MATEMATICA C^3

MATEMATICA DOLCE 1

Testo per il primo biennio
della Scuola Secondaria di II grado

Matematicamente.it

2^A Edizione - 2015

Matematica C^3– Matematica dolce 1
Copyright © 2015 Matematicamente.it

COORDINATORI DEL PROGETTO Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini, Daniele Zambelli.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Ubaldo Pernigo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano, Daniele Zambelli.

HANNO COLLABORATO Laura Todisco, Michela Todeschi, Nicola De Rosa, Paolo Baggiani, Luca Tedesco, Vittorio Patriarca, Francesco Speciale, Alessandro Paolino, Luciano Sarra, Maria Rosaria Agrello, Alberto Giuseppe Brudaglio, Lucia Rapella, Francesca Lorenzoni, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Anna Maria Cavallo, Elena Stante, Giuseppe Pipino, Silvia Monatti, Andrea Celia, Gemma Fiorito, Dorotea Jacona, Simone Rea, Nicoletta Passera, Pierluigi Cunti, Francesco Camia, Anna Rita Lorenzo, Alessandro Castelli, Piero Sbardellati, Luca Frangella, Raffaele Santoro, Alessandra Marrata, Mario Bochicchio, Angela Iaciofano, Luca Pieressa, Giovanni Quagnano.

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LaTeX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 5.0 del 27 giugno 2015.
Stampa seconda edizione: giugno 2015.
ISBN 9788896354681

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Matematica dolce 1 - seconda edizione.
Codice ISBN: 9788896354681
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2015.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

Prefazione v
Prefazione alla seconda edizione vii

I Geometria analitica 1

1 Nozioni fondamentali 3
1.1 Introduzione alla geometria razionale 4
1.1.1 Breve nota storica 4
1.1.2 Lo spazio fisico e la geometria 4
1.2 Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni 5
1.2.1 Nozioni di logica 6
1.2.2 Predicati e quantificatori 9
1.2.3 Implicazione 9
1.2.4 I teoremi 11
1.2.5 La deduzione 12
1.2.6 La dimostrazione 14
1.3 Gli enti fondamentali della geometria 15
1.3.1 Concetti primitivi 15
1.3.2 Postulati e assiomi 16
1.4 Prime definizioni 21
1.4.1 Semirette e segmenti 21
1.4.2 Semipiani e angoli 23
1.5 Confronto e operazioni tra segmenti e angoli 26
1.5.1 Premessa intuitiva 26
1.5.2 La congruenza 28
1.5.3 Confronto di segmenti 30
1.5.4 Confronto di angoli 30
1.5.5 Operazioni con i segmenti 30
1.5.6 Operazioni con gli angoli 33
1.5.7 Angoli particolari 34
1.5.8 Perpendicolari e altre definizioni 36
1.6 La misura 37
1.6.1 Misura di segmenti 37
1.6.2 Misura di angoli 40
1.7 Poligoni e poligonale 43
1.7.1 Poligono 44
1.8 Esercizi 48
1.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi 48

1.8.2 Risposte . . . 67

2 Congruenza nei triangoli **71**
2.1 Definizioni relative ai triangoli . . . 72
2.2 Primo e secondo criterio di congruenza dei triangoli . . . 73
2.3 Teoremi del triangolo isoscele . . . 76
2.4 Terzo criterio di congruenza dei triangoli . . . 79
2.5 Congruenza dei poligoni . . . 80
2.6 Esercizi . . . 82
2.6.1 Esercizi riepilogativi . . . 82
2.6.2 Risposte . . . 89

3 Trasformazioni geometriche piane **91**
3.1 Generalità sulle trasformazioni geometriche piane . . . 92
3.1.1 Introduzione e definizioni . . . 92
3.2 Le isometrie . . . 97
3.2.1 La simmetria centrale . . . 97
3.2.2 La simmetria assiale . . . 100
3.2.3 La traslazione . . . 105
3.2.4 La rotazione . . . 107
3.3 Composizione di isometrie . . . 108
3.3.1 Composizione di isometrie di tipo diverso . . . 108
3.3.2 Composizione di isometrie dello stesso tipo . . . 110
3.3.3 Isometria inversa . . . 112
3.4 Esercizi . . . 114
3.4.1 Esercizi riepilogativi . . . 114
3.4.2 Risposte . . . 126

4 Il piano cartesiano **129**
4.1 Un po' di storia . . . 129
4.2 Asse cartesiano . . . 129
4.3 Problemi sulla retta . . . 130
4.3.1 Convenzioni . . . 130
4.3.2 Lunghezza di un segmento . . . 131
4.3.3 Punto medio di un segmento . . . 132
4.4 Piano cartesiano . . . 132
4.5 Problemi nel piano cartesiano . . . 135
4.5.1 Punto medio di un segmento . . . 135
4.5.2 Lunghezza di un segmento . . . 135
4.5.3 Area sottesa a un segmento . . . 136
4.5.4 Area di un triangolo . . . 138
4.6 Esercizi . . . 141
4.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi . . . 141
4.6.2 Esercizi riepilogativi . . . 142

Prefazione

Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,
lui apprezza molto il progetto Matematica C^3
e penso che la tua versione gli possa far comodo
soprattutto per i primi anni del nostro serale.
Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del C^3 *normale,*
ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,
promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane
(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.
In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto C^3*,*
"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?
Buon lavoro,
Alice

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono. Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

Matematica C^3 Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica* C^3. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica* C^3.

Specificità di questa versione Questa versione modifica *Matematica* C^3 in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

Adozione Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

Obiettivi Il progetto *Matematica* C^3 ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli

Prefazione alla seconda edizione

Un anno di lavoro ha messo in luce alcuni errori che sono stati corretti, la nuova versione è scaricabile da:

`bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce_2ed`

e

`bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce_2ed`.

Ma, soprattutto, in questo anno è sorta una interessante opportunità: è stato finanziato un progetto per tradurre il testo in braille. Il lavoro sta procedendo e alcuni capitoli sono già stati tradotti. Quanto fatto lo si può trovare in:

`oer.veia.it`

Buon divertimento con la matematica!

Daniele Zambelli

Geometria analitica I

"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

1 Nozioni fondamentali

"Geometry lesson"
Foto di kevindooley
http://www.flickr.com/photos/pagedooley/2575606606/
Licenza: Creative Commons Attribution

1.1 Introduzione alla geometria razionale

1.1.1 Breve nota storica

La parola geometria deriva dal greco antico: γεωμετρία, composta da γεω (geo) che significa "terra" e da μετρία (metria) che significa "misura", tradotto alla lettera significa "misura della terra". Secondo una tradizione storica, durante il VI secolo a.C. alcuni matematici e pensatori greci (principalmente Talete e Pitagora) cominciarono a organizzare in maniera razionale (secondo il susseguirsi di ragionamenti logici) le conoscenze geometriche che egiziani e babilonesi avevano raggiunto nei secoli precedenti. Lo storico greco Erodoto, vissuto tra il 484 a.C. e il 425 a.C., racconta che a causa delle periodiche inondazioni del fiume Nilo gli egiziani erano costretti a ricostruire ogni anno i confini dei singoli possedimenti terrieri e in questo modo avevano sviluppato delle modalità tecniche per la misura della terra (γεωμετρία appunto).

Ritrovamenti più recenti di tavolette di creta del periodo babilonese incise con caratteri cuneiformi ci fanno ritenere che la cultura babilonese possedesse già delle sofisticate conoscenze geometriche. Di certo sappiamo che nel III secolo a.C. il matematico ellenico Euclide[1], direttore della grande biblioteca di Alessandria in Egitto, diede una struttura razionale alle conoscenze geometriche note sino ad allora scrivendo una delle più grandi opere della cultura occidentale, gli *Elementi* (in greco Στοιχεια). Questa grande opera è organizzata in 13 libri, di cui i primi sei riguardano la Geometria Piana, i successivi quattro trattano i rapporti tra grandezze e gli ultimi tre riguardano la Geometria Solida. Essa prese il posto di tutti i libri precedenti sulla geometria e servì come testo fondamentale nell'antichità e nel medioevo; è stata usata come libro scolastico di geometria fino ai nostri giorni. La sua considerazione presso i Romani fu modesta, ma fu grandissima presso i Bizantini e gli Arabi. Proprio questi ultimi la reintrodussero in Europa dopo la perdita medievale, grazie alla traduzione di Adelardo di Bath[2] (secolo XII).

Dal punto di vista della struttura logica, gli *Elementi* di Euclide sono organizzati a partire da cinque assiomi (nozioni comuni evidenti), cinque postulati (proposizioni che si richiede siano assunte come vere, senza dimostrazione) e 23 definizioni. L'opera di Euclide è rimasta nella nostra cultura l'unico punto di riferimento per lo studio della geometria, fino a quando, contestualmente allo studio dei fondamenti delle altre branche della matematica, i matematici cercarono di dare una base più rigorosa alla geometria di Euclide. Un'impostazione assiomatica più moderna venne data dal matematico tedesco David Hilbert[3] nel libro *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria) pubblicato nel 1899, nel quale la geometria veniva fondata su ben 21 assiomi.

1.1.2 Lo spazio fisico e la geometria

La geometria nasce come studio sistematico dello spazio fisico e delle forme che in esso si muovono. Lo spazio in cui ci muoviamo è per tutti una delle prime esperienze che facciamo fin dai primi mesi di vita. I nostri sensi determinano le sensazioni che ci permettono di riconoscere le forme degli oggetti e i loro movimenti. Tuttavia, le nozioni geometriche come quelle di punto, retta, rettangolo, cubo, sfera … non trovano un perfetto riscontro nella realtà fisica. Nello spazio fisico non esistono, infatti, punti e rette come li descrive la geometria,

[1] vissuto molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.).
[2] traduttore, filosofo e matematico britannico (1080 - 1152).
[3] (1862 - 1943).

né figure a due sole dimensioni, né cubi o sfere perfette. La geometria si propone quindi di fornire un "modello" ideale della realtà fisica, sia per le forme degli oggetti sia per le proprietà dello spazio.

Fino alla seconda metà dell'Ottocento, matematici e filosofi sono stati sostanzialmente d'accordo nel considerare la geometria come la scienza che descriveva razionalmente le proprietà dello spazio fisico. Galileo Galilei[4] ne *Il saggiatore* (1623) scriveva:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, i matematici si sono invece convinti che la geometria non descrive esattamente lo spazio fisico, che sono possibili più geometrie ugualmente vere dal punto di vista logico e matematico. Lo studio matematico della geometria si è allora differenziato dallo studio dello spazio fisico e da quello dello spazio psicologico percepito dall'uomo con i suoi sensi. I matematici hanno accettato l'esistenza di diverse geometrie matematicamente possibili, si sono accontentati di costruire dei modelli astratti e hanno lasciato ai fisici la "scelta" del modello che meglio si adatta a descrivere i fenomeni fisici dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. La geometria allora è diventata una branca della matematica alla quale i matematici hanno cercato di dare un fondamento esclusivamente logico, indipendente dalle esperienze fisiche.

Il legame tra fisica e matematica non si è mai rotto. Con il passare dei secoli, ci si è resi sempre più conto di quanto la "geometria" del mondo fisico sia molto complessa e di come alcune nuove geometrie riescono a descrivere meglio fenomeni che con la vecchia geometria di Euclide non si riusciva a spiegare.

1.2 Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

La geometria, sin dai tempi di Euclide, è stata organizzata assiomaticamente, partendo cioè dalle fondamenta. Nella matematica queste fondamenta sono costituite dai concetti primitivi e dagli assiomi. Gli *enti primitivi* sono le nozioni che si decide di non definire. Ci si può rendere facilmente conto, infatti, che non tutto può essere definito, poiché in ogni nozione che si definisce si deve fare ricorso ad altre nozioni, le quali a loro volta devono essere definite per mezzo di altre nozioni e così via all'indietro senza che teoricamente questo processo abbia mai una fine, arrivando necessariamente ad alcune nozioni così primitive da non poter essere definite con altre nozioni più elementari. A queste nozioni non è né necessario né possibile associare alcun significato esplicito; è invece fondamentale esprimere le loro proprietà esclusivamente attraverso *assiomi*, cioè attraverso proprietà non dimostrabili che indicano però come gli enti primitivi devono e possono essere usati. Il matematico Hilbert utilizza tre enti primitivi – punto, linea e piano – e 21 assiomi. A partire dagli enti primitivi si fanno derivare tutte le *definizioni* degli enti geometrici.

[4]fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano (1564 - 1642).

1.2.1 Nozioni di logica

Assumiamo come "primitivo" il concetto base di proposizione (o "giudizio" secondo la terminologia del grande filosofo greco Aristotele[5]): chiamiamo *proposizione* una frase (affermativa o negativa) a cui abbia senso associare un valore di verità, sia esso *vero* (V) oppure *falso* (F).

Per esempio, sono proposizioni logiche affermazioni del tipo «Una retta ha infiniti punti», «$2+3=10$». Non sono proposizioni logiche le frasi «1 000 è un numero grande», «il quadrato è semplice». Mentre la prima frase esprime un'affermazione vera e la seconda un'affermazione falsa, la terza e la quarta esprimono affermazioni non valutabili oggettivamente pertanto di queste ultime non si può dire se sono vere o false.

La logica delle proposizioni si fonda sui seguenti tre principi della logica aristotelica:

- il *principio di identità*: ogni oggetto è identico a se stesso e a nessun altro oggetto;
- il *principio di non contraddizione*: una stessa proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa;
- il *principio del terzo escluso*: una proposizione può essere solo vera o falsa, non può assumere un diverso valore di verità.

Il corpo della geometria, come di qualunque altra teoria matematica, è costituito da *proposizioni*, cioè da affermazioni che riguardano gli enti geometrici e che sono vere o false. Le proposizioni possono essere semplici affermazioni (*proposizioni atomiche*) oppure possono essere ottenute da una o più proposizioni elementari legate tra di loro attraverso connettivi logici (elementi linguistici del tipo "non", "e", "oppure", "o … o", "quindi", "se … allora", "se e solo se"). In questo caso si parla di *proposizioni composte* o molecolari Per esempio, la proposizione «un triangolo ha tre lati e ha tre angoli» è composta dalle proposizioni «un triangolo ha tre lati» e «un triangolo ha tre angoli» unite dal connettivo "e".

La congiunzione di due proposizioni si ottiene con il connettivo "e" (*et*, *and*, $\wedge$): la proposizione r ottenuta dalla congiunzione delle proposizioni p e q, in simboli può essere scritta come

$$\boxed{r = p \wedge q}$$

ed è vera se entrambe le proposizioni p e q sono contestualmente vere, mentre è falsa quando anche una sola delle due proposizioni è falsa. Per esempio, «ho avuto 7 in italiano e matematica» è un'affermazione vera solo quando ho avuto 7 in entrambe le materie e falsa in tutti gli altri casi.

Per esprimere in maniera sintetica tutte le possibilità del valore di verità di una proposizione composta, si usa una tabella a doppia entrata, detta *tavola di verità*, che per la congiunzione logica è la seguente

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

[5](384 o 383 a.C. - 322 a.C.).

La disgiunzione (inclusiva) di due proposizioni si ottiene con il connettivo "o" (*vel*, *or*, $\vee$): la proposizione s ottenuta dalla disgiunzione di due proposizioni p e q, in simboli

$$\boxed{s = p \vee q}$$

è vera quando almeno una delle due proposizioni è vera ed è falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La negazione di una proposizione si ottiene con il connettivo "non" (*non*, *not*, $\neg$), un operatore che, a differenza dei precedenti, non lega più proposizioni ma agisce su un'unica proposizione (per questo si dice che è un operatore unario, in analogia all'operazione insiemistica di complementazione). La proposizione n data dalla negazione di una proposizione p si indica con il simbolo

$$\boxed{n = \neg p}$$

ed è vera se p è falsa, viceversa è falsa se p è vera.

La doppia negazione equivale ad un'affermazione, cioè $\neg(\neg p)$ è equivalente a p. La tavola di verità è la seguente:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

La disgiunzione esclusiva di due proposizioni si ottiene con il connettivo (o congiunzione) "o … o" (*aut*, *xor*, $\veebar$): la proposizione t ottenuta dalla disgiunzione esclusiva di due proposizioni p e q, in simboli

$$\boxed{t = p \veebar q}$$

è vera quando solo una delle due proposizioni è vera ed è falsa quando le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false. Per esempio, nell'affermazione «oggi il Milan vince o pareggia» la congiunzione "o" ha valore esclusivo.

La disgiunzione esclusiva $\veebar$ a volte non viene messa tra gli operatori logici fondamentali perché è esprimibile attraverso gli altri tre operatori presentati finora.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio 1.1. Date le seguenti proposizioni p = «un triangolo ha tre lati» (Vera), q = «un triangolo ha tre vertici» (Vera), r = «un triangolo ha quattro angoli» (Falsa), s = «un triangolo ha tre dimensioni» (Falsa), allora:

- $p \wedge q$ è vera, $q \wedge r$ è falsa, $r \wedge s$ è falsa;
- $p \vee q$ è vera, $q \vee r$ è vera, $r \vee s$ è falsa;
- $p \veebar q$ è falsa, $q \veebar r$ è vera, $r \veebar s$ è falsa.

È piuttosto semplice capire il meccanismo della negazione se applicata a proposizioni atomiche, spesso è meno intuitivo il valore di verità della negazione di una proposizione più complessa. Ad esempio, la negazione di $p \wedge q$ non è $\neg p \wedge \neg q$ bensì $\neg p \vee \neg q$, mentre la negazione di $p \vee q$ è $\neg p \wedge \neg q$ e non $\neg p \vee \neg q$. In formule:

$$\boxed{\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q) \qquad \text{e} \qquad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q).}$$

Per esempio, «non è vero che Marco e Luca sono stati bocciati» può voler dire che entrambi non sono stati bocciati o solo uno di loro non è stato bocciato.

Queste uguaglianze prendono il nome di *leggi di De Morgan*[6], e la loro verifica può essere effettuata con la seguente tavola di verità:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	V

Come per le operazioni aritmetiche anche per gli operatori logici è possibile analizzarne le proprietà. Ne indichiamo qualcuna a titolo di esempio:

- $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ proprietà *associativa* della congiunzione;
- $p \wedge q = q \wedge p$ proprietà *commutativa* della congiunzione;
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ proprietà *distributiva* della congiunzione rispetto alla disgiunzione.

Una proposizione che è sempre vera indipendentemente dalla verità degli elementi che lo compongono è detta *tautologia*. Una proposizione che è sempre falsa indipendentemente dalla verità dei suoi elementi è invece detta *contraddizione*.

Per esempio, la proposizione composta $p \wedge \neg p$ è una contraddizione in quanto è sempre falsa, mentre la proposizione composta $p \vee \neg p$ è una tautologia poiché è sempre vera.

✍ *Esercizi proposti:* 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11

[6] dal nome del matematico e logico britannico Augustuts De Morgan (1806 - 1871).

1.2.2 Predicati e quantificatori

Una proposizione che fa riferimento a una proprietà o caratteristica di alcuni elementi di un insieme si chiama *predicato* (o *enunciato*). Le frasi formate da un predicato che ha alcuni argomenti incogniti si dicono *enunciati aperti*. Per esempio, $p =$ «x è un numero intero maggiore di 10» è un enunciato aperto.

Consideriamo ora le seguenti affermazioni:

- «tutti gli uomini sono mortali» si riferisce a un qualsiasi essere umano;
- «tutti i multipli di 6 sono anche multipli di 2» è vera per tutti i numeri multipli di 6;
- «ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo».

I predicati precedenti non riguardano un elemento specifico ma una certa quantità di elementi. I termini "tutti" e "ogni", detti *quantificatori universali*, indicano che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un certo insieme. In logica matematica per indicare il quantificatore universale si usa il simbolo $\forall$, che si legge "per ogni".

Vediamo ora i seguenti predicati:

- «esiste un numero che elevato al quadrato dà 16»;
- «alcuni numeri pari sono anche multipli di 3».

Queste affermazioni esprimono proprietà che sono vere almeno per un elemento dell'insieme di riferimento: la prima frase è vera per i numeri $+4$ e -4, la seconda frase è vera per i numeri $6, 12, 18, \ldots$ I termini "c'è almeno", "alcuni", "esiste almeno uno" si dicono *quantificatori esistenziali* ed in logica matematica si indicano con il simbolo $\exists$, che si legge "esiste".

Bisogna prestare particolare attenzione quando si negano frasi in cui compaiono i quantificatori. Per esempio la negazione di «tutti i gatti fanno le fusa» non è «nessun gatto fa le fusa» bensì «non tutti i gatti fanno le fusa» che si può esprimere anche con il quantificatore esistenziale «C'è almeno un gatto che non fa le fusa». La negazione della frase «l'anno scorso siamo stati tutti promossi» non è «l'anno scorso siamo stati tutti bocciati» ma «l'anno scorso non siamo stati tutti promossi» ovvero «l'anno scorso c'è stato almeno uno di noi che non è stato promosso». La negazione della proposizione $p =$ «tutti i quadrati hanno due diagonali» è la proposizione $\neg p =$ «non tutti i quadrati hanno due diagonali». Il linguaggio comune ci potrebbe portare a considerare come negazione di p la proposizione «nessun quadrato ha due diagonali», in realtà per avere la negazione della proposizione p basta che esista almeno un quadrato che non ha due diagonali.

✍ *Esercizi proposti:* 1.12, 1.13, 1.14

1.2.3 Implicazione

Nel linguaggio matematico sono comuni proposizioni del tipo «Se p allora q». Ad esempio «se un numero è multiplo di 12 allora è multiplo di 3». La frase precedente può essere espressa dicendo «essere multiplo di 12 *implica* essere multiplo di 3».

In logica frasi del tipo «se p allora q» vengono tradotte utilizzando l'operatore $\Rightarrow$ detto *implicazione*. La scrittura «se p allora q» si traduce quindi con la scrittura

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

che si legge "p implica q".

La proposizione p è detta *antecedente*, (o *ipotesi*) e la proposizione q è detta *conseguente* (o *tesi*). Il significato logico della proposizione $p \Rightarrow q$ è che «tutte le volte che la proposizione p è vera allora risulta vera anche la proposizione q». Ovvero non si specifica il caso in cui p sia falsa.

Per esempio, l'affermazione «se c'è il sole andiamo al mare» è falsa solo quando c'è il sole e non andiamo al mare; l'affermazione, infatti, non dice nulla se il sole non c'è: quindi se non c'è il sole si è liberi di andare o non andare al mare. Anche l'affermazione «se studi sarai promosso» dice solo che se studi conseguirai la promozione, non dice nulla per il caso in cui tu non studi: in questo caso, infatti, potresti essere ugualmente promosso.

La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uno degli errori logici più comuni è quello di pensare che da $p \Rightarrow q$ si possa dedurre $\neg p \Rightarrow \neg q$. Ad esempio dall'affermazione «se piove prendo l'ombrello» qualcuno può pensare che si possa dedurre «se non piove non prendo l'ombrello». Riflettendoci, si intuisce che le due frasi non sono affatto consequenziali. Basta pensare che chi pronuncia la prima frase sta affermando che tutte le volte che piove prende naturalmente l'ombrello, ma non esclude la possibilità di prenderlo anche quando non piove (in effetti è saggio farlo se il cielo è coperto da nuvoloni neri!).

Così la frase (a) «se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3» non vuol dire (b) «se x non è multiplo di 12 allora non è multiplo di 3». Infatti la (a) è vera, mentre la (b) è falsa (si pensi ad esempio al numero 6 che non è multiplo di 12 ma è comunque multiplo di 3).

Ciò che ragionevolmente si può dedurre da $p \Rightarrow q$ è $\neg q \Rightarrow \neg p$. Ad esempio, da «se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3» si può dedurre «se x non è multiplo di 3 allora non è multiplo di 12».

Data l'implicazione $p \Rightarrow q$, la proposizione p viene detta *condizione sufficiente* per q. Mentre la proposizione q viene detta *condizione necessaria* per p. Per esempio, «studiare» è condizione necessaria per «essere promossi» ma non è sufficiente. Quest'ultima espressione fa appunto riferimento al fatto che da $p \Rightarrow q$ si può dedurre $\neg q \Rightarrow \neg p$. Ossia q è necessaria per p in quanto se non è vera q non è vera neanche p.

Calcoliamo la tavola di verità di $p \Rightarrow q$ e di $\neg q \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Come si vede, le due proposizioni hanno gli stessi valori di verità.

In generale, data un'implicazione $p \Rightarrow q$ (*proposizione diretta*):

- l'implicazione $\neg p \Rightarrow \neg q$ si dice *contraria* di $p \Rightarrow q$;

- l'implicazione $q \Rightarrow p$ si dice *inversa* di $p \Rightarrow q$;
- l'implicazione $\neg q \Rightarrow \neg p$ si dice *contronominale* (o *controinversa*) di $p \Rightarrow q$.

La doppia implicazione o *equivalenza logica* di due proposizioni p e q dà luogo a una proposizione che in simboli si rappresenta con

$$\boxed{p \Leftrightarrow q}$$

(leggasi "p se e solo se q") che è vera solo se p e q sono entrambe vere o entrambe false. La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

L'operatore $\Leftrightarrow$ è detto *doppia implicazione* perché se vale $p \Leftrightarrow q$ allora valgono sia $p \Rightarrow q$ che $q \Rightarrow p$ (e viceversa). Nella tabella precedente, infatti, è stata messa in evidenza l'equivalenza logica tra la proposizione $p \Leftrightarrow q$ e la proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

L'equivalenza logica è un relazione di equivalenza, infatti verifica le seguenti proprietà:

- $p \Leftrightarrow p$: è *riflessiva*;
- se $p \Leftrightarrow q$ allora vale anche $q \Leftrightarrow p$: è *simmetrica*;
- se $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r$ allora vale anche $p \Leftrightarrow r$: è *transitiva*.

In matematica si usa spesso l'espressione «p è *condizione necessaria e sufficiente* per q». Per esempio «condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia divisibile per 3 è che la somma delle sue cifre sia divisibile per 3». Il significato della frase è che «p è sufficiente per q» e inoltre «p è necessario per q». In altre parole significa che $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Nel caso dell'esempio vale quindi sia l'implicazione diretta, «se un numero è divisibile per 3 allora la somma delle sue cifre è divisibile per 3», che quella inversa, «se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3 allora il numero stesso è divisibile per 3».

✍ *Esercizi proposti:* 1.15, 1.16, 1.17

1.2.4 I teoremi

Un *teorema* è una proposizione composta del tipo $I \Rightarrow T$, cioè una implicazione tra due proposizioni, dette *ipotesi* (I) e *tesi* (T).

Dimostrare un teorema significa fare un ragionamento logico che permetta di concludere che la tesi è vera avendo supposto che l'ipotesi sia vera. Nel caso in cui un teorema sia dimostrabile all'interno di una teoria, si dice che è un teorema valido.

In riferimento alla terminologia usata quando abbiamo parlato dell'implicazione, chiamiamo $I \Rightarrow T$ *teorema diretto*, $T \Rightarrow I$ *teorema inverso*, $\neg I \Rightarrow \neg T$ *teorema contrario* e $\neg T \Rightarrow \neg I$ *teorema controinverso*. Ribadiamo l'equivalenza tra il teorema diretto ed il teorema controinverso, nonché l'equivalenza tra il teorema contrario ed il teorema inverso, mentre in generale la validità del teorema diretto non implica la validità del teorema inverso, e viceversa.

Nel caso particolare in cui vale sia $I \Rightarrow T$ che $T \Rightarrow I$, si scrive $I \Leftrightarrow T$ e si dice che ipotesi e tesi sono *logicamente equivalenti*. Più precisamente, nel linguaggio specifico delle scienze che fanno uso della logica, e quindi anche nel linguaggio della Geometria Razionale, se vale $I \Rightarrow T$, si dice che «I è condizione sufficiente per T» e anche che «T è condizione necessaria per I»; se in particolare vale $I \Leftrightarrow T$, si usa dire che «I è condizione necessaria e sufficiente per T».

In generale incontreremo molti teoremi che vengono denominati genericamente *proposizioni*, perché il nome di "teorema" viene tradizionalmente attribuito solo ai teoremi più importanti. Inoltre si usa chiamare *lemma* una proposizione che non ha una grande importanza di per sé, ma che è particolarmente utile per la dimostrazione di altri teoremi. Si chiama invece *corollario* un teorema importante che è una conseguenza immediata di un altro teorema.

Così come abbiamo visto che non è possibile definire tutto e che quindi bisogna assumere alcune nozioni come primitive, analogamente non è possibile dimostrare tutte le proposizioni di una teoria. Alcune proposizioni devono essere assunte come vere e costituiscono la base della dimostrazione dei teoremi; queste proposizioni si chiamano *postulati* o *assiomi*. Risulta evidente che cambiando sia pure uno solo degli assiomi cambiano anche i teoremi dimostrabili e quindi la teoria.

In generale, come abbiamo detto, dato un teorema (diretto) del tipo $p \Rightarrow q$, la sua validità non garantisce la validità del teorema inverso $q \Rightarrow p$. Questo però può succedere. In ogni caso, se sono vere $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, le due proposizioni sono *logicamente equivalenti*, ossia $p \Leftrightarrow q$.

Esempio 1.2. Teorema: «un triangolo che ha i lati uguali ha anche gli angoli uguali».

- Il teorema si può schematizzare nel seguente modo: p = «un triangolo ha i lati uguali»; q = «un triangolo ha gli angoli uguali». Il teorema enunciato è $p \Rightarrow q$.
- Il teorema inverso è $q \Rightarrow p$, cioè «un triangolo che ha gli angoli uguali ha anche i lati uguali».

In tale esempio sono validi sia il teorema diretto che quello inverso. Il fatto che uno dei due teoremi sia chiamato diretto e l'altro inverso è un fatto soggettivo, che può dipendere semplicemente dall'ordine con cui si enunciano i teoremi. Il teorema precedente si può esporre allora nel seguente modo:

Teorema: «un triangolo ha i lati uguali se e solo se ha gli angoli uguali».

1.2.5 La deduzione

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato in modo generico di implicazione, deduzione, dimostrazione. Facciamo ora un po' di chiarezza sull'uso di questi termini. L'*implicazione* è un'operazione tra proposizioni, mentre la *deduzione* è il ragionamento logico che costituisce la base della dimostrazione di un teorema. Per l'implicazione materiale si usa il simbolo $\rightarrow$ mentre per la deduzione logica si usa il simbolo $\Rightarrow$.

La frase «se 5 è un numero pari, allora il triangolo ha 4 lati» è perfettamente valida dal punto di vista logico ed anzi è vera, poiché la premessa (proposizione antecedente) è falsa, per cui l'implicazione è vera anche se la proposizione conseguente è falsa (si tenga presente la tavola di verità di $p \Rightarrow q$). Si noti però che la definizione di implicazione ha senso solamente se la premessa è vera, il suo ampliamento al caso in cui la premessa è falsa è motivata da ragioni di completezza della trattazione. Bisogna quindi fare attenzione ad usare l'implicazione logica quando la premessa è falsa. Teniamo comunque conto che se p è falsa allora $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ cioè $p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$ è vera. Ma $q \wedge \neg q$ è una contraddizione, quindi una premessa falsa implica sempre una contraddizione.

In realtà, la *dimostrazione* di un teorema non è la verifica della validità dell'implicazione, anzi è un procedimento che fa uso della validità dell'implicazione stessa. In un teorema si parte dal supporre vera l'ipotesi e si dimostra, mediante un ragionamento logico che si basa sugli assiomi e su altri teoremi già dimostrati in precedenza, che anche la tesi è vera (questo se si segue il *procedimento diretto*). Se si segue invece il *procedimento indiretto* (o *per assurdo*), si suppone che la tesi sia falsa e, sempre mediante ragionamento logico basato su assiomi e altri teoremi già dimostrati, si arriva ad affermare che l'ipotesi è falsa (cosa che non si deve accettare).

Le principali regole del corretto ragionamento seguono alcuni schemi particolari (detti *sillogismi*, dal nome attribuito ad essi da Aristotele). Presentiamo qui i quattro principali sillogismi: il *modus ponens*, il *modus tollens*, il *sillogismo disgiuntivo* e il *sillogismo ipotetico*.

	Modus ponens	Modus tollens	Sillogismo disgiuntivo		Sillogismo ipotetico
1ª premessa	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
2ª premessa	p	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q$	$q \Rightarrow r$
conclusione	q	$\neg p$	q	p	$p \Rightarrow r$

Suggeriamo una lettura degli schemi appena esposti:

- *modus ponens*: se sappiamo che p implica q e che p è vera, allora possiamo concludere che anche q è vera (metodo diretto di dimostrazione);
- *modus tollens*: se sappiamo che p implica q e che q è falsa, allora possiamo concludere che anche p è falsa (metodo indiretto di dimostrazione);
- *sillogismo disgiuntivo*: se sappiamo che, tra p e q, almeno una delle due è vera, e sappiamo che p (rispettivamente q) è falsa, allora possiamo concludere che q (rispettivamente p) è vera;
- *sillogismo ipotetico*: se sappiamo che p implica q e che q implica r, allora possiamo concludere che p implica r (proprietà transitiva dell'implicazione).

Altre regole (note come i *giudizi* di Aristotele) fanno uso dei predicati e dei quantificatori. Riprendiamo un esempio precedente traducendo la frase «tutti i quadrati hanno due diagonali» e la sua negazione «non tutti i quadrati hanno due diagonali» in formule che fanno uso anche del linguaggio degli insiemi. Se chiamiamo Q l'insieme di tutti i quadrati e P la proprietà dell'avere due diagonali, se x è il generico quadrato (elemento di Q), $P(x)$ è il predicato «x gode della proprietà P», cioè «x ha due diagonali», la frase «tutti i quadrati hanno due diagonali» si traduce in simboli: $\forall x \in Q, P(x)$.

La sua negazione è: «esiste almeno un quadrato che non ha due diagonali», cioè che non gode della proprietà P, e si traduce in simboli così: $\exists x \in Q, \neg P(x)$. In quest'ultimo caso, la virgola può anche essere sostituita da una barra verticale "$|$" o da ":" e si legge "tale che".

Analogamente, una frase del tipo «esiste almeno un numero naturale che sia divisore di 10» può scriversi come: $\exists n \in \mathbb{N} \mid D(n)$, dove D è la proprietà dell'essere divisore di 10 e $D(n)$ significa che n verifica la proprietà D, cioè che n è un divisore di 10. La sua negazione è «nessun numero naturale è divisore di 10», ovvero «preso un qualsiasi numero naturale n, questo non gode della proprietà D», la traduzione in simboli di tale frase è: $\forall n \in \mathbb{N}, \neg D(n)$.

Mettiamo in tabella le quattro proposizioni, che corrispondono ai giudizi di Aristotele):

A: Giudizio universale affermativo	$\forall x \in Q, P(x)$ P è vera per ogni x	I: Giudizio particolare affermativo	$\exists n \in \mathbb{N} \mid D(n)$ D è vera per almeno un n
E: Giudizio universale negativo	$\forall n \in \mathbb{N}, \neg D(n)$ D è falsa per ogni n	O: Giudizio particolare negativo	$\exists x \in Q \mid \neg P(x)$ P è falsa per almeno un x

I quattro giudizi di Aristotele si possono rappresentare con gli insiemi di Venn (figura 1.1).

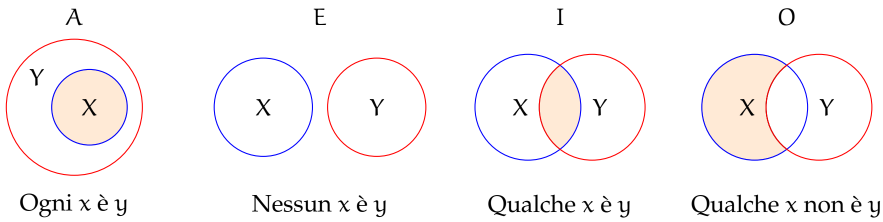


FIGURA 1.1: Rappresentazione con gli insiemi di Venn dei giudizi di Aristotele

1.2.6 La dimostrazione

Tenendo conto di quanto detto precedentemente, dimostrare che $I \Rightarrow T$ significa fare un ragionamento logico che permetta di concludere che la tesi T è vera avendo supposto che l'ipotesi I sia vera.

Quando attraverso un ragionamento logico, e cioè attraverso una catena di implicazioni del tipo $I \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow T$, si riesce a dedurre la verità di una proposizione T a partire dalla verità di una proposizione I. Si dice che si è data una *dimostrazione diretta* del teorema $I \Rightarrow T$ (attraverso le regole del modus ponens e del sillogismo ipotetico).

Un teorema può anche essere *dimostrato per assurdo*, o con metodo *indiretto*. Questo tipo di dimostrazione consiste nel partire dalla negazione di T e, attraverso una catena di implicazioni, arrivare alla negazione di I o, in generale, ad una contraddizione.

Esistono altri metodi di dimostrazione, di cui eventualmente si parlerà più diffusamente qualora si dovesse ricorrere ad essi. Per ora ci limitiamo a citarne un paio: *dimostrazione per induzione* e *dimostrazione mediante esempio* o *controesempio*.

