di AN con DM e Q l'intersezione di BN e CM. Che figura è $MQNP$? Quanti triangoli ci sono nella figura? Calcolare l'area di $MQNP$ e l'area di uno dei triangoli ottusangoli, sapendo che il lato del quadrato è 12 cm.

3.43. Disegna un rombo con la diagonale minore lunga 6 cm e la diagonale maggiore 8 cm. Costruisci su ciascun lato del rombo un quadrato. Unisci i vertici liberi dei quadrati formando un ottagono. Calcolane l'area. Calcola anche l'area dei quattro triangoli che si sono formati. Calcola inoltre la misura degli angoli interni dell'ottagono.

3.44. Disegna un quadrato $ABCD$ e sul lato AB poni i punti M ed N in modo che $AM \cong MN \cong NB$. Che figura è $MNCD$? Calcola il rapporto tra l'area di $MNCD$ e quella di $ABCD$. Calcola il perimetro di $MNCD$ sapendo che l'area del quadrato è 10 cm^2.

3.45. Disegna un triangolo isoscele ABC di base $AC = 40$ mm e lato obliquo $AB = 52$ mm. Costruisci sulla base AC il triangolo ACD di area doppia di ABC e determina il perimetro del quadrilatero $ABCD$. Di che figura si tratta?

3.46. Il parallelogramma $ABCD$ ha la base AB lunga 12 cm e l'altezza di 6 cm. Disegna su AB un punto H e su CD un punto K tali che $DK = BH = 3$ cm. Considera i due quadrilateri in cui il parallelogramma rimane diviso dal segmento HK: che quadrilateri sono? Calcolane l'area. Calcola inoltre il rapporto tra l'area di $HBCD$ e quella di $ABCD$.

3.47. Calcola l'altezza del rombo avente le diagonali di 36 cm e 48 cm. Calcola l'area del trapezio equivalente al rombo, sapendo che l'altezza del trapezio è di 24 cm e che la base maggiore è il doppio di quella minore.

3.48. Il rettangolo R ha base $AB = 9$ cm e l'altezza BC è i $4/3$ di AB. Calcola il perimetro e l'area di R. Disegna il parallelogramma P equivalente al rettangolo R e avente la base congruente alla diagonale del rettangolo. Calcola l'altezza di P.

3.49. Calcola l'area del parallelogramma P di base 4,5 cm e altezza 2 cm e con il lato obliquo che è $5/4$ dell'altezza. Disegna la diagonale AC e traccia l'altezza relativa ad AB del triangolo ABC. Calcola l'area del triangolo ABC.

3.50. I lati del triangolo ABC hanno le seguenti misure $AB = 21$ cm, $BC = 20$ cm e $AC = 13$ cm; calcola l'area del parallelogramma $A'B'C'D'$ di base $AB \cong A'B'$, lato $AC \cong A'C'$ e diagonale $B'C' \cong BC$ (ricorda la formula di Erone).

3.51. Dato il rombo $ABCD$, avente perimetro di 10 cm e la diagonale maggiore di 4 cm, calcola la misura della diagonale minore, l'area del rombo e la sua altezza. Considera un triangolo isoscele equivalente al rombo e avente la sua stessa altezza. Calcolane la misura di ciascun lato.

3.52. Un rombo ha l'area di 336 cm^2, una diagonale uguale alla base di un triangolo di altezza 20,2 cm e area di 141,4 cm^2. Determina il perimetro del rombo.

3.53. Determina l'area del quadrato formato dai 4 vertici liberi di 4 triangoli equilateri costruiti sui lati di un quadrato di lato 3 cm.

3.54. Determina l'area del rombo intersezione di due triangoli equilateri costruiti sui lati opposti di un quadrato di lato 10 cm e aventi il vertice che cade internamente al quadrato.

3.55. Determina le misure degli angoli del triangolo AED formato disegnando le diagonali EA e AD di un esagono regolare $ABCDEF$.

3.56. Determina le misure degli angoli del triangolo AEC formato disegnando le diagonali EA ed EC di un ottagono regolare $ABCDEFGH$.

3.57. Determina le misure degli angoli del triangolo AFC formato disegnando le diagonali AF e FC di un ottagono regolare $ABCDEFGH$.

3.58. La differenza tra le diagonali di un rombo è 7 cm e una è $5/12$ dell'altra. Determina l'area di un triangolo isoscele il cui perimetro supera di 6 cm quello del rombo e la cui base è 8 cm.

3.59. Determinare l'area di un quadrilatero con le diagonali perpendicolari sapendo che l'una è $5/8$ dell'altra e che la loro somma è 39 cm.

3.60. Determinare la misura degli angoli di un parallelogramma sapendo che uno degli angoli alla base è $2/7$ di quello adiacente.

3.61. In un quadrilatero un angolo è $93°8'42''$. Determinare l'ampiezza di ciascuno degli altri tre angoli sapendo che il secondo è $2/7$ del terzo e il terzo è $4/5$ del quarto.

3.62. Le dimensioni a e b di un rettangolo sono $a = \frac{3}{5}b$, il perimetro è 192 cm. Calcolane l'area.

3.63. In un rombo la differenza fra le diagonali è 8 cm e una diagonale è i $4/3$ dell'altra. Calcola area e perimetro del rombo.

3.64. In un rombo la somma delle diagonali misura 196 cm, un quarto della misura della diagonale maggiore supera di 4 cm la misura della diagonale minore. Trova perimetro, area e altezza del rombo.

3.65. In un trapezio rettangolo l'altezza è quadrupla della base minore e il lato obliquo è i $5/4$ dell'altezza. Determina l'area del trapezio sapendo che il suo perimetro è 70 cm.

3.66. Il perimetro di un trapezio isoscele misura 124 cm e ciascun lato obliquo è lungo 30 cm. Determinane l'area e la misura della diagonale sapendo che una sua base è $7/25$ dell'altra.

3.67. Determina l'area di un rettangolo sapendo che la misura della sua diagonale supera di 8 cm quella dell'altezza e che la differenza fra i $20/41$ della diagonale ed i $2/3$ dell'altezza è uguale ai $14/9$ della stessa altezza.

3.68. Il perimetro di un rettangolo misura 170 cm e l'altezza è $5/12$ della base. Trovare area e diagonale del rettangolo.

3.69. Il perimetro di un rettangolo misura 29 cm ed i $2/11$ della sua altezza sono uguali a $1/9$ della base. Trovare l'area del rettangolo.

3.70. In un trapezio isoscele $ABCD$ avente la base maggiore AB, le diagonali sono fra loro perpendicolari e si intersecano in un punto P che divide ogni diagonale in due parti con rapporto $5/12$. Calcola perimetro e area del trapezio, sapendo che la diagonale misura 68 cm.

3.71. Un triangolo rettangolo ha ipotenusa 50 cm e un cateto 48 cm. Dal punto medio dell'ipotenusa tracciare la parallela al cateto minore. Determinare l'area di ciascuna delle due parti in cui è suddiviso il triangolo.

3.72. In un triangolo l'altezza è 18 cm; se conducendo una parallela alla base, si divide il triangolo in due parti la cui superficie è in rapporto $16/25$, a quale distanza dal vertice è stata condotta la parallela?

3.73. Il triangolo ABC ha base 14 cm e altezza 6 cm. Disegna la mediana CM e calcola l'area dei triangoli AMC e MBC. Come sono i triangoli?

3.74. La mediana di un triangolo è 12 cm. Determinare la misura di ciascuna delle parti in cui il baricentro divide la mediana.

3.75. Determinare la misura di una mediana AM sapendo che $BM = 8$ cm, dove B è il baricentro del triangolo.

3.76. Determina la misura BM del segmento appartenente alla mediana AM in un triangolo equilatero ABC, avendo indicato con B il baricentro.

3.77. Determina il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è 8 cm e che la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $4/3$ dell'altezza data.

3.78. Determina la misura delle tre altezze del triangolo che ha i lati di 20 cm, 40 cm, 30 cm. (Suggerimento: Puoi ricorrere alla formula di Erone).

3.79. Il piede dell'altezza CH di un triangolo ABC divide la base AB di 46 cm in due parti tali che $AH = \frac{9}{14}HB$; calcola l'area dei due triangoli ACH e BCH, sapendo che $AC = 24$ cm.

3.80. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è $2/3$ dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

3.81. Trova il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base è $3/5$ dell'altezza e che l'area è 24 cm^2.

3.82. I lati del triangolo ABC hanno le misure seguenti $AB = 63$ cm, $BC = 60$ cm e $AC = 39$ cm; determina le misure delle tre relative altezze.

3.83. Determinare la misura di ciascun lato e l'area del triangolo isoscele avente il perimetro di 700 m, sapendo che la base e il lato obliquo sono in rapporto $\frac{16}{17}$.

3.84. Un trapezio rettangolo $ABCD$ è circoscritto ad una semicirconferenza con il centro O sulla sua base maggiore AB e raggio di misura 6 cm. Siano S e T i punti in cui tale semicirconferenza tange rispettivamente il lato obliquo BC e la base minore CD. Sapendo che AB misura 16 cm, calcolare le misure degli altri lati del trapezio. (Tracciare OC, OS, OT e dimostrare che OB è congruente a . . .).

3.85. Calcolare perimetro e area di un triangolo isoscele circoscritto a una semicirconferenza con il centro sulla sua base, sapendo che la base è i $3/2$ della relativa altezza e che il raggio della semicirconferenza misura 12 cm.

3.86. Data una circonferenza di centro O, si consideri un punto C esterno ad essa da cui si traccino le tangenti alla circonferenza stessa indicando con A e B i punti di tangenza. Sapendo che il segmento AB misura 12 cm e che l'angolo $A\widehat{C}B$ ha ampiezza $60°$, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero $OACB$. Indicato poi con E il punto in cui la retta OB incontra la retta AC, calcolare il perimetro del triangolo BCD.

3.87. In un trapezio rettangolo, l'angolo che il lato obliquo forma con la base maggiore ha ampiezza $60°$ e la diagonale maggiore dimezza tale angolo; sapendo che la base minore misura 4 cm, calcolare il perimetro del trapezio.

3.88. In un rombo $ABCD$ ciascun lato misura 12 cm e l'angolo in B ha ampiezza $120°$. Prendere sui lati AB, BC, CD e AD del rombo rispettivamente i punti P, Q, S e T in modo che i segmenti AP, BQ, CS e DT misurino 2 cm ciascuno. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero $PQST$, dopo aver dimostrato che esso è un parallelogramma. (Tracciare da T il segmento perpendicolare ad AB e osservare i vari triangoli . . . , analogamente tracciare poi da P il segmento perpendicolare alla retta . . .).

3.89. Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC avente area uguale a $25\sqrt{3}$ cm^2, si prenda il punto P in modo che AP misuri 4 cm; si tracci il segmento PQ parallelo a BC (con Q appartenente ad AC) e lo si prolunghi di un segmento QE congruente a PQ. Dopo aver dimostrato che il triangolo APE è rettangolo, calcolare perimetro ed area del quadrilatero $CEPH$, essendo H il piede dell'altezza del triangolo ABC relativa ad AB.

3.90. Data una semicirconferenza di centro O e diametro AB di misura $2r$, si tracci la corda AC che forma con AB un angolo di $30°$; si tracci quindi la tangente in C alla semicirconferenza indicando con D il punto in cui tale tangente incontra la retta AB e con E la proiezione ortogonale di B sulla tangente stessa. Calcolare le misure dei segmenti BC, CD, BE, CE, AE. (Tracciare anche CO . . . osservare i vari angoli; per calcolare la misura di AE tracciare la distanza di . . . dalla retta . . .).

3.91. Determina area e perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-1;7)$, $B(6;9/2)$, $C(4;-3)$ e $D(-4;3)$.

3.92. Determina area a perimetro del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(0;3)$, $B(3;6)$, $C(6;3)$ e $D(-4;3)$. Che quadrilatero è?

3.93. Determina l'area del quadrilatero $ABCD$ di coordinate $A(-8;5)$, $B(-2;11)$, $C(2;12)$ e $D(4;3)$.

3.94. Determina il quarto vertice D del trapezio $ABCD$ di area 9, sapendo che $A(-1;2)$, $B(5;2)$ e $C(3;4)$.

3.95. Determina il quarto vertice D del parallelogramma $ABCD$ con $A(-3;-1)$, $B(4;1)$ e $C(3;4)$.

3.96. Verifica che il trapezio di vertici $A(-1;-1)$, $B(3;-2)$, $C\left(3;\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$ non è rettangolo. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

3.97. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$, $C(4;1)$ e $D(0;3)$ è un trapezio e calcolane l'altezza.

3.98. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-4;1)$, $B(5;-2)$, $C(3;2)$ e $D(0;3)$ è un trapezio isoscele. Calcola l'intersezione E dei prolungamenti dei lati obliqui BC e AD. Calcola inoltre il rapporto tra le aree dei triangoli ABE e CDE.

3.99 (Giochi di Archimede 2011). Nel quadrilatero $ABCD$ le diagonali sono ortogonali tra loro e gli angoli in B e in D sono retti. Inoltre $AB = AD = 20$ cm e $BC = CD = 30$ cm. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in $ABCD$.

3.100 (Giochi di Archimede 2003). Sia dato un quadrato $ABCD$ di lato unitario e sia P un punto interno ad esso tale che l'angolo $A\widehat{P}B$ misuri $75°$.

Quanto vale la somma delle aree dei triangoli ABP e CDP?

3.101 (Giochi di Archimede 2003)**.** Un parallelogramma di lati 1 e 2 ha un angolo di $60°$. Quanto misura la sua diagonale minore?

3.102 (Giochi di Archimede 2007)**.** In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è 5 m^2, determinare l'area del quadrilatero $BCED$.

3.103 (Giochi di Archimede 2007)**.** Il quadrato $ABCD$ ha il lato lungo 3 m. Il segmento EF è lungo 1 m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono $ABFCDE$?

3.104 (Giochi di Archimede 2007)**.** $ABCD$ è un quadrato avente la diagonale lunga 2 cm e AEC è equilatero. Quanto vale l'area del quadrilatero $AECB$?