La *dimostrazione per induzione* si usa in particolare quando vogliamo dimostrare una proprietà generale che vale per molte categorie di figure ma che non si può esprimere in maniera unica per tutte le categorie (ad esempio una proprietà che vale per tutti i poligoni ma che dipende dal numero dei lati, come l'estensione dei criteri di congruenza dei triangoli a poligoni di più lati).

Si usa invece un *esempio* quando bisogna dimostrare che una certa proprietà vale per almeno un oggetto del nostro studio o un *controesempio* per dimostrare che una proprietà non vale per tutti gli oggetti in esame.

Per fornire alcuni esempi di dimostrazione, avremmo bisogno di fissare prima i concetti di base e gli assiomi da cui partire, per cui rinviamo la questione al prossimo paragrafo.

Ma a cosa serve studiare la dimostrazione di un teorema? Perché non ci limitiamo ad elencare i teoremi? Per molte applicazioni basta in effetti conoscere il teorema e a volte anche soltanto la formula risolutiva. Tuttavia studiando le dimostrazioni si impara a dimostrare e quindi si impara a creare nuova matematica. Un altro importante vantaggio è che la dimostrazione spiega perché il teorema è vero e permette di scoprire la struttura nascosta nelle definizioni e nei teoremi.

Quando si studia una dimostrazione non bisogna limitarsi a leggerla e a impararla a memoria, occorre leggerla attivamente, ponendo attenzione su cosa si fa e cercando di anticipare i passaggi. Se un passaggio non è chiaro bisogna prima tornare indietro per capire come ci si è arrivati e quindi cercare di capire il motivo per cui l'autore ha messo quel passaggio. In generale, una dimostrazione va letta più volte smettendo solo quando la si è compresa a fondo.

✍ *Esercizi proposti:* 1.35, 1.18

1.3 Gli enti fondamentali della geometria

In questo paragrafo diamo un cenno del sistema assiomatico della geometria razionale facendo riferimento principalmente all'impostazione assiomatica di Hilbert.

1.3.1 Concetti primitivi

Sono concetti primitivi per la geometria il *punto*, la *retta* e il *piano*. Di essi non si dà una definizione e costituiscono la base per definire tutti gli altri enti della geometria.

Oltre a questi tre enti primitivi occorre poi assumere l'esistenza di tre relazioni primitive tra gli enti geometrici: *giacere su*, *stare fra*, *essere congruente a*. Queste relazioni permettono di stabilire dei legami tra gli enti geometrici, per esempio: «un punto giace su una retta», «un punto sta fra altri due punti», «un segmento è congruente a un altro segmento», ...

Esiste una simbologia convenzionale, condivisa dagli studiosi, per indicare questi enti:

- per indicare un punto usiamo una lettera maiuscola: $A, B, C, \ldots$;
- per indicare una retta usiamo una lettera minuscola: $a, b, c, \ldots$;
- per indicare un piano usiamo una lettera greca: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Ricordiamo l'alfabeto greco:

- lettere greche minuscole: α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), ζ (zeta), η (eta), ϑ (theta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mi), ν (ni), ξ (xi), o (omicron), π (pi o pi greca), ρ (rho), σ (sigma), τ (tau), υ (ipsilon), φ (fi), χ (chi), ψ (psi), ω (omega);
- lettere greche maiuscole: A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ, M, N, Ξ, O, Π, Σ, T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.

Degli enti fondamentali Euclide aveva dato le seguenti definizioni:

- *punto* è ciò che non ha parti;
- *linea* è lunghezza senza larghezza;
- *superficie piana* è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.

Le definizioni in questo caso sono utili per farci un'idea intuitiva degli enti stessi. Tuttavia, come è già stato detto in precedenza, e da quanto si intuisce osservando le definizioni euclidee, per definire il punto si utilizza la nozione di parte: "punto è ciò che non ha parti". Occorrerebbe quindi definire che cosa è una "parte". Ma per definire un parte avremmo bisogno di altre nozioni di partenza, in un procedimento senza fine. Per questo motivo nell'impostazione assiomatica moderna si preferisce non dare la definizione dei tre enti primitivi e "definirli implicitamente" attraverso le proprietà di cui godono. Ciò significa che si preferisce dare maggiore importanza a come essi si comportano e cosa possiamo fare con essi, piuttosto che descrivere cosa sono. Dal punto di vista della rappresentazione grafica si usano le convenzioni come nella figura 1.2:

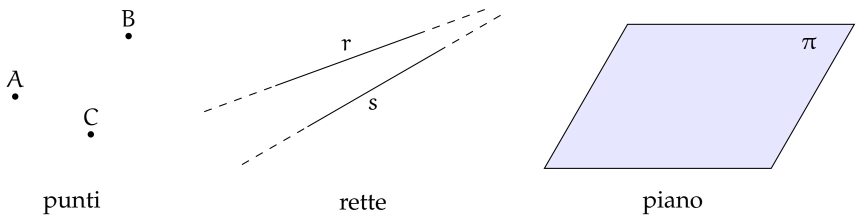


FIGURA 1.2: Rappresentazione grafica degli enti fondamentali della geometria

✍ *Esercizio proposto:* 1.32

1.3.2 Postulati e assiomi

Un *postulato*, o *assioma*, è una proposizione, spesso intuitiva, evidente ma non dimostrata, ammessa come vera in quanto necessaria per costruire poi le dimostrazioni dei teoremi.

Euclide nei suoi *Elementi* aveva individuato un gruppo di cinque assiomi, che riguardano le nozioni comuni e quindi non fanno riferimento alla geometria, e un gruppo di cinque postulati che riguardano proprietà geometriche.

Assiomi di Euclide

I. Cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro.

II. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.

III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

IV. Cose che coincidono fra loro sono uguali.

V. Il tutto è maggiore della parte.

Postulati di Euclide

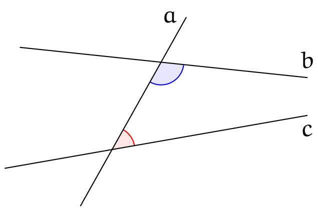
I. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. Un segmento si possa prolungare indefinitamente in linea retta.

III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.

IV. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

V. Se una retta che taglia due rette forma dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando illimitatamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.



Nella figura a lato, la retta a taglia le rette b e c, formando sul lato destro due angoli la cui somma è minore di due angoli retti. Prolungando opportunamente le rette b e c, risulta che esse si incontrano sul lato destro della figura.

Nell'impostazione assiomatica moderna di Hilbert, gli assiomi hanno la funzione di definire implicitamente gli enti primitivi, cioè di fissare le proprietà alle quali questi enti devono soddisfare. Hilbert aggiunge inoltre altri assiomi che Euclide stesso non aveva esplicitato chiaramente.

Assiomi di Hilbert

L'esposizione che segue è una semplificazione degli assiomi del grande matematico tedesco.[7]

Hilbert assume come enti primitivi della geometria piana il *punto* e la *retta*, come relazioni primitive l'appartenenza di un punto ad una retta, il giacere di un punto tra altri due punti, e la congruenza di segmenti.

Assiomi di appartenenza "giacere su"

I. Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta che contiene entrambi i punti.

II. Ogni retta contiene almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta (figura 1.3).

III. Dati tre punti non allineati, esiste uno e un solo piano che contiene tutti e tre i punti. Ogni piano contiene almeno un punto (figura 1.4).

IV. Se due punti di una retta giacciono su un piano, allora anche tutti gli altri punti della retta giacciono su questo piano (figura 1.5).

V. Se un punto giace su due piani distinti, allora esiste almeno un altro punto giacente su entrambi questi piani.

VI. Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

[7] chi volesse studiare direttamente il testo originale può consultare `http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf` [ultima consultazione 20.03.2014].

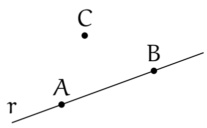


FIGURA 1.3: Assioma II

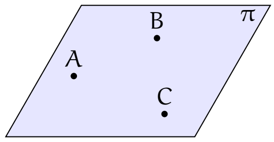


FIGURA 1.4: Assioma III

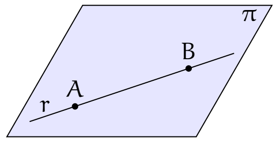


FIGURA 1.5: Assioma IV

Assiomi di ordinamento “stare fra”

VII. Se un punto B giace fra i punti A e C, allora i punti A, B e C sono tre punti distinti sulla stessa retta, e B giace fra C ed A (figura 1.6).

VIII. Dati due punti A e C, esiste almeno un punto B, sulla retta AC, giacente fra di essi.

IX. Dati tre punti qualsiasi di una retta, uno e uno solo di essi giace fra gli altri due.

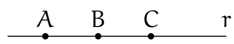
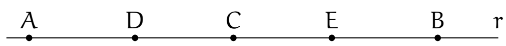


FIGURA 1.6: Assioma VII

Gli ultimi assiomi ci permettono di dedurre il seguente teorema.

Teorema 1.1. *Tra due punti di una retta esiste sempre una quantità illimitata di altri punti.*

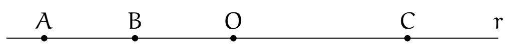
Dimostrazione. Data una retta r e due suoi punti A e B, per l’assioma VIII sappiamo che esiste un terzo punto C sulla retta r che giace tra A e B. Ma allora esiste un punto D su r che giace tra A e C e un punto E che giace tra C e B. Per lo stesso assioma esisterà un punto tra A e D, uno tra D e C, uno tra C e B e così via. □



Definizione 1.1. Si chiama *segmento* AB l’insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno sulla retta tra A e B.

Gli assiomi di ordinamento ci permettono di dare anche la seguente

Definizione 1.2. Presi quattro punti A, B, C, O su una retta, in modo che B stia tra A e O e O stia tra A e C possiamo dire che A e B *stanno dalla medesima parte* rispetto a O, mentre A e C non stanno dalla medesima parte rispetto a O.



❑ **Osservazione** Trascuriamo in questa trattazione elementare l'*assioma di Pasch*[8] (X) e l'*assioma delle parallele*[9] (XI).

Assiomi di congruenza "essere congruente a"

XII. *Assioma del trasporto di un segmento.* Se A, B sono due punti di una retta r e A' è un punto sulla stessa retta (o fissato su un'altra retta r'), si può sempre trovare un punto B' sulla retta r (o su r'), da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$ (figura 1.7).

XIII. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se $A'B'$ è congruente ad AB e $A''B''$ è congruente ad AB allora $A'B'$ è congruente ad $A''B''$.

XIV. Siano AB e BC segmenti su una retta r privi di punti comuni a parte B, e siano $A'B'$ e $B'C'$ segmenti su una retta r' privi di punti comuni a parte B'. Se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, allora $AC \cong A'C'$ (figura 1.8).

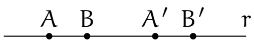


FIGURA 1.7: Assioma XII

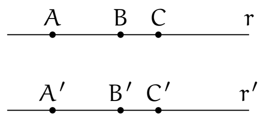
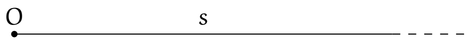


FIGURA 1.8: Assioma XIV

Prima di proseguire con gli altri assiomi premettiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.3. Chiamiamo *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.



Definizione 1.4. Si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 1.9).

L'angolo individuato da tre punti A, B, C è l'angolo formato dalla semiretta con origine B e passante per A e dalla semiretta con origine B e passante per C. Questo angolo si indica con il simbolo $A\widehat{B}C$. Nei disegni si usa indicare l'angolo con un archetto che indica la parte di piano considerata.

XV. Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che sia l'angolo $D\widehat{B'}C'$ che $E\widehat{B'}C'$ sono congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$ (figura 1.10);

[8] chiamato così in onore del matematico tedesco Moritz Pasch (1843 - 1930) che ne mise in evidenza l'indeducibilità dagli altri assiomi di Euclide, è uno degli assiomi che Hilbert aggiunse ai postulati di Euclide per renderli completi. Il suo enunciato è il seguente: «Dati un triangolo nel piano, una retta che ne attraversi un lato in un punto che non sia un estremo, deve necessariamente intersecare un altro dei due lati o il vertice in comune tra essi.»

[9] si tratta del V postulato di Euclide, anche se nella tradizione didattica moderna esso viene in genere sostituito dall'assioma di Playfair (più restrittivo): «Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.»

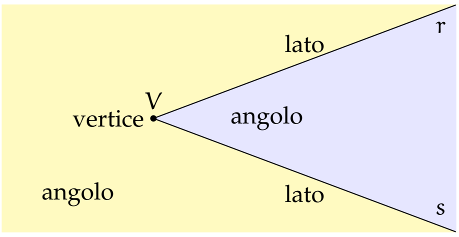


FIGURA 1.9: Le semirette r e s, aventi l'origine V comune, individuano due regioni del piano ognuna delle quali è detta *angolo*.

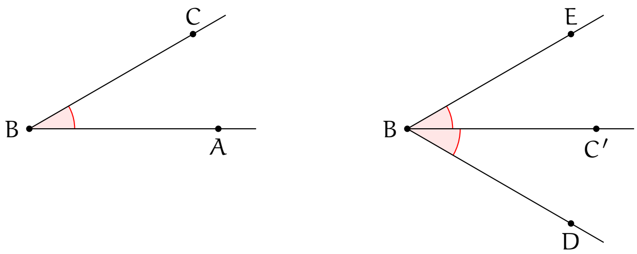


FIGURA 1.10: Assioma XV

XVI. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C' \equiv A''\widehat{B''}C''$.

Assioma di continuità

XVII. *Assioma di Archimede*. Sulla retta che unisce due punti qualsiasi A e B si prende un punto A_1, quindi si prendono i punti $A_2, A_3, A_4, \ldots$ in modo che A_1 sia tra A e A_2, A_2 tra A_1 e A_3, A_3 tra A_2 e A_4, ecc. e che $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \equiv \ldots$ allora tra tutti questi punti esiste sempre un punto A_n tale che B sta tra A e A_n (figura 1.11).

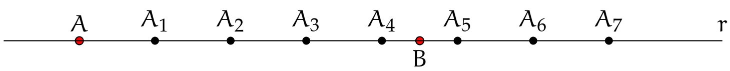


FIGURA 1.11: Assioma di Archimede (XVII)

Assioma di completezza

XVIII. Ad un sistema di punti, linee rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi in modo tale che il sistema, così generalizzato, formi una nuova geometria obbediente a tutti i cinque gruppi di assiomi. In altre parole, gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, nel caso in cui si considerino validi i cinque gruppi di assiomi.

✍ *Esercizi proposti:* 1.33, 1.34, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42

1.4 Prime definizioni

1.4.1 Semirette e segmenti

Nel paragrafo precedente abbiamo già introdotto alcune definizioni di base, necessarie per enunciare tutti i postulati della geometria secondo l'assiomatizzazione di Hilbert. In questo paragrafo costruiamo le prime definizioni. Per comodità del lettore riportiamo anche quelle già date.

Partiamo dalla nozione generica di figura.

Definizione 1.5. Si chiama *figura* un qualsiasi insieme, non vuoto, di punti.

Questa definizione fa riferimento soltanto all'ente primitivo geometrico di punto.

Lo spazio non è considerato un ente primitivo, in quanto può essere ottenuto dalla seguente definizione.

Definizione 1.6. Si chiama *spazio* l'insieme di tutti i punti.

Risulta pertanto che una figura è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio.

In base agli assiomi di ordinamento un qualunque punto P su una retta divide la retta in due parti, una è costituita dai punti che "seguono" P, l'altra è costituita dai punti che "precedono" P.

Definizione 1.7. Si chiama *semiretta* la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

Solitamente una semiretta viene indicata con una lettera latina minuscola.

Prendendo due qualsiasi rette dello spazio esse si possono trovare in diverse posizioni reciproche, cioè una rispetto all'altra.

Definizione 1.8. Due rette che appartengono ad uno stesso piano si dicono *complanari*, altrimenti si dicono *sghembe*.

Definizione 1.9. Due rette complanari r ed s che non hanno nessun punto in comune si dicono *parallele* e si scrive $r \parallel s$.

Definizione 1.10. Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Definizione 1.11. Se due rette hanno almeno due punti in comune sono *coincidenti*.

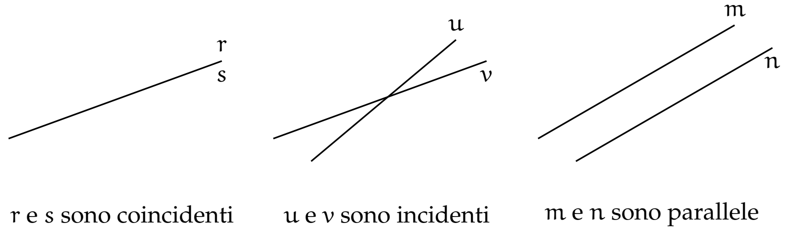


FIGURA 1.12: Relazioni tra rette complanari

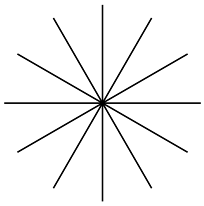


FIGURA 1.13: Fascio proprio di rette

❑ Osservazione Due rette non parallele possono appartenere a piani diversi, in questo caso non avranno punti in comune, sono cioè sghembe. Viceversa se due rette hanno un punto in comune allora sono sicuramente complanari. Inoltre, se hanno più di un punto in comune le rette coincidono, in questo caso ci sono infiniti piani che le contengono.

Definizione 1.12. L'insieme di tutte le rette di un piano che passano per uno stesso punto è detto *fascio proprio di rette*, il punto in comune a tutte le rette si dice *centro del fascio* (figura 1.13).

Prendendo su una retta due punti A e B, la retta resta divisa in tre parti: la semiretta di origine A che non contiene B, la parte costituita dai punti compresi tra A e B e la semiretta di origine B che non contiene A.

Definizione 1.13. Si chiama *segmento* AB l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B. I punti A e B si dicono *estremi* del segmento.

Un segmento viene indicato con le due lettere maiuscole dei suoi estremi.

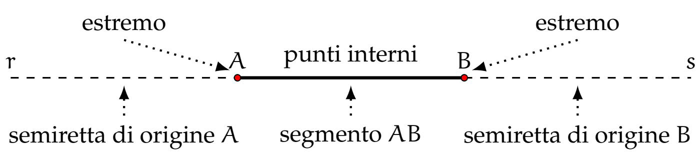


FIGURA 1.14: I punti A e B formano le due semirette r ed s, e il segmento AB

Due segmenti nel piano possono trovarsi in diverse posizioni reciproche. Alcune di esse hanno un interesse per la geometria.

Definizione 1.14. Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno in comune soltanto un estremo (figura 1.15).

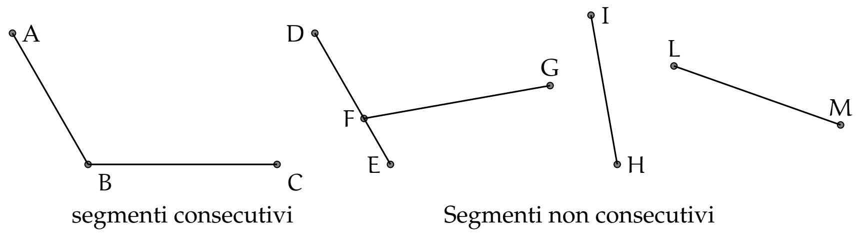


FIGURA 1.15: I segmenti AB e BC sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto B che è un estremo di entrambi; DE e FG non sono consecutivi perché hanno in comune solo il punto F ma esso non è estremo del segmento DE; HI e LM non sono consecutivi perché non hanno nessun punto in comune.

Definizione 1.15. Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta (figura 1.16).

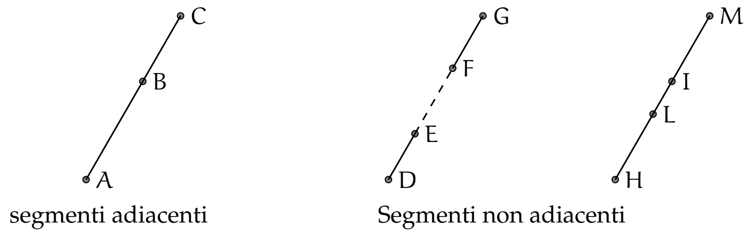


FIGURA 1.16: I segmenti AB e BC sono adiacenti perché hanno in comune solo l'estremo B e giacciono sulla stessa retta; i segmenti DE e FG, pur giacendo sulla stessa retta, non sono adiacenti poiché non hanno alcun punto in comune; i segmenti HI e LM giacciono sulla stessa retta ma non sono adiacenti poiché hanno più di un punto in comune.

✍ *Esercizi proposti:* 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49, 1.50

1.4.2 Semipiani e angoli

Definizione 1.16. Si dice *semipiano* di origine la retta r la figura formata dalla retta r e da una delle due parti in cui essa divide il piano (figura 1.17).

In un piano π, una qualsiasi retta $r \subset \pi$ dà origine a due semipiani distinti, che si dicono semipiani *opposti*.

Definizione 1.17. Una figura si dice *convessa* se, considerati due suoi qualsiasi punti, il segmento che li unisce è contenuto nella figura. Si dice *concava* se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è interamente contenuto nella figura (figura 1.18).

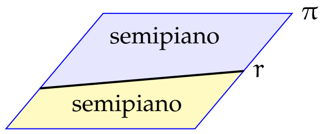


FIGURA 1.17: Semipiani opposti

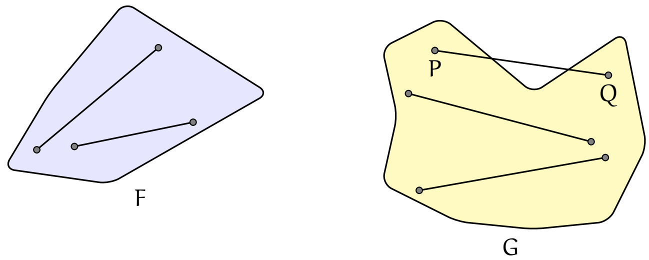


FIGURA 1.18: La figura F è convessa, per qualsiasi coppia di punti interni a F il segmento che li unisce è interamente nella figura; la figura G è concava perché unendo i punti P e Q si ha un segmento che cade in parte esternamente alla figura.

Ricordiamo la definizione di angolo già data: si dice *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono *lati* dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice *vertice* dell'angolo (figura 1.9).

Definizione 1.18. Un angolo si dice *piatto* se i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro.

Definizione 1.19. Un angolo si dice *nullo* se è costituito solo da due semirette sovrapposte.

Definizione 1.20. È detto *angolo giro* l'angolo che ha per lati due semirette sovrapposte e che contiene tutti i punti del piano (figura 1.19).

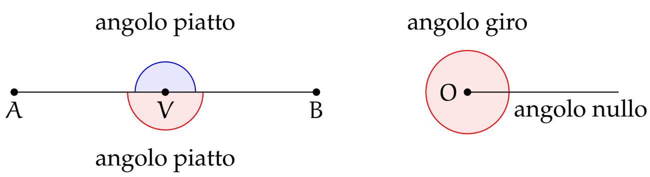


FIGURA 1.19: L'angolo $\widehat{ab}$ a sinistra è piatto (sia quello sopra che quello sotto), gli angoli a destra, individuati dalle semirette coindicenti con origine in O, sono rispettivamente un angolo giro (quello esterno) e un angolo nullo (quello interno).

Definizione 1.21. Un angolo, i cui lati non appartengono alla stessa retta, si dice *concavo* se contiene i prolungamenti dei lati, se non li contiene si dice *convesso*.

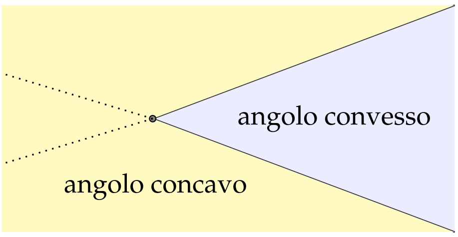


FIGURA 1.20: L'angolo concavo è quello in giallo in quanto contiene i prolungamenti dei lati (punteggiati)

Quando si disegna un angolo è utile, oltre a disegnare le semirette e l'origine, indicare con un archetto quale dei due angoli si intende considerare.

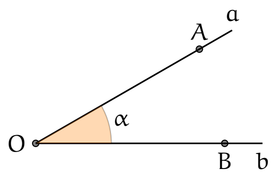


FIGURA 1.21: Per indicare che l'angolo da considerare è quello convesso e non quello concavo si è usato un archetto in prossimità del vertice O

Per indicare gli angoli si usano diverse convenzioni:

- $\widehat{ab}$: se si conoscono i nomi delle semirette che ne costituiscono i lati;
- $A\hat{O}B$: se si conoscono i nomi del vertice e di due punti sui lati;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (una lettera greca): per indicare direttamente l'angolo.

I primi due modi di indicare l'angolo non individuano con chiarezza di quale dei due angoli si tratta. Solitamente si intende l'angolo convesso, quando si vuole indicare l'angolo concavo bisogna dirlo esplicitamente.

Anche per gli angoli si danno le definizioni di angoli consecutivi e angoli adiacenti, in parte simili a quelle date per i segmenti.

Definizione 1.22. Due angoli si dicono *consecutivi* se hanno il vertice e un lato comune e giacciono da parte opposta rispetto al lato comune.

Definizione 1.23. Due angoli si dicono *adiacenti* se sono consecutivi e se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

Definizione 1.24. Due angoli convessi si dicono *opposti al vertice* se i lati del primo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

✍ *Esercizi proposti:* 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.56, 1.57, 1.58, 1.59, 1.60, 1.61, 1.62, 1.63, 1.64, 1.65

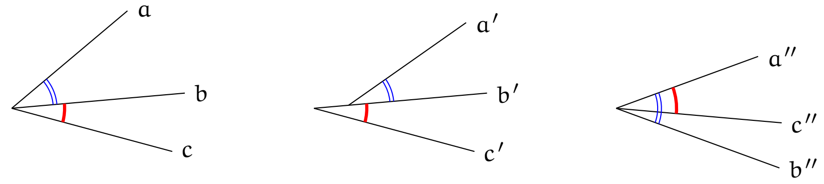


FIGURA 1.22: Nella figura gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono consecutivi perché hanno il vertice e il lato b in comune; $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{b'c'}$ non sono consecutivi perché non hanno il vertice in comune; $\widehat{a''b''}$ e $\widehat{a''c''}$ non sono consecutivi perché non giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune a''

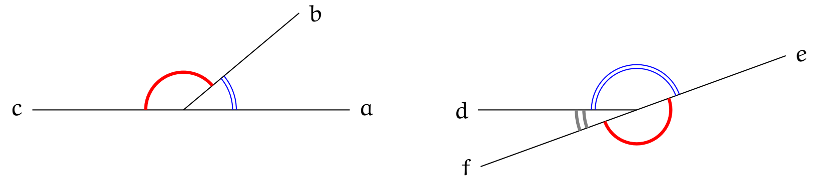
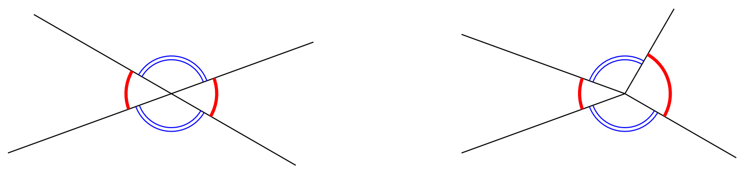


FIGURA 1.23: I due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono adiacenti perché sono consecutivi e i lati a e c sono uno il prolungamento dell'altro; i due angoli $\widehat{de}$ ed $\widehat{ef}$ non sono adiacenti in quanto d non è il prolungamento di f; gli angoli $\widehat{de}$ e $\widehat{df}$ sono adiacenti in quanto f è il prolungamento di e



angoli opposti al vertice — angoli non opposti al vertice

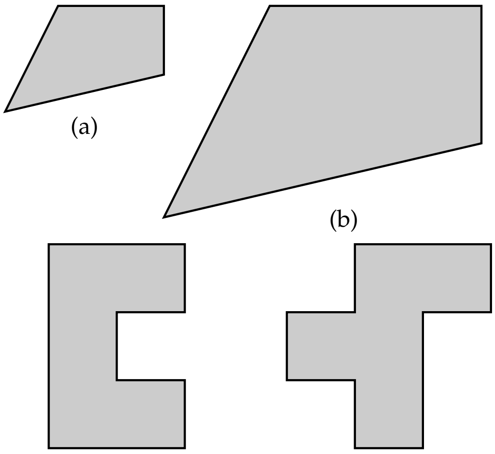
FIGURA 1.24: Gli angoli formati dalle semirette a sinistra sono opposti al vertice; gli angoli formati dalle semirette a destra non lo sono

1.5 Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

1.5.1 Premessa intuitiva

Nel linguaggio comune usiamo la parola "uguale" con un significato generico, spesso per indicare due oggetti che si assomigliano: due macchine uguali, due orologi uguali, ... In aritmetica e in algebra usiamo la parola "uguale" per indicare oggetti matematici perfettamente uguali. Per esempio, $2 = 2$, ogni numero infatti è uguale solo a se stesso. Scriviamo anche $3 + 2 = 5$, per dire che il numero che si ottiene dalla somma di 3 e 2 è proprio il numero 5. Nei polinomi si enuncia il principio di identità dei polinomi, in base al quale due polinomi sono uguali se si possono scrivere formalmente allo stesso modo.

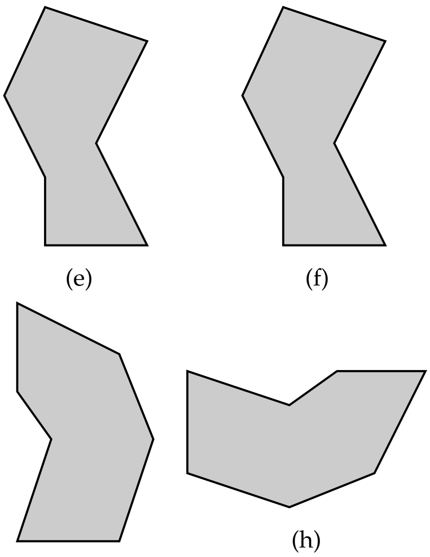
In geometria, usiamo il termine "uguale" per indicare due figure coincidenti nella forma e nella posizione. In altre parole due figure sono *uguali* solo se sono esattamente la stessa figura. Tuttavia, in geometria siamo interessati a studiare soprattutto figure che senza essere del tutto identiche hanno delle caratteristiche in comune. Vediamo prima degli esempi intuitivi e successivamente tratteremo lo stesso tema ma in modo formalmente corretto.



(a) (b) (c) (d)

Le figure (a) e (b), sopra riportate, hanno la stessa forma ma una è più grande dell'altra, la seconda infatti è stata ottenuta dalla prima raddoppiando la lunghezza di ogni lato: in geometria tali figure si dicono *simili*.

Le figure (c) e (d), invece, non hanno la stessa forma e non si somigliano affatto, però le loro superfici hanno la stessa estensione, in quanto sono costituite dallo stesso numero di quadratini: in geometria tali figure si dicono *equivalenti*.

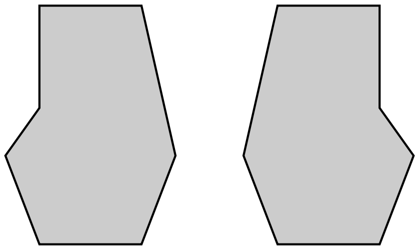


(e) (f) (g) (h)

Le figure (e) ed (f) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni ma sono in posizioni differenti. È comunque possibile spostarle una sull'altra e farle coincidere. Usualmente le chiamiamo figure uguali, ma più precisamente in geometria tali figure si dicono *congruenti*.

Le figure (g) e (h) hanno la stessa forma e le stesse dimensioni (per rendersene conto basta ruotare, per esempio, la seconda figura in senso antiorario e poi trascinarla sulla prima per sovrapporla). Anche queste figure sono dette uguali nel linguaggio comune, ma in geometria si dicono *congruenti*.

Le figure (i) e (j) hanno stessa forma e stesse dimensioni, tuttavia non si riesce a trasportare l'una sull'altra muovendole nel piano, né trascinandole, né ruotandole. Per farlo è necessario ribaltarne una facendola uscire dal piano, poiché le due figure sono una l'immagine speculare dell'altra. In geometria tali figure sono dette *inversamente congruenti*.



(i) (j)

❑ **Osservazione** Per ribaltare una figura occorre una dimensione in più rispetto a quelle della figura, precisamente se si tratta di due figure piane (che hanno due dimensioni: lunghezza e larghezza) occorre avere la terza dimensione per effettuare un ribaltamento; se siamo su una retta (una sola dimensione: la lunghezza) occorre la seconda dimensione per ribaltare un segmento.

Per renderci conto di quanto accade con le figure solide, possiamo pensare ai palmi delle nostre mani che con buona approssimazione si possono considerare inversamente congruenti: esse possono essere giunte, ma non sovrapposte. Infatti non è possibile vedere le proprie mani sovrapposte, entrambe dal dorso o entrambe dal palmo, con le dita rivolte verso l'alto.

1.5.2 La congruenza

Secondo il punto di vista del matematico tedesco Felix Klein (1848-1925), la geometria è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto a certe trasformazioni. Nello studio della geometria euclidea, quella che tratteremo in questo Tema, ci occupiamo delle proprietà delle figure geometriche invarianti rispetto ai movimenti rigidi, cioè rispetto a quei movimenti che conservano forma e dimensioni delle figure. Queste trasformazioni vengono anche dette *isometrie* (si intuisce dalla radice etimologica che si parla di stessa misura): significa che viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di due figure congruenti in modo da "mantenere" le distanze.

Definizione 1.25. Diciamo che due figure F e G sono *congruenti* quando esiste un movimento rigido che le sovrappone perfettamente. In simboli $F \cong G$.

Nella Premessa a questo paragrafo abbiamo dato un'idea intuitiva e sperimentale del concetto di congruenza. Ma per esplicitarlo matematicamente dobbiamo utilizzare gli assiomi di congruenza di Hilbert che abbiamo enunciato nella sezione 1.3.2. Ne riportiamo alcuni per comodità del lettore.

Assiomi di congruenza

III. *Assioma del trasporto di un segmento*. Se A e B sono due punti di una retta a e A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B' sulla retta a o su a', da una data parte rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$.

Questo assioma afferma che, fissato un punto A' su una retta a', è sempre possibile trasportare un qualunque segmento AB in modo che l'estremo A coincida con A' e il segmento stia sulla retta a'.

IV. La relazione di congruenza tra segmenti è *transitiva*, cioè se $A'B'$ e $A''B''$ sono entrambi congruenti ad AB, allora $A'B'$ è congruente a $A''B''$.

La relazione di congruenza tra segmenti è allora un relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà:

a) *riflessiva*: ogni segmento è congruente a se stesso;
b) *simmetrica*: se AB è congruente a $A'B'$ allora anche $A'B'$ è congruente ad AB;
c) *transitiva*: se AB è congruente ad $A'B'$ e $A'B'$ è congruente ad $A''B''$, allora AB è congruente ad $A''B''$.

Definizione 1.26. Si dice *lunghezza di un segmento* la classe di equivalenza dei segmenti congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti i segmenti che sono congruenti tra di loro.

V. *Assioma del trasporto di un angolo*. Dati un angolo $A\widehat{B}C$ ed una semiretta $B'C'$, esistono e sono uniche due semirette $B'D$ e $B'E$, tali che l'angolo $D\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\widehat{B}C$ e l'angolo $E\widehat{B'}C'$ risulti congruente all'angolo $D\widehat{B}C$.

Questo assioma ci garantisce che è sempre possibile trasportare un angolo su una qualsiasi semiretta, facendo coincidere il vertice dell'angolo con l'origine della semiretta e un lato dell'angolo con la semiretta stessa.

VI. La relazione di congruenza tra angoli è *transitiva*, cioè se $A'\widehat{B'}C'$ e $A''\widehat{B''}C''$ sono entrambi congruenti ad $A\widehat{B}C$, allora $A'\widehat{B'}C'$ è congruente a $A''\widehat{B''}C''$.

Quindi anche la relazione di congruenza tra gli angoli è una relazione di equivalenza, gode cioè delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Definizione 1.27. Si dice *ampiezza di un angolo* la classe di equivalenza degli angoli congruenti tra di loro, cioè l'insieme di tutti gli angoli che sono congruenti tra di loro.

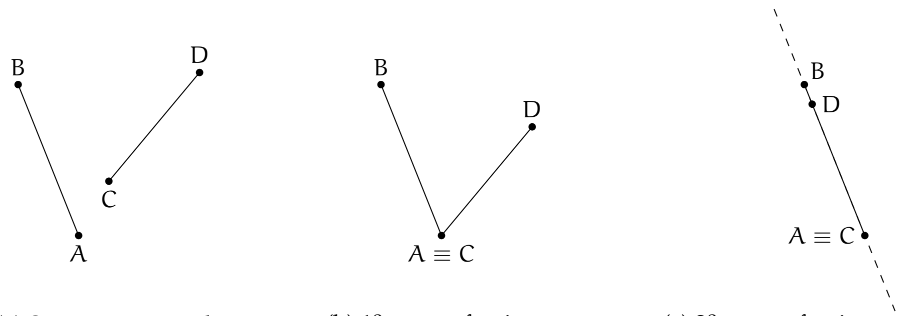
Aggiungiamo che:

- tutte le rette sono fra loro congruenti;
- tutte le semirette sono fra loro congruenti;
- tutti i piani sono fra loro congruenti.