3.105 (Giochi d'Autunno 2010)**.** Da un quadrato di lato 10 cm si tagliano i quattro angoli in modo da ottenere un ottagono regolare. Quanto è lungo il lato dell'ottagono?

3.106 (Giochi di Archimede 2006)**.** Il segmento DE è parallelo ad AB. Sapendo che l'area di DEC è uguale ai $3/4$ di quella di ABC e che AC misura 1 m, quanto misura DC?

3.107 (Giochi di Archimede 2005)**.** Il triangolo ABC è rettangolo ed i cateti AB e AC misurano rispettivamente 3 m e 4 m. Siano B' e C' punti appartenenti rispettivamente ai lati AB e AC, tali che la retta contenente il segmento $B'C'$ sia parallela a quella contenete il segmento BC e distante 1 m da essa. Calcolare l'area del triangolo $AB'C'$.

3.108 (Giochi d'Autunno 2011)**.** L'area di un bosco, rappresentata dai vertici F, O, I ed N, è un parallelogramma la cui base misura 1 001 m e la cui altezza misura 2 012 m. Il punto S si trova sulla base NI a 143 m dal vertice I. Qual è l'area del quadrilatero $BOIS$?

3.109 (Giochi d'Autunno 2011)**.** Nel parallelogramma $ABCD$ il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero $GEHF$, sapendo che $AB = 5$ cm e $BD = 2$ cm.

3.110 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo due angoli misurano rispettivamente $30°$ e $105°$ ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?

3.111 (Giochi d'Autunno 2011)**.** In un parallelogramma di area 1 m^2 le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra. Inoltre uno degli angoli interni misura $60°$. Quanto misura la diagonale minore?

3.112 (Giochi d'Autunno 2010)**.** In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare ad AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?

3.113 (Giochi di Archimede 2005)**.** Dato un quadrato $ABCD$ si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato $EFGH$. Ripetiamo la stessa operazione per $EFGH$ e otteniamo un nuovo quadrato $A'B'C'D'$. Quanto vale il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di $A'B'C'D'$?

3.7.2 Risposte

3.10. $25/4$ cm.

3.11. 18 cm.

3.12. $24a^2$.

3.13. 135 cm^2.

3.14. $2p = 96a, \quad A = 93/2a^2$.

3.15. $AH = 20$ cm, $\quad 2p = 220{,}1$ cm.

3.16. $A = 4\sqrt{3}a^2, \quad d_1 = 2\sqrt{3}a, \quad d_2 = 2\sqrt{7}a$.

3.17. $2p = 50a, \quad A = 150a^2$.

3.18. $2p = 10a(2\sqrt{3}+3)/3, \quad A = 25a^2/\sqrt{3}$.

3.19. 34 cm, 12 cm.

3.20. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ m^2.

3.21. $2+\sqrt{6}$ cm^2.

3.22. $2p = 28+5(\sqrt{6}+\sqrt{10})$ cm.

3.23. $4+2/\sqrt{3}, \quad 4\sqrt{3}+2$.

3.24. $6+2\sqrt{3}$.

3.25. $18(1+\sqrt{3}), \quad 27(4+\sqrt{3})$.

3.26. $28+8\sqrt{2}, \quad 80$.

3.27. $10(1+\sqrt{2}), \quad 25$.

3.28. $24(9+\sqrt{3}), \quad 36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3}$.

3.29. $10+5\sqrt{34}, \quad \frac{125}{2}$.

3.30. $14\sqrt{2}+8\sqrt{6}, \quad 14\sqrt{3}+24$.

3.31. $EH = EK = 4$ m, $\quad 2p = 8(\sqrt{3}+1)$ m, $\quad C = 8\pi$.

3.32. a) $2p = 2x(\sqrt{2}+3)$; $A = 4x^2$, b) $2p = 2x(4+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(1+\sqrt{3})$, c) $2p = 2x(2+\sqrt{3})$; $A = 2x^2(3+\sqrt{3})$.

3.33. $\frac{11}{6}a\sqrt{2}+a\sqrt{6}, \quad \frac{1}{6}a^2(e+2\sqrt{3})$.

3.34. $2p = a+3a\sqrt{3}, \quad A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

3.35. $6a\sqrt{3}+9a, \quad \frac{1}{24}(21a^2\sqrt{3}+36a^2)$.

3.36. $2\sqrt[4]{27}$ m.

3.37. $4\sqrt{2}$.

3.40. $16/9$.

3.41. $3/4$.

3.42. 36, 18.

3.43. 12 cm^2, 12 cm^2, $172°$.

3.44. $0{,}665$, $10{,}85$ cm.

3.45. $300{,}12$ mm.

3.46. 36, $0{,}625$.

3.48. 42 cm, 108 cm^2, 7,2 cm.

3.49. $11{,}25$ cm^2, $5{,}625$ cm^2.

3.50. 252 cm^2.

3.51. 3 cm, 6 cm^2, 2,4 cm, 5 cm, 3,5 cm.

3.52. 100 cm.

3.53. $33{,}59$ cm^2.

3.54. $15{,}48$ cm^2.

3.57. $45°, \quad 67,5°$.
$42{,}24$ cm^2.

3.59. 180 cm^2.

3.61. $176°13'30'', \quad 50°21', \quad 40°16'48''$.

3.62. $1\,080$ cm^2.

3.63. 384 cm^2, 80 cm.

3.64. 328 cm, $2\,880$ cm^2, $35{,}15$ cm.

3.65. 250 cm^2.

3.66. 768 cm^2, 40 cm.

3.68. $1\,500$ cm^2, 65 cm.

3.69. $49{,}5$ cm^2.

3.70. 200 cm, $2\,304$ cm^2.

3.71. 84 cm^2, 252 cm^2.

3.77. 40 cm.

3.79. $54\sqrt{7}$ cm^2, $84\sqrt{7}$ cm^2.

3.83. 224 m, 238 m, $23\,520$ m^2.

3.84. 6 cm, 10 cm, 8 cm.

3.85. 80 cm, 300 cm^2.

3.87. $14+2\sqrt{3}$ cm.

3.89. $9+5\sqrt{3}+2\sqrt{7}$ cm, $29\sqrt{3}/2$ cm^2.

3.91. $30{,}2$, $53{,}75$.

3.92. $22{,}4$; $19{,}5$.

3.93. $A=14$.

3.95. $D(-4;2)$.

3.99. 12 cm.

4 Rette piano cartesiano

4.1 Equazioni lineari in due variabili

Abbiamo visto che tutte le equazioni del tipo: $ax + b = 0$ hanno una soluzione se $a \neq 0$. Ma sulle equazioni lineari (di primo grado) con due incognite, cosa possiamo dire? Consideriamo l'equazione: $3x + 2y - 6 = 0$ ha una soluzione? Ma prima ancora, cosa significa *una* soluzione per questa equazione? La soluzione per una equazione in due incognite non è un numero, ma una coppia di numeri il primo da mettere al posto della x e il secondo da mettere al posto della y per rendere vera l'uguaglianza. Possiamo quindi precisare la seguente definizione:

Definizione 4.1. La soluzione di un'equazione a due incognite è la coppia ordinata di numeri che sostituiti ordinatamente alle incognite rendono vera l'uguaglianza.

Si possono trovare molte soluzione di questa equazione, due sono semplici da trovare: $(0; 3)$ e $(2; 0)$. Si possono verificare facilmente:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$$

Ne esistono altre?

$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$
$(0;\ 3)$	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$
$(2;\ 0)$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$
$(4;\ -3)$	$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 6 = 0$
$(6;\ -6)$	$3 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) - 6 = 0$
$(8;\ -9)$	$3 \cdot 8 + 2 \cdot (-9) - 6 = 0$
$(10;\ -12)$	$3 \cdot 10 + 2 \cdot (-12) - 6 = 0$

FIGURA 4.1: Soluzioni equazione.

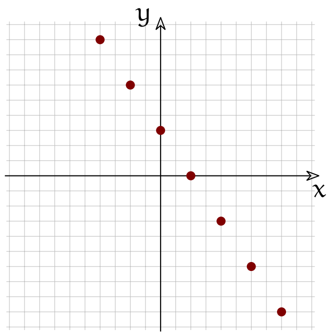


FIGURA 4.2: I corrispondenti punti nel piano.

Sapresti individuare la regola con la quale ho costruito le soluzioni? Sapresti aggiungere altre soluzioni che precedono quelle trovate da me?

In generale una equazione lineare in due incognite ha infinite soluzioni che sono coppie di numeri. Ma abbiamo già visto che una coppia di numeri rappresenta un punto nel piano cartesiano quindi ogni soluzione rappresenta un punto del piano vedi figura 4.2.

Possiamo osservare che i punti sono tutti allineati, ma cosa succede *tra* due punti? Per renderci più agevole il calcolo modifichiamo l'equazione di partenza ottenendo una equazione equivalente del tipo: $y = \dots$:

$$3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Possiamo costruire una tabella inserendo nella prima colonna dei valori x scelti da noi e nella seconda i corrispondenti valori di y calcolati, magari con l'uso della calcolatrice. Poi riportiamo questi valori in un piano cartesiano.

x	y
0	3
0,5	2,25
1	1,5
1,5	0,75
2	0

FIGURA 4.3: Altre soluzioni.

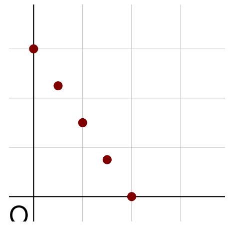


FIGURA 4.4: Altri punti.

Tra due punti calcolati possiamo inserirne quanti vogliamo, ma saranno sempre allineati con gli altri.

Si può dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione sono punti allineati e che tutti i punti che sono allineati con due qualunque di quella retta hanno coordinate che sono soluzioni di quell'equazione.

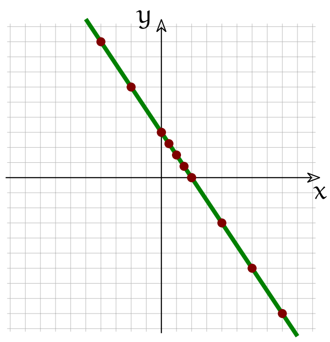


FIGURA 4.5: Retta di equazione: $3x + 2y - 6 = 0$.

I matematici dicono che c'è una *corrispondenza biunivoca* tra le soluzioni di quell'equazione e i punti di quella retta per cui dicono che quella equazione è l'*equazione della retta* e che quella retta è il *grafico dell'equazione*.

4.2 Equazioni della retta

Nel paragrafo precedente abbiamo scritto l'equazione della retta in due modi diversi. A questi due modi di scrivere l'equazione sono stati dati dei nomi:

- ➡ $3x + 2y - 6 = 0$: equazione implicita;
- ➡ $y = -\frac{3}{2}x + 3$: equazione esplicita.

In generale un'equazione implicita è un'equazione nella forma:

$$ax + by + c = 0$$

e un'equazione esplicita è un'equazione nella forma:

$$y = mx + q$$

dove $a,\ b,\ c,\ m,\ q$ sono dei *parametri* numerici mentre $x,\ y$ sono delle variabili.

- x è la variabile a cui diamo noi dei valori e si chiama variabile *indipendente*;
- y è la variabile il cui valore viene calcolato e si chiama variabile *dipendente*.

Cosa succede se nell'equazione implicita a o b valgono zero? Otteniamo delle equazioni senza la x o senza la y. Possiamo osservare che anche le equazioni di primo grado con una sola variabile rappresentano delle rette:

- la retta s di equazione $y = -2$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a -2 e qualunque ascissa;
- la retta t di equazione $y = 3$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a 3 e qualunque ascissa;
- la retta q di equazione $x = -4$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a -4 e qualunque ordinata;
- la retta r di equazione $x = 1$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a 1 e qualunque ordinata.

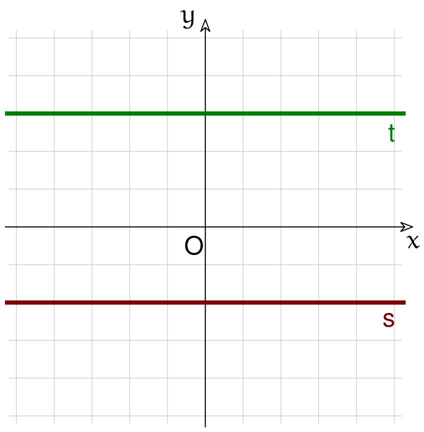


FIGURA 4.6: Rette parallele all'asse x.

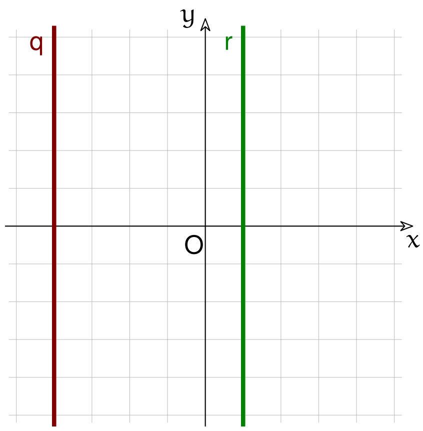


FIGURA 4.7: Rette parallele all'asse y.

Vedi le figure:4.6 e 4.7

In conclusione l'equazione $ax + by + c = 0$ al variare dei parametri a, b, c, rappresenta tutte le rette del piano.

4.3 Come disegnare le rette

Quando vogliamo disegnare una retta partendo dalla sua equazione, possiamo applicare la seguente procedura:

Procedura 4.1. *Per disegnare una retta:*

a) ricava l'equazione esplicita $y = mx + q$
b) riempi una tabella con alcuni valori di x *scelti da te e i corrispondenti valori di* y *calcolati;*
c) per ogni coppia $(x; y)$*, disegna un punto sul piano cartesiano;*
d) disegna una retta che passi per quei punti.

Consideriamo un altro esempio.