1.5.3 Confronto di segmenti

Per confrontare l'altezza di due persone e vedere chi è più alto, le facciamo mettere affiancate in modo che i piedi stiano allo stesso livello, dopodiché confrontiamo l'estremità della testa: è più alto chi ha l'estremità della testa più in alto. Un procedimento analogo si fa per confrontare due segmenti.

Per confrontare due segmenti AB e CD, facciamo in modo che con un movimento rigido gli estremi A e C coincidano, con una rotazione intorno al punto A facciamo in modo che coincidano anche le rette AB e CD e che gli estremi B e D stiano dalla stessa parte rispetto ad A e C.



(a) Situazione iniziale

(b) 1° passo: facciamo coincidere A con C

(c) 2° passo: facciamo coincidere la retta CD con AB. I punti B e D devono stare dalla stessa parte

FIGURA 1.25: Confronto di due segmenti

A questo punto sono possibili tre situazioni:

- B cade dopo l'estremo D, allora diciamo che AB è *maggiore* di CD e scriviamo $AB > CD$;
- B cade esattamente su D, allora i due segmenti sono *congruenti* e scriviamo $AB \cong CD$;
- B cade tra C e D, allora diciamo che AB è *minore* di CD e scriviamo $AB < CD$.

1.5.4 Confronto di angoli

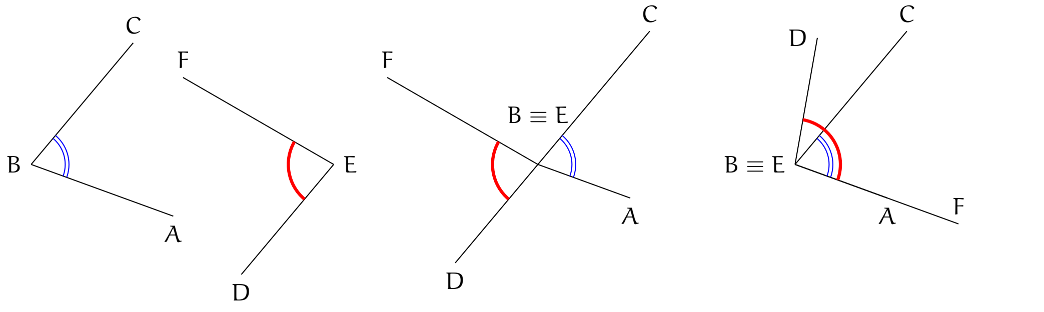
Per confrontare due angoli $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$, portiamo con un movimento rigido il vertice B sul vertice E, con una rotazione portiamo a coincidere la semiretta BA con la semiretta EF, in modo che le altre due semirette, BC e ED, stiano dalla stessa parte rispetto a BA.

A questo punto si possono avere tre situazioni distinte:

- il lato EF cade internamente all'angolo $A\widehat{B}C$ e quindi diciamo che $A\widehat{B}C$ è *maggiore* di $D\widehat{E}F$: $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$;
- il lato EF cade esattamente su BC e quindi i due angoli sono *congruenti*: $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$;
- il lato EF cade esternamente all'angolo $A\widehat{B}C$ e quindi diciamo che $A\widehat{B}C$ è *minore* di $D\widehat{E}F$: $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$.

1.5.5 Operazioni con i segmenti

Somma di due segmenti. La somma di due segmenti AB e CD è il segmento AD che si ottiene trasportando con un movimento rigido il segmento CD in modo che AB e CD siano



(a) Situazione iniziale

(b) 1° passo: facciamo coincidere i vertici B ed E

(b) 2° passo: facciamo coincidere le semirette BA ed EF

FIGURA 1.26: Confronto di due angoli

adiacenti, con l'estremo B coincidente con C. Scriviamo $AB + CD \cong AD$, usando l'usuale simbolo di addizione.

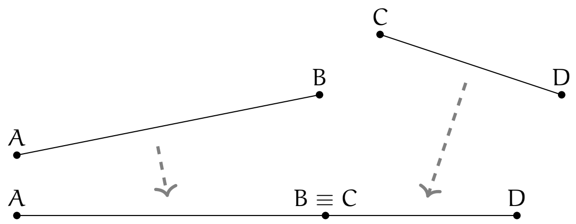


FIGURA 1.27: Somma di due segmenti. Il segmento AD è la somma dei segmenti AB e CD

Differenza di due segmenti. La differenza di due segmenti AB e CD, con $AB > CD$, è il segmento DB che si ottiene sovrapponendo AB e CD facendo coincidere l'estremo A con l'estremo C. Scriviamo $AB - CD \cong DB$.

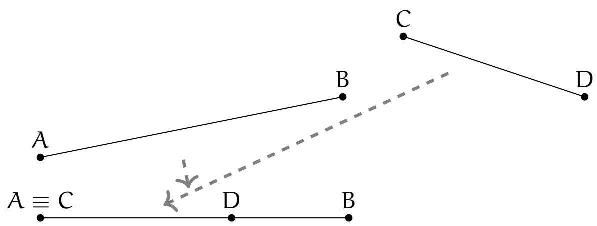


FIGURA 1.28: Differenza di due segmenti. Il segmento DB è la differenza dei segmenti AB e CD

Multiplo di un segmento. Il multiplo secondo m, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è il segmento AC che si ottiene sommando m volte il segmento AB a se stesso.

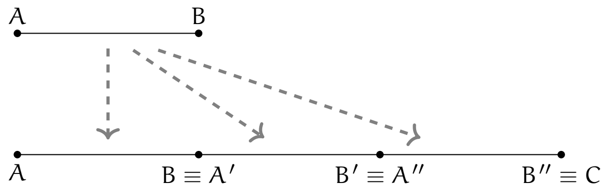


FIGURA 1.29: Multiplo di un segmento. Il segmento AC è il multiplo secondo 3 di AB, cioè $AC \cong 3 \cdot AB$

Se $m = 0$, il multiplo secondo m di qualsiasi segmento AB è il segmento nullo, ove per segmento nullo intendiamo un qualsiasi segmento in cui gli estremi coincidono, cioè il segmento ridotto a un solo punto.

Sottomultiplo di un segmento. Il sottomultiplo secondo n, numero naturale diverso da 0, di un segmento AB è un segmento AC tale che $AB \cong n \cdot AC$. Si può anche scrivere $AC \cong \frac{1}{n} \cdot AB$.

In generale, il segmento $AC \cong \frac{m}{n} \cdot AB$ si ottiene dividendo AB in n parti uguali ottenendo il segmento AD e poi sommando m segmenti congruenti ad AD.

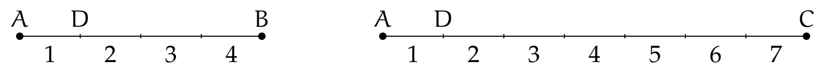


FIGURA 1.30: Sottomultiplo di un segmento. Il segmento AC è congruente a $\frac{7}{4}$ di AB, cioè $AC \cong \frac{7}{4} \cdot AB$, infatti AB è stato suddiviso in 4 parti uguali e AC è costituito da 7 di tali parti

Definizione 1.28. Dato un segmento AB si chiama *punto medio di un segmento* il punto M interno al segmento che lo divide in due parti tra loro congruenti ($AM \cong MB$).

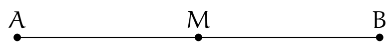


FIGURA 1.31: Punto medio di un segmento. M è il punto medio del segmento AB poiché $AM \cong MB$

Proprietà:

- somme di segmenti a due a due congruenti sono congruenti;
- differenze di segmenti a due a due congruenti sono congruenti.

Esempio 1.3. Siano AB e CD due segmenti congruenti appartenenti a una retta r che non abbiano punti in comune. Dimostra che $AD - BC \cong 2 \cdot AB$.

Dimostrazione. Disponiamo i punti A, B, C, D su una retta r come in figura.

Per definizione di somma di segmenti si ha che $AD \cong AB + BC + CD$ e quindi

$$AD - BC \cong AB + BC + CD - BC \cong AB + CD.$$

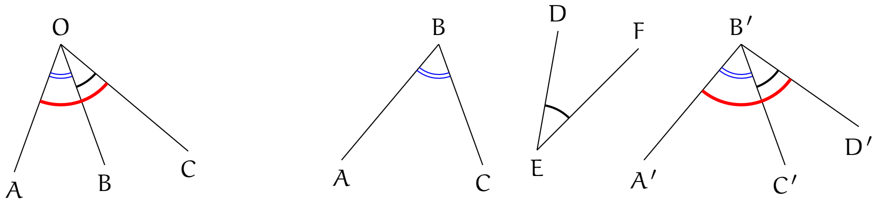
Poiché $AB \cong CD$ si ha che

$$AD - BC \cong AB + CD \cong AB + AB \cong 2 \cdot AB.$$

□

1.5.6 Operazioni con gli angoli

Somma di angoli. La somma di due angoli consecutivi $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ è l'angolo $A\widehat{O}C$. Per sommare due angoli che non sono consecutivi, per esempio $A\widehat{B}C$ e $D\widehat{E}F$, si costruiscono due angoli consecutivi tra di loro, uno congruente a $A\widehat{B}C$, l'altro congruente a $D\widehat{E}F$ e quindi si calcola la somma (figura 1.32).



(a) Somma di angoli consecutivi (b) Somma di angoli non consecutivi

FIGURA 1.32: Somma di due angoli.

Differenza di angoli. La differenza di due angoli, di cui il primo è maggiore o congruente al secondo, è l'angolo che addizionato al secondo dà per somma il primo (figura 1.33). Se i due angoli considerati sono congruenti la loro differenza è l'angolo nullo.

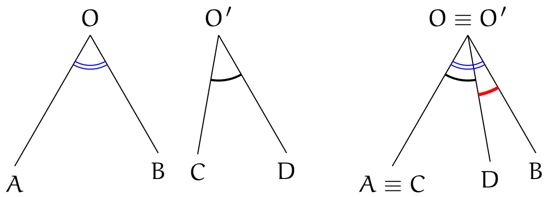


FIGURA 1.33: Differenza di due angoli.

Multiplo di un angolo. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ e un numero n naturale non nullo, il multiplo di $A\widehat{O}B$ secondo n (si può scrivere $n \cdot A\widehat{O}B$) è l'angolo che si ottiene sommando n angoli congruenti a $A\widehat{O}B$. Se $n = 0$, il multiplo secondo n di qualsiasi angolo $A\widehat{O}B$ è l'angolo nullo.

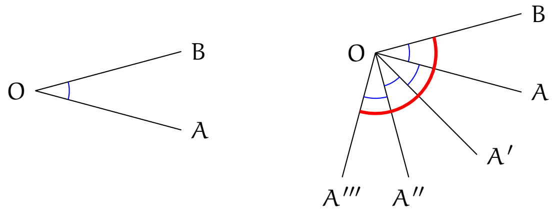


FIGURA 1.34: Multiplo di un angolo. L'angolo $A'''\widehat{O}B$ è il quadruplo di $A\widehat{O}B$, cioè $A'''\widehat{O}B \cong 4 \cdot A\widehat{O}B$

Sottomultiplo di un angolo. Il sottomultiplo secondo n, naturale non nullo, di un angolo $A\widehat{O}B$ è un angolo $A\widehat{O}C$ tale che $A\widehat{O}B \cong n \cdot A\widehat{O}C$. Si può anche scrivere $A\widehat{O}C \cong \frac{1}{n} \cdot A\widehat{O}B$.

In generale, un angolo $A\widehat{O}C \cong \frac{m}{n} \cdot A\widehat{O}B$ si ottiene suddividendo $A\widehat{O}B$ in n angoli uguali (indichiamo con $A\widehat{O}D$ il primo di essi), quindi l'angolo $A\widehat{O}C$ è ottenuto sommando m volte l'angolo $A\widehat{O}D$.

Definizione 1.29. Si dice *bisettrice di un angolo* la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli tra loro congruenti.

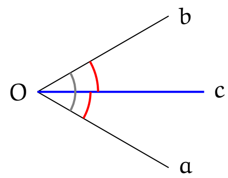


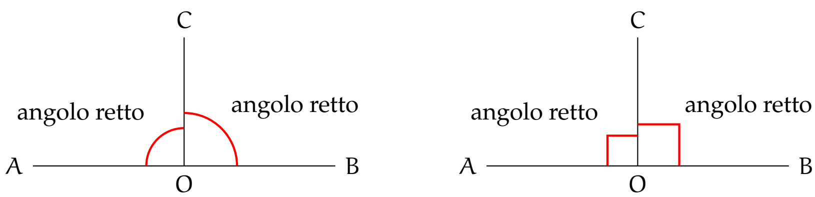
FIGURA 1.35: La semiretta c è la bisettrice dell'angolo $a\widehat{O}b$, gli angoli $a\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}b$ sono congruenti

1.5.7 Angoli particolari

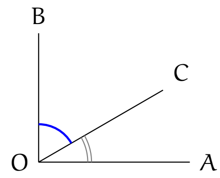
Possiamo ora dare dei nomi ai seguenti angoli particolari.

Definizione 1.30. Si dice *angolo retto* la metà di un angolo piatto.

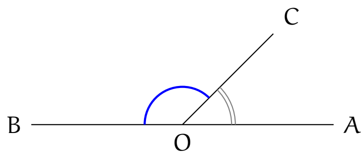
Per denotare il fatto che un angolo è retto si è soliti indicarlo con un quadratino al posto dell'usuale archetto.



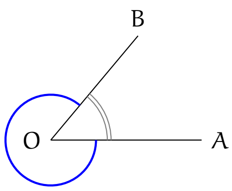
Definizione 1.31. Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.



Definizione 1.32. Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

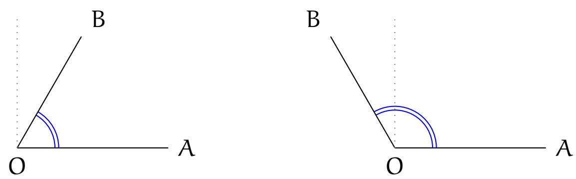


Definizione 1.33. Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è un angolo giro.



Definizione 1.34. Un angolo si dice *acuto* se è minore di un angolo retto.

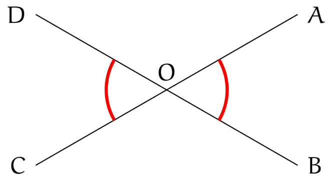
Definizione 1.35. Un angolo convesso si dice *ottuso* se è maggiore di un angolo retto.



(a) Angolo acuto (b) Angolo ottuso

Teorema 1.2. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*

Dimostrazione. Si considerino due generici angoli opposti al vertice $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ come nella figura seguente.



Gli angoli $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}D$ sono adiacenti, dato che hanno un lato in comune e gli altri due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro. Ma anche gli angoli $A\widehat{O}D$ e $D\widehat{O}C$ sono angoli adiacenti per lo stesso motivo. Quindi gli angoli $D\widehat{O}C$ e $A\widehat{O}B$ sono adiacenti allo stesso angolo $A\widehat{O}D$. Indicando con π l'angolo piatto si ha: $A\widehat{O}D + D\widehat{O}C \cong \pi$ da cui $D\widehat{O}C \cong \pi - A\widehat{O}D$. Analogamente $A\widehat{O}B + A\widehat{O}D \cong \pi$ da cui $A\widehat{O}B \cong \pi - A\widehat{O}D$. Ne consegue che $D\widehat{O}C \cong A\widehat{O}B$ e cioè la tesi. □

Prova tu a dimostrare il seguente teorema

Teorema 1.3. *Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.*

Suggerimento: Dopo aver realizzato il disegno, esplicita ipotesi e tesi. Segui poi il ragionamento del teorema precedente: se due angoli sono supplementari la loro somma è un angolo piatto . . .

1.5.8 Perpendicolari e altre definizioni

Definizione 1.36. Due rette si dicono *perpendicolari* se sono incidenti e formano tra loro quattro angoli retti.

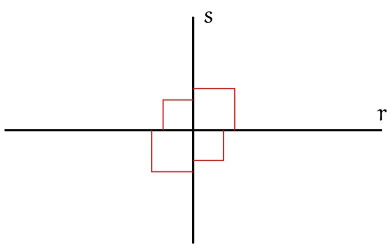


FIGURA 1.36: Le rette r e s sono perpendicolari poiché incontrandosi formano quattro angoli retti

Per indicare che le due rette r e s sono perpendicolari si usa il simbolo $r \perp s$.

Definizione 1.37. Si dice *distanza di un punto* P *da una retta* la lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal punto P alla retta.

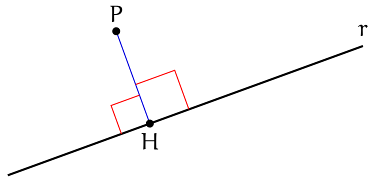


FIGURA 1.37: Il segmento PH, appartenente alla perpendicolare a r passante per P, è la distanza di P dalla retta r

Definizione 1.38. Si chiama *asse di un segmento* la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.

In genere un asse viene rappresentato con una linea a "tratto e punto".

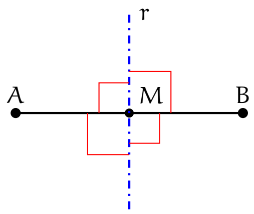


FIGURA 1.38: La retta r è l'asse del segmento AB in quanto è perpendicolare alla retta per AB e passa per M, il punto medio di AB

Definizione 1.39. Due punti si dicono *simmetrici rispetto a una retta* se la retta è asse del segmento che ha per estremi i due punti.

Nella figura 1.38, i punti A e B sono simmetrici rispetto alla retta r.

✍ *Esercizi proposti:* 1.66, 1.67, 1.68, 1.69, 1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.74, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.80, 1.81, 1.82, 1.83, 1.84, 1.85, 1.86, 1.87, 1.88, 1.89, 1.90, 1.91, 1.92,1.93, 1.94, 1.95, 1.96, 1.97, 1.98, 1.99, 1.100, 1.101, 1.102, 1.103

1.6 La misura

1.6.1 Misura di segmenti

Riprendiamo alcune definizioni sui segmenti.

Si dice *segmento* di estremi A e B (o brevemente *segmento* AB) l'insieme dei punti A e B e di tutti quelli che stanno tra A e B. Due segmenti AB e CD si dicono *congruenti* se esiste un movimento rigido che porta a coincidere A con C e B con D, oppure A con D e B con C. Ricordiamo che se esiste un movimento rigido che porta a coincidere A con C e B con D allora esiste anche un movimento rigido che porta a coincidere A con D e B con C, e viceversa.

Si dice *lunghezza di un segmento* AB l'insieme di tutti i segmenti congruenti ad AB.

Si dice *distanza tra due punti* A e B il segmento AB di estremi A e B.

Diamo ora una definizione particolarmente importante per l'applicazione del calcolo numerico alla geometria: la definizione di *misura*. Ricordiamo che la nozione di misura è alla base delle applicazioni del calcolo matematico non solo alla geometria ma anche alla fisica e alla tecnologia in generale. Il processo di misurazione è analogo a tutti i campi di applicazioni: si tratta di trovare un modo per assegnare a una grandezza un numero. Questo numero si ottiene confrontando due grandezze dello stesso tipo. Per esempio, per misurare la massa di un oggetto si confronta la sua massa con quella di un oggetto campione, di solito un oggetto di 1 kg.

Per misurare un segmento AB si confronta questo segmento con un altro segmento scelto come unità di misura, di solito indicato con u.

Nel confronto tra il segmento AB e il segmento u, possono verificarsi i tre casi seguenti:

1. (figura 1.39) Il segmento AB è multiplo del segmento u secondo il numero naturale n, precisamente $AB \cong n \cdot u$. In questo caso la misura di AB, rispetto a u, è il numero naturale n. Si scrive $\overline{AB} = nu$.

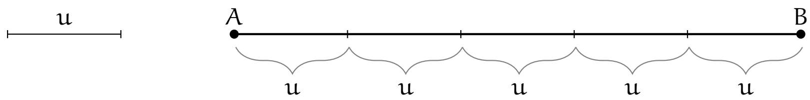


FIGURA 1.39: Il segmento AB misura 5u, cioè $AB \cong 6 \cdot u$, cioè $\overline{AB} = 6u$

2. (figura 1.40) Il segmento AB non è un multiplo intero di u ma è un multiplo di un sottomultiplo di u, precisamente $AB \cong n \cdot \frac{u}{m} = \frac{n}{m}u$. In questo caso la misura di AB, rispetto a u, è il numero razionale $\frac{n}{m}$. Si scrive $\overline{AB} = \frac{n}{m}u$.

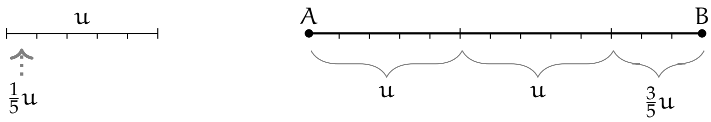


FIGURA 1.40: Il segmento AB è congruente a 13 volte il segmento $\frac{1}{5}u$, quindi AB misura $\frac{13}{5}u$, cioè $\overline{AB} = \frac{13}{5}u$

3. Il segmento AB non è un multiplo né di u né di un suo sottomultiplo. In questo caso si dice che AB e u sono *incommensurabili* (nei casi precedenti si dice invece che sono *commensurabili*). Anche in questo caso è possibile attribuire ad AB un numero che ne esprime la misura rispetto a u, si tratta però di un numero irrazionale. La complessità dell'argomento richiede alcune conoscenze più avanzate di matematica, pertanto la tematica della misura delle grandezze incommensurabili sarà approfondita nel seguito. Qui ci limitiamo ad accennare al caso storicamente più noto di segmenti incommensurabili: la diagonale di un quadrato misurata rispetto al suo lato.

   Proponiamo una dimostrazione dell'irrazionalità del numero $\sqrt{2}$ utilizzando il metodo della dimostrazione per assurdo.

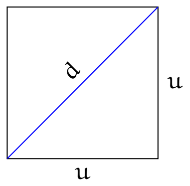


FIGURA 1.41: Prendendo come unità di misura il lato di un quadrato, la sua diagonale è incommensurabile con il lato stesso. Applicando il teorema di Pitagora, ricorderai infatti che $d = \sqrt{2}u$ e che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè che sia possibile scrivere $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$. Allora, per definizione di radice quadrata, si avrebbe $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$, da cui $2n^2 = m^2$. I due membri dovrebbero quindi rappresentare lo stesso numero naturale (il teorema fondamentale dell'Aritmetica assicura l'unicità della scomposizione in fattori primi). Essendo 2 un numero primo, dovrebbe comparire come fattore sia al primo sia al secondo membro lo stesso numero di volte. Inoltre m^2 ed n^2 o sono dispari e quindi se contengono il fattore 2 lo contengono un numero pari di volte (vediamo qualche esempio $24 = 2^3 \cdot 3 \rightarrow 24^2 = 2^6 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5 \rightarrow 20^2 = 2^4 \cdot 5^2$). Ma $2n^2$ contiene il fattore 2 un numero dispari di volte, mentre m^2 lo contiene un numero pari. Pertanto l'uguaglianza $2n^2 = m^2$ non può essere mai verificata; l'assurdo deriva dall'aver supposto $\sqrt{2}$ razionale. □

Un altro esempio di numero irrazionale, e di conseguenza di due "lunghezze" incommensurabili, è π, che rappresenta il rapporto tra la misura della lunghezza di una circonferenza e la misura della lunghezza del suo diametro.

In generale, dato un segmento AB e un segmento u, preso come unità di misura, esiste sempre un numero reale positivo che esprime la misura di AB rispetto a u. Questo numero è unico, ossia ogni segmento ha una sola misura. Viceversa, dato un qualsiasi numero reale positivo r e un segmento u, preso come unità di misura, è sempre possibile costruire un segmento che misura esattamente r rispetto all'unità di misura u fissata.

Osservazioni

- Se due segmenti sono congruenti, le loro misure, rispetto alla stessa unità di misura, sono uguali (e viceversa): $AB \cong CD \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$.
- La misura di un segmento AB somma di due segmenti CD e EF ($AB \cong CD + EF$) è uguale alla somma delle misure di CD e EF: $AB \cong CD + EF \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} + \overline{EF}$.
- La misura di un segmento multiplo secondo n del segmento AB è uguale al prodotto di n per la misura di AB: $CD \cong n \cdot AB \Leftrightarrow \overline{CD} = n\overline{AB}$.
- Definito il *rapporto tra due segmenti* come il quoziente tra le loro misure $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ (rispetto alla stessa unità di misura), si ha che esso non dipende dall'unità di misura usata per misurare i segmenti, cioè il numero che si ottiene è sempre lo stesso indipendentemente dall'unità scelta per misurare.

Possiamo pertanto parlare di misura della lunghezza di un segmento e darne la seguente definizione generale.

Definizione 1.40. Dato un segmento AB e un segmento u preso come unità di misura, si dice *misura della lunghezza del segmento* AB il numero reale positivo r per il quale risulta $AB \cong r \cdot u$.

Nella realtà fisica per misurare la lunghezza degli oggetti reali (l'altezza di una persona, la lunghezza di un banco, di una stanza, di un terreno, ...) si usa come unità di misura il metro, indicato con la lettera m, con i suoi multipli (decametro, ettometro, chilometro, ...) e i suoi sottomultipli (decimetro, centimetro, millimetro, ...). Anche nella geometria, che tratta di segmenti ideali non riscontrabili perfettamente nella realtà, si usa come unità di misura un segmento di un metro.

Riassumendo, ricordiamo simboli e nozioni che riguardano due punti A e B.

- Due punti presi singolarmente con notazione insiemistica si indicano con A e B.
- La retta passante per i due punti si indica con il simbolo AB oppure $r(A, B)$.
- La semiretta di origine A e passante per B si indica con il simbolo AB oppure $r(A, B)$.
- Il segmento di estremi A e B si indica con il simbolo AB.
- La distanza tra i punti A e B, cioè il segmento AB, si indica con il simbolo AB oppure $d(A, B)$.
- La lunghezza del segmento AB, cioè l'insieme di tutti i segmenti congruenti ad AB, si indica con il simbolo $\overline{AB}$.
- La misura della lunghezza del segmento AB rispetto a una fissata unità di misura si indica con il simbolo $\overline{AB}$.
- La misura della distanza tra i punti A e B, che corrisponde alla misura del segmento AB, si indica con il simbolo $\overline{AB}$.

Tutte queste distinzioni sono importanti dal punto di vista dell'organizzazione teorica della geometria, tuttavia dal punto di vista applicativo e della quotidianità del linguaggio geometrico possono risultare pedanti e noiose, spesso si usano espressioni più generiche, finché si riescono ad evitare possibili malintesi. Sebbene a rigore si dovrebbe dire "la misura della lunghezza del segmento AB rispetto al centimetro è 12" molto spesso si usa dire "il segmento AB è lungo 12 cm" oppure "AB misura 12 cm" o ancora "la distanza tra A e B è 12 cm" o più semplicemente "il segmento AB di 12 cm", ecc.

1.6.2 Misura di angoli

Il procedimento che si usa per misurare gli angoli è del tutto analogo a quello usato per misurare i segmenti. Si fissa un'unità di misura, cioè un angolo $\widehat{u}$, e quindi si confronta l'angolo da misurare con $\widehat{u}$. Come risultato si avrà un numero reale positivo che chiamiamo *misura dell'ampiezza dell'angolo*.

Per misurare gli angoli, l'unità di misura comunemente usata è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro, detta *grado*, e viene indicata con un cerchietto posto in alto (°) di seguito al numero che ne esprime la misura. Si ha quindi, usando come unità di misura il grado, che:

- l'angolo retto misura 90 gradi e si scrive 90°;
- l'angolo piatto misura 180°;
- l'angolo giro misura 360°.

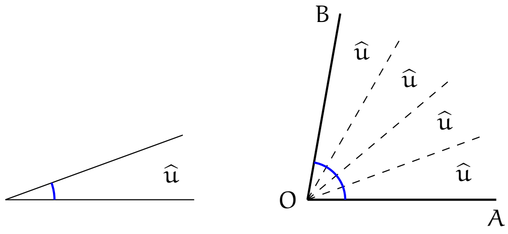


FIGURA 1.42: L'angolo $A\widehat{O}B$ misura 4 volte l'angolo unitario $\widehat{u}$

I sottomultipli del grado sono il *primo* (minuto primo) che è la sessantesima parte di un grado (in simboli $1^\circ = 60'$) e il *secondo* (minuto secondo) che è la sessantesima parte del primo (in simboli $1' = 60''$) e quindi la tremilaseicentesima parte del grado (in simboli $1^\circ = 3\,600''$).

Esempio 1.4. Calcola la misura in gradi del supplementare dell'angolo che misura $35^\circ 15' 40''$. Occorre eseguire la sottrazione $180^\circ - 35^\circ 15' 40''$. Per eseguire praticamente questa sottrazione si trasforma 1° in $60'$ e $1'$ in $60''$, precisamente si scrive 180° come $179^\circ 59' 60''$, pertanto:

$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' - \\ 35^\circ 15' 40'' = \\ \hline 144^\circ 44' 20'' \end{array}$$

Quindi $180^\circ - 35^\circ 15' 40'' = 144^\circ 44' 20''$.

Il sistema di misura degli angoli che abbiamo illustrato prende il nome di *sistema sessagesimale*. Spesso, però, per praticità, anziché usare i primi, i secondi e i decimi di secondo, si usano i decimi di grado: in questo caso il sistema si dice *sistema sessadecimale*.

In base a quanto descritto, vediamo brevemente come si passa da un sistema all'altro.

- $10^\circ 42' 23'',2 = 10 + \dfrac{42}{60} + \dfrac{23{,}2}{3600} = 10^\circ{,}706\overline{4}$;
- $50^\circ{,}748 = 50^\circ + (0{,}748 \cdot 60)' = 50^\circ + 44'{,}88 = 50^\circ + 44' + (0{,}88 \cdot 60)'' = 50^\circ 44' 52'',8$.

I sistemi sessagesimale e sessadecimale non sono gli unici usati per le misure degli angoli.

Osservando i tasti di una calcolatrice scientifica, si può vedere che ci sono tre sistemi principali le cui unità sono rispettivamente il *grado sessagesimale*[10] (DEG) che abbiamo precedentemente illustrato, il *grado centesimale* (GRAD) e il *radiante* (RAD).

Il grado centesimale è importante per gli strumenti tecnici. Si può passare dal grado sessagesimale al grado centesimale e viceversa con una semplice proporzione, sapendo che l'angolo retto, pari a 90°, corrisponde a 100 gradi centesimali (in simboli 100^g).

Il radiante è utile nello studio della trigonometria e dell'analisi matematica. L'angolo di misura 1 radiante (in simboli 1 rad[11]) è congruente ad un angolo con vertice nel centro di una circonferenza e tale che la misura dell'arco da esso individuato è uguale alla misura del raggio della circonferenza stessa. Facendo riferimento alla figura 1.43, l'angolo α formato

[10] in realtà quasi tutte le calcolatrici utilizzano la notazione sessadecimale.
[11] in genere l'unità di misura rad viene omessa.

dalle semirette ON e OM misura 1 radiante se l'arco MN misura quanto il raggio della circonferenza ($\overline{OM}$). Come si può facilmente intuire, il radiante ed il grado sono grandezze incommensurabili.

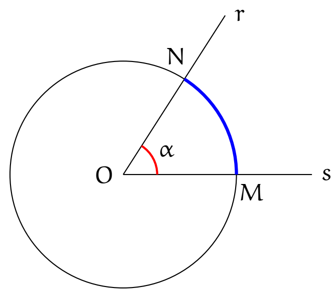


FIGURA 1.43: L'angolo con ampiezza di 1 radiante

❑ **Osservazione** La misura di un arco va fatta con una modalità differente rispetto a quella utilizzata per la misura dei segmenti. Si può immaginare di utilizzare come strumento di misura un metro flessibile, ovvero un filo flessibile ma inestensibile, che si può piegare ma non si può allungare o accorciare, su cui siano state tracciate, a distanza regolare, delle tacche corrispondenti a sottomultipli dell'unità di misura delle lunghezze; una di queste tacche viene assunta come origine del metro. Facendo combaciare l'origine del metro flessibile con il punto M e flettendo il metro in modo che si sovrapponga all'arco MN si otterrà la sua lunghezza.

Ricordando che il rapporto tra la misura della circonferenza ed il raggio vale 2π, dove π è il numero irrazionale $3,1415\ldots$ (i puntini indicano che la parte decimale è infinita e non periodica), possiamo intuire che il valore dell'angolo giro (360°), corrispondente ad un arco che coincide con l'intera circonferenza, vale 2π radianti.

Visto che un angolo giro corrisponde a 2π radianti, l'angolo piatto (180°) corrisponderà a π radianti, quindi per convertire le ampiezze degli angoli da gradi a radianti e viceversa è sufficiente impostare la seguente proporzione:

$$180^\circ : \pi = \alpha^\circ : \alpha$$

dove con α° abbiamo indicato l'ampiezza dell'angolo in gradi e con α la sua ampiezza in radianti. Da cui si ottiene

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ$$

Quindi, avendo un angolo espresso in radianti, per convertirlo in gradi si può utilizzare la prima formula inserendo al posto di α la sua effettiva misura in radianti, mentre se abbiamo un angolo espresso in gradi e lo vogliamo trasformare in radianti si può utilizzare la seconda formula inserendo al posto di α° l'effettiva misura dell'angolo in gradi.

Possiamo pertanto calcolare la misura in gradi di un angolo di 1 radiante ponendo nella prima formula $\alpha = 1$. Si ottiene così $\alpha^\circ = 180^\circ/\pi \simeq 57^\circ{,}297\,469\,362 \simeq 57^\circ 17' 51''$.

Riportiamo di seguito una tabella che fornisce i valori degli angoli più comuni espressi sia in gradi che in radianti.

angolo in gradi	angolo in radianti
360°	2π
270°	$3\pi/2$
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

Angoli negativi

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito l'angolo come l'insieme dei punti compresi tra due semirette aventi la stessa origine O. Possiamo però definire l'angolo anche come rotazione di una semiretta intorno alla propria origine, la misura di un angolo diventa allora la misura dell'entità della rotazione.

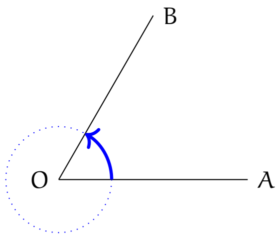


FIGURA 1.44: Il verso positivo nella misura degli angoli è quello antiorario

Dal momento che una rotazione può essere effettuata in due versi, orario o antiorario, si assume uno dei due versi di rotazione come positivo e l'altro negativo. Per motivi storici si è assunto per convenzione come positivo il verso di rotazione antiorario e negativo quello orario. Da questa definizione segue che $A\widehat{O}B = -B\widehat{O}A$, dove $A\widehat{O}B$ è l'angolo formato dalla semiretta OB rispetto alla semiretta OA (figura 1.44).

Inoltre, la misura di un angolo è definita a meno di un multiplo intero di 360°, ovvero gli angoli α e $\alpha + 360°$ hanno la stessa ampiezza, lo stesso dicasi per tutti gli angoli del tipo $\alpha + n \cdot 360°$ o $\alpha - n \cdot 360°$ con n intero. Per esempio, sono tra loro congruenti gli angoli di 45°, 405°, 765°, ...

✍ *Esercizi proposti:* 1.104, 1.105, 1.106, 1.107, 1.108, 1.109, 1.110, 1.111, 1.112, 1.113, 1.114, 1.115, 1.116, 1.117, 1.118, 1.119, 1.120, 1.121, 1.122, 1.123, 1.124

1.7 Poligoni e poligonale

Definizione 1.41. Si chiama *spezzata* una figura formata da una sequenza ordinata di segmenti uno consecutivo all'altro. I segmenti che formano la spezzata si chiamano *lati*, gli estremi dei segmenti si chiamano *vertici*.

Ogni vertice di una spezzata è quindi in comune a due lati, ad eccezione del primo vertice del primo segmento e dell'ultimo vertice dell'ultimo segmento che appartengono a un solo segmento.

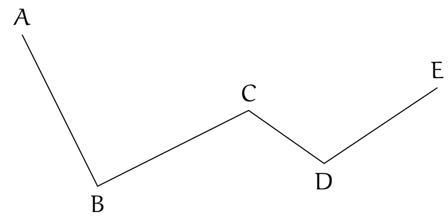
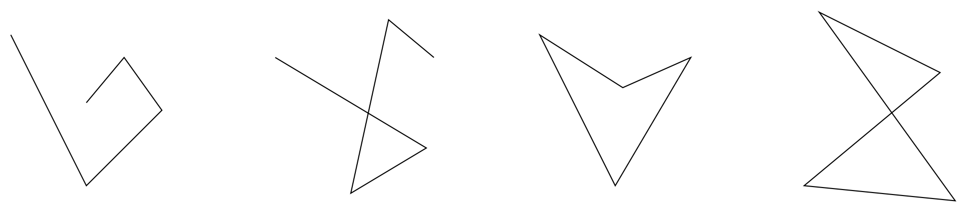


FIGURA 1.45: La linea $ABCDE$ è una spezzata, perché formata da segmenti consecutivi. I segmenti AB, BC, CD e DE sono i lati della spezzata, i punti A, B, C, D ed E sono i vertici

Definizione 1.42. Un spezzata si dice *chiusa* se il primo estremo del primo segmento coincide con l'ultimo estremo dell'ultimo segmento; si dice *aperta* se il primo estremo e l'ultimo estremo sono distinti.

Definizione 1.43. Un spezzata si dice *intrecciata* se almeno due suoi lati si intersecano in punti diversi dagli estremi; si dice *semplice* o *non intrecciata* se ogni coppia di lati non consecutivi non ha punti in comune.



F_1 (semplice, aperta) F_2 (intrecciata, aperta) F_3 (semplice, chiusa) F_4 (intrecciata, chiusa)

FIGURA 1.46: La figura F_1 è un spezzata semplice aperta (i lati non si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_2 è una spezzata intrecciata aperta (due lati si intersecano e gli estremi non coincidono); la figura F_3 è una spezzata semplice chiusa (non ci sono lati non consecutivi che si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati); la figura F_4 è una spezzata intrecciata chiusa (due lati si intersecano e ogni vertice è in comune a due lati)

Definizione 1.44. Si chiama *poligonale* una spezzata chiusa non intrecciata.

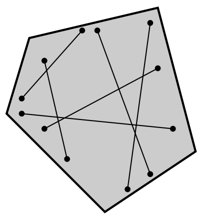
1.7.1 Poligono

Definizione 1.45. Si chiama *poligono* la figura formata da una poligonale e dalla parte finita di piano da essa delimitata.

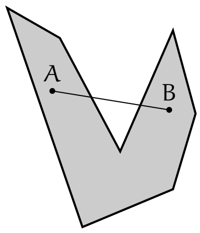
Definizione 1.46. In un poligono chiamiamo:

- *vertici* del poligono i vertici della poligonale;
- *lati* del poligono i lati della poligonale;
- *contorno* del poligono la poligonale stessa;
- *punti interni* i punti del poligono non situati sul contorno;
- *punti esterni* tutti i punti del piano che non sono interni e non appartengono al contorno;
- *perimetro* del poligono il segmento somma dei lati del poligono.

Definizione 1.47. Un poligono si dice *convesso* se è una figura convessa, cioè se il segmento che ha per estremi due suoi punti qualsiasi è interamente contenuto nel poligono, si dice *concavo* se non è convesso, cioè se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è contenuto interamente nel poligono.



(a) P_1 (poligono convesso)



(b) P_2 (poligono concavo)

FIGURA 1.47: Il poligono P_1 è convesso perché comunque si prendono due suoi punti interni, il segmento che li unisce è interno al poligono; il poligono P_2 è concavo perché il segmento AB cade in parte all'esterno del poligono

Nel seguito, quando parleremo di poligoni intenderemo sempre poligoni convessi.

Definizione 1.48. In un poligono chiamiamo:

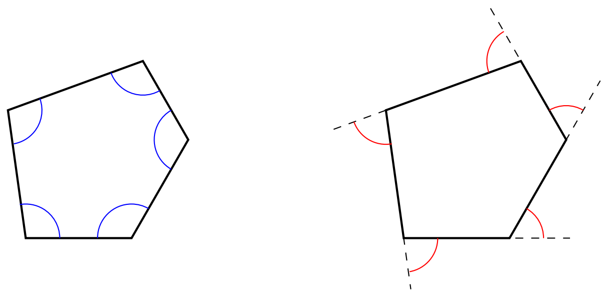
- *angolo interno* o *angolo del poligono* ognuno degli angoli che ha per lati le semirette che contengono due lati consecutivi del poligono e ha per vertice il vertice del poligono in comune a quei due lati;
- *angolo esterno* ciascun angolo adiacente ad un angolo interno.

Osservazioni

- Un poligono è convesso se ogni angolo interno è convesso.
- Un poligono è concavo se ha almeno un angolo interno concavo.

Osserva che per ogni angolo interno esistono due angoli esterni, congruenti tra di loro perché opposti al vertice, ovvero perché supplementari dello stesso angolo.

Inoltre diamo le seguenti definizioni:



(a) angoli interni (b) Angoli esterni

FIGURA 1.48: Nella figura (a) sono indicati gli angoli interni al poligono, nella figura (b) sono indicati gli angoli esterni, ognuno di essi è adiacente a un angolo interno

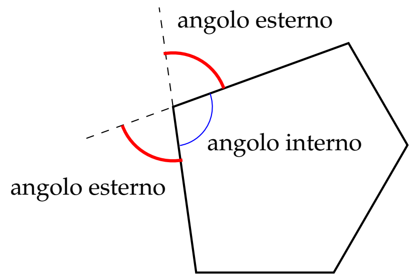


FIGURA 1.49: Ogni angolo interno ha due angoli esterni adiacenti ad esso

Definizione 1.49. In un poligono chiamiamo:

- *corda* ogni segmento che unisce due qualsiasi punti del contorno del poligono che non appartengono allo stesso lato;
- *diagonale* ogni corda che unisce due vertici non consecutivi.

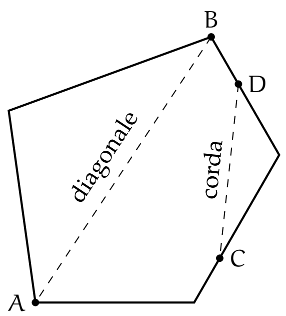


FIGURA 1.50: Il segmento AB è una diagonale del poligono poiché unisce i vertici non consecutivi A e B; il segmento CD è una corda poiché unisce due punti posti su due lati distinti del poligono

I poligoni hanno nomi diversi a seconda del loro numero di lati:

- *triangolo* è un poligono con tre lati;
- *quadrilatero* è un poligono con quattro lati;
- *pentagono* è un poligono con cinque lati;
- *esagono* è un poligono con sei lati;
- e così via.

Definizione 1.50. Un poligono si dice *equilatero* se ha tutti i lati congruenti tra loro.

Definizione 1.51. Un poligono si dice *equiangolo* se ha tutti gli angoli interni congruenti tra loro.

Definizione 1.52. Un poligono equiangolo e equilatero si dice *poligono regolare*.

✍ *Esercizi proposti:* 1.125, 1.126, 1.127, 1.128, 1.129, 1.130, 1.131, 1.132, 1.133, **??**

1.8 Esercizi

1.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.2 - Il metodo assiomatico, i concetti primitivi e le definizioni

1.1. Quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche?

a) «I matematici sono intelligenti» V F
b) «12 è un numero dispari» V F
c) «Pascoli è stato un grande poeta» V F
d) «Pascoli ha scritto La Divina Commedia» V F
e) «Pascoli ha scritto poesie» V F
f) «Lucia è una bella ragazza» V F
g) «Lucia ha preso 8 al compito di matematica» V F
h) «Che bella serata!» V F
i) «Il rombo è una figura storta» V F
j) «Per favore fate silenzio!» V F
k) «$2+2=5$» V F
l) «I miei insegnanti sono tutti laureati» V F

1.2. A partire dalle due proposizioni $p =$ «16 è divisibile per 2» e $q =$ «16 è divisibile per 4», costruisci le proposizioni $p \vee q$ e $p \wedge q$.

1.3. A partire dalle proposizioni $p =$ «18 è divisibile per 3» e $q =$ «18 è numero dispari» costruisci le proposizioni di seguito indicate e stabilisci il loro valore di verità

a) $p \vee q$ V F
b) $p \wedge q$ V F
c) $\neg p$ V F
d) $\neg q$ V F
e) $p \vee \neg q$ V F
f) $\neg p \wedge q$ V F
g) $p \wedge \neg q$ V F
h) $\neg p \vee \neg q$ V F
i) $\neg p \wedge \neg q$ V F
j) $\neg(p \wedge q)$ V F

1.4. A partire dalle proposizioni a = «20 è minore di 10», b = «20 è maggiore di 1», c = «20 è multiplo di 5», d = «20 è dispari», stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) $a \vee b$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $a \wedge c$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) $d \wedge a$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) $\neg a \wedge b$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

e) $a \vee \neg b$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

f) $\neg b \wedge \neg a$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

g) $(\neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge d)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

h) $(a \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg d)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

1.5. Date le proposizioni p = «Oggi è lunedì» e q = «Oggi studio matematica», scrivi in simboli le seguenti proposizioni:

a) «Oggi è lunedì e studio matematica»
b) «Oggi non è lunedì e studio matematica»
c) «Oggi è lunedì e non studio matematica»
d) «Oggi non è lunedì e non studio matematica»

1.6. In quale delle seguenti proposizioni è utilizzata la "o" inclusiva e in quali la "o" esclusiva?

a) «Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire»
b) «Luca sposerà Maria o Claudia»
c) «Fammi chiamare da Laura o da Elisa»
d) «Si raggiunge l'unanimità quando sono tutti favorevoli o tutti contrari»
e) «Vado al cinema con Carla o con Luisa»
f) «Per le vacanze andrò al mare o a Firenze»

1.7. A partire dalle proposizioni $p =$ «Oggi pioverà» e $\neg p =$ «Oggi non pioverà», scrivere le proposizioni $p \veebar \neg p$, $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$. Scrivere quindi la loro tabella della verità.

1.8. Scrivere le tabelle di verità delle seguenti formule

a) $p \wedge (p \vee q)$
b) $p \vee (p \wedge q)$
c) $p \veebar (p \wedge q)$
d) $p \wedge (p \veebar q)$
e) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
f) $(p \vee q) \wedge q$
g) $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
h) $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
i) $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$
j) $(\neg p \vee q) \wedge \neg q$
k) $(p \wedge q) \wedge \neg p$
l) $(p \vee r) \vee \neg q$

1.9. Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni

a) $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge r)$
b) $\neg(p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)$
c) $(p \vee \neg q) \wedge \neg r$
d) $p \vee \neg(r \veebar q)$
e) $(\neg p \veebar q) \wedge (r \vee q)$
f) $\neg(p \vee r) \wedge (r \veebar q)$
g) $(p \vee \neg q) \wedge \neg r$
h) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$
i) $\neg((p \veebar q) \wedge \neg r)$

1.10. Verificare che, date due proposizioni p e q, la proposizione composta $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ è equivalente alla proposizione $p \veebar q$. Dimostrare l'equivalenza verificando che le tavole della verità sono uguali.

1.11. Se $p \wedge q$ è falso, quale dei seguenti enunciati è vero?

a) $p \wedge \neg q$
b) $\neg p \wedge q$
c) $\neg p \wedge \neg q$
d) $\neg p \vee \neg q$

1.12. Qual è la negazione della frase «Ogni volta che ho preso l'ombrello non è piovuto»?

a) «Almeno una volta sono uscito con l'ombrello ed è piovuto»
b) «Quando esco senza ombrello piove sempre»
c) «Tutti i giorni in cui non piove esco con l'ombrello»
d) «Tutti i giorni che è piovuto ho preso l'ombrello»

1.13. Scrivi le negazioni delle seguenti frasi che contengono dei quantificatori:

a) «Al compito di matematica eravamo tutti presenti»
b) «Ogni giorno il professore ci dà compiti per casa»
c) «Ogni giorno Luca vede il telegiornale»
d) «Tutti i miei familiari portano gli occhiali»
e) «Tutti hanno portato i soldi per la gita»

1.14. Sono date le frasi p = «Mario è cittadino romano» e q = «Mario è cittadino italiano», scrivi per esteso le seguenti implicazioni e indica quale di esse è vera.

a) $p \Rightarrow q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ b) $q \Rightarrow p$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ c) $q \Leftrightarrow p$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.15. Trasforma nella forma «Se ... allora ...» le seguenti frasi:

a) «Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra»
b) «Quando piove prendo l'ombrello»
c) «I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5»
d) «Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza»

1.16. Date le proposizioni p, q, e r costruire la tavola di verità delle seguenti proposizioni

a) $p \Rightarrow \neg q$
b) $\neg p \Rightarrow q$
c) $(p \vee q) \Rightarrow \neg q$
d) $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$
e) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
f) $p \vee (p \Rightarrow q)$
g) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg q \vee r)$
h) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
i) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$
j) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
k) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
l) $\neg(\neg p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee \neg r)$

1.17. Completa i seguenti ragionamenti:

a) «Se un numero è multiplo di 10 allora è pari»; «il numero n non è pari quindi ....»
b) «Se il sole tramonta fa buio»; «il sole è tramontato quindi ....»

1.18. Distingui nelle seguenti frasi le definizioni dalle proposizioni o proprietà

a) «La Terra ruota su se stessa in un giorno» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$
b) «Il solstizio è il momento in cui il Sole raggiunge, nel suo moto apparente lungo l'eclittica, il punto di declinazione massima o minima» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$
c) «La cellula è l'unità fondamentale di tutti gli organismi viventi» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$
d) «I virus sono responsabili di alcune malattie» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$
e) «I numeri che hanno per ultima cifra 0 sono numeri pari» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$
f) «Un numero si dice pari se è divisibile per 2» $\boxed{D}$ $\boxed{P}$

1.19. Dimostra con un controesempio che l'affermazione «Tutti i multipli di 3 sono dispari» non è vera.

1.20 (I Giochi di Archimede, 2011)**.** Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. È uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?

a) Gabriele non è il capitano;
b) Andrea dice la verità;
c) Paolo dice la verità;
d) Andrea è il capitano;
e) Gabriele mente.

1.21 (Giochi d'autunno, 2010). Ecco le dichiarazioni rilasciate da quattro amiche:
Anna: «Io sono la più anziana»;
Carla: «Io non sono né la più giovane né la più anziana»;
Liliana: «Io non sono la più giovane»;
Milena: «Io sono la più giovane».
Il fatto è che una di loro (e solo una) ha mentito. Chi è, delle quattro amiche, effettivamente la più giovane?

1.22 (I Giochi di Archimede, 2010). Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità. Anna afferma: «Il colpevole è un maschio», Cecilia dice: «È stata Anna oppure è stato Enrico». Infine Enrico dice: «Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente». Chi ha commesso l'omicidio?

1.23 (I Giochi di Archimede, 2009). Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa. Anna dice: «Io ho un poker!» (quattro carte dello stesso valore). Bea dice: «Io ho tutte e cinque le carte di cuori». Caio dice: «Io ho cinque carte rosse». Infine Dino dice: «Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno lo stesso valore». Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?

1.24 (I Giochi di Archimede, 2008). Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinzione di qualcuno che: «su Papilla sono tutti grassi e sporchi». Quindi adesso sappiamo che:

a) «su Papilla almeno un abitante è magro e pulito»;
b) «su Papilla tutti gli abitanti sono magri e puliti»;
c) «almeno un abitante di Papilla è magro»;
d) «almeno un abitante di Papilla è pulito»;
e) «se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro».

1.25 (I Giochi di Archimede, 2000). Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-equo. Al ritorno, Anna dice: «Chiara è arrivata prima di Barbara»; Barbara dice: «Chiara è arrivata prima di Anna»; Chiara dice: «Io sono arrivata seconda». Sapendo che una sola di esse ha detto la verità

a) si può dire solo chi ha vinto,
b) si può dire solo chi è arrivata seconda,
c) si può dire solo chi è arrivata terza,
d) si può dire solo chi è arrivata ultima,
e) non si può stabile la posizione in classifica di nessuna.

1.26 (I Giochi di Archimede, 1999). «In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi». Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?

a) «In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati»;
b) «In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi;
c) «C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe»;
d) «C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato».

1.27 (I Giochi di Archimede, 1998)**.** Su un isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza. Il vecchio afferma: «Io sono paggio» e «Il ragazzo è cavaliere». Il ragazzo dice: «Io sono cavaliere» e «La ragazza è paggio». La ragazza afferma infine: «Io sono furfante» e «Il vecchio è paggio». Si può allora affermare che:

a) c'è esattamente un paggio;
b) ci sono esattamente due paggi;
c) ci sono esattamente tre paggi;
d) non c'è alcun paggio;
e) il numero dei paggi non è sicuro.

1.28 (I Giochi di Archimede, 1997)**.** «Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo». Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?

a) «Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo»;
b) «Se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio»;
c) «Se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio»;
d) «Se la sera non ho fame, allora non mangio troppo»;
e) «Se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio».

1.29. Dimostra che in ogni festa c'è sempre una coppia di persone che balla con lo stesso numero di invitati.

1.30. Mr. Smith, Mr. Taylor e Mr. Elder insegnano 6 diverse materie (Biologia, Geografia, Matematica, Storia, Inglese e Fisica), ciascuno di essi due materie. Abbiamo le seguenti informazioni: Gli insegnanti di Fisica ed Inglese sono vicini di casa; Mr. Smith è il più giovane dei tre. Mr. Elder gioca a poker con l'insegnante d'Inglese e con quello di Biologia ogni domenica. L'insegnante di Biologia è più vecchio di quello di Matematica. L'insegnante di Geografia, quello di Matematica e Mr. Smith andranno a fare un giro in bici il prossimo weekend. Associare ogni insegnante alle materie che insegna.

1.31 (Test di ammissione a Ingegneria 1999)**.** In una squadra di calcio giocano Amilcare, Bertoldo e Carletto nei ruoli di portiere, centravanti, libero (non necessariamente in quest'ordine). Si sa che:

1. Il centravanti è il più basso di statura ed è scapolo;
2. Amilcare è il suocero di Carletto ed è più alto del portiere.

Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a) Bertoldo è il genero di Carletto;
b) Bertoldo ha sposato la sorella di Carletto;
c) Carletto è il portiere;
d) Carletto è scapolo;
e) Amilcare è il centravanti.

1.32 (Test di ammissione a Medicina 1997)**.** Un alano, un boxer, un collie e un dobermann vincono i primi 4 premi ad una mostra canina. I loro padroni sono il Sig. Estro, il Sig. Forti, il

Sig. Grassi ed il Sig. Rossi, non necessariamente in quest'ordine. I nomi dei cani sono Jack, Kelly, Lad, Max, non necessariamente in quest'ordine. Disponiamo inoltre delle seguenti informazioni:

1. cane del Sig. Grassi non ha vinto né il primo, né il secondo premio;
2. il collie ha vinto il primo premio;
3. Max ha vinto il secondo premio;
4. l'alano si chiama Jack;
5. il cane del Sig. Forti, il dobermann, ha vinto il quarto premio;
6. il cane del Sig. Rossi si chiama Kelly.

Da quale cane è stato vinto il primo premio?

a) Il cane del Sig. Estro
b) Il cane del Sig. Rossi
c) Max
d) Jack
e) Lad

1.3 - Gli enti fondamentali della geometria

1.33. Gli enti primitivi della geometria sono quelli...

a) che occorre definire;
b) che occorre dimostrare;
c) che non si definiscono;
d) che si conoscono già per averli studiati prima.

1.34. Gli assiomi sono:

a) proposizioni note che si preferisce non dimostrare per non appesantire lo studio;
b) proposizioni che è necessario dimostrare;
c) proposizioni che si assumono vere senza dimostrazione;
d) proposizioni che non si definiscono;
e) proposizioni che non si dimostrano perché la loro dimostrazione è molto semplice.

1.35. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) Due punti sono sempre allineati
V F
b) Tre punti sono sempre allineati
V F
c) Tre punti sono sempre complanari
V F
d) Tre punti allineati individuano un unico piano
V F
e) Una retta e un punto esterno ad essa individuano un piano
V F

1.36. Su una retta si segnano quattro punti A, B, C e D. Quanti segmenti restano individuati?

1.37. Date tre semirette a, b e c aventi la stessa origine O, quanti angoli restano individuati?

1.38. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, tre punti non allineati e posti sullo stesso piano.

1.39. Unisci in tutti i modi possibili, mediante delle rette, quattro punti, a tre a tre non allineati, di uno stesso piano.

1.40. Quattro rette a due a due incidenti quanti punti di intersezione individuano complessivamente?

1.41. Quale assioma è rappresentato nella figura 1.51?

a) tre punti distinti non allineati determinano uno ed un solo piano che li contiene;
b) su un piano esistono infiniti punti ed infinite rette;
c) la retta passante per due punti distinti di un piano giace completamente nel piano;
d) su una retta esistono infiniti punti.

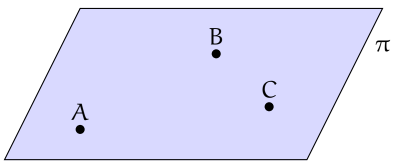


FIGURA 1.51: Esercizio 1.41

1.42. Rispondi a voce alle seguenti domande

a) Qual è l'origine della parola "geometria"?
b) Qual è la differenza tra "assioma" e "teorema"?
c) Qual è la differenza tra "ente definito" e "ente primitivo"?

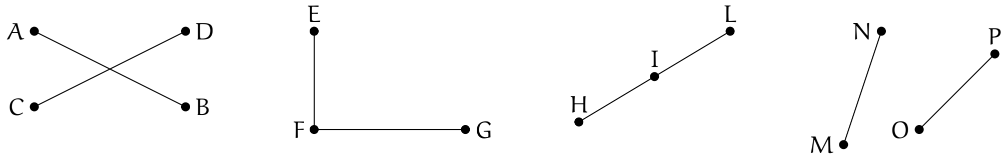
1.4 - Prime definizioni

1.43. Disegna una retta a e una retta b che si incontrano in un punto X, disegna anche una retta c che incontra la a in Y e la b in Z. Elenca tutte le semirette e tutti i segmenti che si vengono a formare.

1.44. Disegna due rette a e b parallele tra di loro; disegna poi la retta c che interseca la a in A e la b in B; disegna poi la retta d che interseca a in A e b in C. Quali segmenti si vengono a formare?

1.45. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A \in r$ e $B \in r$, $B \in s$ e $C \in s$, $A \in t$ e $C \in t$
b) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = AD$. $AB \cup CD = \ldots$
c) $AB \subset r$, $CD \subset r$, $AB \cap CD = \emptyset$. $AB \cup CD = \ldots$
d) $AB \subset r$, $CD \subset s$, $r \parallel s$, $P \notin r \cup s$



AB e CD sono ....

EF e FG sono ....

HI e IL sono ....

MN e OP sono ....

FIGURA 1.52: Esercizio 1.46

1.46. Attribuisci il nome corretto a ciascuna coppia di segmenti rappresentati nella figura 1.52 tra: adiacenti, incidenti, disgiunti, consecutivi.

1.47. Su una retta r disegna i punti A e B, sapendo che A precede B, disegna i punti C e D sapendo che D è compreso tra A e B e che C segue B. Indica tutti i segmenti che si vengono a formare.

1.48. Dati cinque punti nel piano, in modo che a tre a tre non siano allineati, quante rette passanti per due di questi punti è possibile tracciare? Sai esprimere il legame generale tra il numero N di punti e il numero M di rette che si possono tracciare?

1.49. Vero o falso?

a) Per un punto passa una sola retta [V] [F]
b) Per due punti passa una sola retta [V] [F]
c) Per tre punti passano almeno tre rette [V] [F]
d) Due punti distinti del piano individuano sempre un segmento [V] [F]
e) Due rette distinte del piano hanno al più un punto in comune [V] [F]
f) Tre punti distinti del piano individuano almeno tre rette [V] [F]
g) Due semirette distinte del piano che hanno la stessa origine sono opposte [V] [F]
h) Alcuni segmenti consecutivi non sono adiacenti [V] [F]
i) Due angoli che hanno il vertice in comune sono consecutivi [V] [F]
j) Per un punto del piano passano solo due rette [V] [F]
k) Due segmenti posti sulla stessa retta sono adiacenti [V] [F]
l) Due segmenti consecutivi hanno in comune un estremo e nessun altro punto [V] [F]

1.50. Due segmenti si dicono adiacenti se:

a) appartengono alla stessa retta;
b) sono consecutivi ma non appartengono alla stessa retta;
c) non sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
d) sono consecutivi e appartengono alla stessa retta;
e) appartengono alla stessa retta e hanno gli estremi coincidenti.

1.51. Un angolo è convesso se:

a) è adiacente ad un altro angolo;

b) i suoi lati sono rette incidenti;
c) contiene il prolungamento dei suoi lati;
d) è consecutivo ad un altro angolo;
e) non contiene il prolungamento dei suoi lati.

1.52. Due angoli si dicono opposti al vertice se:

a) sono sullo stesso piano;
b) sono uno concavo e uno convesso;
c) hanno il vertice in comune;
d) i lati dell'uno sono contenuti nell'altro;
e) i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro.

1.53. Quanti angoli individuano tre semirette aventi la stessa origine? Fai un disegno.

1.54. Dai la definizione di "angolo".

1.55. Qual è la differenza tra angolo piatto e angolo nullo? *Fai riferimento alle definizioni e non al fatto che il primo misura* $360°$ *e il secondo* $0°$.

1.56. Qual è la differenza tra angoli consecutivi e angoli adiacenti?

1.57. Per ciascun esempio riportato nella figura 1.53 scrivi di che angolo si tratta relativamente agli angoli colorati in grigio, scegliendo i termini tra: angolo concavo, angoli adiacenti, angoli consecutivi, angoli opposti al vertice.

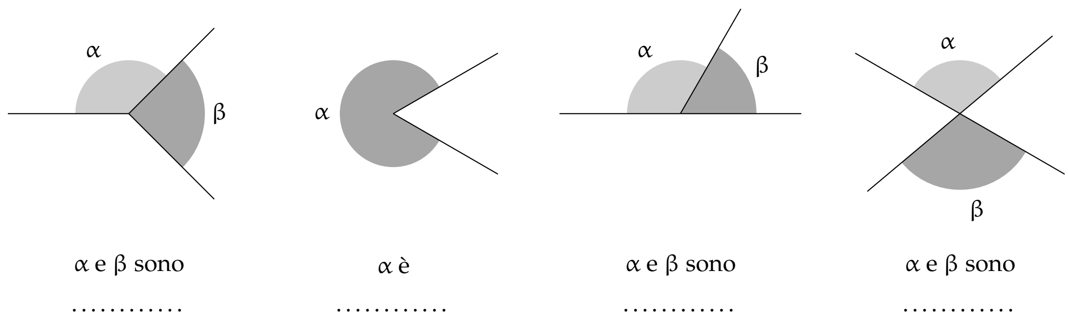


FIGURA 1.53: Esercizio 1.57

1.58. Rappresenta graficamente ciascuna delle seguenti situazioni:

a) $A\hat{O}B \cup A\hat{O}C = A\hat{O}B$;
b) $A\hat{O}B \cap A\hat{O}C = A\hat{O}B$;
c) $A\hat{O}B \cap C\hat{O}D = C\hat{O}B$ e $A\hat{O}B \cup C\hat{O}D = A\hat{O}B$.

1.59. Facendo riferimento alla figura 1.54 indica

a) una coppia di segmenti consecutivi . . . . ;
b) una coppia di segmenti adiacenti . . . . ;
c) una coppia di rette incidenti . . . . ;
d) una coppia di rette parallele . . . . ;
e) una coppia di angoli consecutivi . . . . ;
f) una coppia di angoli adiacenti . . . . ;
g) una coppia di angoli opposti al vertice . . . . ;
h) un angolo concavo . . . . ;

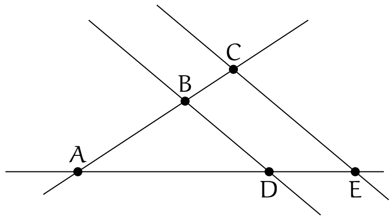


FIGURA 1.54: Esercizio 1.59

i) un angolo convesso . . . .

1.60. Indica quali delle figure geometriche riportate nella figura 1.55 sono convesse

a) A, B, C, G; b) B, C, D, F; c) B, C, D; d) B, C; e) D, E, F, G.

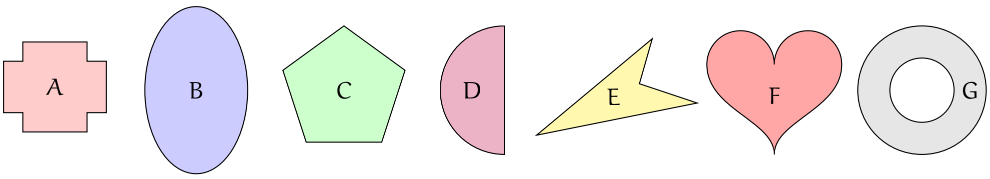


FIGURA 1.55: Esercizio 1.60

1.61. Scrivi per esteso nel linguaggio comune quanto è indicato in simboli e rappresenta con un disegno tutti i casi possibili: $(P \in r) \wedge (P \in s) \wedge (Q \in r)$.

1.62. Descrivi la costruzione della figura 1.56, dove le rette c e d sono parallele.

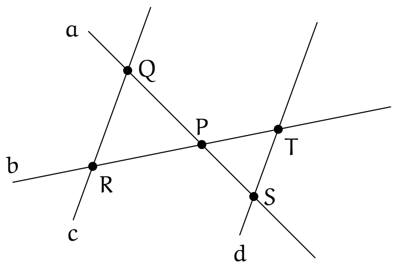


FIGURA 1.56: Esercizio 1.62

1.63. Se P è centro di un fascio di rette e A è un punto dello stesso piano, è vero che nel fascio di centro P esiste una retta passante per A?

1.64. Motiva la verità o la falsità della proposizione: «Tutte le rette incidenti formano 2 coppie di angoli opposti al vertice».

1.65. Siano a, b, c, d quattro semirette aventi l'origine in comune O disposte in ordine antiorario come nella figura 1.57. Individua, aiutandoti con il disegno, quali sono gli angoli che si ottengono dalle seguenti operazioni:

a) $a\widehat{O}d \cap d\widehat{O}b$;
b) $d\widehat{O}c \cup c\widehat{O}b$;
c) $c\widehat{O}b \cup c\widehat{O}a$;
d) $a\widehat{O}b \cap d\widehat{O}b$;
e) $c\widehat{O}a \cap d\widehat{O}b$.

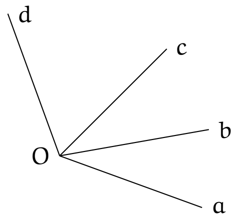


FIGURA 1.57: Esercizio 1.65

1.5 - Confronto e operazioni tra segmenti e angoli

1.66. Due angoli sono complementari e uno è doppio dell'altro. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) uno è retto e l'altro è piatto;
b) uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro i 2/3 dell'angolo retto;
c) uno è 1/3 dell'angolo retto e l'altro 1/6 dell'angolo retto;
d) uno è 1/2 dell'angolo retto e l'altro è retto;
e) uno è 2/3 dell'angolo retto e l'altro i 4/6 dell'angolo retto.

1.67. Siano α e β due angoli consecutivi esplementari e siano a e b le loro bisettrici. L'angolo tra a e b è

a) piatto;
b) retto;
c) nullo;
d) non si può sapere.

1.68. Se α e β sono due angoli di vertice O, consecutivi e complementari e a e b le loro bisettrici, allora dell'angolo $a\widehat{O}b$ si può dire che:

a) è uguale all'angolo retto;
b) è la metà di un angolo retto;
c) è la terza parte di un angolo retto;
d) è la quarta parte di un angolo retto;
e) non è possibile determinarne l'ampiezza.

1.69. Le bisettrici di due angoli adiacenti:

a) sono parallele;
b) sono lati di un angolo retto;
c) sono lati di un angolo concavo;
d) coincidono;
e) sono semirette opposte.

1.70. Due angoli si dicono complementari quando:

a) sono consecutivi;
b) sono angoli opposti al vertice;
c) la loro somma è un angolo retto;
d) ciascuno di essi è acuto;
e) ciascuno è la metà di un angolo retto.

1.71. Dati due segmenti adiacenti AB e BC tali che $AB \cong \frac{1}{3} \cdot BC$, allora per $AC = AB + BC$ si può dire che:

a) $AC \cong \frac{1}{4} \cdot BC$;
b) $AC \cong 3 \cdot BC$;
c) $AC \cong 2 \cdot BC$;
d) $AC \cong \frac{1}{2} \cdot BC$;
e) $AC \cong \frac{4}{3} \cdot BC$.

1.72. Due segmenti AB e CD appartengono alla stessa retta e hanno lo stesso punto medio. Si può affermare che:

a) $AB \cong CD$; b) $AC \cong CD$; c) $DB \cong DC$; d) $AC \cong BD$; e) $AC \cong AB$.

1.73. Per ciascuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, e spiegare perché

a) l'angolo retto è la metà dell'angolo giro V F
b) ogni angolo convesso ha due bisettrici V F
c) due angoli che hanno in comune il vertice sono consecutivi V F
d) un angolo ottuso è maggiore di qualunque angolo acuto V F
e) sommando due angoli acuti si può ottenere un angolo piatto V F

1.74. Tre semirette a, b, c uscenti da uno stesso punto dividono il piano in tre angoli congruenti. Dopo aver rappresentato le semirette, traccia la semiretta b_1 opposta di b. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) b_1 è perpendicolare alla semiretta a;
b) b_1 è bisettrice dell'angolo formato da a e c;
c) b_1 è perpendicolare alla semiretta c;

1.75. Dato l'angolo acuto $A\hat{O}B$, sia OC la sua bisettrice. Sia poi OD una semiretta esterna all'angolo come nella figura 1.58, quale relazione è vera?

a) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A - D\hat{O}B)$;
b) $C\hat{O}B \cong (A\hat{O}D - A\hat{O}B)$;
c) $C\hat{O}B \cong (B\hat{O}D - C\hat{O}B)$;
d) $C\hat{O}B \cong \frac{1}{2} \cdot (D\hat{O}A + D\hat{O}B)$.

1.76. Individua tra gli angoli rappresentati nella figura 1.59 quello piatto, quello retto, quello acuto, quello ottuso e quello concavo, scrivendolo nelle relative etichette. Per ciascuno di essi traccia la bisettrice.

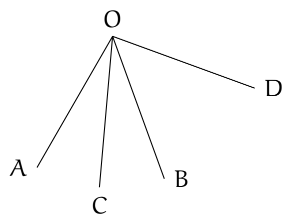


FIGURA 1.58: Esercizio 1.75

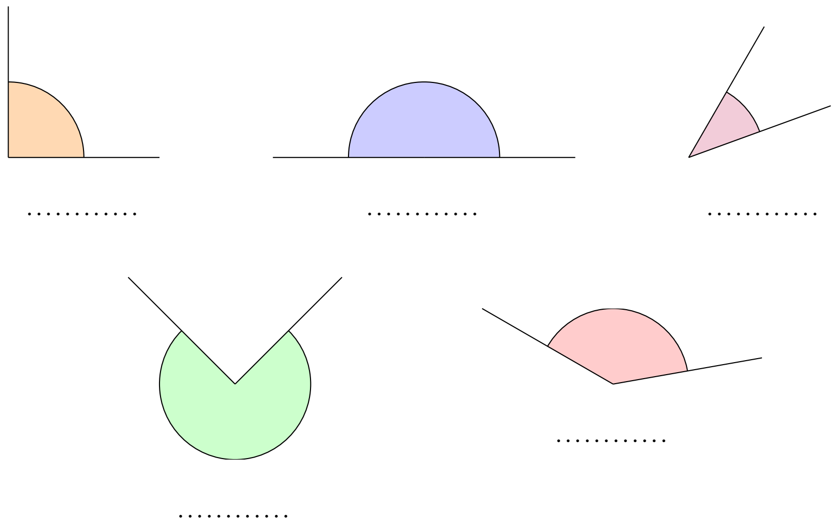


FIGURA 1.59: Esercizio 1.76

1.77. Per ognuna delle seguenti affermazioni indica se è vera oppure falsa

a) Sommando due angoli acuti si ottiene sempre un angolo acuto V F
b) Sommando due angoli piatti si ottiene un angolo giro V F
c) Sommando un angolo acuto e uno retto si ottiene un angolo ottuso V F
d) Sommando due angoli retti si ottiene un angolo giro V F
e) Sommando un angolo piatto e un angolo acuto si ottiene un angolo concavo V F
f) Sommando due angoli convessi si ottiene sempre un angolo convesso V F
g) Sommando un angolo retto e un angolo piatto si ottiene un angolo giro V F

1.78. Individua l'angolo

a) La differenza tra un angolo piatto è un angolo retto è un angolo . . . .
b) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo . . . .
c) La differenza tra un angolo acuto e un angolo retto è un angolo . . . .
d) La differenza tra un angolo giro e un angolo piatto è un angolo . . . .
e) Il doppio di un angolo piatto è un angolo . . . .
f) Il doppio di un angolo retto è un angolo . . . .

1.79. Spiega perché se due angoli sono complementari i loro doppi sono supplementari.

1.80. Verifica, aiutandoti con un disegno, che se $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{C} < \widehat{D}$ allora $\widehat{A} + \widehat{C} < \widehat{B} + \widehat{D}$.

1.81. Un angolo α è retto e un angolo β è la sesta parte di un angolo piatto. A quale frazione di angolo retto corrisponde la somma $\alpha + \beta$?

1.82. Dati quattro segmenti $AB > BC > CD > DE$. Verifica, aiutandoti con dei disegni, che:

a) $AB - CD > BC - CD$;
b) $AB + DE > BC + CD$.

1.83. Disegna due angoli consecutivi α e β, disegna l'angolo γ adiacente ad α non contenente β e l'angolo δ adiacente a β non contenente α. Gli angoli $\gamma + \delta$ e $\alpha + \beta$ sono:

a) complementari;
b) supplementari;
c) opposti al vertice;
d) esplementari.