Procedura 4.2. *disegna la retta che ha per equazione:* $x + 2y + 6 = 0$*:*

a) l'equazione esplicita è $y = -\frac{1}{2}x - 3$
b) Nel calcolo, ogni valore di x *dovrà essere diviso per due, quindi, per* x *scegli valori pari che sono più comodi, costruisci la tabella e calcola i corrispondenti valori di* y*, vedi figura 4.8;*
c) disegna nel piano cartesiano i punti che ci stanno;
d) disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 4.9.

x	y
-6	-6
-4	-5
-2	-4
0	-3
2	-2
4	-1
6	-0

FIGURA 4.8: Tabella.

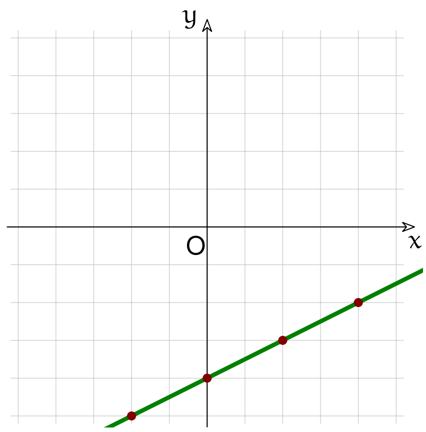


FIGURA 4.9: Disegno di una retta.

Ma ho proprio bisogno di tutti quei punti? Per individuare una retta bastano 2 punti quindi noi ne useremo... 3! In questo modo se i punti non appariranno allineati sapremo che abbiamo commesso un errore o nel calcolo o nel disegno. Un punto ci serve come controllo (come l'ultimo carattere del codice fiscale).

4.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

Prima di procedere dobbiamo procurarci un po' di esempi su cui ragionare. Disegna, in un piano cartesiano, le seguenti rette:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$
b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
c) $y = -3x + 2$
d) $y = 2x + 2$
e) $y = \frac{4}{3}x + 2$
f) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Disegna in un altro piano cartesiano queste altre rette:

a) $y = \frac{1}{2}x - 6$
b) $y = \frac{1}{2}x - 4$
c) $y = \frac{1}{2}x - 1$
d) $y = \frac{1}{2}x$
e) $y = \frac{1}{2}x + 2$
f) $y = \frac{1}{2}x + 5$

Confrontando cosa cambia e cosa resta uguale nei due gruppi di equazioni e di rette possiamo concludere che nell'equazione $y = mx + q$:

- ➡ il coefficiente q indica il punto in cui la retta interseca l'asse y e viene anche detto *intercetta* o *termine noto*;
- ➡ il coefficiente m è legato alla *pendenza* della retta e viene anche detto *coefficiente angolare*;

4.4.1 Il coefficiente angolare

Sul coefficiente angolare possiamo fare alcune osservazioni:

1. se è positivo la retta è crescente;
2. se è negativo la retta è decrescente;
3. se non è né positivo né negativo la retta non è né crescente né decrescente, è costante;
4. più si avvicina a zero più la retta si avvicina all'orizzontale;
5. più si allontana da zero, sia in positivo (crescendo) sia in negativo (decrescendo), più la retta si avvicina alla verticale;
6. non esiste alcun coefficiente angolare che produca una retta verticale.

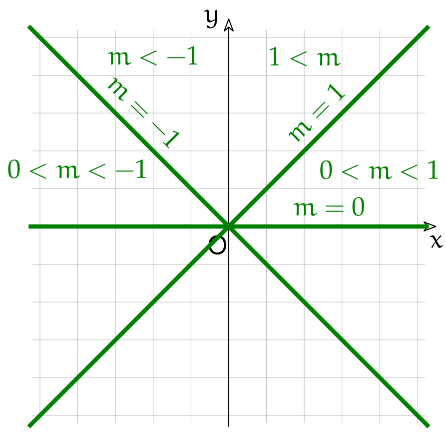


FIGURA 4.10: Coefficienti angolari.

Se consideriamo una retta, ad es. $y = \frac{3}{2}x - 2$ e alcuni suoi punti ad es. $A(-3; -4)$, $B(-1; -1)$, $C(1; 2)$, $D(-3; 5)$, possiamo osservare che il rapporto tra gli incrementi delle ordinate e delle

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = m$$

FIGURA 4.11: Tre rapporti incrementali sulla stessa retta.

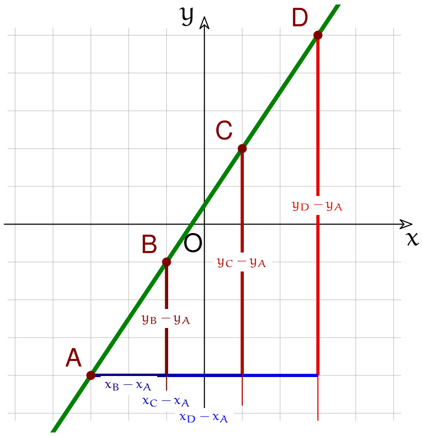


FIGURA 4.12: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

ascisse, cioè l'aumento dell'ordinata diviso l'aumento dell'ascissa, è sempre lo stesso vedi figura: 4.12.

In generale, dati due punti qualunque di una retta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

4.4.2 Disegno rapido

L'ultima osservazione ci permette di usare un metodo rapido per disegnare le rette, un metodo applicabile quando il coefficiente angolare è una frazione e l'intercetta un numero intero (la maggior parte degli esercizi propone rette di questo tipo). Questo metodo ci mette in grado di disegnare una retta in 10 secondi circa. Per ottenere questi tempi deve permetterci di disegnare la retta senza farci fare calcoli, perché il nostro cervello non è adatto a fare calcoli.

Procedura 4.3. *Disegna la retta che ha per equazione: $y = mx + q$:*

a) *individua: q, Δx e Δy*
b) *disegna sull'asse y il punto di ordinata q*
c) *a partire da questo punto conta Δx quadretti verso destra e Δy quadretti verso l'alto segna questo punto;*
d) *ripeti l'operazione c) per trovare altri punti sia a destra sia a sinistra dell'asse y.*
e) *disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 4.14.*

4.5 Rette parallele e perpendicolari

Se abbiamo capito il significato di coefficiente angolare, non è difficile, guardando l'equazione di due rette dire se sono parallele. Nel seguente elenco evidenzia con colori diversi le rette parallele:

$r:\ y = -\frac{2}{3}x + 4$
$q = 4$
$\Delta x = 3$
$\Delta y = -2$
(andare verso l'alto di -2 significa...)

FIGURA 4.13: Elementi da individuare.

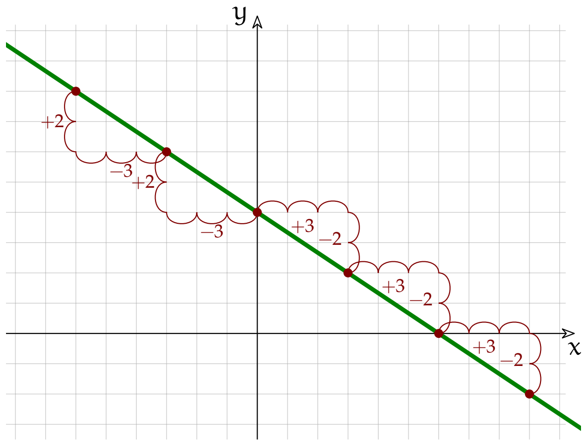


FIGURA 4.14: Metodo rapido.

a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$
b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
c) $y = 3x + 2$
d) $y = \frac{4}{6}x + 3$
e) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
f) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
g) $y = -\frac{2}{3}x + 7$
h) $y = \frac{6}{9}x + 2$
i) $-3x + 9y = 0$
j) $2x - 4y + 2 = 0$
k) $10x + 15y + 2$
l) $3x - y + 7 = 0$

Definizione 4.2. Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Per le rette perpendicolari il problema è più complicato. Partiamo da disegnare la retta r di equazione $y = \frac{4}{5}x$ poi ci procuriamo un oggetto dotato di un angolo retto e disegniamo la retta s perpendicolare a r nel punto $(0;\ 0)$. Dobbiamo disegnare con la massima precisione.

Possiamo osservare innanzitutto che se la retta precedente era crescente, la perpendicolare sarà decrescente e viceversa. In questo caso il coefficiente angolare di s sarà negativo. Se abbiamo fatto un buon lavoro con il disegno dovremmo trovare che, partendo dal punto in cui r interseca l'asse y, il prossimo punto in cui la perpendicolare passa per l'incrocio dei quadretti è $(4;\ -5)$. Il coefficiente angolare di s è quindi: $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Definizione 4.3. Due rette sono perpendicolari se e solo se il coefficiente angolare di una è l'*antireciproco* del coefficiente angolare dell'altra.

Esempio 4.1. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta s parallela a r passante per $P(-4;\ 3)$.

Esempio 4.2. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta n perpendicolare a r passante per $P(-4;\ 3)$.

4.6 Retta per due punti

Più sopra abbiamo ricordato che per due punti passa una sola retta. In quale modo possiamo trovare l'equazione della retta che passa per due punti assegnati?

Procedura 4.4. *Calcola l'equazione della retta passante per i punti A e B:*

a) Conoscendo i due punti non è difficile calcolare il coefficiente angolare: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

b) poi resta da calcolare l'intercetta e per questo possiamo applicare la condizione di passaggio per un punto: $y_A = mx_A + q \Leftarrow q = y_A - mx_A$.

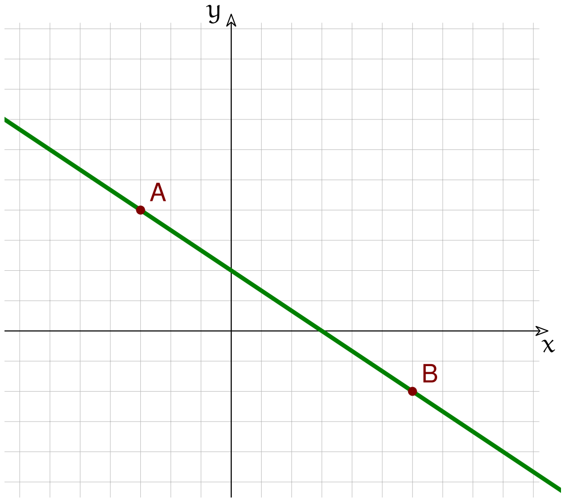


FIGURA 4.15: Equazione di una retta.

Esempio 4.3. Calcola l'equazione della retta passante per $A(-3;\ 4)$ e $B(6;\ -2)$ (figura: 4.15).

Per prima cosa disegna i punti e la retta. È facile prevedere che il coefficiente angolare dovrà essere negativo e che l'intercetta dovrà valere all'incirca due.

Calcoliamo il coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{6-(-3)} = \frac{-2-4}{6+3} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Per trovare q e imponiamo che la retta di cui conosciamo m passi per A (si ottiene lo stesso risultato imponendo il passaggio per B):

$$y_A = -\frac{2}{3}x_A + q \Leftarrow q = y_A + \frac{2}{3}x_A q = 4 + \frac{2}{3}(-3) q = 4 - 2 = 2$$

L'equazione della retta è quindi:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(Come sospettavamo).

Esempio 4.4. Calcola, usando la formuletta, l'equazione della retta passante per gli stessi due punti.

4.7 Fasci di rette

L'equazione parametrica: $y - y_P = m(x - x_P)$ al variare del parametro m rappresenta senz'altro una retta perché è un'equazione di primo grado nelle due incognite x e y. Senz'altro questa retta passa per il punto P, infatti se al posto di x e di y sostituisco rispettivamente: x_P e y_P l'uguaglianza è verificata:

$$y_P - y_P = m(x_P - x_P) \Leftarrow 0 = m \cdot 0$$

Dunque $y - y_P = m(x - x_P)$ è l'equazione di una generica retta passante per P. Al variare di m ottengo quasi tutte le rette passanti per P... Perché *quasi* tutte?

Esempio 4.5. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(3;\ 2)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta parallela alla retta passante per i punti $A(-4;\ 1)$ e $B(3;\ -1)$.

Esempio 4.6. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(-23;\ 1)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta perpendicolare alla retta passante per i punti $A(3;\ 4)$ e $B(5;\ -2)$.

4.7.1 Formula della retta per due punti

A questo punto possiamo combinare due argomenti trattati per risolvere in un solo passo un problema già affrontato e risolto in due passaggi. Possiamo combinare la formula del fascio di rette per un punto $y - y_P = m(x - x_P)$ e la formula per calcolare il coefficiente angolare $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ Sostituendo m nella prima otteniamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

La formula per del fascio di rette passsanti per un punto permette di scriverne una analoga che dà immediatamente l'equazione di una retta passante per due punti.

4.8 Distanza punto retta

Ricordiamo che la distanza tra un punto e una retta è la lunghezza del segmento di perpendicolare compreso tra il punto e la retta.

Procedura 4.5. *Per trovare la distanza del punto P dalla retta r,* basta*:*

a) *calcolare l'equazione della retta s perpendicolare a r passante per P*
b) *trovare l'intersezione I tra le due rette r e s*
c) *calcolare la distanza tra i punti P e I.*

Fortunatamente qualche matematico è riuscito a sintetizzare tutto questo procedimento in un'unica formula. Dato un punto $P(x_P; y_P)$ e una retta $r : ax + by + c = 0$, la distanza $d(P, r)$ tra il punto e la retta si ottiene dalla seguente formula:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il numeratore è ottenuto partendo dall'equazione implicita della retta sostituendo le variabili con le coordinate del punto P.

Esempio 4.7. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(-1;\ 5)$ e $r:\ y = \frac{1}{3}x - 2$.

Esempio 4.8. Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(4;\ -3)$ e $r:\ y = \frac{-1}{5}x + 5$,

---

4.9 Intersezione di rette

Ritorniamo dove eravamo partiti: i punti di una rette sono tutti e soli quei punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione. Se due rette hanno un punto in comune questo significa che le coordinate di quel punto sono soluzione di entrambe le equazioni. Trovare le coordinate del punto che due rette hanno in comune significa trovare le soluzioni comuni alle due equazioni.

Esempio 4.9. Disegna le due rette $r:\ y = -\frac{1}{3}x + 3$ e $s:\ y = \frac{4}{3}x - 2$ individua graficamente l'intersezione e verifica che le sue coordinate sono soluzioni di entrambe le equazioni.

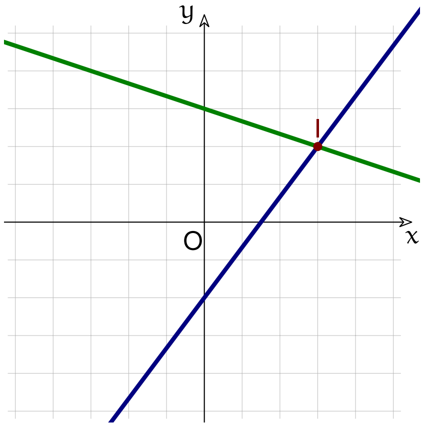


FIGURA 4.16: Intersezione di due rette.

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$
$$2 = -\frac{1}{3}3 + 3 = -1 + 3 = 2$$
$$y = \frac{4}{3}x - 2$$
$$2 = \frac{4}{3}3 - 2 = 4 - 2 = 2$$

FIGURA 4.17: Verifica dell'intersezione.

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano nel punto $I(3;\ 2)$. Sostituendo 3 alla x e 2 alla y nella prima equazione si ottiene:

$y = -\frac{1}{3}x + 3$

$2 = -\frac{1}{3}3 + 3 = -1 + 3 = 2$

e nella seconda si ottiene:

$y = \frac{4}{3}x - 2$

$2 = \frac{4}{3}3 - 2 = 4 - 2 = 2$

Ovviamente il metodo appena utilizzato non è generale: come facciamo a trovare le coordinate esatte se l'intersezione non cade esattamente sul vertice di un quadretto? Rovesciamo il problema: per individuare il punto cerchiamo i due numeri che risolvono entrambe le equazioni, quei due numeri sono le coordinate dell'intersezione delle rette.

In matematica per indicare che due frasi devono essere contemporaneamente vere si usa il simbolo di una grande parentesi graffa aperta che le racchiuda e l'insieme di più equazioni che devono essere vere contemporaneamente viene chiamato sistema. Risolvere un sistema significa trovare quei numeri che messi al posto delle incognite rendono vere tutte le uguaglianza.

Alla soluzione dei sistemi è dedicato tutto il prossimo capitolo, ma possiamo intanto anticipare uno dei trucchi che useremo: se nella prima equazione c'è scritto che y è uguale a un'espressione, nella seconda equazione, al posto di y possiamo scrivere quella espressione. Vediamo questo procedimento con un esempio.

Esempio 4.10. Disegna le due rette $r:\ y=\frac{3}{2}x+2$ e $s:\ y=\frac{2}{3}x-1$ calcola le coordinate dell'intersezione e verifica di aver ottenuto una soluzione credibile.

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+2 \\ y=\frac{2}{3}x-1 \end{cases}$$
$\frac{3}{2}x+2=\frac{2}{3}x-1$
$\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}x=-1-2$
$\frac{5}{6}x=-3$
$x=-\frac{18}{5}=3,6$
$y=\frac{2}{3}(-\frac{18}{5})-1$
$y=-\frac{12}{5}-1=-\frac{17}{5}=3,4$

FIGURA 4.18: Calcolo dell'intersezione.

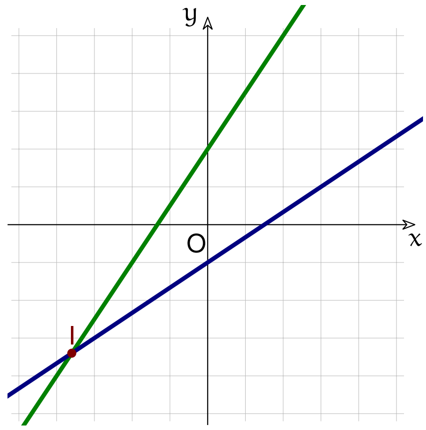


FIGURA 4.19: Intersezione di due rette.

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano circa nel punto $I(3;\ 2)$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+2 \\ y=\frac{2}{3}x-1 \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che y è equivalente a $\frac{3}{2}x+3$ quindi, nella seconda equazione al posto di y scriviamo: $\frac{3}{2}x+3$ otteniamo così un'equazione che contiene una sola incognita, l'ascissa dell'intersezione:

$\frac{3}{2}x+2=\frac{2}{3}x-1$
$\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}x=-1-2$
$\frac{5}{6}x=-3$
$x=-\frac{18}{5}=3,6$

E sostituendo questo valore in una delle due equazioni troviamo anche il valore dell'ordinata dell'intersezione:

$y=\frac{2}{3}(-\frac{18}{5})-1$
$y=-\frac{12}{5}-1=-\frac{17}{5}=3,4$

4.10 Esercizi

4.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.1 Equazioni lineari in due variabili

4.1. Individua quale tra i seguenti punti appartiene alla retta.

a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{33}{2}$; $(-5;\ 9),\ (4;\ -10),\ (4;\ -9),\ (5;\ -9),\ (-6;\ 9),\ (5;\ -10)$
b) $y = -\frac{13}{2}x - 37$; $(3;\ 10),\ (-4;\ -11),\ (-5;\ -12),\ (4;\ 10),\ (-5;\ -11),\ (-4;\ -12)$
c) $y = \frac{3}{7}x + \frac{72}{7}$; $(-11;\ 6),\ (10;\ -7),\ (-10;\ 5),\ (-11;\ 5),\ (-10;\ 6),\ (10;\ -6)$
d) $y = \frac{2}{15}x - \frac{2}{5}$; $(-12;\ -2),\ (11;\ 1),\ (-13;\ -3),\ (11;\ 2),\ (12;\ 1),\ (12;\ 2)$
e) $y = -\frac{13}{5}x + \frac{32}{5}$; $(-1;\ 9),\ (1;\ -9),\ (-2;\ 9),\ (0;\ -9),\ (0;\ -10),\ (1;\ -10)$
f) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$; $(-9;\ 3),(-9;\ 4),(-8;\ 4),(8;\ -5),(7;\ -5),(8;\ -4)$
g) $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$; $(5;\ 2),(-6;\ -2),(-5;\ -3),(4;\ 2),(-5;\ -2),(-6;\ -3)$
h) $y = \frac{4}{3}x - 3$; $(5;\ 5),(-7;\ -5),(6;\ 5),(-7;\ -6),(5;\ 4),(-6;\ -6)$
i) $y = -5x + 49$; $(-9;\ -10),(-8;\ -10),(7;\ 8),(8;\ 8),(-9;\ -9),(8;\ 9)$
j) $y = \frac{2}{9}x + \frac{49}{9}$; $(-11;\ 3),(10;\ -3),(-11;\ 2),(11;\ -3),(-12;\ 3),(10;\ -4)$
k) $y = \frac{8}{3}x + \frac{56}{3}$; $(4;\ -8),(3;\ -8),(-4;\ 7),(-5;\ 7),(4;\ -9),(-4;\ 8)$
l) $x = -9$; $(-10;\ -9),(-10;\ -8),(-9;\ -8),(8;\ 7),(8;\ 8),(9;\ 8)$
m) $y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$; $(-2;\ 8),(0;\ -9),(-1;\ 7),(-2;\ 7),(-1;\ 8),(0;\ -8)$
n) $y = 3x + 10$; $(4;\ 4),(5;\ 4),(-5;\ -6),(-6;\ -5),(4;\ 5),(-5;\ -5)$
o) $y = \frac{3}{17}x - \frac{135}{17}$; $(-12;\ 5),(-12;\ 6),(10;\ -6),(11;\ -6),(-11;\ 5),(11;\ -7)$
p) $y = \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}$; $(-2;\ -2),(-1;\ -2),(0;\ 1),(1;\ 2),(-1;\ -3),(0;\ 2)$
q) $y = \frac{3}{10}x + \frac{19}{5}$; $(-7;\ 2),(-6;\ 2),(-7;\ 1),(5;\ -2),(-6;\ 1),(6;\ -2)$
r) $y = \frac{4}{7}x - \frac{20}{7}$; $(-2;\ -5),(2;\ 4),(1;\ 3),(-2;\ -4),(2;\ 3),(-3;\ -4)$
s) $y = \frac{1}{12}x - \frac{109}{12}$; $(-2;\ 8),(0;\ -10),(1;\ -10),(-1;\ 9),(-1;\ 8),(1;\ -9)$
t) $y = -\frac{17}{11}x + \frac{76}{11}$; $(-3;\ 9),(1;\ -11),(-2;\ 9),(2;\ -10),(-3;\ 10),(-2;\ 10)$

4.2 Equazioni della retta

4.2. Riconosci quali delle seguenti è l'equazione di una retta:

a) $y = -3x + 4$
b) $y^2 = x + 3$
c) $y^3 = -x + y^3 - 2$
d) $(x+2)(x-2) = (x+3)^2$
e) $(x+y)(x-y) + (y-5)^2 = (x+4)^2$
f) $0,1x + 0,2y = 0,3$
g) $x^2 - y^2 = 0$
h) $y + 4x = 5$
i) $5x - 4y + 3 = 0$
j) $(x+3)^2 - (y+2)^2 = 2x - 2y$
k) $y = 0$
l) $y = 2$
m) $x = y$
n) $0x + 0y = 7$
o) $x^2 - (x+2)^2 = 7(x-y)$

4.3. Trasforma le equazioni implicite in equazioni esplicite.

a) $-1x-11y-110=0$
b) $-8x-2y-20=0$
c) $-9x=0$
d) $8x+y-7=0$
e) $-2x-6y-54=0$
f) $-6x-9y-27=0$
g) $-7x-8y-64=0$
h) $4x-5y-5=0$
i) $7x-y-9=0$
j) $4x+7y+14=0$
k) $-7x+6y+0=0$
l) $-5x+10y-50=0$
m) $x=0$
n) $6x+4y-4=0$
o) $6x-11y+99=0$
p) $11x-8y-40=0$
q) $x=-7$
r) $-4x-9y+36=0$
s) $-9x-6y-6=0$
t) $-7x+4y-40=0$
u) $8x+4y-12=0$

4.4. Trasforma le equazioni esplicite in equazioni implicite.

a) $y=\frac{2}{5}x+2$
b) $y=\frac{10}{11}x-6$
c) $y=-\frac{5}{3}x+10$
d) $y=\frac{1}{3}x-3$
e) $y=-x-5$
f) $x=0$
g) $y=\frac{8}{7}x+8$
h) $y=\frac{1}{11}x+9$
i) $y=-\frac{3}{10}x-7$
j) $y=-\frac{1}{3}x-7$
k) $y=-11x+8$
l) $y=-\frac{5}{11}x+10$
m) $y=-8$
n) $y=-\frac{3}{5}x-6$
o) $y=1$
p) $y=-\frac{9}{5}x-9$
q) $y=8x$
r) $y=\frac{2}{5}x+7$
s) $y=-\frac{11}{10}x+2$
t) $y=-\frac{1}{2}x+8$
u) $y=-\frac{3}{5}x+1$