1.84. Su una semiretta di origine A segna il segmento AB, il segmento $BC \cong 3 \cdot AB$ e il segmento $CD \cong AB$, i punti sono consecutivi secondo l'ordine alfabetico. Secondo quale numero frazionario AD è multiplo di BC?

1.85. Su una semiretta di origine O si hanno i segmenti OA e OB con $OB > OA$. Se M è il punto medio di OA e N è il punto medio di OB, quale delle due seguenti relazioni è vera?

a) $MN \cong \frac{1}{2} \cdot (OB - OA)$;
b) $MN \cong \frac{1}{2} \cdot (OB + OA)$.

1.86. Su una semiretta di origine O si prendono i punti A, B e C con $OC > OB > OA$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di BC. Quale delle seguenti relazioni è vera?

a) $MN \cong \frac{1}{2} \cdot (OB + OA)$;
b) $MN \cong \frac{1}{2} \cdot (OA + BC)$;
c) $MN \cong \frac{1}{2} \cdot (OC + AB)$.

1.87. Su una retta, i punti A, B, C, D si susseguono secondo l'ordine alfabetico. Se AB è congruente a CD i punti medi di BC e AD coincidono? Spiega perché?

1.88. Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r e non aventi alcun punto in comune. Dimostra che AC è congruente a BD.

1.89. Siano AB e CD due segmenti congruenti disposti su una retta r, non aventi alcun punto in comune e in modo che AB preceda CD. Dimostra che il punto medio di BC è anche punto medio di AD.

1.90. Siano AB e CD due segmenti congruenti adiacenti, siano M e N i rispettivi punti medi, dimostra che MN è congruente a CD.

1.91. Siano AB e CD due segmenti congruenti adiacenti tali che $BC \cong 3 \cdot AB$, siano M e N i rispettivi punti medi, dimostra che $MN \cong \frac{2}{3} \cdot BC$.

1.92. Siano AB e BC due segmenti adiacenti non necessariamente congruenti, sia M il punto medio di AC ed N il punto medio di BC, dimostra che $MN \cong \frac{1}{2} \cdot AB$.

1.93. Dati due segmenti adiacenti AB e BC e M e N i loro rispettivi punti medi, dimostrare che $AB \cong MN$.

1.94. Siano AB e BC due segmenti adiacenti e siano M e N i loro rispettivi punti medi. Dimostrare che se $AB < BC$ allora $AB < MN < BC$.

1.95. In un piano gli angoli $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}D$ sono adiacenti. Sia OF la bisettrice di $A\widehat{O}C$ e OE la bisettrice di $C\widehat{O}D$. Spiega perché $F\widehat{O}E$ è retto.

1.96. Quattro semirette con origine nello stesso punto dividono un angolo giro in quattro angoli α, β, γ, δ disposti in senso antiorario secondo l'ordine alfabetico. Si sa che α è congruente a γ e β è congruente a δ. Dimostra che ci sono alcune semirette opposte, quali sono?

1.97. Disegna un angolo convesso e i suoi complementari consecutivi, spiega come hai costruito gli angoli complementari. Spiega perché i complementari dello stesso angolo sono congruenti.

1.98. Sia M il punto medio del segmento AB e sia P un punto compreso tra M e B. Che relazione esiste tra MP e la differenza $AP - BP$? *Per aiutarti costruisci il punto* Q *tale che* $QM \cong MP$.

1.99. Sia $A\widehat{O}B$ un angolo qualunque e OC la sua bisettrice. Sia OD una semiretta esterna all'angolo $A\widehat{O}B$. Che relazione c'è tra $C\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}D + B\widehat{O}D$? *Per aiutarti traccia la bisettrice di* $B\widehat{O}D$.

1.100. Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti formano un angolo retto.

1.101. Due rette incidenti formano quattro angoli, dimostra che le bisettrici degli angoli sono tra loro perpendicolari.

1.102. Siano $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$ due angoli convessi consecutivi, siano d ed e le loro rispettive bisettrici. Dimostra che $a\widehat{O}c \cong 2 \cdot d\widehat{O}e$.

1.103. Dati due angoli consecutivi $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$, e le loro rispettive bisettrici d ed e, dimostra che se $d\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}e$ sono complementari allora gli angoli $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$ sono adiacenti. Dimostra anche che se $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$ sono adiacenti allora $d\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}e$ sono complementari.

1.6 - La misura

1.104. Due segmenti adiacenti AB e BC misurano rispettivamente 12 cm e 15 cm, calcola la misura della distanza tra i loro punti medi M e N.

1.105. Dati due segmenti AB e CD, con $\overline{AB} = 5$ cm e $\overline{CD} = 6$ cm, sottrai dalla loro somma la loro differenza e verifica che si ottiene un segmento congruente al doppio del segmento minore.

1.106. Il triplo di un segmento AB uguaglia il quadruplo di un segmento CD; determinare il rapporto tra AB e CD.

1.107. Due segmenti AP e PB sono tali che $\frac{AP}{PB} = \frac{4}{7}$; determina la misura del segmento $AB = AP + PB$, sapendo che AP misura 16 cm.

1.108. I segmenti OA, AB e BC sono adiacenti; M ed N sono rispettivamente i punti medi di OA e di BC. Se $\overline{OA} = 4$ m, $\overline{AB} = 7$ m e $\overline{MN} = 14$ m, quanto misura BC?

1.109. Su una semiretta di origine O sono disposti tre punti A, B, C tali che $\overline{OB} = 4\overline{AB}$, $\overline{OB} = 16$ cm, BC supera AB di 2 cm. Determina la lunghezza di BC.

1.110. Calcola la misura dell'ampiezza di due angoli di cui si sa che sono complementari e che la loro differenza misura $12°30'$.

1.111. Calcola la misura di due angoli adiacenti, di cui si sa che uno è 3/4 dell'altro.

1.112. Un angolo che sia i 3/5 di un angolo giro misura

a) 72°;
b) 216°;
c) 330°;
d) 550°.

1.113. Se ad un angolo retto sommo i suoi 5/3 ottengo un angolo la cui misura è

a) 240°;
b) 150°;
c) 144°;
d) 125°.

1.114. Le quattro semirette a, b, c, d hanno la stessa origine O e sono disposte in senso antiorario; m è la bisettrice sia dell'angolo $a\widehat{O}d$ che dell'angolo $b\widehat{O}c$. Sapendo che $b\widehat{O}c$ misura 70° e che $a\widehat{O}d$ misura 110°, quanto misurano gli angoli $a\widehat{O}b$ e $c\widehat{O}d$?

1.115. La somma di due angoli è 3/4 di un angolo retto. Sapendo che uno è doppio dell'altro quale frazione di angolo retto è ciascuno dei due angoli?

1.116. Disegna tre angoli consecutivi $a\widehat{O}b$, $b\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}d$ di cui si sa che la loro somma è un angolo piatto e che $a\widehat{O}b$ è 2/3 dell'angolo piatto. Determina quanto misura l'angolo formato dalle bisettrici degli angoli $b\widehat{O}c$ e $c\widehat{O}d$.

1.117. Di due angoli adiacenti uno è i sette terzi dell'altro; calcola l'ampiezza di ciascun angolo.

1.118. La somma di tre angoli misura 200°; sapendo che il primo è cinque terzi del secondo e questo è tre quarti del terzo, trovare l'ampiezza di ognuno.

1.119. La somma di tre angoli consecutivi è un angolo giro. Sapendo che il primo è due terzi del secondo e questo è tre quarti del terzo, qual è l'ampiezza di ogni angolo?

1.120. Determinare la misura dei due segmenti AB e CD sapendo che $AB \cong \frac{5}{7} \cdot CD$ e che la loro somma è 24 cm.

1.121. Determinare la misura di due segmenti sapendo che il loro rapporto è 5/7 e la loro differenza è 12 cm.

1.122. La somma di due segmenti è 21 cm e il minore di essi supera di 5 cm i 3/4 del maggiore. Calcola la misura di ciascun segmento.

1.123. Determina la lunghezza di due segmenti sapendo che l'uno supera l'altro di 12 cm e che la loro somma è 102 cm.

1.124. Un segmento, lungo 59 cm, è stato diviso in parti. Sapendo che i 5/6 di una parte sono uguali ai quattro settimi dell'altra, qual è la lunghezza di ogni parte?

1.7 - Poligoni e poligonale

1.125. Quante diagonali ha un triangolo?

a) nessuna; b) 1; c) 2; d) 3.

1.126. Quante diagonali puoi tracciare dal vertice di un poligono di 6 lati?

a) 6; b) 5; c) 4; d) 3.

1.127. Traccia l'angolo esterno relativo agli angoli interni indicati con un arco nella figura 1.60.

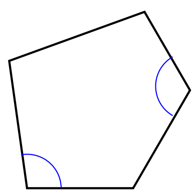


FIGURA 1.60: Esercizio 1.127

1.128. Quali tra le seguenti figure geometriche sono sempre congruenti tra loro?

a) Tutti i punti V F
b) Tutte le rette V F
c) Tutte le semirette V F
d) Tutti i semipiani V F
e) Tutti gli angoli V F
f) Tutti i poligoni convessi V F
g) Tutti i triangoli V F
h) Tutti i triangoli equilateri V F
i) Tutti i quadrati V F

1.129 (Prove invalsi 2006). Che cosa si definisce “diagonale” in un poligono convesso? Un segmento che

a) congiunge due vertici non consecutivi del poligono;
b) congiunge due vertici qualsiasi del poligono;
c) congiunge i punti medi di due lati consecutivi del poligono;
d) divide il poligono in due parti congruenti.

1.130 (Prove invalsi 2006). Scegli tra le figure riportate nella figura 1.61 quella in cui risulta vera l’uguaglianza $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$.

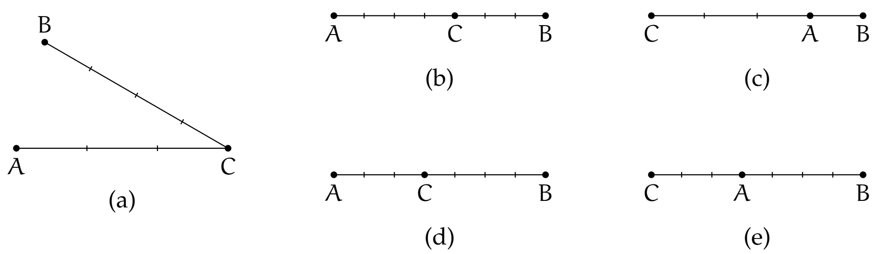


FIGURA 1.61: Esercizio 1.130

1.131 (Prove invalsi 2005). Due segmenti misurano 5 dm e 30 cm rispettivamente. Qual è il rapporto fra la lunghezza del secondo segmento e quella del primo?

a) 6; b) 5/3; c) 3/5; d) 1/6.

1.132 (Prove invalsi 2005). I punti A, B e C sono allineati come nella figura 1.62. Se l’angolo $A\widehat{B}E$ misura 54° e BD è la bisettrice dell’angolo $E\widehat{B}C$, quanto misura l’angolo $D\widehat{B}C$?

a) 26°; b) 36°; c) 54°; d) 63°.

1.133 (Prove invalsi 2005). Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali. Un poligono non è regolare se e solamente se . . .

a) tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali;
b) tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali;
c) almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali;
d) almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

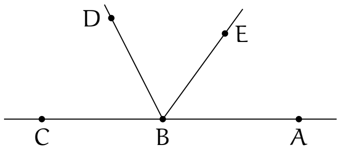


FIGURA 1.62: Esercizio 1.132

1.8.2 Risposte

1.1. a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) V, h) F, i) F, j) F, k) V, l) V.

1.3. a) V, b) F, c) F, d) V, e) V, f) F, g) V, h) V, i) F, j) V.

1.5. a) $p \wedge q$, b) $\neg p \wedge q$, c) $p \wedge \neg q$, d) $\neg p \wedge \neg q$.

1.6. a) o escl., b) o escl., c) o incl., d) o escl., e) o escl., f) o escl.

1.11. d.

1.12. a.

1.13.

a) «Al compito di matematica alcuni non erano presenti»
b) «Almeno un giorno il professore non ha dato i compiti per casa»
c) «Almeno un giorno Luca non vede il telegiornale»
d) «Almeno uno dei miei familiari non porta gli occhiali»
e) «Alcuni non hanno portato i soldi per la gita»

1.14. a) V, b) F, c) F.

1.18. a) P, b) D, c) D, d) P, e) P, f) D.

1.19. Un controesempio è 6, che è pari.

1.20. a.

1.22. Anna.

1.23. Bea.

1.24. e.

1.25. c.

1.33. c.

1.34. c.

1.35. a) V, b) F, c) V, d) V, e) V.

1.41. a.

1.49. a) F, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) F, h) F, i) F, j) F, k) F, l) V.

1.50. e.

1.51. e.

1.52. e.

1.60. c.

1.63. Sì.

1.67. a.

1.68. b.

1.69. b.

1.70. c.

1.71. e.

1.72. d.

1.73. a) F, b) F, c) F, d) V, e) F.

1.74. b.

1.75. a.

1.77. a) F, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F, g) F.

1.81. $\frac{4}{3}$.

1.83. b.

1.84. $\frac{5}{3}$.

1.85. a.

1.86. c.

1.104. 13,5 cm.

1.106. $\frac{4}{3}$.

1.107. 44 cm.

1.108. 10 m.

1.109. 6 cm.

1.110. $38°45'$ e $51°15'$.

1.111. $\frac{3}{7}\pi$ (circa $77°8'34''$) e $\frac{4}{7}\pi$ (circa $102°51'26''$).

1.112. b.

1.113. a.

1.114. $90°$ e $90°$.

1.115. $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

1.116. $30°$.

1.117. $54°$ e $126°$.

1.118. $50°$, $66°40'$ e $83°20'$.

1.119. $80°$, $120°$ e $160°$.

1.120. $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{CD} = 14$ cm.

1.121. 30 cm e 42 cm.

1.122. $\frac{64}{7}$ cm e $\frac{83}{7}$ cm.

1.123. 45 cm e 57 cm.

1.124. 24 cm e 35 cm.

1.125. a.

1.126. d.

1.128. a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) F, g) F, h) F, i) F.

1.129. a.

1.130. d.

1.131. c.

1.132. d.

1.133. d.

Congruenza nei triangoli 2

"Triangle Shapes"
Foto di maxtodorov
http://www.flickr.com/photos/maxtodorov/3066505212/
Licenza: Creative Commons Attribution

2.1 Definizioni relative ai triangoli

Definiamo gli elementi principali di un triangolo

Definizione 2.1.

- Un *triangolo* è un poligono di tre lati.
- Si chiamano *vertici* gli estremi dei lati.
- Un vertice si dice *opposto a un lato* se non appartiene a quel lato.
- Si chiamano *angoli interni* del triangolo i tre angoli formati dai lati.
- Un angolo interno si dice *angolo compreso tra due lati* quando i lati dell'angolo contengono dei lati del triangolo.
- Un angolo interno si dice *angolo adiacente a un lato* del triangolo quando uno dei suoi lati contiene quel lato del triangolo.
- Un angolo si dice *angolo esterno* al triangolo se è un angolo adiacente a un angolo interno.
- Si dice *bisettrice* relativa a un vertice, il segmento di bisettrice dell'angolo al vertice che ha per estremi il vertice stesso e il punto in cui essa incontra il lato opposto.
- Si dice *mediana* relativa a un lato il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.
- Si dice *altezza* di un triangolo relativa a un suo lato il segmento di perpendicolare che ha per estremi il vertice opposto al lato e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta contenente il lato.
- Si dice *asse* di un triangolo, relativo a un suo lato, la perpendicolare al lato condotta nel suo punto medio.

Nel triangolo (a) della figura seguente, A, B e C sono i vertici del triangolo, il vertice A è opposto al lato a, l'angolo α è interno al triangolo ed è compreso tra i lati AB e AC, mentre l'angolo β è esterno. Nel triangolo (b) AL è la bisettrice dell'angolo nel vertice A, AH è altezza relativa alla base BC, AM è la mediana relativa al lato BC e la retta r è l'asse di BC.

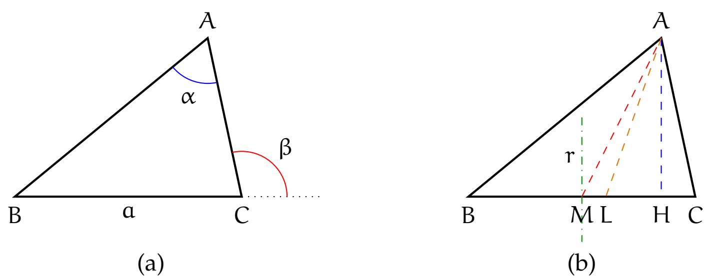
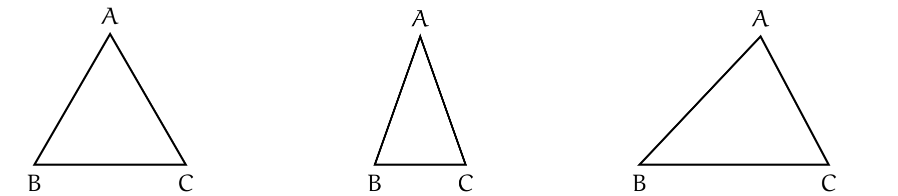


FIGURA 2.1: Triangolo. Vertici, angoli, bisettrice, mediana, asse.

I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati

Definizione 2.2.

- un triangolo si dice *equilatero* se ha i tre lati congruenti;
- un triangolo si dice *isoscele* se ha (almeno) due lati congruenti;
- un triangolo si dice *scaleno* se ha i lati a due a due non congruenti.



triangolo equilatero — $AB \cong AC \cong BC$

triangolo isoscele — $AB \cong AC$

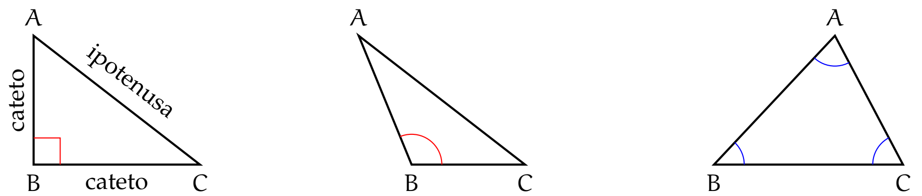
triangolo scaleno — $AB \not\cong AC$, $AB \not\cong BC$, $AC \not\cong BC$

FIGURA 2.2: Classificazione di un triangolo rispetto ai lati

o rispetto agli angoli

Definizione 2.3.

- un triangolo si dice *rettangolo* se ha un angolo interno retto; in un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato che si oppone all'angolo retto e si chiamano *cateti* i lati adiacenti all'angolo retto;
- un triangolo si dice *ottusangolo* se ha un angolo interno ottuso;
- un triangolo si dice *acutangolo* se ha tutti gli angoli interni acuti.



triangolo rettangolo — $A\widehat{B}C = 90°$

triangolo ottusangolo — $A\widehat{B}C > 90°$

triangolo acutangolo — $A\widehat{B}C < 90°$, $B\widehat{C}A < 90°$, $C\widehat{A}B < 90°$

FIGURA 2.3: Classificazione di un triangolo rispetto agli angoli

2.2 Primo e secondo criterio di congruenza dei triangoli

Ricordiamo che due figure piane si dicono *congruenti* se sono sovrapponibili, cioè se è possibile spostare una sull'altra, senza deformarle, in modo che coincidano perfettamente.

In particolare, due triangoli sono sovrapponibili se hanno "ordinatamente" congruenti i tre lati e i tre angoli. Con il termine ordinatamente intendiamo che, a partire da una coppia di vertici (il primo di un triangolo ed il secondo dell'altro) procedendo lungo il contorno in senso orario, oppure antiorario, incontriamo lati tra loro congruenti e vertici di angoli tra loro congruenti. Nel caso dei triangoli, questo succede esattamente quando angoli congruenti nei due triangoli sono compresi tra coppie di lati congruenti o, in maniera equivalente, quando sono opposti a lati congruenti.

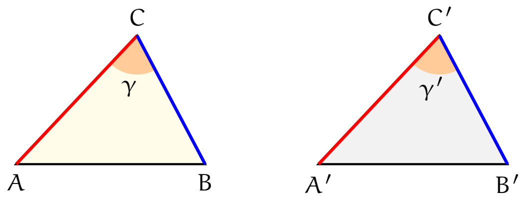
I criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che è sufficiente conoscere la congruenza di solo alcuni elementi dei due triangoli, generalmente tre elementi di un triangolo congruenti a tre elementi dell'altro triangolo, per poter affermare che i due triangoli sono tra loro congruenti, e quindi dedurne la congruenza degli altri elementi.

Un modo tradizionale di presentare l'argomento, dovuto allo stesso Euclide, è quello di "dimostrare" i primi due criteri di congruenza dei triangoli facendo uso della definizione stessa di congruenza come "uguaglianza per sovrapposizione", e di utilizzarli successivamente per la verifica di altre proprietà.

Secondo il matematico tedesco Hilbert, il primo criterio di congruenza è invece un assioma e il secondo criterio può essere dimostrato per assurdo attraverso il primo.

Presenteremo questi argomenti basilari alla maniera di Euclide.

Teorema 2.1 (1° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.*



Ipotesi: $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $\gamma \cong \gamma'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

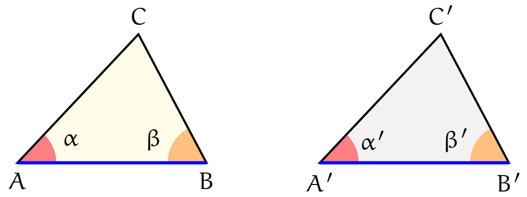
Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo ABC. A tal proposito, portiamo il punto C' sul punto C in modo tale che la semiretta $C'A'$ sia sovrapposta alla semiretta CA ed i punti B e B' siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AC. Poiché per ipotesi i segmenti AC e $A'C'$ sono congruenti, se C coincide con C' anche A deve coincidere con A'.

Avendo supposto per ipotesi che gli angoli γ e γ' sono congruenti, la semiretta per CB e la semiretta per $C'B'$ devono sovrapporsi, in quanto devono formare lo stesso angolo con la semiretta per CA, ovvero per $C'A'$.

A questo punto, rimane da fissare la posizione di B' rispetto a B, cioè rimane da decidere se B' cade internamente al segmento CB, come nella figura che segue, se B' cade esternamente al segmento CB o se B' e B coincidono. Inoltre, poiché per ipotesi $BC \cong B'C'$, il punto B' deve necessariamente coincidere con B.

Pertanto tutti i vertici del triangolo $A'B'C'$ si sovrappongono ai vertici del triangolo ABC e di conseguenza i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti. □

Teorema 2.2 (2° Criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato tra essi compreso.*



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo ABC. A tal proposito, in virtù della congruenza dei lati AB e $A'B'$, portiamo a sovrapporre il segmento $A'B'$ al segmento AB in maniera tale che A' coincida con A, B' coincida con B e i punti C e C' siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AB.

Dalla congruenza degli angoli α e α' segue che la semiretta $A'C'$ sarà sovrapposta alla semiretta AC; analogamente, dalla congruenza degli angoli β e β' segue che la semiretta $B'C'$ sarà sovrapposta alla semiretta BC. Dunque C e C' devono necessariamente coincidere, perché sono l'unica intersezione di due rette incidenti.

Poiché, dunque, i tre vertici si sono sovrapposti, i due triangoli sono completamente sovrapposti e quindi sono congruenti. □

Esempio 2.1. Si considerino due rette incidenti, r ed s, ed il loro punto in comune P. Sulle semirette opposte di origine P si prendano punti equidistanti da P, come in figura, in maniera tale che $AP \cong PB$, $CP \cong PD$. Dimostra che, unendo i quattro punti in modo da costruire un quadrilatero, i quattro triangoli che si vengono a formare sono a due a due congruenti: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Realizziamo il disegno (figura 2.4) ed esplicitiamo ipotesi e tesi.

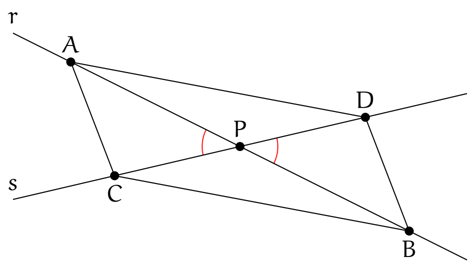


FIGURA 2.4: Esempio 2.1

Ipotesi: $r \cap s = P$, $AP \cong PB$, $CP \cong PD$.
Tesi: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Dimostrazione. I triangoli ACP e BPD hanno: $AP \cong PB$ per ipotesi, $CP \cong PD$ per ipotesi, $A\widehat{P}C \cong B\widehat{P}D$ perché opposti al vertice. Pertanto sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.

Analogamente, i triangoli ADP e BPC hanno: .... □

Esempio 2.2. Si considerino un segmento AB ed il suo punto medio M. Si tracci una generica retta r passante per M e distinta dalla retta per AB. Si traccino inoltre due semirette di origine rispettivamente A e B, situate nei due semipiani opposti rispetto alla retta per AB, che intersechino la retta r rispettivamente in C e in D e che formino con la retta per AB due angoli congruenti (vedi figura 2.5). Detti C e D i rispettivi punti di intersezione delle due semirette con la retta r, dimostra che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

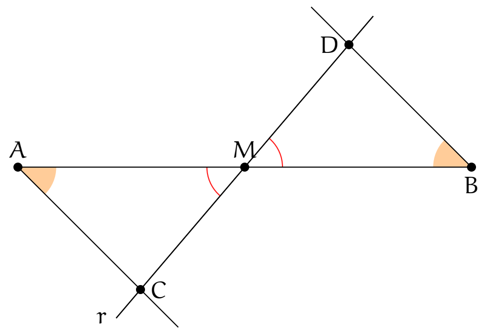


FIGURA 2.5: Esempio 2.2

Ipotesi: $AM \cong MB$, $M\widehat{A}C \cong M\widehat{B}D$. Tesi: $AMC \cong BMD$.

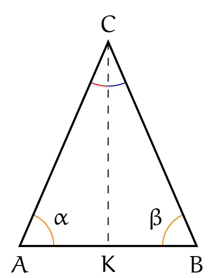
Dimostrazione. I segmenti AM e MB sono congruenti in quanto M è il punto medio di AB, gli angoli di vertice M sono congruenti perché opposti al vertice, gli angoli di vertici A e B sono congruenti per costruzione. Allora i triangoli AMC e BMD sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli. □

2.3 Teoremi del triangolo isoscele

Il *triangolo isoscele* ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama *base*, i due lati congruenti si dicono *lati obliqui*.

Il *triangolo equilatero* è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che *il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base.*

Teorema 2.3 (del triangolo isoscele [teorema diretto])**.** *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.*



Ipotesi: $AC \cong BC$. Tesi: $\alpha \cong \beta$.

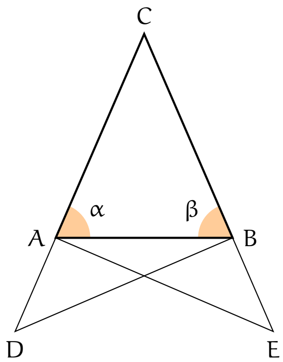
Dimostrazione. Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C. I triangoli ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

- $AC \cong CB$ per ipotesi;
- CK lato in comune;
- $A\widehat{C}K \cong B\widehat{C}K$ perché CK è la bisettrice dell'angolo in C.

Pertanto, essendo congruenti, i due triangoli hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo α (in A) è congruente all'angolo β (in B). □

Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando tra loro ipotesi e tesi.

Teorema 2.4 (del triangolo isoscele [teorema inverso]). *Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (rispetto al lato compreso tra gli angoli congruenti preso come base).*



Ipotesi: $\alpha \cong \beta$. Tesi: $AC \cong BC$.

Dimostrazione. Procediamo per passi, realizzando una costruzione che ci permetta di confrontare coppie di triangoli congruenti. Prolunghiamo i lati AC e BC dalla parte di A e di B rispettivamente, e sui prolungamenti prendiamo due punti D ed E in maniera tale che risulti $AD \cong BE$.

Osserviamo che i triangoli ADB e BAE risultano congruenti per il 1° criterio, avendo in comune il lato AB ed essendo $AD \cong BE$ per costruzione e $D\widehat{A}B \cong A\widehat{B}E$ perché adiacenti agli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$ congruenti per ipotesi. Pertanto, tutti gli elementi dei due triangoli ADB e AEB sono ordinatamente congruenti, in particolare $DB \cong AE$, $A\widehat{D}B \cong B\widehat{E}A$ e $A\widehat{B}D \cong B\widehat{A}E$.

I triangoli CDB e CAE risultano dunque congruenti per il 2° criterio poiché hanno $DB \cong AE$, $C\widehat{D}B \cong C\widehat{E}A$ per quanto appena dimostrato e $C\widehat{D}B \cong C\widehat{A}E$ perché somma di angoli rispettivamente congruenti: $C\widehat{B}D \cong C\widehat{B}A + A\widehat{B}D$ e $C\widehat{A}E \cong C\widehat{A}B + B\widehat{A}E$.

Pertanto, i restanti elementi dei due triangoli risultano ordinatamente congruenti, in particolare $CB \cong CA$, che è la tesi che volevamo dimostrare. □

Dai due teoremi precedenti seguono importanti proprietà, che qui riportiamo come corollari.

Corollario 2.5. *Un triangolo equilatero è anche equiangolo.*

Dimostrazione. Poiché un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base, la tesi segue dal teorema diretto del triangolo isoscele. □

Corollario 2.6. *Se un triangolo è equiangolo allora è equilatero.*

Dimostrazione. Possiamo confrontare gli angoli a due a due; risulteranno i lati congruenti a due a due in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 2.7. *Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.*

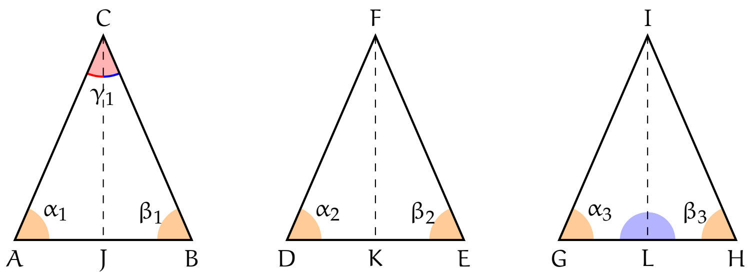
Dimostrazione. Se per assurdo un triangolo scaleno avesse due angoli congruenti, allora risulterebbe isoscele, in base al teorema inverso del triangolo isoscele. □

Corollario 2.8. *Se un triangolo non ha angoli congruenti allora è scaleno.*

Dimostrazione. Se un triangolo non ha angoli tra loro congruenti non può essere isoscele. □

Proposzione 2.9 (Proprietà del triangolo isoscele)**.** *In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.*

Nella figura, CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice γ_1 del triangolo ABC, FK è la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF, IL è l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI.



Dividiamo l'enunciato in tre parti:

a) In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana relativa alla base.
b) In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza relativa alla base.
c) In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.

Per ciascuna di esse scriviamo ipotesi e tesi.

a) In ABC: Ipotesi: $AC \cong CB$, $\alpha_1 \cong \beta_1$, $A\widehat{C}J \cong B\widehat{C}J$. Tesi: $CJ \perp AB$, $AJ \cong JB$.

b) In DEF: Ipotesi: $DF \cong FE$, $\alpha_2 \cong \beta_2$, $DK \cong KE$.
   Tesi: $FK \perp DE$, $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$.

c) In GHI: Ipotesi: $IG \cong IH$, $\alpha_3 \cong \beta_3$, $IL \perp GH$.
   Tesi: $GL \cong LH$, $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$.

Dimostrazione. Avviamo la dimostrazione delle prime due parti, che lasciamo completare al lettore e rimandiamo al prossimo capitolo la dimostrazione della terza.

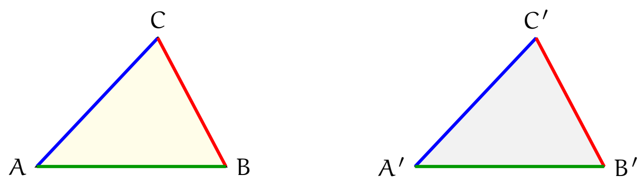
a) I triangoli AJC e CJB sono congruenti per il 2° criterio. Infatti hanno . . . .
   Dunque $AJ \cong JB$ e $A\widehat{J}C \cong C\widehat{J}B$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

b) I triangoli DKF e FKE sono congruenti per il 1° criterio. Infatti hanno . . . .
   Dunque $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$ e $F\widehat{K}D \cong F\widehat{K}E$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

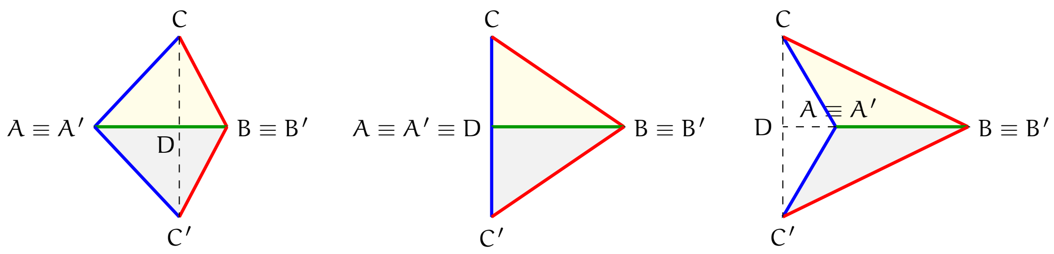
□

2.4 Terzo criterio di congruenza dei triangoli

Teorema 2.10 (3° criterio di congruenza dei triangoli)**.** *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti le tre coppie di lati.*



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$. Tesi: $ABC \cong A'B'C'$.



Caso 1 Caso 2 Caso 3

Dimostrazione. Abbiamo due triangoli, ABC e A′B′C′, dei quali sappiamo che i lati dell'uno sono congruenti a quelli dell'altro. Ribaltiamo il triangolo A′B′C′ e portiamo il segmento A′B′ sul segmento AB in modo che il punto A′ coincida con A, il punto B′ coincida con B (ciò è possibile in quanto $AB \cong A'B'$) ed in modo che il punto C′ cada nel semipiano individuato dalla retta AB opposto a quello in cui si trova C. Uniamo C con C′. Viene fuori un disegno diverso a seconda che il punto di intersezione, che chiamiamo D, tra il segmento CC′ e la retta per AB, sia interno o esterno al segmento AB oppure coincida con uno degli estremi (A o B).

Il punto D esiste in ogni caso in quanto C e C' sono nei due semipiani opposti individuati dalla retta AB, pertanto il segmento CC' deve necessariamente tagliare la retta per AB.

Caso 1: D è interno ad AB. Essendo $AC \cong A'C'$ e $CB \cong C'B'$, i triangoli ACC' e $CC'B$ sono isosceli, entrambi sulla base CC'. Dunque, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti. Precisamente risulta: $A\widehat{C}C' \cong A\widehat{C'}C$ e $C'\widehat{C}B \cong C\widehat{C'}B$. Inoltre, $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$ in quanto somme di angoli congruenti: $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C}D + D\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}D + D\widehat{C'}B \cong A\widehat{C'}B$. In conclusione ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio perché hanno: $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$, $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$. Infine, poiché $ABC \cong ABC'$ e $ABC' \cong A'B'C'$ se ne deduce che $ABC \cong A'B'C'$.

Caso 2: D coincide con uno dei due estremi (es. A e A'). Poiché per ipotesi $CB \cong C'B'$, il triangolo CBC' è isoscele sulla base CC', pertanto $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$ in quanto angoli alla base di un triangolo isoscele. I triangoli ABC e ABC' sono quindi congruenti per il primo criterio perché hanno $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$ e $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$. Infine, come per il caso precedente, poiché ABC è congruente ad ABC' e quest'ultimo è congruente ad $A'B'C'$ anche ABC è congruente a $A'B'C'$.

Caso 3: D cade esternamente al segmento AB. Come nel caso 1, i triangoli CAC' e CBC' sono isosceli sulla base CC', pertanto $A\widehat{C}C' \cong A\widehat{C'}C$ e $B\widehat{C}C' \cong B\widehat{C'}C$. Per differenza di angoli congruenti si ottiene che $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C'}B$. Infatti $A\widehat{C}B \cong D\widehat{C}B - D\widehat{C}A \cong D\widehat{C'}B - D\widehat{C'}A \cong A\widehat{C'}B$. Da ciò segue che i triangoli ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso. Come per i casi precedenti, se ABC è congruente a ABC' è congruente anche a $A'B'C'$. □

2.5 Congruenza dei poligoni

Ricordiamo che due poligoni sono *congruenti* se hanno lo stesso numero di lati ed hanno "ordinatamente" congruenti tutti i lati e tutti gli angoli corrispondenti.

Il seguente criterio di congruenza dei quadrilateri è una semplice applicazione del primo criterio di congruenza dei triangoli.

Teorema 2.11 (1º criterio di congruenza dei quadrilateri)**.** *Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti tre lati ed i due angoli tra essi compresi, sono congruenti.*

Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente lato ed i rimanenti due angoli.