4.3 Come disegnare le rette

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

4.5. a) $y=\frac{6}{5}x+7$ b) $y=\frac{11}{10}x-6$ c) $y=-\frac{6}{11}x+11$

4.6. a) $y=3x+12$ b) $y=-3$ c) $y=\frac{9}{5}x-2$

4.7. a) $y=-\frac{5}{9}x+6$ b) $y=2x-9$ c) $y=\frac{9}{7}x+12$

4.8. a) $x=0$ b) $y=-\frac{10}{3}x-7$ c) $y=-\frac{12}{11}x-11$

4.9. a) $y=\frac{8}{3}x-6$ b) $y=3x+10$ c) $y=\frac{3}{5}x+3$

4.10. a) $y=7x+5$ b) $y=5x+4$ c) $y=0$

4.11. a) $y=\frac{10}{7}x-10$ b) $y=-\frac{2}{5}x+4$ c) $x=5$

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

4.12. a) $2x-10y-30=0$ b) $4x+10y-40=0$ c) $-3x+y+0=0$

4.13. a) $11x-3y-12=0$ b) $7x=0$ c) $-10x-2y-16=0$

4.14. a) $-7x-4y-4=0$ b) $9x+7y+42=0$ c) $-8x+y+9=0$

4.15. a) $10x-y+9=0$ b) $6x-8y-48=0$ c) $-7x-y-11=0$

4.16. a) $4x+4y+36=0$ b) $-5x-8y-48=0$ c) $-7x=0$

4.17. a) $-7x+7y+63=0$ b) $7x+6y+30=0$ c) $-11x-y+3=0$

4.18. a) $-5x+5y-45=0$ b) $8x-y+11=0$ c) $5x+6y-24=0$

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

4.19. a) $y=-\frac{1}{3}x-4$ b) $y=x-8$ c) $y=-\frac{2}{5}x-2$

4.20. a) $y=-\frac{1}{2}x+11$ b) $y=-\frac{9}{11}x-6$ c) $y=7x-7$

4.21. a) $y=\frac{5}{6}x+3$ b) $y=2x-6$ c) $y=-x+1$

4.22. a) $y=\frac{9}{2}x-4$ b) $y=\frac{11}{4}x-3$ c) $y=-\frac{2}{5}x-5$

4.23. a) $y=-\frac{9}{10}x-11$ b) $y=-3x+12$ c) $y=-\frac{2}{3}x+12$

4.24. a) $y=1$ b) $y=\frac{1}{8}x+3$ c) $y=\frac{10}{3}x-4$

4.25. a) $y=-2$ b) $y=x+12$ c) $y=2x-7$

4.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

4.26. a) $8x - 2y - 18 = 0$ b) $-5x + 6y - 18 = 0$ c) $9x - 45 = 0$

4.27. a) $-7x + 8y + 80 = 0$ b) $2y + 18 = 0$ c) $-4x + 6y + 12 = 0$

4.28. a) $-7x - 6y + 12 = 0$ b) $-6x - 4y + 20 = 0$ c) $-4x + y + 6 = 0$

4.29. a) $10x - 11y = 0$ b) $-5y + 15 = 0$ c) $3x + 11y + 0 = 0$

4.30. a) $-5x + 5y + 50 = 0$ b) $-2x + 7 = 0$ c) $6x - 5y + 30 = 0$

4.31. a) $-8x - y + 12 = 0$ b) $-4x + 11y - 11 = 0$ c) $-2x + 7y - 84 = 0$

4.32. a) $-12x - 7y = 0$ b) $8x - 10y - 50 = 0$ c) $5x - 10y - 30 = 0$

4.6 Retta per due punti

4.33. Calcola l'equazione della retta: AB.

a) $A(3;\ 2),\ B(8;\ 8)$ $[y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}]$
b) $A(-6;\ 7),\ B(-11;\ 6)$ $[y = \frac{1}{5}x + \frac{41}{5}]$
c) $A(-9;\ 1),\ B(9;\ 4)$ $[y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{2}]$
d) $A(0;\ -12),\ B(-10;\ 11)$ $[y = -\frac{23}{10}x - 12]$
e) $A(-5;\ 1),\ B(4;\ -2)$ $[y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}]$
f) $A(-3;\ -4),\ B(4;\ -7)$ $[y = -\frac{3}{7}x - \frac{37}{7}]$
g) $A(6;\ -7),\ B(-1;\ -9)$ $[y = \frac{2}{7}x - \frac{61}{7}]$
h) $A(-1;\ 3),\ B(-7;\ -4)$ $[y = \frac{7}{6}x + \frac{25}{6}]$
i) $A(10;\ 1),\ B(-11;\ -10)$ $[y = \frac{11}{21}x - \frac{89}{21}]$
j) $A(-8;\ -6),\ B(-1;\ -11)$ $[y = -\frac{5}{7}x - \frac{82}{7}]$
k) $A(-4;\ 9),\ B(3;\ 6)$ $[y = -\frac{3}{7}x + \frac{51}{7}]$
l) $A(1;\ 8),\ B(-1;\ -11)$ $[y = \frac{19}{2}x - \frac{3}{2}]$
m) $A(-6;\ 1),\ B(-12;\ 6)$ $[y = -\frac{5}{6}x - 4]$
n) $A(4;\ 11),\ B(2;\ -9)$ $[y = 10x - 29]$
o) $A(-10;\ -5),\ B(4;\ -10)$ $[y = -\frac{5}{14}x - \frac{60}{7}]$
p) $A(10;\ -6),\ B(-12;\ 7)$ $[y = -\frac{13}{22}x - \frac{1}{11}]$
q) $A(-6;\ -5),\ B(-4;\ -3)$ $[y = x + 1]$
r) $A(-9;\ 9),\ B(9;\ 10)$ $[y = \frac{1}{18}x + \frac{19}{2}]$
s) $A(4;\ -5),\ B(-10;\ 11)$ $[y = -\frac{8}{7}x - \frac{3}{7}]$
t) $A(-4;\ 8),\ B(-6;\ 2)$ $[y = 3x + 20]$

4.5 Rette parallele e perpendicolari

4.34. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C.

a) $A(10;\ 7),\ B(-9;\ -10),\ C(3;\ -12)$
b) $A(-1;\ 6),\ B(-5;\ 6),\ C(-4;\ -5)$
c) $A(-7;\ -2),\ B(-9;\ -6),\ C(5;\ -12)$
d) $A(-3;\ 0),\ B(-4;\ -4),\ C(-9;\ -9)$
e) $A(4;\ -3),\ B(-10;\ 9),\ C(8;\ 6)$
f) $A(4;\ 11),\ B(-12;\ -11),\ C(9;\ 5)$
g) $A(6;\ -2),\ B(-12;\ -7),\ C(10;\ -8)$
h) $A(-4;\ 4),\ B(10;\ -10),\ C(11;\ -1)$
i) $A(-3;\ -10),\ B(9;\ 8),\ C(8;\ -9)$
j) $A(7;\ -12),\ B(6;\ -4),\ C(-11;\ -3)$
k) $A(0;\ 0),\ B(-8;\ -3),\ C(4;\ 11)$
l) $A(-2;\ -2),\ B(7;\ -7),\ C(4;\ 8)$
m) $A(-7;\ -9),\ B(-4;\ 8),\ C(4;\ 10)$
n) $A(-8;\ -5),\ B(11;\ 11),\ C(9;\ 5)$
o) $A(11;\ -7),\ B(-12;\ 5),\ C(-4;\ -7)$
p) $A(11;\ 3),\ B(-1;\ -4),\ C(-10;\ -1)$
q) $A(5;\ 0),\ B(6;\ 11),\ C(3;\ -1)$
r) $A(-7;\ 8),\ B(-7;\ 4),\ C(8;\ -8)$
s) $A(7;\ 5),\ B(-4;\ 2),\ C(-6;\ -5)$
t) $A(7;\ -5),\ B(2;\ -12),\ C(-7;\ 0)$

4.7 Fasci di rette

4.35. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C. poi calcolane le equazioni.

a) $A(3;\ -3),\ B(-10;\ 3),\ C(-4;\ 9)$ $[y=-\frac{6}{13}x-\frac{21}{13},\ y=-\frac{6}{13}x+\frac{93}{13},\ y=\frac{13}{6}x+\frac{53}{3}]$
b) $A(4;\ -12),\ B(9;\ -6),\ C(6;\ -9)$ $[y=\frac{6}{5}x-\frac{84}{5},\ y=\frac{6}{5}x-\frac{81}{5},\ y=-\frac{5}{6}x-4]$
c) $A(4;\ -9),\ B(-11;\ -5),\ C(4;\ -10)$ $[y=-\frac{4}{15}x-\frac{119}{15},\ y=-\frac{4}{15}x-\frac{134}{15},\ y=\frac{15}{4}x-25]$
d) $A(-3;\ 3),\ B(-10;\ -7),\ C(0;\ -3)$ $[y=\frac{10}{7}x+\frac{51}{7},\ y=\frac{10}{7}x-3,\ y=-\frac{7}{10}x-3]$
e) $A(6;\ -3),\ B(9;\ -12),\ C(10;\ 8)$ $[y=-3x+15,\ y=-3x+38,\ y=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}]$
f) $A(-4;\ -8),\ B(4;\ 2),\ C(-12;\ -11)$ $[y=\frac{5}{4}x-3,\ y=\frac{5}{4}x+4,\ y=-\frac{4}{5}x-\frac{103}{5}]$
g) $A(10;\ -6),\ B(9;\ 7),\ C(0;\ -5)$ $[y=-13x+124,\ y=-13x-5,\ y=\frac{1}{13}x-5]$
h) $A(-2;\ 0),\ B(1;\ 4),\ C(2;\ 0)$ $[y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3},\ y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3},\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}]$
i) $A(-10;\ 7),\ B(-6;\ -3),\ C(11;\ 5)$ $[y=-\frac{5}{2}x-18,\ y=-\frac{5}{2}x+\frac{65}{2},\ y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}]$
j) $A(-6;\ 8),\ B(2;\ -5),\ C(-11;\ -3)$ $[y=-\frac{13}{8}x-\frac{7}{4},\ y=-\frac{13}{8}x-\frac{167}{8},\ y=\frac{8}{13}x+\frac{49}{13}]$
k) $A(-4;\ -4),\ B(1;\ 2),\ C(-7;\ 4)$ $[y=\frac{6}{5}x+\frac{4}{5},\ y=\frac{6}{5}x+\frac{62}{5},\ y=-\frac{5}{6}x-\frac{11}{6}]$
l) $A(-1;\ -6),\ B(8;\ -9),\ C(10;\ 9)$ $[y=-\frac{1}{3}x-\frac{19}{3},\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{37}{3},\ y=3x-21]$
m) $A(10;\ -10),\ B(-12;\ 10),\ C(-12;\ 5)$ $[y=-\frac{10}{11}x-\frac{10}{11},\ y=-\frac{10}{11}x-\frac{65}{11},\ y=\frac{11}{10}x+\frac{91}{5}]$
n) $A(-1;\ -9),\ B(2;\ -11),\ C(-9;\ 11)$ $[y=-\frac{2}{3}x-\frac{29}{3},\ y=-\frac{2}{3}x+5,\ y=\frac{3}{2}x+\frac{49}{2}]$
o) $A(11;\ 2),\ B(-12;\ 11),\ C(7;\ 9)$ $[y=-\frac{9}{23}x+\frac{145}{23},\ y=-\frac{9}{23}x+\frac{270}{23},\ y=\frac{23}{9}x-\frac{80}{9}]$
p) $A(-8;\ -4),\ B(5;\ -10),\ C(-2;\ -7)$ $[y=-\frac{6}{13}x-\frac{100}{13},\ y=-\frac{6}{13}x-\frac{103}{13},\ y=\frac{13}{6}x-\frac{8}{3}]$

q) $A(10;\,7)$, $B(1;\,5)$, $C(-10;\,1)$ $[y=\frac{2}{9}x+\frac{43}{9},\ y=\frac{2}{9}x+\frac{29}{9},\ y=-\frac{9}{2}x-44]$
r) $A(0;\,11)$, $B(-1;\,9)$, $C(-4;\,-1)$ $[y=2x+11,\ y=2x+7,\ y=-\frac{1}{2}x-3]$
s) $A(8;\,-1)$, $B(2;\,-10)$, $C(-6;\,-5)$ $[y=\frac{3}{2}x-13,\ y=\frac{3}{2}x+4,\ y=-\frac{2}{3}x-9]$
t) $A(11;\,-8)$, $B(-11;\,-10)$, $C(4;\,-11)$ $[y=\frac{1}{11}x-9,\ y=\frac{1}{11}x-\frac{125}{11},\ y=-11x+33]$

4.8 Distanza punto retta

4.36. Calcola la distanza tra il punto P e la retta r

a) $P(11;\,-7)$, $r:\ -6x+7y+21=0$ $[\frac{94}{\sqrt{85}}\approx 10.2]$
b) $P(-10;\,10)$, $r:\ 3x+10y+10=0$ $[\frac{80}{\sqrt{109}}\approx 7.663]$
c) $P(8;\,-1)$, $r:\ -12x-10y+40=0$ $[\frac{46}{\sqrt{244}}\approx 2.945]$
d) $P(-5;\,-11)$, $r:\ -6x+0=0$ $[\frac{30}{\sqrt{36}}\approx 5.0]$
e) $P(-1;\,-4)$, $r:\ -3x+9y-81=0$ $[\frac{114}{\sqrt{90}}\approx 12.02]$
f) $P(-3;\,0)$, $r:\ 9x-6y+72=0$ $[\frac{45}{\sqrt{117}}\approx 4.16]$
g) $P(-10;\,-7)$, $r:\ 10x-9y+27=0$ $[\frac{10}{\sqrt{181}}\approx 0.7433]$
h) $P(4;\,0)$, $r:\ -9x+4y+44=0$ $[\frac{8}{\sqrt{97}}\approx 0.8123]$
i) $P(-5;\,8)$, $r:\ 10x-3y-27=0$ $[\frac{101}{\sqrt{109}}\approx 9.674]$
j) $P(-11;\,0)$, $r:\ 9x+11y-33=0$ $[\frac{132}{\sqrt{202}}\approx 9.287]$
k) $P(-9;\,-10)$, $r:\ 2x+4y+24=0$ $[\frac{34}{\sqrt{20}}\approx 7.603]$
l) $P(5;\,7)$, $r:\ 3x+1y+8=0$ $[\frac{30}{\sqrt{10}}\approx 9.487]$
m) $P(8;\,7)$, $r:\ -10x+6y+54=0$ $[\frac{16}{\sqrt{136}}\approx 1.372]$
n) $P(-2;\,-6)$, $r:\ -2x-6y-6=0$ $[\frac{34}{\sqrt{40}}\approx 5.376]$
o) $P(-12;\,9)$, $r:\ -1x+9y-63=0$ $[\frac{30}{\sqrt{82}}\approx 3.313]$
p) $P(-6;\,4)$, $r:\ -11x+10y-70=0$ $[\frac{36}{\sqrt{221}}\approx 2.422]$
q) $P(-6;\,-3)$, $r:\ -3y+33=0$ $[\frac{42}{\sqrt{9}}\approx 14.0]$
r) $P(7;\,5)$, $r:\ -2x-7y-35=0$ $[\frac{84}{\sqrt{53}}\approx 11.54]$
s) $P(-5;\,-6)$, $r:\ -10x+7y+63=0$ $[\frac{71}{\sqrt{149}}\approx 5.817]$
t) $P(-6;\,11)$, $r:\ 9x+5y+55=0$ $[\frac{56}{\sqrt{106}}\approx 5.439]$