Conseguenza diretta del primo e del secondo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.

Teorema 2.12 (2º criterio di congruenza dei quadrilateri)**.** *Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti due lati consecutivi e tre angoli (adiacenti ai due lati congruenti), sono congruenti.*

Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente angolo ed i rimanenti due lati.

Conseguenza del primo e del terzo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.

Teorema 2.13 (3° criterio di congruenza dei quadrilateri)**.** *Due quadrilateri sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i quattro lati ed un angolo corrispondente.*

Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche i rimanenti tre angoli.

Teorema 2.14 (Criteri di congruenza dei poligoni)**.** *Due poligoni sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti tutti i lati e tutti gli angoli compresi, tranne uno dei seguenti elementi su cui non si fa alcuna ipotesi:*

- ➡ *due angoli consecutivi ed il lato compreso;*
- ➡ *due lati consecutivi e l'angolo compreso;*
- ➡ *tre angoli consecutivi.*

La dimostrazione di questi criteri è lasciata al lettore che potrà esercitarsi applicando i tre criteri di congruenza dei triangoli.

2.6 Esercizi

2.6.1 Esercizi riepilogativi

2.1. In base alla figura a lato rispondi alle seguenti domande

a) Il lato AB si oppone all'angolo . . . .

b) L'angolo α si oppone al lato . . . .

c) L'angolo di vertice C si chiama . . . .

d) L'angolo γ è adiacente ai lati . . . . . . e . . . . . .

e) I lati AB e BC sono adiacenti all'angolo . . . . . .

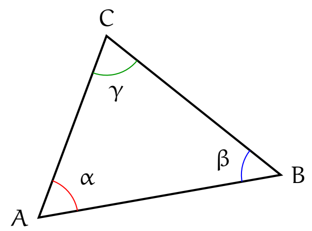
f) I lati AC e AB formano l'angolo . . . . . .

g) Traccia l'angolo esterno al triangolo nel vertice A

h) Traccia la bisettrice dell'angolo β

i) Traccia l'altezza relativa alla base AB

j) Traccia la mediana relativa al lato BC



2.2. Disegna un segmento AB, quindi disegna i triangoli ABC e ABD che hanno la base AB in comune.

2.3. Disegna le tre altezze di ciascuno dei triangoli nella figura 2.6.

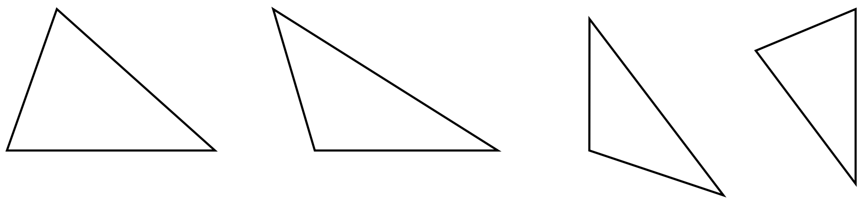


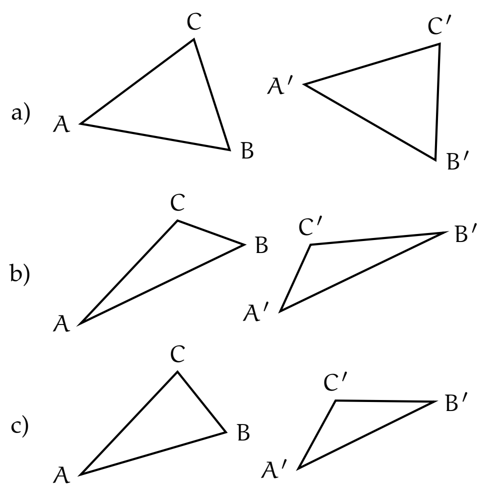
FIGURA 2.6: Esercizio 2.3

2.4. Per ciascuna delle coppie di triangoli a lato indica se sono congruenti ed eventualmente per quale criterio.

a) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e AC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con l'angolo $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il . . . .

b) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e gli angoli $\widehat{A}$ con $\widehat{B'}$ e $\widehat{B}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il . . . .

c) Si sa che sono congruenti i lati AB con $A'B'$ e BC con $A'C'$, l'angolo $\widehat{A}$ con $\widehat{A'}$.
I triangoli sono congruenti?
Sì No
Se sì, per il . . . .



Dimostra le seguenti affermazioni, utilizzando il 1° e il 2° criterio di congruenza dei triangoli.

2.5. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente a MA. Dimostra che il triangolo AMC è congruente al triangolo BMD e che il triangolo ABM è congruente al triangolo CMD.

2.6. Due triangoli ABC e DEF hanno il lati AB e DE congruenti, hanno inoltre gli angoli esterni ai vertici A e B rispettivamente congruenti agli angoli esterni ai vertici D ed E. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

2.7. Si consideri il segmento AB e per il suo punto medio M si tracci una retta r qualsiasi. Su tale semiretta, da parti opposte rispetto ad AB, si prendano due punti S e T tali che $SM \cong MT$. Dimostrare che i triangoli AMS e TMB sono congruenti.

2.8. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.

2.9. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto adiacente ad esso.

2.10. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti tra loro l'angolo al vertice e i due lati obliqui.

2.11. Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, prolunga la bisettrice AD di un segmento DE. Dimostra che AE è bisettrice dell'angolo $B\widehat{E}C$.

2.12. Dati due triangoli congruenti ABC e $A'B'C'$, si considerino sui lati AC e $A'C'$ due punti D e D' tali che $DC \cong D'C'$. Dimostrare che $DB \cong D'B'$.

2.13. Siano ABC e DEF due triangoli congruenti. Sui lati congruenti AB e DE prendi il punto G su AB e H su DE, in modo che $AG \cong DH$. Dimostra che anche GC è congruente ad HF.

2.14. Del triangolo ABC prolunga il lato AB di un segmento BD congruente a BC, analogamente prolunga il lato CB di un segmento BE congruente ad AB. Traccia la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$ e sia F la sua intersezione con AC. Traccia la bisettrice dell'angolo $D\widehat{B}E$ e chiama G la sua intersezione con DE. Dimostra che $BF \cong BG$.

2.15. Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Con origine in D traccia due semirette che incontrano rispettivamente AC in E e AB in F, in modo che $A\widehat{D}F \cong A\widehat{D}E$. Dimostra che il triangolo AFE è un triangolo isoscele.

2.16. Nel triangolo ABC con $AC < AB$ traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Per il punto D traccia la perpendicolare alla bisettrice AD. Detti E ed F i punti in cui la perpendicolare incontra rispettivamente i lati AC e AB, dimostra che $AF \cong AE$.

2.17. Sui prolungamenti oltre A del lato AC, oltre B del lato AB e oltre C del lato BC di un triangolo equilatero ABC si considerino i segmenti congruenti AA', BB', CC'. Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è ancora equilatero.

2.18. Dato l'angolo convesso $b\widehat{A}c$ si considerino su b i due punti B e B' e su c i punti C e C', tali che AB e AB' siano rispettivamente congruenti con AC e AC'. Dimostrare che BB' e BC' sono rispettivamente congruenti con CC' e $B'C$.

2.19. Dato un segmento AB, condurre per il suo punto medio M una qualsiasi retta r e considerare su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due segmenti congruenti MC e MD. Dimostrare che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

2.20. Sui lati dell'angolo $X\widehat{O}Y$ si considerino i punto A e B tali che $OA \cong OB$. Sia H un punto della bisettrice dell'angolo tale che $OH < OA$. Siano T il punto di intersezione di AH con OY e S il punto di intersezione di BH con OX. Dimostrare che $AH \cong HB$ e $SH \cong HT$.

2.21. Si consideri un punto O interno al triangolo ABC e si congiunga tale punto con i vertici A e B del triangolo. Si prolunghino i segmenti AO e BO oltre O di due segmenti OA' e OB' rispettivamente congruenti ai suddetti segmenti. Dimostrare che i segmenti AB e $A'B'$ sono congruenti.

2.22. Si considerino i triangoli congruenti ABC e $A'B'C'$ e si prolunghino i lati AB e $A'B'$ di due segmenti BP e $B'P'$ tra loro congruenti. Si prolunghino inoltre i lati AC e $A'C'$ di due segmenti CQ e $C'Q'$ tra loro congruenti. Si dimostri che sono congruenti i triangoli CPQ e $C'P'Q'$.

2.23. Sui lati a e b di un angolo di vertice O prendi i punti A e B sulla semiretta a e i punti C e D sulla semiretta b, in modo che $OA \cong OC$ e $AB \cong CD$. Sia E il punto di intersezione di AD con BC. Dimostra che sono congruenti i triangoli ABE e CDE.

2.24. Sia C un punto della bisettrice dell'angolo convesso $a\hat{O}b$, A un punto sul lato a e B un punto sul lato b, tali che $OA \cong OB$. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

2.25. Dato un triangolo ABC, traccia la parallela ad AC passante per B e la parallela a BC passante per A. Indica con D il punto di intersezione delle due rette tracciate. Dimostra che i triangoli ABC e ABD sono congruenti.

2.26. Dato il triangolo ABC, costruire esternamente a esso i triangoli equilateri ACD e BCE. Dimostra che $AE = BD$.

2.27. In un triangolo ABC, sul prolungamento del lato AB, dalla parte di B, prendi un punto D tale che $BD \cong AB$, analogamente sul prolungamento del lato CB, dalla parte di B, prendi un punto E tale che $EB \cong BC$. Dimostra che la mediana BM del triangolo ABC è allineata con la mediana BN del triangolo DBE, ossia che l'angolo formato dalle due mediane è un angolo piatto.

Dimostra le seguenti affermazioni sui triangoli isosceli.

2.28. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.

2.29. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti.

2.30. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'angolo al vertice e uno dei lati obliqui.

2.31. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.

2.32. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e la bisettrice dell'angolo al vertice.

2.33. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti gli angoli al vertice e due lati corrispondenti qualsiasi.

2.34. Sia P il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostra che anche APB è isoscele.

2.35. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto M e su BC un punto N in modo che $CM \cong CN$. Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

a) ACN e ANB
b) ACN e BCM
c) ABN e ABM
d) ABC e MNC

2.36. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, indica con M il punto medio di AC, con N il punto medio di CB e con H il punto medio di AB. Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

a) AMH e HNB
b) MNH e MNC
c) AMH e MCN

2.37. Sui lati AC e CB del triangolo isoscele ABC di base AB considera rispettivamente due punti D ed E tali che $CD \cong CE$. Dimostra che i triangoli ADB e AEB sono congruenti. Detto P il punto di intersezione tra AE e DB, dimostrare che ABP e DPE sono triangoli isosceli.

2.38. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga la base AB, dalla parte di A di un segmento AD e dalla parte di B di un segmento BE congruente ad AD. Dimostra che anche il triangolo DEC è isoscele.

2.39. Nel triangolo isoscele ABC di base BC, prendi sul prolungamento di BC due segmenti congruenti BQ e CP. Dimostra che APB è isoscele.

2.40. Due triangoli isosceli ABC e ABD hanno in comune la base AB, i vertici C e D sono situati da parti opposte rispetto alla base AB. Dimostra che la retta per CD è bisettrice dell'angolo in C.

2.41. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C traccia le bisettrici BD all'angolo in B e AE all'angolo in A. Dimostra che $BD \cong AE$. Detto O il punto di intersezione delle bisettrici dimostra che AOB è isoscele. Dimostra che il triangolo ADO è congruente al triangolo BEO.

2.42. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga, dalla parte di C la bisettrice CD dell'angolo in C di un segmento CE. Dimostra che ED è bisettrice dell'angolo $A\hat{E}D$.

2.43. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prendi su AC un punto D e su BC il punto E tali che $AD \cong BE$. Detto O il punto di intersezione di AE con BD, dimostra che AOB è isoscele.

2.44. In un triangolo ABC sia M il punto medio di AB. Traccia la mediana CM e prolungala dalla parte di M di un segmento MD congruente a CM. Dopo aver dimostrato che il triangolo AMC è congruente a BMD, dimostra che se CM è bisettrice dell'angolo in C allora ABC è isoscele.

2.45. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi su AC un punto D e su CB un punto E in modo che $CD \cong CE$. Dimostra che il triangolo DME, dove M è il punto medio della base AB, è isoscele.

2.46. Due triangoli isoscele hanno in comune la base, dimostra che la retta che unisce i vertici dei due triangoli divide la base a metà.

2.47. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, si ha che $AC \cong CB \cong 2 \cdot AB$. Indica con M il punto medio di AC e N il punto medio di BC, P il punto di intersezione di BM con AN. Individua tutti i triangoli isosceli che si vengono a formare. Dimostra che ACN è congruente a BCM, che ABP è isoscele, che P appartiene all'altezza CH del triangolo.

2.48. Sia dato il triangolo ABC e sia M il punto medio del lato AB. Si prolunghi CM di un segmento $MD \cong CM$. Dimostrare che $A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$.

2.49. Si prolunghino i lati AC e CB del triangolo isoscele ABC rispettivamente di due segmenti CP e CQ tra loro congruenti. Dimostrare che $A\hat{Q}B \cong A\hat{P}Q$ e che $A\hat{B}P \cong Q\hat{A}B$.

2.50. Sulla base AB di un triangolo isoscele ABC prendi i punti M e N tali che $AM < AN$ e $AM \cong NB$. Dimostra che CMN è isoscele.

2.51. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di vertice A. Dimostra che BDC è isoscele.

2.52. Nel triangolo isoscele ABC di base BC prolunga AB di un segmento BD e AC di un segmento CE in modo che $DE \cong CE$. Dimostra che $BE \cong DC$.

2.53. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB \cong AC$. Sui lati obliqui AB e AC costruisci, esternamente al triangolo, i triangoli equilateri

ABD e ACE. Congiungi B con E e C con D. Detto F il punto di intersezione di DC e BE, dimostra che BFC è isoscele.

Esercizi sui criteri di congruenza dei triangoli e sui triangoli isosceli.

2.54. Due triangoli sono congruenti se hanno

a) tre lati congruenti V F
b) tre angoli congruenti V F
c) due lati e l'angolo compreso congruenti V F
d) due angoli e il lato in comune congruenti V F
e) un lato e l'angolo opposto congruenti V F

2.55. Prolunga nello stesso verso i lati di un triangolo equilatero di tre segmenti tra loro congruenti. Dimostra che il triangolo ottenuto congiungendo gli estremi dei segmenti aggiunti è equilatero.

2.56. Due triangoli equilateri sono congruenti se hanno lo stesso perimetro.

2.57. Dimostra che due triangoli equilateri che hanno in comune la base sono congruenti.

2.58. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la mediana relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

2.59. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la bisettrice relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.

2.60. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e un altro lato.

2.61. Se due triangoli hanno congruenti due lati e la mediana relativa a uno di essi allora sono congruenti.

2.62. In un triangolo se la bisettrice di un angolo è anche meddiana allora il triangolo è isoscele.

2.63. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A prendi un punto D sul lato AB e un punto E sul lato AC, in modo che $BD \cong EC$, unisci C con D e B con E. Sia $F = BE \cap DC$. Dimostra che i triangoli BFA e CFA sono congruenti.

2.64. Dimostra che, prolungando i lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele di due segmenti congruenti rispettivamente AP e AQ, si ha che $BQ \cong PC$.

2.65. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$, prolunga la base BC di un segmento BG, dalla parte di B, e di un segmento CF dalla parte di C, in modo che $BG \cong CF$. Dimostra che sono congruenti i triangoli ADG e AEF.

2.66. In un triangolo scaleno ABC sia $AC > BC$. Prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento CD congruente ad AC e prolunga AC, dalla parte di C, di un segmento CE congruente a BC. Detto H il punto di intersezione della retta per AB con la retta per DE, dimostra che $AH \cong DH$.

2.67. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A, prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$. Unisci D con C e prolunga il segmento DC, dalla parte di C di un segmento CF. Unisci E con B e prolunga il segmento EB dalla parte di B di un segmento $BG \cong CF$. Dimostra che i triangoli AGD e AFE sono congruenti.

2.68. Dato il triangolo convesso non piatto $a\hat{O}b$ si prenda un punto A sul lato Oa e un punto B sul lato Ob, in modo che $OA \cong OB$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di OB, congiungi A con N e B con M, indica con P in punto di intersezione. Dimostra che sono congruenti i triangoli OBC e OAD e i triangoli AOP e OPB.

2.69. Nel triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prendi un punto D sulla bisettrice CH dell'angolo al vertice C, indica con E il punto di intersezione della retta AD con BC e F il punto di intersezione di BD con AC. Dimostra che i triangoli FDA e EDB sono congruenti.

2.70. Siano ABC e ABD due triangoli isosceli aventi la base AB in comune e i vertici C e D situati da parti opposte rispetto ad AB. Dimostrare che $A\widehat{C}D \cong D\widehat{C}B$.

2.71. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC di base AB e sia $AP \cong PB$. Si dimostri che CP appartiene alla bisettrice dell'angolo in C.

2.72. Due triangoli equilateri ABC e DBC hanno la base BC in comune e i vertici A e D situati da parti opposte rispetto alla base BC. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

2.73. Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli congruenti. Si fissino su AC un punto P e su $A'C'$ un punto P' tali che $AP \cong A'P'$. Si fissino su BC un punto Q e su $B'C'$ un punto Q' tali che $BQ \cong B'Q'$. Si dimostri che $PQ \cong P'Q'$.

2.74. Nel triangolo generico ABC sia AK la bisettrice dell'angolo in A. Sul prolungamento dei lati AB e AC, rispettivamente dalla parte di B e dalla parte di C, individua due punti D ed E, tali che AD sia congruente ad AE. Dimostra che DK è congruente a KE.

2.75. Due triangoli, che hanno un lato congruente e hanno congruenti anche i due angoli esterni al triangolo aventi per vertici gli estremi del lato congruente, sono congruenti.

2.76. Dato il triangolo ABC e un punto O esterno al triangolo, si unisca O con A, con B e con C. Si prolunghi ciascun segmento, dalla parte di O, dei segmenti $OA' \cong OA$, $OB' \cong OB$, $OC' \cong OC$. Dimostra che $ABC \cong A'B'C'$.

2.77. Siano LMN i punti medi dei lati del triangolo isoscele ABC, dimostra che anche LMN è isoscele.

2.78. Siano MN i punti medi dei lati congruenti AB e AC del triangolo isoscele ABC, dimostra che le mediane AM e AN sono congruenti.

2.79. Siano $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ due angoli consecutivi congruenti, sia OM la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$. Sulle semirette OC, OB, OM e OA si prendano rispettivamente i segmenti tutti congruenti tra di loro OC', OB', OM', OA'. Dimostrare che $A'M' \cong M'B'$ e $A'B' \cong B'C'$.

2.80. Sia OM la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$. Sul lato dell'angolo $A\widehat{O}B$ si prendano i punti P e Q tali che $OP \cong OQ$. Sia C un punto qualsiasi della bisettrice OM. Dimostra che $CP \cong CQ$.

2.81. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC, di base AB. Dimostra che se $P\widehat{A}C \cong P\widehat{C}B$ allora P si trova sulla bisettrice dell'angolo in A.

2.82. Traccia la bisettrice a dell'angolo in A del triangolo ABC con $AB > AC$. Sulla bisettrice a individua due punti D ed E tali che $AD \cong AB$ e $AE \cong AC$. Dimostra che i triangoli ACD e ABE sono congruenti.

2.83. In un triangolo ABC con $AB > AC$ disegna la bisettrice AD dell'angolo in A. Dal punto D disegna una semiretta che taglia il triangolo ABC e forma con AD un angolo congruente a $A\widehat{D}C$. Questa semiretta incontra AB in E. Dimostra che CD e DE sono congruenti.

2.84. Sia ABC triangolo isoscele di base BC, prolunga i lati AB dalla parte di B e AC dalla parte di C. Traccia la bisettrice b dell'angolo esterno in B e la bisettrice c dell'angolo esterno in C. Queste bisettrici incontrano i prolungamenti dei lati, precisamente c incontra il prolungamento di AB in E e b incontra il prolungamento di AC in D. Dimostra che $EC \cong BD$. Sia F il punto di intersezione di EC con BD, dimostra che AF è la bisettrice dell'angolo in A.

2.85. Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C. Sul prolungamento di AB si prenda D dalla parte di A ed E dalla parte di B, in modo che $AD \cong BE$. Dimostra che CDE è isoscele.

2.86. Sia ABC un triangolo qualsiasi e sia AL la bisettrice dell'angolo in A. Da L si conduca la perpendicolare ad AL, essa incontra la retta AB in D e la retta AC in E. Dimostra che ADE è isoscele.

2.87. In un triangolo qualsiasi ABC, si prolunghi il lato AB dalla parte di B di un segmento BD congruente ad AB e si prolunghi il lato BC dalla parte di B di un segmento BE congruente a BC. Detto M il punto medio di AC e N il punto medio di ED, dimostra che B appartiene alla retta per MN (è sufficiente dimostrare che l'angolo MBN è piatto).

2.88. Si prolunghino i lati congruenti AC e BC di un triangolo isoscele, rispettivamente di due segmenti congruenti AD e BE. Detto F il punto di intersezione di AE con DB, dimostra che FC è bisettrice dell'angolo in C.

2.89. Sulla bisettrice c di un angolo $a\widehat{O}b$ prendi un punto P e traccia da esso le perpendicolari ai lati a e b dell'angolo che incontrano rispettivamente in A e in B i suddetti lati. Dimostra che $OA \cong OB$.

2.90. In un triangolo isoscele di base BC traccia due semirette aventi origine rispettivamente in B e in C e che incontrano AB in D e AC in E. Dimostra che se le semirette si incontrano in un punto della mediana AM relativa alla base BC allora $AD \cong AE$.

2.91. ABC è un triangolo isoscele con AC congruente a BC; M il punto medio di AB, L il punto medio di AC e N il punto medio di BC. Sulla mediana CM prendi un punto K in modo che $KM < CK$. Sia P il punto di intersezione di NK con AB e Q il punto di intersezione di LK con AB. Dimostra che KPQ è un triangolo isoscele.

2.92. Dato il triangolo isoscele ABC di base BC e angolo in A acuto traccia le altezze BL e CK relative ai lati obliqui. Prolunga BL di un segmento LD congruente a metà BL e prolunga CK di un segmento EK congrunete a metà KC. Sia F il punto di intersezione di EB con DC. Dimsotra che DEF è un triangolo isoscele.

2.93. Sugli assi dei lati di un triangolo equilatero si prendono tre punti interni al triangolo equidistanti dai vertici del triangolo. Dimostra che il triangolo che ha per vertici questi tre punti è anch'esso equilatero.

2.94. Sui lati AB, BC e CA di un triangolo equilatero si prendono tre punti P, Q, R in modo che AP, BQ e CR siano congruenti tra di loro. Unisci i punti P, Q e R con i vertici opposti. Dimostra che questi segmenti si incontrano in tre punti che sono vertici di un triangolo equilatero.

2.95. Sia $ABCDE$ un pentagono regolare, ossia con tutti i lati congruenti e tutti gli angoli interni congruenti. Dal vertice A traccia le due diagonali AD e AC. Il pentagono resta così diviso in tre triangoli. Individua i due triangoli congruenti e dimostra che sono congruenti.

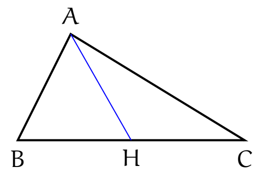
2.96. I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$. Sui lati AC e $A'C'$, esternamente ai triangoli, costruisci i triangoli ADC e $A'D'C'$ in modo che $AD \cong A'D'$ e $DC \cong D'C'$. Dimostra che i quadrilateri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono congruenti.

2.97. Dati i pentagoni congruenti $ABCDE$ e $FGHIL$ traccia le diagonali che uniscono le coppie di punti corrispondenti A, D e F, I. Dimostra che sono congruenti i quadrilateri $ABCD$ e $FGHI$.

2.98. Un quadrilatero $ABCD$ ha i lati a due a due congruenti, precisamente $AB \cong BC$ e $AD \cong DC$. Dimostra che la diagonale DB è bisettrice dell'angolo in D. Preso un qualsiasi punto P sulla diagonale BD dimostra anche che BD è bisettrice dell'angolo $A\widehat{P}C$.

2.99 (Prove invalsi 2006)**.** Osserva la figura a lato. Se $AB \ncong AC$ e $BH \cong HC$, che cosa rappresenta il segmento AH nel triangolo ABC?

a) Un'altezza.
b) Una mediana.
c) Una bisettrice.
d) Un asse.



2.100 (Prove invalsi 2003)**.** Da un triangolo equilatero MNO di lato 6 cm viene tagliato via un triangolo equilatero di vertice in O e lato 2 cm. Il perimetro del quadrilatero rimanente è . . .

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm; e) 20 cm.

2.6.2 Risposte

2.54. a) V, b) F, c) V, d) V, e) F.

2.99. b.

2.100. c.

Trasformazioni geometriche piane 3

"La danza degli storni"
Foto di _Peck_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/

3.1 Generalità sulle trasformazioni geometriche piane

3.1.1 Introduzione e definizioni

> «C'è una cosa straordinaria da vedere a Roma in questa fine d'autunno ed è il cielo gremito d'uccelli. Il terrazzo del signor Palomar è un buon punto d'osservazione [...] Nell'aria viola del tramonto egli guarda affiorare da una parte del cielo un pulviscolo minutissimo, una nuvola d'ali che volano [...] Quando si pensa agli uccelli migratori ci si immagina di solito una formazione di volo molto ordinata e compatta [...] Quest'immagine non vale per gli storni, o almeno per questi storni autunnali nel cielo di Roma [...]»
>
> Da *Palomar* di Italo Calvino

Il volo degli storni disegna nel cielo figure in continua trasformazione, come si può vedere dalle foto riportate nelle figure 3.1 e 3.2.

FIGURA 3.1: *La danza degli storni* [1]

FIGURA 3.2: *Auklet flock, Shumagins 1986*[2]

Il concetto di trasformazione assume significati diversi a secondo dell'ambito in cui è definito: ad esempio in zoologia la trasformazione di un animale dallo stadio di larva allo stadio di adulto è più propriamente chiamata "metamorfosi". Ciò provoca un cambiamento totale del corpo del giovane e l'adulto quasi sempre avrà una forma molto differente da quella della larva (figura 3.3).

Il gioco del tangram (vedi pagina **??**) si basa sulla capacità di passare da una figura ad un'altra senza che nessun pezzo del quadrato base venga tagliato o modificato nelle sue dimensioni: le figure che si ottengono (come quella riportata nella figura 3.4) hanno forme diverse, ma sono costituite dagli stessi pezzi. Possiamo dire che le une vengono trasformate nelle altre grazie alla nostra fantasia.

In geometria le trasformazioni sono particolari corrispondenze aventi come dominio e codominio il piano considerato come insieme di punti. Più precisamente si enuncia la seguente

Definizione 3.1. Si definisce *trasformazione geometrica piana* una corrispondenza biunivoca tra punti del piano.

[1] foto di _Peck_, http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536/.
[2] foto di D. Dibenski, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Auklet_flock_Shumagins_1986.jpg.

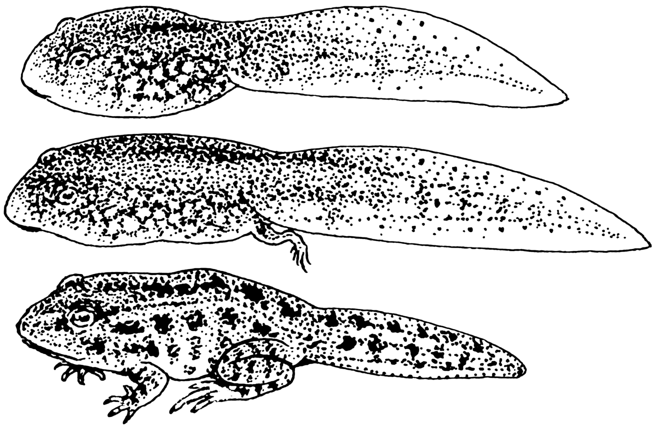


FIGURA 3.3: *Line art representation of w:Tadpole*[3]

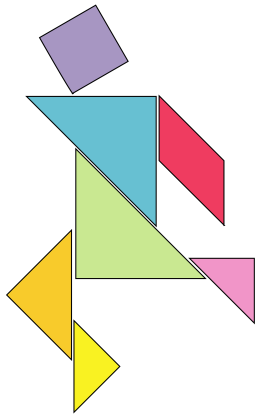


FIGURA 3.4: *Tangram-man*[4]

Attraverso una legge ben definita, una trasformazione geometrica piana associa ad un punto P del piano uno e un solo punto P' dello stesso piano e, viceversa, il punto P' risulta essere il corrispondente di un solo punto P del piano. Diciamo che P' è l'*immagine di* P nella trasformazione considerata.

Indicata con Φ la legge della corrispondenza che individua la trasformazione, per esprimere il legame tra P e P' scriveremo

$$\boxed{\Phi : P \to P'} \qquad \text{o anche} \qquad \boxed{P \xrightarrow{\Phi} P'}$$

e leggeremo: "Φ fa corrispondere al punto P il punto P'", oppure

$$\boxed{\Phi(P) = P'}$$

e leggeremo: "Φ di P è uguale a P'", scrittura che definisce la trasformazione geometrica come funzione del punto preso in considerazione.

La trasformazione Φ fa corrispondere ad una figura Ω del piano la figura Ω' costituita dalle immagini dei punti della figura iniziale. Ω' è detta dunque *immagine di* Ω *secondo* Φ, in formule $\Phi : \Omega \to \Omega'$ o anche $\Omega \xrightarrow{\Phi} \Omega'$ o ancora $\Phi(\Omega) = \Omega'$.

Le trasformazioni geometriche che studieremo sono tali da far corrispondere ad una retta r la retta r' individuata dai punti A' e B' immagini di due punti A e B scelti arbitrariamente su r. Tali trasformazioni sono chiamate *collineazioni*.

Definizione 3.2. Un punto P che coincide con la propria immagine P' è detto *punto unito* o *fisso* nella trasformazione Φ considerata.

Nel caso in cui tutti i punti del piano coincidono con la propria immagine, la trasformazione è detta *identità*.

[3]immagine di Pearson Scott Foresman, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tadpole_%28PSF%29.png.
[4]immagine di Actam, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangram-man.svg.

Per descrivere una trasformazione geometrica è quindi necessario definire come si costruisce l'immagine di un qualunque punto del piano.

Esempio 3.1. Consideriamo nel piano la seguente corrispondenza: fissato un punto K la corrispondenza S_K associa ad ogni punto P del piano il punto P' dello stesso piano tale che K risulti il punto medio del segmento PP'. S_K è una trasformazione geometrica?

La definizione è costruttiva:

$$P \overset{S_K}{\to} P' \wedge PK \cong KP', \quad A \overset{S_K}{\to} A' \wedge AK \cong KA'$$

Per dimostrare che la corrispondenza è una trasformazione geometrica dobbiamo verificare che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano: ogni punto ha un corrispondente secondo S_K e, viceversa, ogni punto è immagine di un solo punto del piano stesso. Il punto K è corrispondente di se stesso dunque è un punto unito della trasformazione, anzi è l'unico punto unito (figura 3.5).

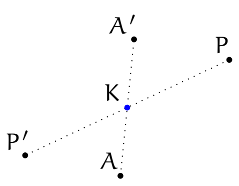


FIGURA 3.5: Esempio 3.1

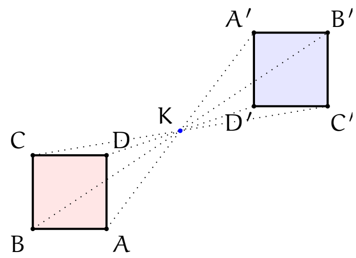


FIGURA 3.6: Esempio 3.1

Nella figura 3.6 è rappresentato come opera la trasformazione S_K se applicata ad un quadrato.

$$AK \cong KA', BK \cong KB', CK \cong KC', DK \cong KD'$$

$ABCD \overset{S_K}{\to} A'B'C'D'$ e i due quadrati hanno le stesse dimensioni.

Esempio 3.2. Definiamo la seguente trasformazione geometrica Φ sul generico punto P: dato un punto O, tracciamo la semiretta uscente da O e passante per P; il punto P', trasformato di P secondo Φ, è il punto della semiretta tale che $OP' = 2OP$.

Applicando questa trasformazione al quadrato $ABCD$ (figura 3.7) quest'ultimo si trasforma in un altro quadrato ma le due figure non hanno le stesse dimensioni.

Se il piano è dotato di un riferimento cartesiano ortogonale, la legge della trasformazione geometrica piana lega le coordinate di un punto e quelle del suo corrispondente mediante equazioni o sistemi di equazioni.

Definizione 3.3. Chiamiamo *equazione della trasformazione* l'insieme delle espressioni algebriche che indicano come si passa dalle coordinate di un generico punto P a quelle della sua immagine P'.

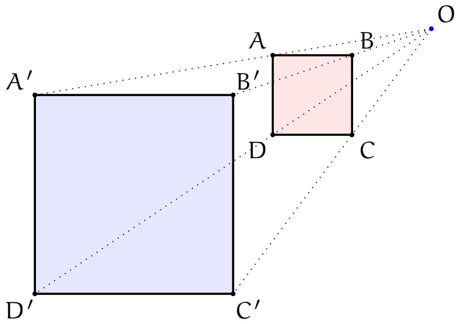


FIGURA 3.7: Esempio 3.2

Esempio 3.3. La corrispondenza Φ associa ad un punto P del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale il punto P' secondo la seguente legge: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-2x_P; x_P - y_P)$. La corrispondenza assegnata è una trasformazione geometrica piana?

Strategia risolutiva: scegliamo un punto del piano: $P(\ldots;\ldots)$ e determiniamo $P'(\ldots;\ldots)$; scegliamo un punto $Q'(\ldots;\ldots)$ e determiniamo la controimmagine $Q(\ldots;\ldots)$. posso affermare che la corrispondenza è biunivoca perché .... e quindi posso affermare che è una trasformazione geometrica.

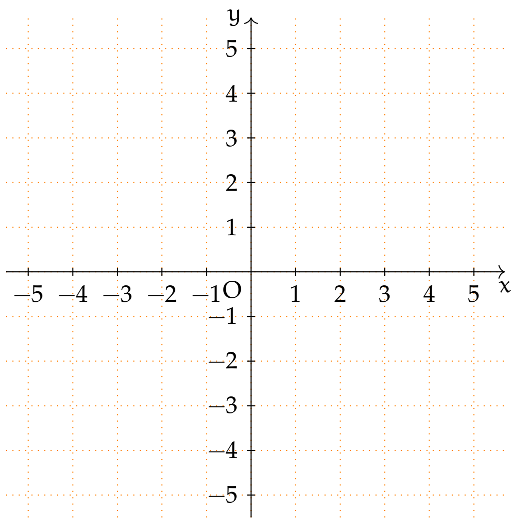


FIGURA 3.8: Esempio 3.3

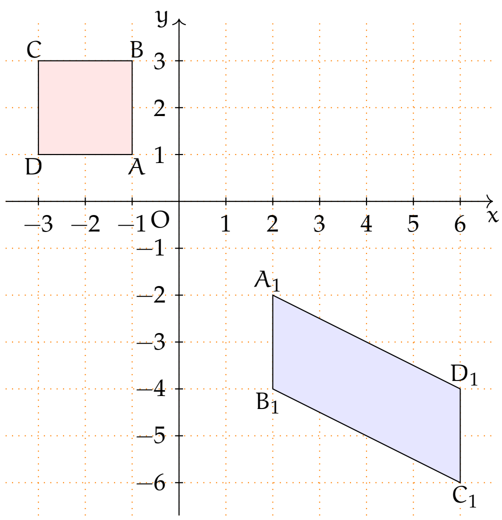


FIGURA 3.9: Esempio 3.3

Applichiamo la stessa trasformazione al quadrato di vertici $A(-1;1)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$, $D(-3;1)$ (figura 3.9).

La trasformazione fa corrispondere al quadrato $ABCD$ il parallelogramma $A_1B_1C_1D_1$ di coordinate $A_1(2;-2)$, $B_1(2;-4)$, $C_1(6;-6)$ e $D_1(6;-4)$. Essa ha cambiato la natura della figura geometrica di partenza, ma ha mantenuto il parallelismo tra i lati: $AB \parallel CD \xrightarrow{S_K} A_1B_1 \parallel C_1D_1$, dove $A_1B_1 = \Phi(AB)$ e $C_1D_1 = \Phi(CD)$.

Si noti il fatto che esistono trasformazioni geometriche che mantengono invariate forma e dimensioni delle figure a cui sono applicate, altre che mantengono inalterate la forma ma non dimensioni ed altre ancora che non mantengono inalterata neppure la forma.

Definizione 3.4. Si chiamano *proprietà invarianti di una trasformazione* le caratteristiche che una figura e la sua corrispondente mantengono inalterate nella trasformazione.

Le principali caratteristiche che una trasformazione può lasciare inalterate sono: la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra segmenti, la misura della superficie, il parallelismo dei segmenti, l'orientamento dei punti del piano, la direzione delle rette, la forma, il numero di lati delle figure. In questo capitolo tratteremo solo delle trasformazioni che mantengono invariate sia la forma che le dimensioni delle figure.