4.37. Calcola la distanza tra il punto P e la retta r

a) $P(-2;\,-10)$, $r:\ y=-\frac{1}{9}x-11$ $[\frac{7}{\sqrt{82}}\approx 0.773]$
b) $P(7;\,-9)$, $r:\ y=\frac{2}{11}x+1$ $[\frac{124}{\sqrt{125}}\approx 11.09]$
c) $P(6;\,-2)$, $r:\ y=-\frac{3}{4}x-1$ $[\frac{28}{\sqrt{100}}\approx 2.8]$
d) $P(-1;\,-7)$, $r:\ y=-\frac{2}{5}x-6$ $[\frac{7}{\sqrt{29}}\approx 1.3]$
e) $P(-4;\,0)$, $r:\ y=-x+7$ $[\frac{33}{\sqrt{18}}\approx 7.778]$
f) $P(11;\,9)$, $r:\ y=\frac{10}{11}x+2$ $[\frac{33}{\sqrt{221}}\approx 2.22]$
g) $P(8;\,0)$, $r:\ y=-\frac{1}{10}x-6$ $[\frac{68}{\sqrt{101}}\approx 6.766]$
h) $P(-8;\,-4)$, $r:\ y=-\frac{9}{10}x-6$ $[\frac{52}{\sqrt{181}}\approx 3.865]$

i) $P(2;\ 0)$, $r:\ y=-\frac{6}{5}x+2$ $[\frac{2}{\sqrt{61}}\approx 0.2561]$
j) $P(9;\ 7)$, $r:\ y=\frac{1}{2}x+2$ $[\frac{4}{\sqrt{80}}\approx 0.4472]$
k) $P(-3;\ 1)$, $r:\ y=\frac{2}{7}x+2$ $[\frac{1}{\sqrt{53}}\approx 0.1374]$
l) $P(1;\ 6)$, $r:\ y=\frac{6}{5}x+3$ $[\frac{9}{\sqrt{61}}\approx 1.152]$
m) $P(3;\ -3)$, $r:\ y=-\frac{11}{12}x+9$ $[\frac{111}{\sqrt{265}}\approx 6.819]$
n) $P(-11;\ -7)$, $r:\ y=\frac{3}{4}x-6$ $[\frac{29}{\sqrt{25}}\approx 5.8]$
o) $P(1;\ 5)$, $r:\ y=-\frac{6}{5}x-9$ $[\frac{152}{\sqrt{244}}\approx 9.731]$
p) $P(5;\ 3)$, $r:\ y=-\frac{5}{11}x-11$ $[\frac{179}{\sqrt{146}}\approx 14.81]$
q) $P(-1;\ 10)$, $r:\ y=2x-11$ $[\frac{23}{\sqrt{5}}\approx 10.29]$
r) $P(-4;\ -11)$, $r:\ y=\frac{3}{4}x+6$ $[\frac{56}{\sqrt{25}}\approx 11.2]$
s) $P(-8;\ 10)$, $r:\ y=-\frac{2}{9}x+4$ $[\frac{38}{\sqrt{85}}\approx 4.122]$
t) $P(-10;\ -7)$, $r:\ y=\frac{7}{4}x$ $[\frac{42}{\sqrt{65}}\approx 5.209]$

4.38. Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e calcola la sua equazione. Calcola la lunghezza del segmento AB, la distanza del punto C dalla retta AB e l'area del triangolo ABC

a) $A(-4;\ 10)$, $B(-3;\ 0)$, $C(3;\ -9)$ $[-10x-30,\ \sqrt{101},\ \frac{51}{\sqrt{101}},\ 25.5]$
b) $A(8;\ 11)$, $B(6;\ -7)$, $C(7;\ -7)$ $[9x-61,\ \sqrt{328},\ \frac{9}{\sqrt{82}},\ 9]$
c) $A(11;\ 2)$, $B(2;\ 7)$, $C(11;\ -1)$ $[-\frac{5}{9}x+\frac{73}{9},\ \sqrt{106},\ \frac{27}{\sqrt{106}},\ 13.5]$
d) $A(-5;\ 9)$, $B(-8;\ 4)$, $C(9;\ -5)$ $[\frac{5}{3}x+\frac{52}{3},\ \sqrt{34},\ \frac{112}{\sqrt{34}},\ 56]$
e) $A(6;\ -8)$, $B(-10;\ -6)$, $C(4;\ -10)$ $[-\frac{1}{8}x-\frac{29}{4},\ \sqrt{260},\ \frac{18}{\sqrt{65}},\ 18]$
f) $A(3;\ -6)$, $B(-5;\ -2)$, $C(10;\ -11)$ $[-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2},\ \sqrt{80},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ 6]$
g) $A(1;\ -2)$, $B(3;\ -11)$, $C(7;\ -2)$ $[-\frac{9}{2}x+\frac{5}{2},\ \sqrt{85},\ \frac{54}{\sqrt{85}},\ 27]$
h) $A(-6;\ 9)$, $B(11;\ 11)$, $C(1;\ 4)$ $[\frac{2}{17}x+\frac{165}{17},\ \sqrt{293},\ \frac{99}{\sqrt{293}},\ 49.5]$
i) $A(2;\ 1)$, $B(6;\ 1)$, $C(-6;\ -7)$ $[1,\ \sqrt{16},\ \frac{8}{\sqrt{1}},\ 16.0]$
j) $A(1;\ -4)$, $B(-6;\ -10)$, $C(7;\ 7)$ $[\frac{6}{7}x-\frac{34}{7},\ \sqrt{85},\ \frac{41}{\sqrt{85}},\ 20.5]$
k) $A(11;\ -8)$, $B(-8;\ 9)$, $C(0;\ -8)$ $[-\frac{17}{19}x+\frac{35}{19},\ \sqrt{650},\ \frac{187}{\sqrt{650}},\ 93.5]$
l) $A(7;\ -1)$, $B(-3;\ -12)$, $C(-11;\ -11)$ $[\frac{11}{10}x-\frac{87}{10},\ \sqrt{221},\ \frac{98}{\sqrt{221}},\ 49]$
m) $A(-7;\ -10)$, $B(9;\ -6)$, $C(-8;\ -3)$ $[\frac{1}{4}x-\frac{33}{4},\ \sqrt{272},\ \frac{29}{\sqrt{17}},\ 58]$
n) $A(-11;\ 0)$, $B(4;\ -2)$, $C(11;\ 5)$ $[-\frac{2}{15}x-\frac{22}{15},\ \sqrt{229},\ \frac{119}{\sqrt{229}},\ 59.5]$
o) $A(-12;\ -1)$, $B(11;\ 7)$, $C(-3;\ -1)$ $[\frac{8}{23}x+\frac{73}{23},\ \sqrt{593},\ \frac{72}{\sqrt{593}},\ 36]$
p) $A(-10;\ 11)$, $B(9;\ -5)$, $C(-12;\ 2)$ $[-\frac{16}{19}x+\frac{49}{19},\ \sqrt{617},\ \frac{203}{\sqrt{617}},\ 101.5]$
q) $A(6;\ -12)$, $B(-4;\ 6)$, $C(10;\ -8)$ $[-\frac{9}{5}x-\frac{6}{5},\ \sqrt{424},\ \frac{56}{\sqrt{106}},\ 56]$
r) $A(9;\ -10)$, $B(0;\ -6)$, $C(-5;\ -2)$ $[-\frac{4}{9}x-6,\ \sqrt{97},\ \frac{16}{\sqrt{97}},\ 8]$
s) $A(3;\ -11)$, $B(-6;\ 4)$, $C(6;\ 2)$ $[-\frac{5}{3}x-6,\ \sqrt{306},\ \frac{54}{\sqrt{34}},\ 81]$
t) $A(3;\ -9)$, $B(-8;\ 0)$, $C(-9;\ 9)$ $[-\frac{9}{11}x-\frac{72}{11},\ \sqrt{202},\ \frac{90}{\sqrt{202}},\ 45]$

4.39. Disegna le due rette, individua le coordinate dell'intersezione, verifica che queste sono soluzioni di entrambe le equazioni.

a) $r: y = 4x - 8; \quad s: y = -\frac{1}{4}x + 9$
b) $r: y = \frac{5}{8}x - 4; \quad s: y = \frac{1}{4}x - 7$
c) $r: y = -\frac{20}{3}x + 9; \quad s: y = -\frac{17}{3}x + 6$
d) $r: y = 1; s: y = 3x - 11$
e) $r: y = -\frac{5}{2}x - 4; \quad s: y = -8x + 7$
f) $r: y = 4x - 3; \quad s: y = \frac{17}{3}x - 8$
g) $r: y = 4x; \quad s: y = 16x - 12$
h) $r: y = \frac{10}{11}x - 11; \quad s: y = -\frac{5}{11}x + 4$
i) $r: y = \frac{1}{2}x + 7; \quad s: y = \frac{11}{4}x - 11$
j) $r: y = \frac{3}{2}x + 7; \quad s: y = 4$
k) $r: y = 9; \quad s: y = \frac{10}{11}x - 1$
l) $r: y = \frac{5}{4}x - 11; \quad s: y = \frac{11}{8}x - 12$
m) $r: y = \frac{9}{8}x; \quad s: y = -\frac{1}{4}x + 11$
n) $r: y = \frac{9}{4}x + 6; \quad s: y = \frac{5}{2}x + 8$
o) $r: y = -\frac{4}{5}x - 10; \quad s: y = \frac{3}{10}x + 1$
p) $r: y = 2x + 9; \quad s: y = \frac{17}{9}x + 8$
q) $r: x = 0; \quad s: x = 0$
r) $r: y = \frac{9}{5}x - 7; \quad s: y = \frac{11}{10}x$
s) $r: y = -\frac{2}{3}x; \quad s: y = -\frac{7}{9}x + 1$
t) $r: y = \frac{1}{9}x - 11; \quad s: y = \frac{1}{9}x - 11$

4.40. Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r: y = -\frac{3}{11}x - 6; s: y = -\frac{11}{8}x - 6$ $[(0; -6)]$
b) $r: y = \frac{5}{7}x - 1; s: y = \frac{1}{5}x - 7$ $[(-\frac{35}{3}; -\frac{28}{3})]$
c) $r: y = \frac{5}{12}x + 6; s: y = -\frac{6}{7}x - 8$ $[(-\frac{1176}{107}; \frac{152}{107})]$
d) $r: y = -\frac{11}{2}x + 1; s: y = -\frac{5}{2}x + 6$ $[(-\frac{5}{3}; \frac{61}{6})]$
e) $r: y = 11x - 8; s: y = -\frac{7}{11}x - 1$ $[(\frac{77}{128}; -\frac{177}{128})]$
f) $r: y = 4; s: y = \frac{6}{7}x$ $[(\frac{14}{3}; 4)]$
g) $r: y = \frac{5}{2}x - 11; s: y = -\frac{11}{7}x + 9$ $[(\frac{280}{57}; \frac{73}{57})]$
h) $r: y = -\frac{9}{2}x - 5; s: y = \frac{5}{6}x + 11$ $[(-3; \frac{17}{2})]$
i) $r: y = \frac{7}{9}x + 1; s: y = \frac{8}{3}x + 12$ $[(-\frac{99}{17}; -\frac{60}{17})]$
j) $r: y = -\frac{1}{3}x + 2; s: y = 2x + 12$ $[(-\frac{30}{7}; \frac{24}{7})]$
k) $r: y = -7x + 1; s: y = -5x + 11$ $[(-5; 36)]$
l) $r: y = 6x - 5; s: y = 8x - 1$ $[(-2; -17)]$
m) $r: y = 3x + 11; s: y = -\frac{7}{2}x + 1$ $[(-\frac{20}{13}; \frac{83}{13})]$
n) $r: y = \frac{2}{9}x - 4; s: y = \frac{1}{3}x - 4$ $[(0; -4)]$
o) $r: y = -\frac{2}{5}x - 9; s: y = \frac{4}{5}x + 7$ $[(-\frac{40}{3}; -\frac{11}{3})]$
p) $r: y = \frac{12}{7}x + 7; s: y = \frac{1}{9}x$ $[(-\frac{441}{101}; -\frac{49}{101})]$
q) $r: y = 2x + 8; s: y = \frac{1}{2}x - 9$ $[(-\frac{34}{3}; -\frac{44}{3})]$
r) $r: y = -9x; s: y = -\frac{11}{10}x + 5$ $[(-\frac{50}{79}; \frac{450}{79})]$
s) $r: y = \frac{5}{8}x - 10; s: y = -\frac{1}{5}x - 2$ $[(\frac{320}{33}; -\frac{130}{33})]$
t) $r: y = -\frac{8}{11}x + 4; s: y = -x + 4$ $[(0; 4)]$

4.41. Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r: 4x + 7y - 63 = 0; s: -9x - 10y + 110 = 0$ $[(\frac{140}{23}; \frac{127}{23})]$
b) $r: -7x + 0 = 0; s: -6x + 6y + 60 = 0$ $[(0; -10)]$
c) $r: 8x + 0 = 0; s: -10x - 12y + 72 = 0$ $[(0; 6)]$
d) $r: -12x - 10y - 60 = 0; s: 6x - 5y + 10 = 0$ $[(-\frac{10}{3}; -2)]$
e) $r: 4x - 8y + 24 = 0; s: -1x + 10y + 50 = 0$ $[(-20; -7)]$
f) $r: -9x + 2y - 2 = 0; s: -1x + 10y + 30 = 0$ $[(-\frac{10}{11}; -\frac{34}{11})]$
g) $r: 7x + 0 = 0; s: -3x + 10y - 20 = 0$ $[(0; 2)]$
h) $r: -1x - 12y + 12 = 0; s: -2y + 18 = 0$ $[(-96; 9)]$
i) $r: -1x + 3y + 30 = 0; s: 11x - 9y - 72 = 0$ $[(-\frac{9}{4}; -\frac{43}{4})]$
j) $r: 11x - 1y + 11 = 0; s: -7x - 8y - 8 = 0$ $[(-\frac{96}{95}; -\frac{11}{95})]$

k) $r: -6x - 10y + 30 = 0; s: 5x + 9y - 45 = 0$ [$(-45; 30)$]
l) $r: 7x - 9y + 63 = 0; s: -2x - 12y - 120 = 0$ [$(-18; -7)$]
m) $r: -10x + 9y + 72 = 0; s: 7x + 1y + 6 = 0$ [$(\frac{18}{73}; -\frac{564}{73})$]
n) $r: -5x + 2y + 12 = 0; s: -7x - 4y - 24 = 0$ [$(0; -6)$]
o) $r: -10x - 10y - 40 = 0; s: -10x - 4y - 20 = 0$ [$(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{3})$]
p) $r: -11y - 99 = 0; s: -10x + 1y + 5 = 0$ [$(-\frac{2}{5}; -9)$]
q) $r: 8x - 7y - 77 = 0; s: 5x - 9y - 99 = 0$ [$(0; -11)$]
r) $r: 9x + 9y + 54 = 0; s: 10x + 3y + 33 = 0$ [$(-\frac{15}{7}; -\frac{27}{7})$]
s) $r: -1x + 10y - 100 = 0; s: -6y + 66 = 0$ [$(10; 11)$]
t) $r: -11x - 9y + 0 = 0; s: -6x - 5y + 10 = 0$ [$(-90; 110)$]

4.10.2 Esercizi riepilogativi

4.42. Determina il circocentro, l'ortocentro, il baricentro, il perimetro e l'area del triangolo avente per vertici i punti $A(-1; -1), B(2; -1), C(0; 3)$.