Definizione 3.5. Si chiama *isometria* una trasformazione piana che associa a due punti distinti A e B del piano i punti A' e B' tali che AB e $A'B'$ risultano congruenti.

Solo il primo esempio, tra i precedenti, rappresenta una isometria. Per dimostrare che è una isometria dobbiamo dimostrare che segmenti corrispondenti sono congruenti. Consideriamo il segmento AP e il suo corrispondente $A'P'$; dimostriamo che $AP \cong A'P'$. Considero i triangoli AKP e $A'KP'$, hanno .... Lasciamo al lettore lo sviluppo della dimostrazione.

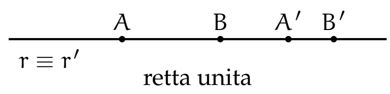
Riportiamo di seguito le proprietà di una isometria:

- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

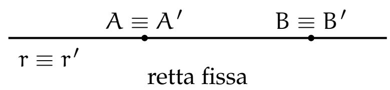
Definizione 3.6. In una isometria Σ, una *retta* è *unita* se coincide con la sua immagine, cioè ogni punto della retta data ha come corrispondente un punto della stessa retta. Nel caso in cui ogni punto di essa sia un punto unito, la retta è luogo di punti uniti e viene detta *retta fissa*.

caso la retta unita è luogo di punti uniti o *retta fissa*.

$$\left.\begin{array}{l} A \in r \wedge B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \wedge (B \to B') \\ A' \in r \wedge B' \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \wedge B \in r \\ \Sigma : (A \to A') \wedge (B \to B') \\ A' \equiv A \wedge B' \equiv B \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv r'$$



3.2 Le isometrie

Riprendiamo la definizione del paragrafo precedente: si chiama isometria una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che $AB \cong A'B'$.

Richiamiamo anche le proprietà:

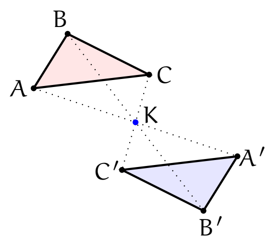
- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Adesso ci proponiamo di studiare particolari isometrie.

3.2.1 La simmetria centrale

Definizione 3.7. Fissato nel piano un punto K, chiamiamo *simmetria centrale di centro* K (indicata col simbolo S_K) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che K risulti il punto medio del segmento PP'.

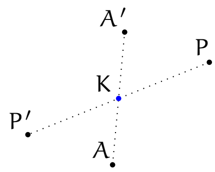
Per determinare l'immagine di un segmento è sufficiente determinare l'immagine dei suoi estremi. Nella figura a fianco è illustrato come agisce S_K su una qualunque figura piana: l'immagine del triangolo ABC è il triangolo $A'B'C'$ ottenuto determinando l'immagine di ciascuno dei suoi vertici.



Teorema 3.1. S_K *è una isometria.*

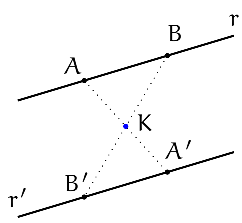
Ipotesi: $A \overset{S_K}{\rightarrow} A'$, $P \overset{S_K}{\rightarrow} P'$, $PK \cong P'K$, $AK \cong A'K$.
Tesi: $AP \cong A'P'$.

Fissato K, centro di simmetria, ... Lasciamo al lettore la dimostrazione (serviti della figura a fianco).



Teorema 3.2. *Rette corrispondenti in* S_K *sono parallele.*

Dimostrazione. Osserviamo che per determinare l'immagine r' di una retta r in S_K è sufficiente costruire l'immagine A' e B' di due suoi punti A e B. Per la costruzione effettuata si ha $AK \cong KA'$ e $BK \cong B'K$. Per il teorema 3.1 abbiamo $AKB \cong A'KB'$ dunque, in particolare, $A\widehat{B}K \cong A'\widehat{B'}K$. Questi sono angoli alterni interni delle rette r ed r' con trasversale BB', che pertanto risultano parallele. □



Gli elementi uniti

- l'unico punto unito è il centro di simmetria;
- sono unite tutte le rette passanti per il centro di simmetria.

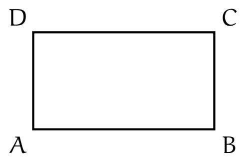
Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima proposizione.

Immaginate di percorrere il contorno di un triangolo ABC partendo dal vertice A procedendo in ordine alfabetico: state ruotando in senso orario o antiorario? $\ldots\ldots$ In quale senso percorrete il contorno di $A'B'C'$ (triangolo trasformato di ABC secondo S_K) partendo da A'? $\ldots\ldots$

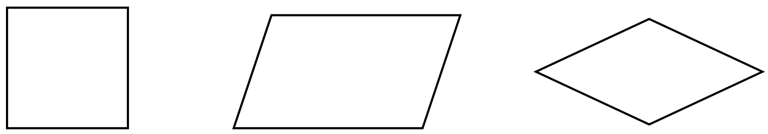
Questo fatto ci permette di concludere che S_K mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria diretta*.

Esempio 3.4. Nel rettangolo $ABCD$ indicate con O il punto di incontro delle diagonali; determinate l'immagine di $ABCD$ nella simmetria di centro O.

$S_O : ABCD \to \ldots\ldots$ pertanto il rettangolo è una *figura unita* nella simmetria avente come centro il punto di intersezione delle sue diagonali.



Vale la stessa affermazione per qualunque parallelogramma? Perché? $\ldots\ldots\ldots$



Definizione 3.8. Si dice che una figura F ha un *centro di simmetria* se esiste nel piano un punto K tale che nella simmetria di centro K, F coincide con la sua immagine F', ovvero F è unita in S_K.

Descrizione analitica di una simmetria centrale

Definizione 3.9. Fissate le coordinate del centro di simmetria, chiamiamo *equazione di una simmetria centrale* le relazioni che legano le coordinate del generico punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Sia $K(x_K; y_K)$ il centro di simmetria e $P(x; y)$ il generico punto di cui vogliamo determinare il corrispondente $P'(x'; y')$. Ricordiamo la definizione di simmetria centrale: K risulta il punto medio di PP'. Sappiamo che le coordinate del punto medio M di un segmento AB si ottengono dalle coordinate dei suoi estremi $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$; nel nostro caso si dovrà dunque avere $x_K = \frac{x + x'}{2}$ e $y_K = \frac{y + y'}{2}$, da cui possiamo ricavare l'equazione cercata: le coordinate del punto immagine $P'(x'; y')$ sono date dall'equazione

$$\begin{cases} x' = 2x_K - x \\ y' = 2y_K - y \end{cases} .$$

Esempio 3.5. Determinare il simmetrico di $P(-1;3)$ nella simmetria centrale di centro $K(1;-1)$.

Riportiamo K e P nel riferimento cartesiano ortogonale e scriviamo l'equazione della simmetria

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -2 - y \end{cases} .$$

Determiniamo le coordinate di P': $x' = 2 + 1 = 3$ e $y' = -2 - 3 = -5$. Quindi $P'(3;-5)$.

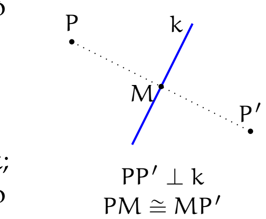
3.2.2 La simmetria assiale

Ricordiamo la definizione 1.38 di asse di un segmento, «l'asse di un segmento AB è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio M» e studiamo una nuova corrispondenza tra punti del piano.

Definizione 3.10. Fissata nel piano una retta k, chiamiamo *simmetria assiale di asse* k (indicata col simbolo S_k) la corrispondenza, nel piano, che associa ad un punto P il punto P' tale che k risulti l'asse del segmento PP'.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano si può procedere con i seguenti passi:

1. fissare l'asse di simmetria k;
2. prendere un punto P del piano non appartenente a k;
3. da P tracciare la perpendicolare p all'asse k e porre $M = p \cap k$;
4. il corrispondente P' di P si trova su p nel semipiano opposto e $P'M \cong PM$.



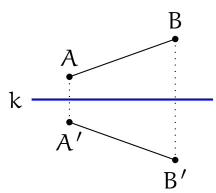
In questo modo si otterrà una figura simile a quella a fianco.

Lasciamo al lettore le verifiche delle seguenti affermazioni circa gli elementi uniti di questa trasformazione S_k.

- ogni punto dell'asse k è unito;
- l'asse k è luogo di punti uniti, ossia è una retta fissa;
- sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse k;

Teorema 3.3. *La trasformazione S_k è una isometria.*

Strategia risolutiva: Dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento $A'B'$ tale che $A'B' \cong AB$; servitevi della figura a fianco per la dimostrazione, ma prima indicate ipotesi e tesi ($A'B' \cong AB$). Suggerimento: tracciate la distanza da A e da A' a BB' e dimostrate la congruenza dei triangoli ottenuti.

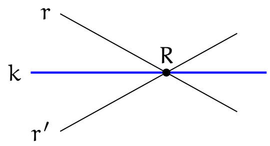


Teorema 3.4. *Se r è una retta del piano che interseca l'asse k in R allora la sua immagine r' in S_k passa per R. k risulta inoltre la bisettrice dell'angolo di vertice R avente come lati r ed r'.*

Ipotesi: k asse di simmetria, $R = r \cap k$.
Tesi: $R = r' \cap k$, $r\widehat{R}k \cong k\widehat{R}r'$.

Dimostrazione. Per costruire r' costruiamo i simmetrici in S_k di due punti scelti su r. Possiamo usare il punto R e poi un altro qualunque A. Si ottiene $S_k : R \to \ldots$ perché .... e $S_k : A \to \ldots$

Congiungendo i punti immagine si ottiene r'. Concludete .... E continuate dimostrando la seconda tesi richiesta. □

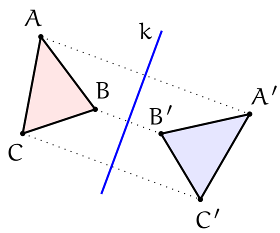


Teorema 3.5. *Se r è parallela all'asse di simmetria k allora lo è anche r'.*

Lasciamo la sua dimostrazione al lettore.

Considerate la figura a fianco. Percorrete il contorno del triangolo ABC seguendo l'ordine alfabetico delle lettere ai vertici: il percorso è stato in senso orario/antiorario? Cosa succede percorrendo il contorno del triangolo immagine $A'B'C'$ secondo S_k?

Questo fatto ci permette di concludere che S_k non mantiene l'orientamento dei punti: è una *isometria invertente*.



Descrizione analitica di una simmetria assiale

Definizione 3.11. Fissata nel riferimento cartesiano ortogonale una retta k, chiamiamo *equazione della simmetria assiale di asse* k (S_k) le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Limitiamo la ricerca dell'equazione della simmetria assiale fissando come asse particolari rette; proseguendo negli studi saprete determinare l'equazione di una simmetria assiale il cui asse è una qualunque retta del piano cartesiano.

Simmetria rispetto agli assi coordinati

Esempio 3.6. Studiare la corrispondenza tra punti del piano cartesiano espressa dal seguente predicato: $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(x_P; -y_P)$.

Completate la tabella:

x	y	x'	y'
−3	1		
0	−2		
1	0		
4	5		

e rappresentate nel riferimento cartesiano ciascun punto e il suo corrispondente.

Completate: $\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$.

Motivate la verità delle seguenti proposizioni:
«Ogni punto del piano ha un unico corrispondente» . . . .
«Di ogni punto del piano si può determinare la controimmagine» . . . .
«La corrispondenza Φ è una trasformazione geometrica» . . . .
«I punti dell'asse x sono uniti» . . . .
«La corrispondenza Φ è una isometria» . . . .

L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ascissa e ordinata opposta è la *simmetria assiale di asse* x, S_x, di equazione

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

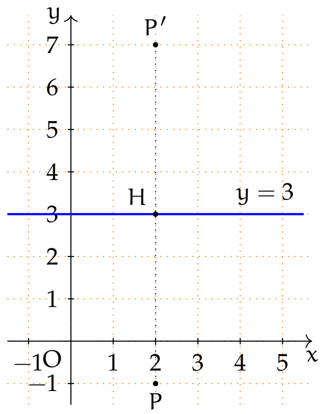
Ripetete il procedimento seguito nell'esempio precedente studiando la corrispondenza $\Phi : P(x_P; y_P) \to P'(-x_P; y_P)$ e constatate che l'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa . . . . e . . . . opposta è la *simmetria assiale di asse* . . . , $S_{\dots}$, di equazione

$$\begin{cases} x' = \dots\dots \\ y' = \dots\dots \end{cases}.$$

Simmetria rispetto ad una retta parallela agli assi cartesiani

---

Esempio 3.7. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse x di equazione $y = 3$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=3}$ avente come asse tale retta.



Determiniamo l'immagine di $P(2; -1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $y = 3$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(2; 3)$; l'immagine di P è $P'(2; y')$ ed è tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |y_H - y_P| = |y_{P'} - y_H| \Rightarrow 3 - (-1) = y_{P'} - 3 \Rightarrow y_{P'} = 7.$$

Quindi $S_{y=3} : P(2;-1) \to P'(2;7)$.

Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-1;0)$ e completate:

$$S_{y=3} : \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse x di equazione $y = a$. Sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x';y')$ la sua immagine in $S_{y=a}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio precedente possiamo scrivere:

$$|y-a| = |y'-a|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene

$$y - a = -y' + a \Rightarrow y' = -y + 2a;$$

concludendo

$$S_{y=a} : P(x;y) \to P'(x; -y+2a)$$

o anche

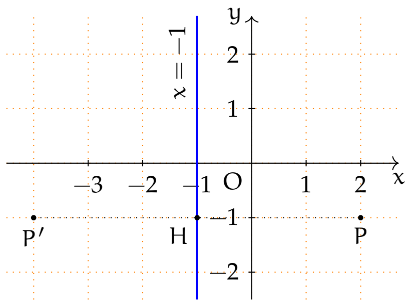
$$S_{y=a} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2a \end{cases} .$$

Verificate, con l'applicazione dell'equazione trovata, i risultati dell'esercizio precedente.

Esempio 3.8. Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse y di equazione $x = -1$; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{x=-1}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di $P(2;-1)$; da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse $x = -1$ e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono $(-1;-1)$; l'immagine di P è $P'(x';-1)$ tale che $PH \cong P'H$. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH} = \overline{P'H} \Rightarrow |x_P - x_H| = |x_H - x_{P'}| \Rightarrow |2-(-1)| = |-1 - x_{P'}| \Rightarrow x_{P'} = -4.$$

Quindi $S_{x=-1} : P(2;-1) \to P'(-4;-1)$.



Ripetendo il procedimento, determinate l'immagine dei seguenti punti $A(1;1)$, $B(-3;-2)$, $C(2;0)$ e completate:

$$S_{x=-1}: \begin{cases} A(\dots;\dots) \to A'(\dots;\dots) \\ B(\dots;\dots) \to B'(\dots;\dots) \\ C(\dots;\dots) \to C'(\dots;\dots) \end{cases}$$

Generalizziamo: vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse y di equazione $x = b$; sia $P(x;y)$ un generico punto del piano e sia $P'(x' : y')$ la sua immagine in $S_{x=b}$. Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere

$$|x - b| = |b - x'|$$

ed essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse $x = b$ si ottiene

$$x - b = -x' + b \Rightarrow x' = -x + 2b;$$

concludendo

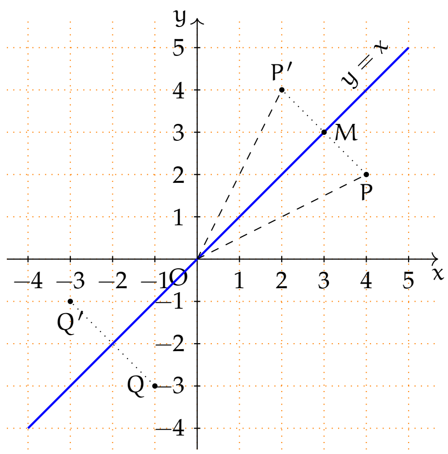
$$S_{x=b} : P(x;y) \to P'(-x + 2b;y)$$

o anche

$$S_{x=b}: \begin{cases} x' = -x + 2b \\ y' = y \end{cases} .$$

Simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti

Esempio 3.9. Determinate il punto medio M del segmento avente per estremi i punti $P(4;2)$ e $P'(2;4)$ e verificate che il triangolo POP' è isoscele sulla base PP'. La retta OM è l'asse di simmetria del triangolo considerato?



Considerate un'altra coppia di punti $Q(-1;-3)$ e $Q'(-3;-1)$ e ripetete le richieste precedenti. L'asse OM è la bisettrice del I°-III° quadrante, di equazione $y = x$.

Generalizziamo: verificate che due punti $P(x_P;y_P)$ e $P'(y_P;x_P)$ sono equidistanti dall'origine del riferimento e che il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta $y = x$.

La simmetria assiale avente come asse la bisettrice del I°-III° quadrante, indicata con S_{b1}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(y_P; x_P)$ ottenuto scambiando le coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b1} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} .$$

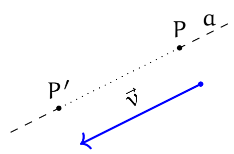
Tracciata nel riferimento la retta $y = -x$, dopo aver verificato che è la bisettrice del II°-IV° quadrante, possiamo constatare che la simmetria assiale avente come asse la bisettrice II°-IV° quadrante, indicata con S_{b2}, associa ad ogni punto $P(x_P; y_P)$ il punto $P'(-y_P; -x_P)$ ottenuto scambiando l'opposto delle coordinate di P; la sua equazione è

$$S_{b2} : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} .$$

3.2.3 La traslazione

Definizione 3.12. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama *traslazione di vettore* $\vec{v}$ (indicata con $T_{\vec{v}}$) la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\overrightarrow{PP'} \equiv \vec{v}$.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:



1. fissate un vettore $\vec{v}$;
2. prendete un punto P del piano;
3. da P tracciate la retta a avente la stessa direzione di $\vec{v}$;
4. su a fissate il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$.

Il punto P' così determinato è l'immagine di P nella traslazione, cioè $T_{\vec{v}} : P \to P'$.

Gli elementi uniti

- «Nella traslazione non ci sono punti uniti».
- «Una retta parallela al vettore che individua la traslazione è unita».

Lasciamo al lettore la verifica delle proposizioni enunciate.

Teorema 3.6. *La trasformazione $T_{\vec{v}}$ è una isometria.*

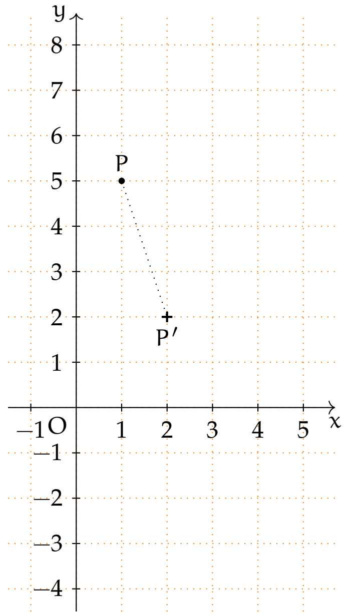
Strategia risolutiva: dimostrate che l'immagine di un segmento AB è un segmento $A'B'$ tale che $AB \cong A'B'$.

Teorema 3.7. *Se r ed r' sono due rette corrispondenti in $T_{\vec{v}}$, allora sono parallele.*

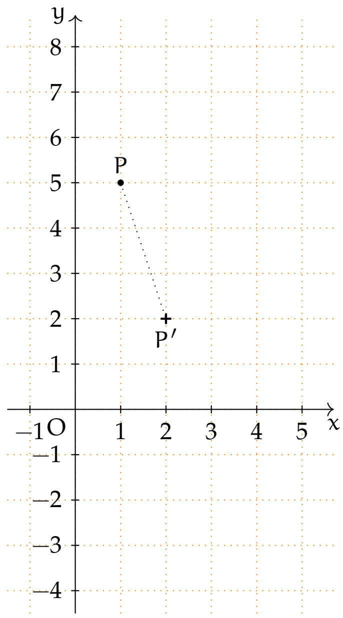
Lasciamo al lettore la dimostrazione del teorema.

Descrizione analitica di una traslazione

Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro, C, sottostante, i punti sono rappresentati con il simbolo "+". Studiamo la corrispondenza $T_{\vec{v}}$ tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge



$$P(x_P; y_P) \in D \xrightarrow{T_{\vec{v}}} P'(x_P + 1; y_P + (-3)) \in C.$$



Se $P(1;5)$ è un punto di D il suo corrispondente è $P'(2;2)$. Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2)$, $H(-1;8)$, $K(3;3)$ e $V(4;-1)$. Congiungete ciascun punto F, H, K e V con il proprio corrispondente F', H', K' e V'. I vettori $\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{HH'}$, $\overrightarrow{KK'}$ e $\overrightarrow{VV'}$ sono equipollenti? Rispondente alle seguenti domande

- È vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
- È vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
- Si può affermare che è biunivoca?
- Di quale punto è immagine il punto $S'(0;-4)$?
- È vero che la trasformazione è una isometria?

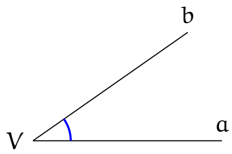
Possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è una isometria completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$ pertanto è una traslazione.

Definizione 3.13. Fissato nel riferimento cartesiano ortogonale un vettore $\vec{v}(a;b)$, chiamiamo *equazione della traslazione di vettore* $\vec{v}(a;b)$, $T(a;b)$, le relazioni che legano le coordinate di un generico punto P con quelle della sua immagine P'.

Siano $(x;y)$ le coordinate del punto P e $(x';y')$ quelle della sua immagine P'. L'equazione della traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ è

$$T(a;b): \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} .$$

3.2.4 La rotazione



Fissiamo nel piano un angolo convesso di vertice V e lati a e b; se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo muovendoci in senso antiorario; considerando l'angolo concavo di vertice V e lati a e b se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo concavo muovendoci in senso orario.

Definizione 3.14. Un *angolo* si dice *orientato* quando viene fissato un ordine tra i suoi lati, ad esempio l'ordine alfabetico. Se per andare dal primo lato al secondo ci muoviamo in senso antiorario diciamo che l'angolo è positivo, al contrario avremo un angolo negativo.

Esempio 3.10. Nella figura 3.10 sono disegnati alcuni angoli i cui lati seguono l'ordine alfabetico.

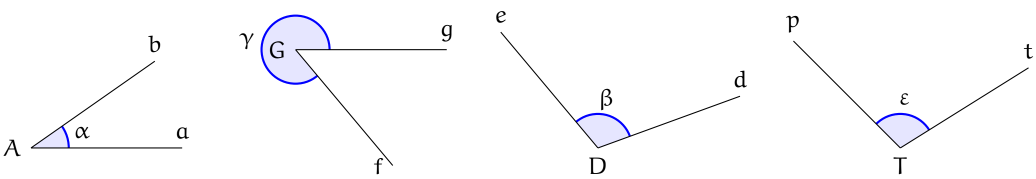


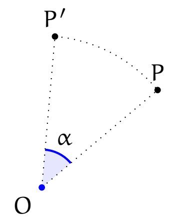
FIGURA 3.10: Esempio 3.10

- Angolo di vertice A e lati a e b: a raggiunge b percorrendo l'angolo α in senso antiorario quindi diciamo che α è positivo.
- Angolo di vertice G e lati f e g: f raggiunge g percorrendo l'angolo γ in senso orario quindi diciamo che γ è negativo.
- Angolo di vertice D e lati d ed e: ....
- Angolo di vertice T e lati p e t: ....

Definizione 3.15. Fissato un punto O e un angolo orientato α, chiamiamo *rotazione di centro* O *e ampiezza* α, $R_{O,\alpha}$, la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che $OP \cong OP'$ e $P\widehat{O}P' = \alpha$.

Fissato l'angolo orientato α, il punto O centro della rotazione, l'immagine del punto P si determina con i seguenti passi:

1. congiungiamo O con P;
2. tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OP;
3. costruiamo, con vertice in O, l'angolo α;
4. P' è il punto di intersezione della circonferenza con il secondo lato dell'angolo α.



Gli elementi uniti

- «Il centro è l'unico punto unito».
- «Sono unite tutte le circonferenze aventi il centro nel centro di rotazione».

Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato.

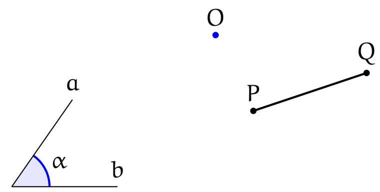
Teorema 3.8. *La rotazione è una isometria.*

Per dimostrare il teorema proposto, servitevi della figura a lato, nella quale è segnato il centro di rotazione O, l'angolo orientato α (a è il primo lato) e un segmento PQ. Strategia risolutiva: costruite l'immagine $P'Q'$ nella rotazione assegnata.

Ipotesi: ………

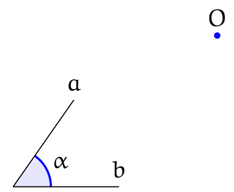
Tesi: ………

Dimostrazione. ………



Teorema 3.9. *La rotazione è una isometria diretta.*

Ricordate che per questa dimostrazione basta costruire l'immagine di una figura e verificare che viene mantenuto il verso di percorrenza del contorno. Vi proponiamo, nella figura a lato, il centro e l'angolo di rotazione; disegnate una figura geometrica, costruite la sua immagine e concludete.



3.3 Composizione di isometrie

3.3.1 Composizione di isometrie di tipo diverso

Esempio 3.11. Riferendovi alla figura 3.11, completate:
Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati il triangolo DEF avente i vertici di coordinate $D(\ldots;\ldots)$, $E(\ldots;\ldots)$ ed $F(\ldots;\ldots)$ e il vettore $\vec{u}$ di componenti $(\ldots;\ldots)$.

Con la traslazione di vettore $\vec{u}$ si ha $DEF \xrightarrow{T_{\vec{u}}} \ldots\ldots\ldots$ e $DEF \cong D'E'F'$ essendo la traslazione una isometria.

Nella simmetria assiale $S_{x=3}$ si ha $D'E'F' \xrightarrow{S_{x=3}} \ldots\ldots\ldots$ e $D'E'F' \cong D''E''F''$ essendo la simmetria assiale una isometria.

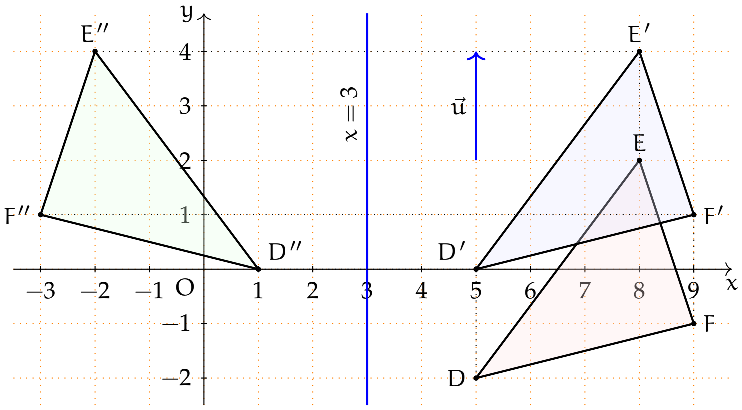


FIGURA 3.11: Esempio 3.11

Completate con le coordinate dei punti

$$\left.\begin{array}{l} D(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} D'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} D''(\ldots;\ldots) \\ E(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} E'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} E''(\ldots;\ldots) \\ F(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} F'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_{x=3}} F''(\ldots;\ldots) \end{array}\right\} \Rightarrow DEF \xrightarrow{T_{\vec{u}}} D'E'F' \xrightarrow{S_{x=3}} D''E''F''$$

e $DEF \cong D''E''F''$ per la proprietà transitiva della congruenza.

Definizione 3.16. Chiamiamo *composizione di due isometrie* Φ_1 *e* Φ_2 l'isometria $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ (e leggiamo "Φ_2 composta con Φ_1"), che associa ad un qualunque punto P del piano il punto P'' ottenuto determinando prima l'immagine P' di P in Φ_1 e di seguito l'immagine P'' di P' in Φ_2. In formula: $\Phi(P) = \Phi_1 \circ \Phi_2 : P \xrightarrow{\Phi_1} P' \xrightarrow{\Phi_2} P''$.

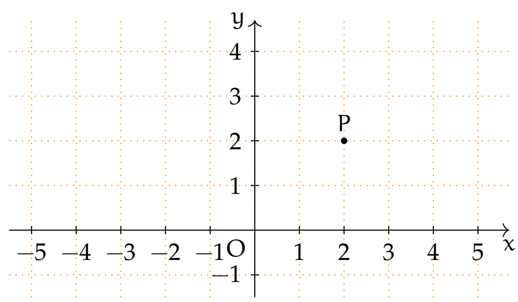
Riprendendo l'esempio precedente concludiamo $DEF \xrightarrow{S_{x=3} \circ T_{\vec{u}}} D''E''F''$.
In generale, la composizione di isometrie non è commutativa, cioè $\Phi_1 \circ \Phi_2 \neq \Phi_2 \circ \Phi_1$. Se, utilizzando l'esempio precedente volete verificare che $S_{x=3} \circ T_{\vec{u}} \neq T_{\vec{u}} \circ S_{x=3}$, troverete un risultato che sembra contraddire quanto affermato; è però sufficiente trovare un controesempio per convincerci della verità della proposizione sopra enunciata.

Controesempio Determinate l'immagine del punto $P(2;2)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$ essendo $\vec{u}(3;2)$. Quindi confrontatela con l'immagine dello stesso punto in $T_{\vec{u}} \circ S_y$.

Tracciate il vettore $\vec{u}(3;2)$ e completate

$$P(2;2) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_y} P''(\ldots;\ldots)$$

$$P(2;2) \xrightarrow{S_y} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P''(\ldots;\ldots)$$



Concludete: la composizione di isometrie non è ...., infatti si ha $S_y \circ T_{\vec{u}} \dots T_{\vec{u}} \circ S_y$.

Possiamo determinare l'equazione che lega le coordinate del punto iniziale con quelle della sua immagine nell'isometria ottenuta dalla composizione? Procediamo per passi:

I° passo: scriviamo l'equazione della traslazione

$$T_{\vec{u}} = \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

e della simmetria rispetto all'asse y

$$S_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad .$$

II° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $S_y \circ T_{\vec{u}}$:

$$P(x_P; y_P) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P'(x_P + 3; y_P + 2) \xrightarrow{S_y} P''(-x_P - 3; y_P + 2) \Rightarrow S_y \circ T_{\vec{u}} : \begin{cases} x'' = -x_P - 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

III° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P; y_P)$ in $T_{\vec{u}} \circ S_y$:

$$P(x_P; y_P) \xrightarrow{S_y} P'(-x_P; y_P) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} P''(-x_P + 3; y_P + 2) \Rightarrow T_{\vec{u}} \circ S_y : \begin{cases} x'' = -x_P + 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

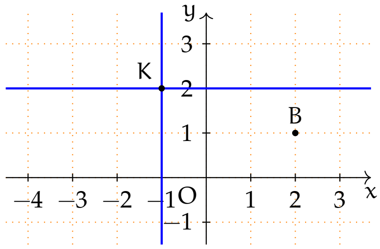
Dunque confermiamo la non commutatività dell'operazione di composizione delle isometrie.

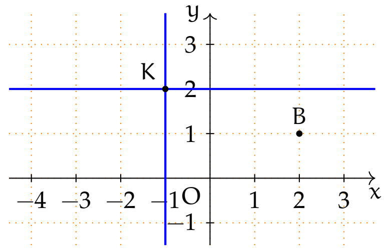
3.3.2 Composizione di isometrie dello stesso tipo

Esempio 3.12. Determinate l'equazione dell'isometria che si ottiene componendo la simmetria che ha per asse l'asse x e quella avente come asse l'asse y: $S_y \circ S_x \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Quale isometria avete ottenuto? Determinate l'equazione di $S_x \circ S_y \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Cosa potete concludere?

Lasciamo al lettore la sua risoluzione.

Esempio 3.13. Nel riferimento cartesiano ortogonale sono tracciate le rette a: $x = -1$ e b: $y = 2$ e il punto $B(2;1)$.





1. Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_1 = S_a \circ S_b$ della quale indicherete l'equazione.
2. Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_2 = S_b \circ S_a$ della quale indicherete l'equazione.
3. Indicate le coordinate del punto K e scrivete l'equazione della simmetria di centro K. Cosa concludete?

Lasciamo al lettore la sua risoluzione.

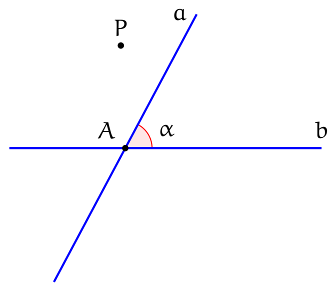
Generalizziamo: siano a e b due rette tra loro perpendicolari e K il loro punto di intersezione. Dimostrate che:

- La composizione delle due simmetrie di assi a e b è commutativa.
- L'isometria $\Omega = S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$ è la simmetria centrale di centro K.

Conclusione: la composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari in K è la simmetria centrale di centro K. L'operazione è commutativa.

Esempio 3.14. Servendovi della figura a fianco

- Determinate l'immagine del punto P nell'isometria ottenuta componendo due simmetrie con assi incidenti $P \overset{S_a}{\to} P' \overset{S_b}{\to} P''$.
- Verificate che la composizione non è commutativa determinando $P \overset{S_b}{\to} P'_1 \overset{S_a}{\to} P''_1$.
- Dimostrate che $AP \cong AP' \cong AP'' \cong AP'_1 \cong AP''_1$.
- Dimostrate che i punti P, P', P'', P'_1 e P''_1 stanno su una stessa circonferenza di centro A.
- Dimostrate che $P\widehat{A}P'' = 2 \cdot \alpha$.



Conclusione: la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti nel punto A è la rotazione di centro A e angolo orientato $2 \cdot \alpha$; i punti corrispondenti appartengono ad una circonferenza di centro A e raggio AP, dove P è il punto considerato. La composizione in esame non è commutativa.

Proposzione 3.10. *La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione di vettore avente direzione perpendicolare ai due assi di simmetria e modulo uguale al doppio della distanza tra gli stessi assi.*

Proposzione 3.11. *La composizione di due simmetrie centrali, di centro rispettivamente O_1 e O_2, è una traslazione di vettore avente la direzione della retta O_1O_2 e modulo uguale al doppio della distanza tra O_1 e O_2.*

3.3.3 Isometria inversa

Sappiamo che dalla composizione di due isometrie si ottiene una isometria e in generale componendo due trasformazioni geometriche si ottiene una trasformazione geometrica, ossia una corrispondenza biunivoca tra punti del piano. Consideriamo il caso di due trasformazioni Ψ_1 e Ψ_2 tali che per ogni punto P del piano risulti

$$\Psi_1 \circ \Psi_2(P) = \Psi_2 \circ \Psi_1(P) = P$$

cioè che l'immagine di un qualunque punto P nella trasformazione composta coincida con P stesso. In tal caso la trasformazione composta è la trasformazione *identità* I che, per definizione, trasforma ogni punto in se stesso

$$I(P) = P \quad \forall P.$$

Quindi

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = I.$$

Definizione 3.17. Si chiama *trasformazione inversa* di una trasformazione Ψ la trasformazione che composta con Ψ, a destra o a sinistra, dà origine all'identità e la indicheremo con Ψ^{-1}; in simboli: $\Psi \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Psi = I$.

Definizione 3.18. Una trasformazione che coincide con la sua inversa è detta *involutoria*.

3.4 Esercizi

3.4.1 Esercizi riepilogativi

3.1. Le coppie di figure rappresentate nella figura 3.12 si corrispondono in una trasformazione geometrica piana: associate a ciascuna coppia la caratteristica che rimane immutata nella trasformazione, ossia individuate l'invariante o gli invarianti della trasformazione.

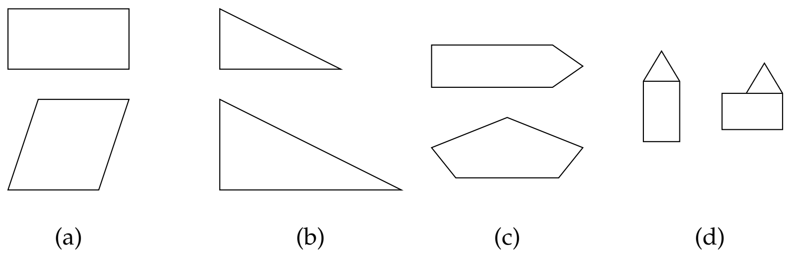


FIGURA 3.12: Esercizio 3.1

3.2. Si sa che una trasformazione geometrica muta un quadrato in un rombo; gli invarianti di questa trasformazione sono:

a) il parallelismo dei lati e l'ampiezza degli angoli;
b) l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati;
c) solo il parallelismo dei lati;
d) il parallelismo dei lati e la perpendicolarità delle diagonali.

3.3. Quali coppie rappresentate nella figura 3.13 sono formate da figure corrispondenti in una isometria?

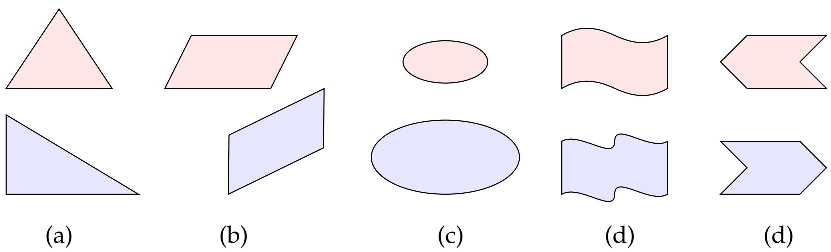


FIGURA 3.13: Esercizio 3.3

3.4. Presi nel piano due punti T e T' è vero che possiamo sempre individuare la simmetria centrale in cui T' è immagine di T?

3.5. Come dobbiamo scegliere due segmenti affinché sia possibile determinare una simmetria centrale in cui essi siano corrispondenti?

3.6. Anche in natura si presentano elementi dotati di un centro di simmetria: cercate una foto di un fiore che presenta un centro di simmetria e individuate quest'ultimo.

3.7. Sappiamo che $S_K : P\left(\frac{3}{5};0\right) \to P'\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$, determinate il centro K della simmetria.

3.8. Il segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(2;-4)$ in S_O, essendo O l'origine del riferimento cartesiano ortogonale

a) ha tutti i suoi punti fissi;
b) ha un solo punto fisso;
c) ha fissi solo gli estremi;
d) ha fissi tutti i punti interni ma non gli estremi;
e) non ha punti fissi.

3.9. Sono assegnati i punti $A(-5;0)$, $B(0;5)$ e $C(1;-1)$; determinate le coordinate dei vertici $A'B'C'$ del triangolo immagine di ABC nella simmetria avente come centro il punto medio M del lato AC.

3.10. I punti $A(1;5)$, $B(-2;2)$ e $C(0;-4)$ sono tre vertici di un parallelogramma. Determinate le coordinate del quarto vertice. Indicate con M il punto di incontro delle diagonali; in S_M il parallelogramma $ABCD$ è fisso o unito? Perché?

3.11. Sappiamo che l'equazione di una simmetria centrale di centro $C(p;q)$ è $\begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$; note le coordinate di un punto $P(x;y)$ e della sua immagine $P'(x';y')$ le coordinate del centro sono:

a) $p = x' + x \quad q = y' + y$;
b) $p = x - \frac{1}{2}x' \quad q = y - \frac{1}{2}y'$;
c) $p = 2(x' + x) \quad q = 2(y' + y)$;
d) $p = \frac{1}{2}(x' + x) \quad q = \frac{1}{2}(y' + y)$;
e) $p = \frac{1}{2}(x' - x) \quad q = \frac{1}{2}(y' - y)$.

3.12. Verificate che i tre punti $A(3;2)$, $B(7;-2)$, $C(5;0)$ sono allineati. È vero che C è il centro della simmetria che fa corrispondere al punto A il punto B? (Ricorda che puoi verificare l'allineamento verificando che $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$)

3.13. Il centro della simmetria che associa al triangolo di vertici $A(0;4)$, $B(-2;1)$ e $C(1;5)$ il triangolo di vertici $A'(2;-2)$, $B'(4;1)$ e $C'(1;-3)$ è

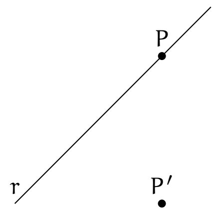
a) $K(-1;1)$;
b) $K(1;-1)$;
c) $K(1;1)$;
d) $K(-1;-1)$.

3.14. Determinate l'immagine M' del punto medio M del segmento AB di estremi $A(0;5)$ e $B(-4;1)$ in S_O (O è l'origine del riferimento cartesiano). È vero che $BM'A$ è isoscele sulla base AB?

3.15. Determinate la natura del quadrilatero $ABA'B$ che si ottiene congiungendo nell'ordine i punti $A(-1;1)$, $B(-4;-5)$, A' e B' rispettivamente simmetrici di A e B in S_O. Determinate la misura delle sue diagonali.

3.16. Nel piano sono assegnati i punti T e T' corrispondenti in una simmetria assiale. Come potete determinare l'asse di simmetria?

3.17. Nel piano è assegnata la retta r e un suo punto P e un punto P' non appartenente ad r. Costruisci la retta r' immagine di r nella simmetria assiale che fa corrispondere al punto P il punto P'.



3.18. Costruite l'immagine di ciascun triangolo ABC della figura 3.14 nella simmetria avente come asse la retta del lato AC.

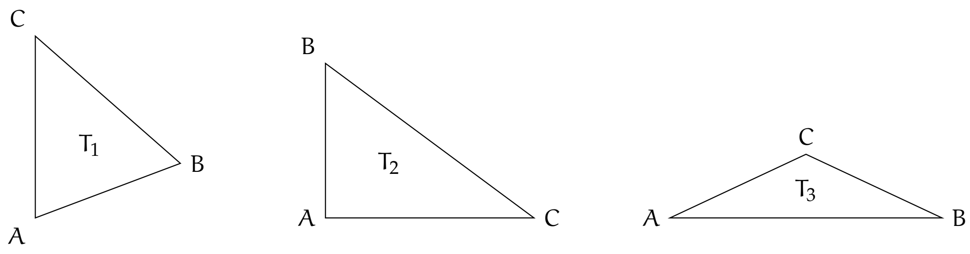


FIGURA 3.14: Esercizio 3.18

3.19. Nel triangolo isoscele ABC di base BC considerate la retta r passante per A e perpendicolare a BC; costruite l'immagine di ABC nella simmetria di asse r. Stabilite quale proposizione è vera:

a) il triangolo è fisso nella simmetria considerata;
b) il triangolo è unito nella simmetria considerata.

3.20. Assegnato il quadrato $ABCD$, determinate la sua immagine nella simmetria avente come asse la retta della diagonale AC. Stabilite quale proposizione è vera:

a) il quadrato è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrato è unito nella simmetria considerata.

3.21. Motivate la verità delle proposizioni
p_1: «il quadrato possiede 4 assi di simmetria»,
p_2: «il triangolo equilatero possiede 3 assi di simmetria».

3.22. Dimostrate che la retta di un diametro è asse di simmetria per la circonferenza. Potete concludere che la circonferenza possiede infiniti assi di simmetria?

3.23. Tra i trapezi ne trovate uno avente un asse di simmetria? Qual è l'asse di simmetria?

3.24. Quali lettere dell'alfabeto, tra quelle proposte a fianco, hanno un asse di simmetria?

3.25. Le due rette tracciate sono assi di simmetria del rettangolo in grigio a fianco e pertanto lo sono anche per l'immagine in esso contenuta. Vero o falso?

3.26. Perché la retta che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele non è un suo asse di simmetria?

3.27. In S_x (simmetria assiale rispetto all'asse x) il segmento AB di estremi $A(3;2)$ e $B(3;-2)$

a) è unito, luogo di punti uniti;
b) non ha punti fissi;
c) ha tutti i suoi punti uniti tranne A e B;
d) ha un solo punto fisso;
e) ha solo A e B fissi.

3.28. Dimostrate che un qualunque segmento MN di estremi $M(a;b)$ e $N(c;d)$ ha come corrispondente sia nella simmetria avente come asse l'asse x, sia nella simmetria avente come asse l'asse y, il segmento $M'N'$ tale che $MN \cong M'N'$.

Ipotesi: $M(a;b)$, $N(c;d)$, $S_x : (M \to M') \wedge (N \to N')$
Tesi: $MN \cong M'N'$

Dimostrazione.
Determino $\overline{MN} = \ldots$ Trovo $M'(\ldots;\ldots)$ e $N'(\ldots;\ldots)$. Determino $\overline{M'N'} = \ldots$
Concludo: ...

Ipotesi: $M(a;b)$, $N(c;d)$, $S_y : (M \to M') \wedge (N \to N')$
Tesi: $MN \cong M'N'$

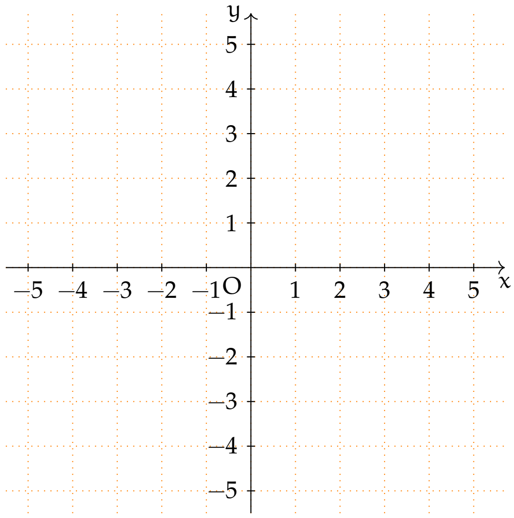
Dimostrazione.
Determino $\overline{MN} = \ldots$ Trovo $M'(\ldots;\ldots)$ e $N'(\ldots;\ldots)$. Determino $\overline{M'N'} = \ldots$
Concludo: ...

3.29. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse x è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

3.30. Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che $A(0;4)$, $B(-2;0)$ e che l'asse y è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

3.31. Considerate la funzione di proporzionalità quadratica $y = 2x^2$. Rappresentatela nel riferimento cartesiano e segnate i suoi punti A, B e C, rispettivamente di ascissa $x_A = 1$, $x_B = -\frac{1}{2}$ e $x_C = \frac{1}{\sqrt{2}}$; trovate i corrispondenti A', B', C' nella simmetria S_y e verificate che appartengono alla funzione assegnata. Vi è un punto della curva rappresentata che risulta fisso in S_y? Inoltre, quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

a) la curva è fissa nella simmetria considerata;
b) la curva è unita nella simmetria considerata.



3.32. I punti $A(-5;1)$, $B(-2;6)$, $C(3;6)$ e $D(0;1)$ sono vertici di un quadrilatero.

a) Dimostrate che è un parallelogrammo.
b) Determinate perimetro e area;
c) Determinate la sua immagine $A'B'C'D'$ in $S_{y=3}$.

È vero che sia sul lato AB che sul lato CD esiste un punto fisso nella simmetria considerata? Tali punti su quali lati di $A'B'C'D'$ si trovano? Perché?

3.33. Determinate l'immagine del quadrilatero ABCD di vertici $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(5;3)$, $D(0;5)$ nella simmetria S_{b1}.

3.34. Nella simmetria S_{b1} la retta $y = -x$ è fissa o unita?

3.35. Motivate la verità della seguente proposizione: «nella simmetria S_{b2} l'immagine dell'asse x è l'asse y». Viene mantenuto l'orientamento dell'asse x? Completate: S_{b2} : (asse x) $\rightarrow$ (asse ...) e (asse y) $\rightarrow$ (......) Analogamente: S_{b1} : (asse x) $\rightarrow$ (asse ...) e (asse y) $\rightarrow$ (......)

3.36. Dato il quadrilatero ABCD di vertici $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(4;4)$ e $D(1;3)$ trovate il suo corrispondente in S_{b1}. Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

a) il quadrilatero è fisso nella simmetria considerata;
b) il quadrilatero è unito nella simmetria considerata.

3.37. Determinate il corrispondente del parallelogramma ABCD di vertici $A(-5;1)$, $B(-2;6)$, $C(3;6)$, $D(0;1)$ in S_{b1}; perché AA', BB', CC' e DD' sono paralleli? Ricordando che il parallelogramma ha un centro di simmetria, determinate il centro di simmetria di ABCD e verificate che in S_{b1} esso ha come immagine il centro di simmetria di $A'B'C'D'$.

3.38. Nel piano cartesiano sono assegnati i punti $A(0;3)$, $B(-2;0)$ e $C(-1;-3)$.

a) Determinate i punti A', B' e C' immagine in S_{b2}.
b) Calcolate l'area del quadrilatero $A'B'C'O$, essendo O l'origine del riferimento.

c) Motivate la verità della proposizione: «i segmenti AB e $A'B'$ si incontrano in un punto P della bisettrice del II°-IV° quadrante».
d) È vero che $AP'B$ è congruente a PAB'?

3.39. Sono assegnate le simmetrie

$$S_1 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad ; \quad S_2 : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad ; \quad S_3 : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases} \quad ; \quad S_4 : \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = 3 - y \end{cases}$$

Usando qualche punto scelto arbitrariamente riconosci ciascuna di esse e completa la tabella sottostante:

Simmetria	Tipo	Centro (coordinate)	Asse (equazione)
S_1	....	......	....
S_2	....	......	....
S_3	....	......	....
S_4	....	......	....

3.40. Quale tra le seguenti caratteristiche è invariante in una simmetria assiale?

a) la posizione della figura;
b) la direzione della retta;
c) il parallelismo;
d) l'orientamento dei punti;
e) dipende dall'asse di simmetria.

3.41. I segmenti AB e $A'B'$ si corrispondono nella simmetria di asse r; sapendo che $ABB'A'$ è un rettangolo, quale proposizione è vera?

a) AB è perpendicolare ad r;
b) AB è parallelo ad r;
c) AB appartiene ad r;
d) AB è obliquo rispetto ad r e $AB \cap r = H$.

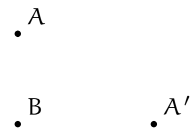
3.42. È assegnato il punto $P\left(-\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Determinate il suo corrispondente nelle simmetrie indicate e completate:

$$S_{b2} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{x=-\frac{1}{2}} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_O : P \to P'(\ldots;\ldots)$$
$$S_x : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{y=2} : P \to P'(\ldots;\ldots) \qquad S_{C(1;1)} : P \to P'(\ldots;\ldots)$$

3.43. Un segmento unito in S_{b2} è

a) un segmento perpendicolare alla bisettrice del I°-III° quadrante;
b) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante nel suo punto medio;
c) un segmento parallelo alla bisettrice del I°-III° quadrante;
d) un segmento perpendicolare alla bisettrice del II°-IV° quadrante;
e) un segmento avente il suo punto medio appartenente alla bisettrice del II°-IV° quadrante.

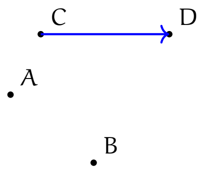
3.44. Nel piano sono assegnati i tre punti A, B e A' dei quali il punto A' è immagine di A in una traslazione. Dopo aver determinato il vettore della traslazione costruite l'immagine del triangolo ABA'.



3.45. Determinate l'immagine del parallelogrammo $ABCD$ nella traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$.

3.46. Dati due punti distinti A e B e il vettore $\overrightarrow{CD}$ della figura a fianco, detti A' e B' i punti immagine di A e B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CD}$, rispondete alle domande:

a) Di che natura è il quadrilatero $ABB'A'$?
b) Può succedere che il quadrilatero in questione sia un rettangolo? E un rombo?
c) Cosa succede se AB è parallelo al vettore $\overrightarrow{CD}$?



3.47. Come dobbiamo assegnare due segmenti AB e $A'B'$ affinché siano corrispondenti in una traslazione? È unica la traslazione che associa ad AB il segmento $A'B'$?

3.48. Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto $P(-4;2)$. Determinate il punto P' immagine nella traslazione $T(3;-1): \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+(-1) \end{cases}$.

Strategia risolutiva:

1. individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\ldots;\ldots)$;
2. tracciate il vettore nel riferimento cartesiano;
3. determinate le coordinate di P': $P'(\ldots;\ldots)$.

Completate: $\overrightarrow{PP'}$ è .... a $\vec{w}$; questo significa che i due vettori hanno .... direzione (cioè sono ....), stesso .... e .... intensità.

3.49. Nel riferimento cartesiano, dopo aver fissato il punto $P(-4;2)$ siano dati i punti $Q(\ldots;\ldots)$ e $Q'(\ldots;\ldots)$ immagine nella traslazione $T(3;-1)$. Dimostrate con le conoscenze di geometria sintetica che $PP'Q'Q$ è un parallelogramma.

Ipotesi: $PP' \cong QQ'$, $PP' \ldots QQ'$
Tesi: ....

Dimostrazione. ......

3.50. Sappiamo che l'equazione di una traslazione è $T(a;b): \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$. Assegnate le coordinate $(x;y)$ di un punto P e $(x';y')$ della sua immagine P', le componenti del vettore della traslazione sono date da:

a) $a = x'+x$ e $b = y'+y$;
b) $a = x-x'$ e $b = y-y'$;
c) $a = x'-x$ e $b = y'-y$;
d) $a = x'+x$ e $b = y'-y$;
e) $a = \frac{x'}{x}$ e $b = \frac{y'}{y}$.

3.51. Dopo aver determinato l'equazione della traslazione in cui $A'(0;-2)$ è l'immagine di $A(3;2)$, determinate il perimetro del triangolo $AO'A'$ essendo O' il corrispondente di $O(0;0)$ nella traslazione trovata.

3.52. Verificate che il punto medio M del segmento PQ di estremi $P(-1;4)$ e $Q(5;0)$ ha come immagine in $T(3;-1)$ il punto medio M' del segmento $P'Q'$.

3.53. Applica la traslazione di equazione $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$ al segmento di estremi $A(-2;4)$ e $B(3;3)$.

3.54. Dati $A(1;0)$ e $B(0;2)$, determina C e D in modo che ABCD sia un quadrato.

3.55. Determinate l'immagine del triangolo di vertici $A(0;2)$, $B(-3;2)$ e $C(0;5)$ nella traslazione $T(4;1)$. Calcolatene quindi perimetro e area.

3.56. Determinate l'equazione della traslazione di vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ assegnati dalla figura 3.15. Determinate inoltre l'immagine del poligono di vertici $H(-1;1)$, $K(0;-2)$, $L(3;0)$ ed $F(1;2)$.

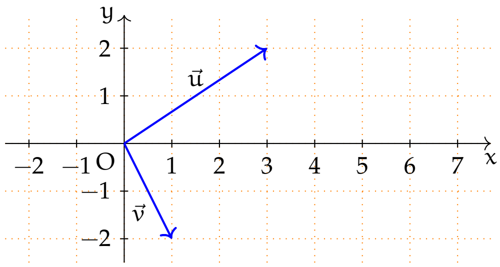
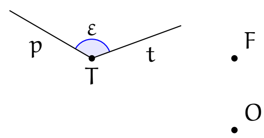


FIGURA 3.15: Esercizio 3.56

3.57. Un vettore $\vec{v}$ ha modulo unitario, è applicato nell'origine O e forma con l'asse delle ascisse un angolo di 30°. Determinate le sue componenti e scrivete l'equazione della traslazione da esso caratterizzata.

3.58. Prendete in considerazione l'angolo ε di vertice T della figura a fianco. Sia O il centro di rotazione e F un punto del piano di cui si vuole determinare l'immagine. Costruite F' seguendo i passi illustrati immediatamente dopo la definizione 3.15 a pagina 107.



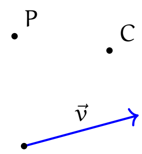
3.59. Costruite l'immagine del quadrato ABCD nella rotazione di +90° avente come centro di simmetria il vertice B. Fissate i punti medi M ed N rispettivamente di AB e di CD; dove si trovano le rispettive immagini?

3.60. È vero che il quadrato è unito nella rotazione avente come centro il punto di incontro delle diagonali e come ampiezza 90°?

3.61. L'ortocentro di un triangolo equilatero è il centro di una rotazione in cui il triangolo è unito. Determinate l'angolo di rotazione.

3.62. Costruite l'immagine $A'B'C'$ del triangolo equilatero ABC nella rotazione di centro B e ampiezza $-120°$. Dimostrate che C, B ed A' sono allineati e che ABC' è un triangolo equilatero congruente a quello dato.

3.63. Nel piano è assegnato il punto C e il vettore $\vec{v}$ (figura a lato); costruite l'immagine del punto P nell'isometria $T_{\vec{v}} \circ S_C$ e anche l'immagine dello stesso punto P nell'isometria $S_C \circ T_{\vec{v}}$. Determinate l'equazione di $\Phi_1 = T_{\vec{v}} \circ S_C$ e di $\Phi_2 = S_C \circ T_{\vec{v}}$.



3.64. Il centro della simmetria è il punto $C(-1;-2)$, il vettore della traslazione è $\vec{v}(3;-2)$ e il punto di cui vogliamo determinare l'immagine è scelto da voi arbitrariamente.

3.65. Sono assegnati il punto $C(-4;3)$, la retta $x = 1$ e il punto $P(0;5)$. Determinate l'immagine P'' di P nell'isometria $\Delta = S_C \circ S_{x=1}$ e l'immagine P^* di P nell'isometria $\Delta = S_{x=1} \circ S_C$. È vero che P'' e P^* si corrispondono nella simmetria S_y? Determinate l'area del triangolo $PP''P^*$.

3.66. È assegnato un punto O; determinate l'immagine P' di un punto P nella rotazione di centro O e angolo di $60°$ e l'immagine P'' di P' nella simmetria avente come asse la retta PO.

a) Completate: $P \xrightarrow{\dots} P'$.
b) Dimostrate che P, P' e P'' appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP.
c) Individuate le caratteristiche del quadrilatero $PP''OP'$.
d) Determinatene l'area, supponendo $\overline{OP} = 2$ m.

3.67. ABC è un triangolo equilatero e O è il centro della sua circonferenza circoscritta. Dimostrate che il triangolo è unito nella rotazione di centro O e angolo $\alpha = 120°$. Analogamente il quadrato $ABCD$ è unito nella rotazione di centro H, punto di incontro delle sue diagonali, di angolo $\alpha = 90°$.

3.68. Giustificate la verità della proposizione: «La simmetria centrale di centro K è una rotazione di $180°$».

3.69. Nel piano dotato di riferimento cartesiano è tracciata la bisettrice del I° e III° quadrante e la retta $y = 1$. Completate le osservazioni seguenti:

a) il punto di intersezione K ha coordinate $K(\dots;\dots)$;
b) l'angolo delle due rette è di $\dots°$.

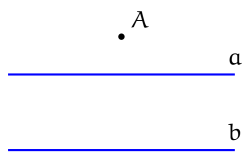
3.70. Scrivete l'equazione della simmetria avente come asse la bisettrice: $S_{b1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria di asse la retta $y = 1$: $S_{y=1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$.

3.71. Determinate le coordinate del punto P'' immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega = S_{b1} \circ S_{y=1}$ e scrivete l'equazione di Ω. Concludete: Ω è la rotazione di centro ... e angolo ... (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

3.72. Determinate le coordinate del punto P^* immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega^* = S_{y=1} \circ S_{b1}$ e scrivete l'equazione di Ω^*. Concludete: Ω^* è la rotazione di centro ... e angolo ... (ricordate il segno dell'angolo di rotazione).

3.73. Determinate l'equazione della isometria $J = S_{b1} \circ S_{x=4}$ e stabilite se esiste qualche elemento unito. Come cambia l'equazione dell'isometria $J^* = S_{x=4} \circ S_{b1}$ rispetto alla precedente? Sia J che J^* sono rotazioni: determinate centro e angolo (con segno) di ognuna di esse. A questo scopo potete utilizzare il punto $P(2;4)$ o un punto arbitrariamente scelto.

3.74. Determinate l'immagine del punto A nell'isometria $\Delta = S_b \circ S_a$ essendo a e b le rette parallele segnate nella figura a fianco e A il punto dato. Dimostrate che $\overline{AA''} = 2 \cdot d$ essendo d la distanza tra le rette a e b. Fissate arbitrariamente un altro punto B non appartenente ad alcuna delle rette date e determinate la sua immagine B'' nell'isometria Δ. È vero che $\overline{AA''} = \overline{BB''}$ e $\overline{AA''} \parallel \overline{BB''}$? Potete concludere che l'isometria Δ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$?



3.75. Facendo riferimento all'esercizio 3.74, verificate che la traslazione $\Delta_1 = S_a \circ S_b$ è caratterizzata da un vettore avente modulo e direzione uguali al vettore $\overrightarrow{AA''}$ ma verso opposto.

3.76. Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(2;1)$ e $C(-1;3)$. Determinate i punti A'', B'' e C'' immagine rispettivamente di A, B e C nella traslazione $T = S_{x=-2} \circ S_{x=1}$. Scrivete l'equazione della traslazione, individuate il vettore che la definisce calcolandone modulo e direzione.

3.77. Determinate i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ delle traslazioni $T_{\vec{u}} \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases}$ e $T_{\vec{v}} \begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y-1 \end{cases}$ e il vettore $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. Verificate che $T_{\vec{s}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$. Cosa otteniamo dalla composizione $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$? Sapresti darne la motivazione? Concludete: componendo due traslazioni si ottiene ……

3.78. Nel riferimento cartesiano ortogonale Oxy è assegnato il punto $O_1(2;1)$; scrivete l'equazione della simmetria centrale di centro O $S_O \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ e l'equazione della simmetria centrale di centro O_1 $S_{O_1} \begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$. Determinate l'immagine P'' del punto $P(1;2)$ nell'isometria $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ di cui avrete scritto l'equazione e determinate $\overline{PP''}$. Determinate Q'' immagine di $Q\left(\frac{1}{2};-1\right)$ nell'isometria Σ e determinate $\overline{QQ''}$. Potete affermare che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''}$? Verificate che $\overrightarrow{PP''} \equiv \overrightarrow{QQ''} \equiv 2 \cdot \overrightarrow{O_1O}$. È vero che $\Sigma = S_O \circ S_{O_1}$ e $\Sigma_1 = S_{O_1} \circ S_O$ sono la stessa isometria?

3.79. Dimostrate che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione caratterizzata dal vettore parallelo alla retta passante per i due centri e modulo uguale al doppio della loro distanza.

3.80. Si consideri la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli $S_b \begin{cases} x' = 2b - x \\ y' = y \end{cases}$ e $S_a \begin{cases} x' = a - x \\ y' = y \end{cases}$. Componendo le due simmetrie si ha $S_b \begin{cases} x' = 2b - 2a + x \\ y' = y \end{cases}$ che è …… Se $a = b$ le due simmetrie sono …… la loro composizione è ……

3.81. Si consideri la composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari. Una simmetria con asse parallelo all'asse y ha equazione $S_a \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ e asse $x = a$. Mentre una simmetria con asse parallelo all'asse x ha equazione $S_b \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ e asse $y = b$. Componendo le due simmetrie otteniamo ......

3.82. Verificate che:

a) l'inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ è la traslazione di vettore $-\vec{v}$;
b) l'inversa di una rotazione di centro O e angolo α è la rotazione di centro O e angolo $-\alpha$.

3.83. Verificate che le simmetrie (centrale e assiale) hanno se stesse come isometria inversa, ossia $(S_K)^{-1} = S_K$ e $(S_r)^{-1} = S_r$.

3.84. La proposizione «la simmetria centrale è la composizione di due simmetrie assiali» è:

a) sempre vera;
b) vera se i due assi sono incidenti;
c) mai vera;
d) vera se i due assi sono perpendicolari;
e) vera se i due assi sono paralleli.

3.85. Completa la proposizione: «la simmetria centrale di centro $C\left(-\frac{5}{3}; \sqrt{3}\right)$ può essere ottenuta come composizione delle due simmetrie assiali di assi le rette ...... e ...... e la sua equazione è ....

3.86. Stabilite il valore di verità delle proposizioni:

a) Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale V F
b) Componendo due traslazioni si ottiene una traslazione V F
c) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale V F
d) Componendo due simmetrie assiali di assi incidenti si ottiene una rotazione V F
e) Componendo due rotazioni si ottiene una rotazione V F
f) L'identità si ottiene componendo una isometria con sé stessa V F
g) L'inversa di una traslazione è la stessa traslazione V F
h) Componendo una simmetria centrale con una rotazione si ottiene l'identità V F
i) Componendo una simmetria centrale di centro H con la simmetria assiale avente come asse una retta passante per H si ottiene sempre l'identità V F

3.87. L'equazione $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$ descrive:

a) la simmetria assiale di asse y;
b) la simmetria assiale di asse la retta $x = 4$;
c) la traslazione di vettore $\vec{v}(4;0)$;
d) la simmetria assiale di asse $x = 2$;
e) la simmetria centrale di centro $C(4;0)$.

3.88. La trasformazione $\Sigma \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = 2x \end{cases}$ è un'isometria?

3.89. Il segmento di estremi $A(3;4)$ e $B(3;-2)$ ha come simmetrico il segmento di estremi $A'(3;2)$ e $B'(5;2)$; è stata eseguita:

a) la simmetria assiale di asse la retta $x = 4$;
b) la simmetria S_{b2};
c) la simmetria S_{b1};
d) la simmetria assiale di asse la retta $x = 3$;
e) la simmetria $S_{y=3}$.

3.90. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

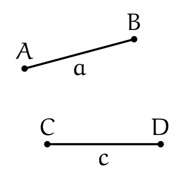
a) In una isometria vi è almeno un elemento unito $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) Nella simmetria centrale vi sono infinite rette unite, ma solamente un punto unito $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) In ogni triangolo vi è almeno un asse di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) Qualche quadrilatero ha un centro di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) Il triangolo equilatero ha un centro di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) Il rombo è l'unico quadrilatero avente due assi di simmetria $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) Tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore della traslazione sono rette unite $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) Solo la simmetria assiale è una isometria invertente $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) Rette parallele hanno come immagine in una isometria rette parallele $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) In una isometria una retta è sempre parallela alla sua immagine $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

3.91. Il quadrilatero di vertici $A(5;0)$, $B(9;0)$, $C(12;4)$ e $D(7;3)$ nella simmetria S_x ha fisso il lato AB. Spiegate come sia possibile questo fatto.

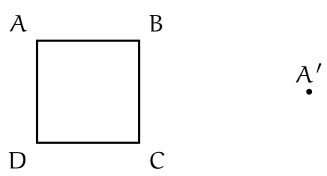
3.92. Dimostrate che la bisettrice di un angolo è il suo asse di simmetria.

3.93. Il rettangolo $ABCD$ con $AB < BC$ ha come immagine il rettangolo $A'B'C'D'$ nella simmetria avente come asse la retta AC. Potete affermare che $AB'DCD'B$ è un esagono regolare?

3.94. I due segmenti della figura a fianco possono essere corrispondenti in una simmetria centrale?



3.95. Nella figura a fianco abbiamo disegnato il quadrato $ABCD$ e il punto A' corrispondente di A in una isometria. Stabilite quale isometria è completamente fissata con questi elementi (simmetria assiale, traslazione, simmetria centrale) e determinate in essa l'immagine del quadrato.



3.96. Costruite l'immagine di un triangolo rettangolo ABC (non isoscele) di ipotenusa BC

a) in ciascuna delle simmetrie S_A, S_B e S_C;
b) nella simmetria S_M essendo M il punto medio dell'ipotenusa;
c) in ciascuna delle simmetrie aventi come assi le rette dei lati.

3.97. Comporre due traslazioni di vettori $\vec{v_1}(2;3)$ e $\vec{v_2}(3;6)$ applicandole al triangolo ABC con $A(-2;-1)$, $B(-1;-2)$ e $C(-4;-3)$.

3.98. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(-2;6)$ e $B(-3;3)$ nella simmetria di asse $x=-1$. Applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $x=4$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi paralleli tra loro, trova le nuove coordinate dei due punti A e B.

3.99. Determina il corrispondente $A'B'$ del segmento di vertici $A(1;-6)$ e $B(4;3)$ nella simmetria di asse $x=2$, applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse $y=1$. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari tra loro, determina le nuove coordinate dei due punti A e B.

3.100. Componi le seguenti trasformazioni geometriche scrivendo l'equazione della trasformazione composta e fornendo un esempio con disegno relativo.

a) Due rotazioni con lo stesso centro.
b) Due rotazioni con centro diverso.
c) Due simmetrie centrali.
d) Due rotazioni di un angolo retto.

3.101. Sono assegnate le simmetrie assiali

$$S_1\begin{cases}x'=x\\y'=2-y\end{cases}\qquad S_2\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}\qquad S_3\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases}\qquad S_4\begin{cases}x'=-x-6\\y'=y\end{cases}$$

a) Individuate l'asse di simmetria di ciascuna di esse, rappresentate nel riferimento cartesiano ortogonale i rispettivi assi indicandoli con s_1, s_2, s_3 e s_4; completate e riproducete nello stesso riferimento

$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_1}P_1(\ldots;\ldots)\qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_2}P_2(\ldots;\ldots)$$
$$P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_3}P_3(\ldots;\ldots)\qquad P\left(-3;\tfrac{1}{2}\right)\xrightarrow{S_4}P_4(\ldots;\ldots)$$

b) Siano A, B, C e D i punti $A=s_4\cap s_3$, $B=s_4\cap s_1$, $C=s_1\cap s_3$ e $D=s_2\cap s_1$; dimostrate che i triangoli ABC e CDE sono rettangoli isosceli e che i lati dell'uno sono il quadruplo di quelli dell'altro.
c) Determinate il rapporto tra i loro perimetri e tra le loro aree.

3.4.2 Risposte

3.2. d.

3.3. b, e.

3.7. $K\left(-\frac{1}{30};-\frac{1}{4}\right)$.

3.8. b.

3.9. $A'(1;-1)$, $B'(-4;-6)$, $C'(-5;0)$.

3.11. d.

3.13. c.

3.14. $M'(2;-3)$.

3.19. b.

3.20. b.

3.24. A, B, C, D, E.

3.25. Falso.

3.27. d.

3.65. 40.

3.66. $A_{PP''OP'} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$.

Il piano cartesiano 4

4.1 Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

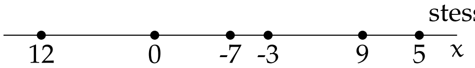
Nonostante queste intuizioni, per migliaia di anni la geometria e l'algebra sono state due discipline completamente separate nella matematica.

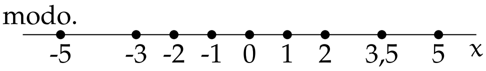
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri. Il *piano cartesiano* è uno strumento che permette di trattare elementi geometrici con metodi algebrici ed elementi algebrici con metodi geometrici. Così, a volte, problemi algebrici difficili possono a trovare una soluzione geometrica semplice e viceversa. In matematica, ma anche nelle altre scienze, quando si riesce a trovare un collegamento tra due rami della disciplina che fino a quel momento erano rimasti separati, si fa un grande passo avanti.

La geometria analitica permette di descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra e viceversa.

4.2 Asse cartesiano

Lo strumento che ci permette di fare tutto ciò è il *riferimento cartesiano*. L'idea di base è che su una retta ci sono infiniti punti e anche i numeri sono infiniti possiamo quindi far corrispondere ai punti della retta tutti gli elementi di un insieme numerico. Possiamo farlo a fantasia o seguendo un metodo che permette a tutti di disporre i numeri esattamente nello stesso modo.

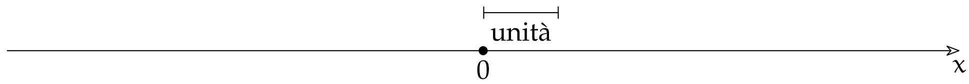




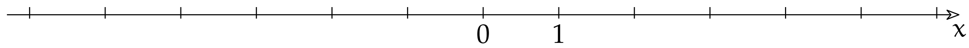
Per farlo in modo preciso abbiamo bisogno di aggiungere ad una retta alcuni elementi ottenendo così un asse cartesiano:

Definizione 4.1. Un *asse cartesiano* è una retta dotata di:

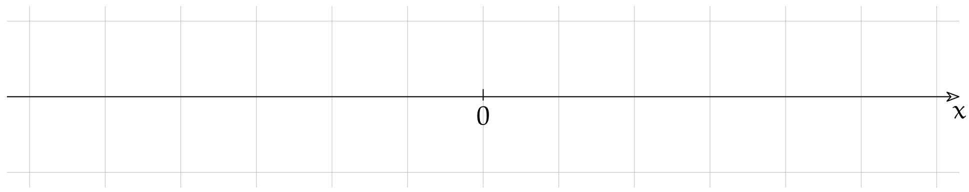
- *origine*, un punto della retta che rappresenta lo zero, a questo punto normalmente viene dato il nome "O";
- *verso*, una freccia che indica da quale parte i numeri aumentano;
- *unità di misura*, un segmento che indica la distanza tra un numero intero e il successivo.



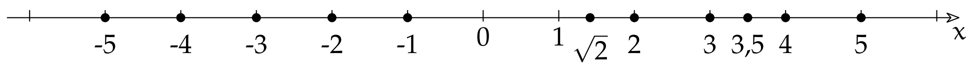
Normalmente, invece di indicare l'unità di misura al di fuori dell'asse indichiamo sull'asse i punti 0 e 1.



Quando lavoriamo su un foglio a quadretti, indichiamo esplicitamente l'unità solo se è diversa dal quadretto e evitiamo anche di tracciare tutti i trattini verticali.



In questo modo possiamo far corrispondere ad ogni numero un punto della retta e ad ogni punto della retta un numero *reale*. Il numero che corrisponde al punto si chiama *coordinata* del punto.



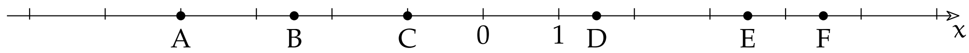
4.3 Problemi sulla