4.43. Determina la proiezione ortogonale del punto $P(-1; -4)$ sulla retta $y = -\frac{1}{5}x - 1$

4.44. Dati i tre punti $A(1; 3)$, $B(-1; 6)$, $C(-4; 4)$ determina il punto D in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ risulti essere un quadrato. (Suggerimento: ci sono due metodi per risolvere l'esercizio, uno è molto veloce...)

4.45. Verifica che il triangolo di vertici $A(3; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-4; 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

4.46. Nel fascio di rette di centro $A(-2; 1)$ determinare la retta r perpendicolare alla retta di equazione $2x - 2y - 3 = 0$ [x + y + 1 = 0]

4.47. Nel fascio di rette parallele a $y = -2x$ determinare la retta r passante per $A(0; -3)$ [2x + y + 3 = 0]

4.48. Dati i tre vertici di un triangolo $A(5; 0)$ $B(1; 2)$ e $C(-3; 2)$, scriverne le equazioni dei lati. [$x + 2y - 5 = 0$ $x + 4y - 5 = 0$ $y = 2$]

4.49. Scrivere l'equazione di una retta passante per $A(4; 2)$ e per il punto comune alle rette $r: x + y = 3$ e $s: x - y + 1 = 0$ [$y = 2$]

4.50. Scrivere l'equazione della retta congiungente il punto d'intersezione delle rette $a: x + y = 3$ e $b: x - y + 1 = 0$, con quello d'intersezione delle rette $c: x - y = 1$ e d $x = -1$ [$y = 2x$]

4.51. Scrivere l'equazione della retta passante per $A(-5; -1)$ parallela alla retta congiungente l'origine delle coordinate con $B(1; 2)$ [$2x - y + 9 = 0$]

4.52. La retta passante per $A(2; 3)$ e $B(-1; -6)$ e quella per $C(6; -1)$ e $D(-3; 2)$ come sono fra loro? [perpendicolari]

Trasformazioni geometriche nel piano 5

5.1 Caratteri generali

Nei prossimi capitoli studieremo alcune trasformazioni geometriche nel piano.
Delle trasformazioni cercheremo di capire:

1. se cambiano la forma o le dimensioni delle figure che trasformano;
2. se esistono delle figure che non si modificano nella trasformazione, cioè se la trasformazione ha degli elementi uniti;
3. alcune trasformazioni particolari;
4. le equazioni della trasformazione.

In questo testo propongo l'uso del linguaggio di programmazione Python con la libreria per la geometria interattiva `pyig`. Basta ricopiare i programmi che sono scritti per avere un ambiente interattivo da esplorare. Ovviamente la parte più divertente è apportare modifiche e variazioni, dopo aver verificato il funzionamento di quelli originali. In questo modo si possono esplorare anche le potenzialità del linguaggio.

Prima di affrontare questi argomenti è bene aver seguito il percorso proposto nel capitolo sull'informatica relativo all'uso della geometria interattiva.

Nulla vieta che le attività proposte in questo capitolo siano eseguite con un qualunque altro software di geometria.

5.1.1 Strumenti di `pyig`

Per esplorare le trasformazioni nel piano useremo i seguenti strumenti della geometria interattiva con Python:

- `Point(x, y)` crea un punto con date coordinate.
- `Line(p0, p1)` crea una retta passante per `p0` e `p1`.
- `Parallel(retta, punto)` crea una retta parallela a `retta` passante per `punto`.
- `Orthogonal(retta, punto)` crea una retta perpendicolare a `retta` passante per `punto`.
- `PointOn(oggetto, parametro)` crea un punto fissato su oggetto nella posizione definita da parametro.
- `Segment(p0, p1)` crea un segmento di estremi `p0` e `p1`.
- `MidPoint(segmento)` crea il punto medio di segmento.

- `ConstrainedPoint(object, parameter)` crea un punto vincolato a oggetto nella posizione iniziale definita da parametro.
- `Polygon(vertici)` crea un poligono data una sequenza di punti.
- `Circle(centro, punto)` crea una circonferenza di centro `centro`, passante per `punto`.
- `<poligono>.vertices` contiene la lista dei vertici del poligono.
- `<segmento>.length()` restituisce la lunghezza di un segmento.
- `<oggetto>.coords()` restituisce le coordinate di oggetto.
- `VarText(x, y, stringa, variabili)` crea un testo variabile nella posizione `x`, `y`.

Se ci sono dei dubbi sul loro significato conviene dare un'occhiata alla parte sull'informatica o al manuale di `pygraph`.

5.2 Traslazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una traslazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una traslazione.
3. Cosa dice l'algebra sulle traslazioni.

5.2.1 Definizione

Nella geometria euclidea, una traslazione è una trasformazione che sposta, di una distanza fissa, tutti i punti nella stessa direzione.

In altre parole, dato un vettore, diremo che un punto P' è il traslato del punto P se il segmento `PP'` ha la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del vettore.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e un vettore, costruisce il traslato del punto rispetto al vettore. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = traslapunto(p_0, traslazione)
```

Ovviamente `p_0` e `traslazione` dovranno essere rispettivamente un punto e un vettore creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al traslato di `p_0` della quantità indicata da `vettore`. Un frammento completo di programma potrebbe essere:

```
# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A, il suo traslato
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A\'")
```

La funzione `traslapunto(punto, traslazione)` dovrà:

1. Creare una retta invisibile parallela a `traslazione` passante per `punto`.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione +1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una nostra cartella, con il nome `trasla01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la data, il tuo nome e un titolo (ad esempio: `Traslazioni: proprietà`).

Scrivi ora un programma che disegni un vettore, un punto e il suo traslato.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato e il vettore AA'
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A\'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve rimanere sempre il traslato di `A` secondo il vettore dato. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

5.2.2 Proprietà

Crea il vettore `AA'`, con spessore 1. Esegui il programma e muovi il punto `A`: cosa puoi dire del segmento `AA'`?

. . . .

Costruisci ora un nuovo punto `B`, il suo traslato `B'` e il vettore `BB'` (spessore 1).

Costruisci i segmenti `AB` e `A'B'` (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di `AB` e `A'B'` usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . .

Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB` e prova a dimostrarla.

. . . .

. . . .

. . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo traslato `P'`:

```
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color=\'green\', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6, color=\'green\', name="P\'")
```

Muovi il punto `P`, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto `C` il suo simmetrico `C'`, costruisci il poligono `ABC` e il poligono `A'B'C'`. Cosa si può concludere circa i triangoli `ABC` e `A'B'C'`?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo `ABC` e del suo trasformato `A'B'C'`?

. . . .

Riassumendo

- La traslazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La traslazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo traslato appartiene al traslato del segmento.
- Il programma completo:

```
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
```

```
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A\'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# Punto B, B', il vettore BB' e il punto medio
b_0 = ig.Point(-7, 0, width=6, name="B")
b_1 = traslapunto(b_0, trasl, width=6, name="A\'")
v_b = ig.Vector(b_0, b_1, width=1)

# Segmento AB e A'B'
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", ab.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color=\'olive drab\', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6,
                  color=\'olive drab\', name="P\'")

# Punto C, C' e i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(1, 5, width=6, name="B")
c_1 = traslapunto(c_0, trasl, width=6, name="A\'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

5.2.3 Elementi uniti

Un elemento unito è un oggetto geometrico che viene trasformato in se stesso da una trasformazione.

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `trasla02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `traslapunto(punto, traslazione, **kargs)` che restituisce il traslato di un punto. Nel programma principale crea un punto e il suo traslato. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Traslazioni: elementi uniti

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A\'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sono pochi gli elementi uniti in una traslazione, solo le rette parallele al vettore traslazione. Crea:

- una retta con uno spessore maggiore passante per `A` e parallela al vettore traslazione.
- una retta con uno spessore minore e di un altro colore passante per `A'` e parallela al vettore traslazione.

Qualunque sia la traslazione e qualunque sia il punto `A`, ottieni due rette sovrapposte: cioè `r'` coincide con `r`.

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una traslazione, sono elementi uniti solo:
    - le rette . . . .

5.2.4 Equazioni delle traslazioni

Un vettore è completamente determinato dalla differenza delle coordinate tra il punto iniziale e il punto finale di un segmento orientato.

Avvia una nuova finestra di editor e salvarla con il nome: `trasla03_equazioni.py`. In questa finestra ricopia il seguente programma:

```
# Traslazioni: equazioni

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
v = ig.Vector(ig.Point(0, 0, width=6),
              ig.Point(4, 3, width=6), name='t')

# Quattro punti
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(3, 6, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(-6, -7, width=6, name="C")
d_0 = ig.Point(7, -4, width=6, name="D")

# Lista con quattro punti
punti = [a_0, b_0, c_0, d_0]

# Vettore v applicato a tutti i punti
for punto in punti:
    v_p = ig.Vector(punto, v)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, correggi eventuali errori. Quanti vettori vedi?

Il programma produce complessivamente cinque segmenti orientati, ma questi rappresentano un solo vettore.

È un po' come le cinque frazioni seguenti:

$$\frac{9}{15}; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{18}{30}; \quad \frac{6}{10}; \quad \frac{30}{50};$$

rappresentano un solo numero razionale.

Nel programma principale crea un punto `P(5, 5)`, il suo traslato e aggiungi alcune istruzioni che visualizzino le componenti del vettore `v` e le coordinate del punto `P` e `P'`:

```
# Relazione tra componenti della traslazione e
# coordinate del punto traslato
p_0 = ig.Point(5, 5, width=6, name="P")
p_1 = traslapunto(a_0, v, width=6, name="P\'")

ig.VarText(-7, -10, "v = {}", v.components())
ig.VarText(-7, -11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(-7, -12, "P\' = {}", p_1.coords())
```

Modifica il vettore `v` e completa la seguente tabella lasciando fisso il punto `P(5, 5)`:

traslazione	simmetrico rispetto asse x
v (4; 3)	P'(. . . . . ; . . . . .)
v (1; -4)	P'(. . . . . ; . . . . .)
v (. . ; . .)	P'(x_p . . . ; y_p . . .)
v (a; b)	P'(. . . . . ; . . . . .)

Nella traslazione di componenti `(a, b)`: l'ascissa del generico punto `P'` traslato di `P` è . . . . ; l'ordinata del generico punto `P'`, è . . . .

La traslazione si può tradurre nel sistema di equazioni: $\tau \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Riassumendo

- L'equazione della traslazione di vettore `v(a; b)` è:

$$\tau \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Prova tu

Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una traslazione è
2. In una traslazione figure corrispondenti sono
3. In una traslazione sono unite
4. Le equazioni della traslazione di componenti `(a; b)` è:

5.3 Simmetria assiale

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una simmetria assiale e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una simmetria assiale.
3. Cosa sono gli assi di simmetria in un poligono.
4. Cosa dice l'algebra sulle simmetrie assiali.

5.3.1 Definizione

Una simmetria assiale di asse `asse` è una trasformazione che manda un punto `P` in un punto `P'` appartenente alla retta perpendicolare all'asse di simmetria in modo tale che la distanza di `P` dall'asse sia uguale alla distanza di `P'` dall'asse.

In altre parole, un punto P' è simmetrico del punto `P` rispetto alla retta `asse` se il segmento `PP'` è perpendicolare a `asse` e `asse` taglia a metà il segmento `PP'`.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e una retta, costruisce il simmetrico del punto rispetto alla retta. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = simmpunto(p_0, asse)
```

Ovviamente `p_0` e `asse` dovranno essere rispettivamente un punto e una retta creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al simmetrico di `p_0` rispetto a `asse`.

La funzione `simmpunto(punto, asse)` dovrà:

1. Creare una retta invisibile ortogonale a `asse` passante per `punto`.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione -1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def simmpunto(punto, asse):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, False)
    puntosimmetrico = ig.PointOn(perpendicolare, -1)
    return puntosimmetrico
```

La funzione proposta nel programma a fine capitolo è un po' più concisa e, in più, usa una particolare sintassi di Python che permette di passare un numero variabile di parametri definiti per chiave.

In questo modo si possono effettuare chiamate di questo tipo:

```
a_1 = simmpunto(a_0, asse, name="A\'")
b_1 = simmpunto(a_0, asse, name="B\'", color="navy")
c_1 = simmpunto(a_0, asse, name="C\'", width=7)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome `simass01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Simmetrie assiali

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
```

```
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo punto simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A\'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve rimanere sempre simmetrico di `A`. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

5.3.2 Proprietà

Crea il segmento `AA'`, con spessore 1, e costruisci il punto medio `M`. Esegui il programma e muovi il punto `A`: cosa puoi dire del segmento `AA'` e del suo punto medio?

. . . .

Costruisci ora un nuovo punto `B` dalla stessa parte di `A` e il suo simmetrico `B'` rispetto alla retta `asse`, costruisci il segmento `BB'` (spessore 1) e il suo punto medio chiamandolo `N`. Puoi prevedere il comportamento di `N`?

. . . .

Costruisci i segmenti `AB` e `A'B'` (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di `AB` e `A'B'` usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a, b, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a1, b1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . .

Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB`. Aggiungi i due segmenti: `MB` e `MB'` e prova a dimostrarla.

. . . .
. . . .
. . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo simmetrico `P'`:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color=\'olive drab\', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color=\'olive drab\', name="P\'")
```

Muovi il punto `P`, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto `C` dalla stessa parte di `A` e `B` rispetto a `asse` e il suo simmetrico `C'`, costruisci il poligono `ABC`, e il poligono `A'B'C'`. Cosa si può concludere circa i triangoli `ABC` e `A'B'C'`?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo `ABC` e del suo trasformato `A'B'C'`?

. . . .

Riassumendo

- La simmetria assiale è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La simmetria assiale inverte il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo simmetrico appartiene al simmetrico del segmento.
- Il programma completo:

```
# Simmetrie assiali: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A\'")
# Il segmento AA' e il punto medio
sa =ig.Segment(a_0, a_1, width=1)
m = ig.MidPoint(sa, width=6, color=\'red\', name="M")

# Punto B, il suo punto simmetrico
b_0 = ig.Point(-7, 3, width=6, name="B")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B\'")
# Il segmento BB' e il punto medio
```

```
    sb =ig.Segment(b_0, b_1, width=1)
    n = ig.MidPoint(sb, width=6, color=\'red\', name="N")

    # Segmento AB e A'B'
    ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
    a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
    ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
    ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", ab.length())
    mb =ig.Segment(m, b_0, width=1)
    mb1 =ig.Segment(m, b_1, width=1)

    # P vincolato alla retta AB
    p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                              color=\'olive drab\', name="P")
    p_11 = simmpunto(p_0, asse, width=6,
                     color=\'olive drab\', name="P\'")

    # Punto C, il suo punto simmetrico, i triangoli ABC e A'B'C'
    c_0 = ig.Point(-10, 5, width=6, name="B")
    c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B\'")
    ig.Polygon((a_0, b_0, c_0),
               width=4, color='violet', intcolor='gold')
    ig.Polygon((a_1, b_1, c_1),
               width=4, color='violet', intcolor='gold')

    # attivazione della finestra grafica
    ip.mainloop()
```

5.3.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simmass02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `simmpunto(punto, asse, **kags)` che restituisce il simmetrico di un punto rispetto a una retta. Nel programma principale crea tre punti e i loro simmetrici. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Simmetrie assiali: elementi uniti

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
```

```
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(−3, −12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, B, C e i loro simmetrici A', B', C'
a_0 = ig.Point(−3, 9, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(−7, 3, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(−9, 6, width=6, name="C")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A\'")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B\'")
c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B\'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sposta uno dei punti sulla retta `asse`. Cosa osservi?

. . . .

In una trasformazione geometrica un punto viene detto *unito* se, trasformato, corrisponde a se stesso. Puoi concludere che:

. . . .

In generale, in una trasformazione geometrica, una figura viene detta *unita* quando è trasformata in se stessa (anche se non ogni suo punto è unito).

Un segmento che ha gli estremi su `asse` è . . . . rispetto alla simmetria e è costituito da . . . .

Costruisci un triangolo `ABC` e il suo simmetrico `A'B'C'`. Muovi i punti `ABC` in modo che il triangolo simmetrico si sovrapponga al triangolo `A'B'C'`. Come deve essere il triangolo `ABC` per essere unito rispetto alla simmetria?

. . . .

Costruisci e descrivi altri elementi uniti rispetto alla simmetria.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una simmetria assiale sono elementi uniti:
  - i punti . . . .

- i segmenti . . . .
- le rette . . . .
- le circonferenze . . . .
- i triangoli . . . .
- i poligoni . . . .

5.3.4 Poligoni simmetrici

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simass03_poligoni.py`. Scrivi la solita funzione `simmpunto`.

Scrivi una funzione che, dati `centro`, `vertice` e `numlati`, costruisca il poligono regolare. Lo schema potrebbe essere:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circonferenza su cui sono disposti i vertici non visibile
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    # crea la lista dei vertici che contiene quello dato come argomento
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Scrivi la funzione che, dati `poligono` e `asse`, costruisca il poligono simmetrico. Lo schema potrebbe essere:

```
def simmpoli(poligono, asse, **params):
    """Restituisce il simmetrico di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici del poligono simmetrico
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il simmetrico e
    # aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- crea il punto O di coordinate (6, 3);
- l'asse passante per quel punto e il punto (6, 7);
- il triangolo equilatero di centro O e passante per (4, 3), usa la funzione `polreg`;
- il simmetrico del triangolo (usa la funzione `simmpoli`).

Una figura è simmetrica rispetto ad un *asse* se resta unita nella simmetria.

Agendo con il mouse, muovi la retta `asse` facendo in modo che il triangolo trasformato si sovrapponga al triangolo originale.

Sono tre e sono quelle in cui l'asse passa per . . . .

. . . .

Ripeti le operazioni precedenti disegnando un quadrato nel secondo quadrante, un pentagono regolare nel terzo e un esagono regolare nel quarto, sempre con un asse di simmetria passante per il centro. Cosa puoi osservare?

. . . .
. . . .
. . . .

Riassumendo

- Una figura si dice simmetrica se esiste una simmetria che la trasforma in se stessa.
- Una figura può avere più assi di simmetria.
- I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria quante sono i lati del poligono.
- La funzione `polreg(centro, vertice, numlati, **kargs)` può essere realizzata in questo modo:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circ. su cui sono disposti i vertici non visibile
    circ = ig.Circle(centro, vertice, visible=False)
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    arco=2./numlati
    # crea la lista dei vertici che contiene l'argomento vertice
    vertici=[vertice]
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    for cont in range(1, numlati):
        vertici.append(ig.PointOn(circ, cont*arco))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici, **kargs)
```

- La funzione `simmpoli(poligono, asse, **kargs)` può essere realizzata in questo modo:

```
def simmpoli(poligono, asse, **kargs):
    """Restituisce il simm. di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici
    # del poligono simmetrico
    vertici_simm=[]
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il
    # simmetrico e aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    for vertice in poligono.vertices:
        vertici_simm.append(simmpunto(vertice, asse))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici_simm, **kargs)
```

5.3.5 Equazioni di alcune simmetrie assiali

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simmas04_equazioni.py`. Scrivi la solita funzione `simmpunto`.

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- una retta x sovrapposta all’asse x;
- una retta y sovrapposta all’asse y;
- un punto `P` e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P'` simmetrico di `P` rispetto all’asse x e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P''` simmetrico di `P` rispetto all’asse y e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto P in varie posizioni e completa la seguente tabella:

punto	simmetrico rispetto asse x	simmetrico rispetto asse y
A (-4; 3)	A’(. . . . . ; . . . . .)	A“(. . . . . ; . . . . .)
B (1; -4)	B’(. . . . . ; . . . . .)	B“(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C’(. . . . . ; . . . . .)	C“(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P’(. . . . . ; . . . . .)	P“(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto all’asse delle `x`: l’ascissa del generico punto P’ simmetrico di `P` è . . . . all’ascissa di `P`; l’ordinata del generico punto `P'`, è . . . . all’ordinata di `P`.

La simmetria rispetto all’asse x si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=0}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Nella simmetria rispetto all’asse delle y:

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto all’asse y si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=0}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica il programma in modo che gli assi di simmetria coincidano con le bisettrici dei quadranti, muovi il punto P e completa la seguente tabella:

punto	simm. bis. I quadrante	simm. bis. II quadrante
A (-7; 3)	A’(. . . . . ; . . . . .)	A“(. . . . . ; . . . . .)
B (5; -2)	B’(. . . . . ; . . . . .)	B“(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C’(. . . . . ; . . . . .)	C“(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P’(. . . . . ; . . . . .)	P“(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante: l’ascissa del generico punto `P'`, simmetrico di `P` è . . . . `P`; l’ordinata del generico punto `P'`, è . . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante:

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=-x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica la funzione test in modo che gli assi di simmetria siano le rette di equazioni: $x = 3$ e $y = 4$. Muovi il punto P e completa la seguente tabella:

punto	simm. x = 3	simm. bis. y = 4
A (-6; 3)	A'(. . . . . ; . . . . .)	A"(. . . . . ; . . . . .)
B (4; -2)	B'(. . . . . ; . . . . .)	B"(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C'(. . . . . ; . . . . .)	C"(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P'(. . . . . ; . . . . .)	P"(. . . . . ; . . . . .)

Nella simmetria rispetto alla retta x=3: l'ascissa del generico punto P', simmetrico di P è . . . . P; l'ordinata del generico punto P', è . . . .

La simmetria rispetto alla retta x=3 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=3}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta x=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=k}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . .

. . . .

Nella simmetria rispetto alla retta y=4

. . . .

. . . .

La simmetria rispetto alla retta y=4 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=4}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta y=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=k}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . .

. . . .

Riassumendo

- Certe simmetrie assiali possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.
  - $\sigma_{y=0}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
  - $\sigma_{x=0}\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
  - $\sigma_{y=x}\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
  - $\sigma_{y=-x}\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$
  - $\sigma_{x=k}\begin{cases} x' = -x+2k \\ y' = y \end{cases}$
  - $\sigma_{y=k}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y+2k \end{cases}$

Prova tu

Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una simmetria assiale (s.a.) è

2. In una s.a. figure corrispondenti sono
3. In una s.a.:
   a) sono punti uniti
   b) sono rette unite
   c) sono segmenti uniti
   d) esiste una retta formata da tutti punti uniti, è:
4. I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria ...
5. Assi di simmetria...
   a) il cerchio ha
   b) il rettangolo ha
   c) il rombo ha
   d) il triangolo isoscele ha
   e) il trapezio isoscele ha
   f) Un parallelogramma che non sia rombo o rettangolo
6. Le equazioni della s.a.
   a) rispetto all'asse x
   b) rispetto all'asse y
   c) rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
   d) rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante

5.4 Rotazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una rotazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una rotazione.
3. Cosa sono le rotazione di un poligono regolare.
4. Cosa dice l'algebra sulle rotazioni.

5.4.1 Definizione

Una rotazione rispetto a un centro `O` è una trasformazione che fa ruotare attorno a `O`, ogni punto del piano di uno stesso angolo,

Una rotazione è determinata dal centro e dall'angolo.

La funzione principale è quella che dato un *punto*, un *centro* e un *angolo* costruisce la rotazione del punto. Per cui:

```
p_1 = RuotaPunto(punto, centro, angolo)
```

Ovviamente `punto`, `centro` e `angolo` dovranno essere rispettivamente il punto da trasformare, il centro di rotazione e l'angolo di rotazione creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al punto immagine di `p_0` nella rotazione.

La funzione `RuotaPunto(punto, centro, ang)` dovrà:

1. creare una semiretta invisibile passante per `centro` e `p_0`;
2. su questa semiretta riportare l'angolo;
3. intersecare questa semiretta con una circonferenza centrata in `centro` e passante per `p_0`;
4. dare come risultato questa intersezione.

Una possibile soluzione:

```
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome `rota01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# Rotazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
```

```
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e il suo punto ruotato
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A\'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve corrispondere al punto `A` nella rotazione. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle rotazioni.

5.4.2 Proprietà

Cambia l'angolo di rotazione, cosa avviene quando è di 360°?

. . . .

Quando l'angolo di rotazione è un multiplo di 360° la rotazione diventa una particolare trasformazione: l'*identità*.

Costruisci ora un nuovo punto `B` e `B'`, il suo trasformato nella rotazione. Poi crea i segmenti `AB` e `A'B'` e visualizzane la misura. Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB`. Prova a dimostrarla.

. . . .
. . . .
. . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo simmetrico `P'`:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color=\'olive drab\', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color=\'olive drab\', name="P\'")
```

Muovi il punto `P`, cosa osservi?

. . . .

Costruisci un nuovo punto `C` e `C'`, costruisci il poligono `ABC`, e il poligono `A'B'C'`. Cosa si può concludere circa i triangoli `ABC` e `A'B'C'`?

. . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo `ABC` e del suo trasformato `A'B'C'`?

. . . .

Riassumendo

- La rotazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La rotazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo ruotato appartiene al ruotato del segmento.
- Il programma completo:

  ```
  # Rotazioni: proprieta'

  # lettura delle librerie
  ```

```
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# # Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e A'
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A\'")

# Punto B e B'
b_0 = ig.Point(7, 3, width=6, name="B")
b_1 = ruotapunto(b_0, centro, angolo, width=6, name="B\'")

# I segmenti AB, A'B' e le loro misure
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A\'B\' = {}", a1b1.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color=\'olive drab\', name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6,
                 color=\'olive drab\', name="P\'")

# Punto C, C', i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(-1, 1, width=6, name="B")
c_1 = ruotapunto(c_0, centro, angolo, width=6, name="C\'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4, color='navy', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4, color='navy', intcolor='gold')
```

```
# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

5.4.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvalo con il nome: `rota02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs)` che restituisce il corrispondente di un punto nella rotazione. Questa volta fa le linee di costruzione invisibili.

Quali sono gli elementi uniti di una rotazione?

. . . .

. . . .

Riassumendo

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una rotazione sono elementi uniti:
  - il punto . . . .
  - le circonferenze . . . .

5.4.4 Equazioni di alcune rotazioni

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `rota03_equazioni.py`. Scrivi la solita funzione `ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs)`.

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- il centro di rotazione nell'origine degli assi;
- l'angolo di rotazione di 90°;
- un punto `P` e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P'` e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto `P` in varie posizioni e completa la seguente tabella:

punto P	punto P'
A (-4; 3)	A'(. . . . . ; . . . . .)
B (1; -4)	B'(. . . . . ; . . . . .)
C (. . ; . .)	C'(. . . . . ; . . . . .)
P (x; y)	P'(. . . . . ; . . . . .)

Nella rotazione di 90° con centro nell'origine degli assi: l'ascissa del generico punto `P'` è . . . . ; l'ordinata del generico punto `P'`, è . . . .

La rotazione di 90° con centro nell'origine si può tradurre nel sistema di equazioni: $\rho_{90}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In modo analogo esplora le rotazioni di 180°, 270° e 360°.

. . . .

. . . .

Riassumendo

- il programma per studiare le rotazioni di 90° può essere fatto così:

```
# Rotazioni: equazioni della rotazione

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, visible=False)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(visible=False)
    circ = ig.Circle(centro, punto, visible=False)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(0, 0, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 12, visible=False), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto P e P' e le loro coordinate
p_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6, name="P\'")
ig.VarText(-7, -11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(-7, -12, "P\' = {}", p_1.coords())

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

- Certe rotazioni possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.

  - $\rho_{90} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{180} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{270} \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

$\rho_{360}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Prova tu
Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una rotazione è
2. In una rotazione figure corrispondenti sono
3. In una rotazione:
   a) sono punti uniti
   b) sono circonferenze unite
4. Le equazioni di alcune rotazioni sono: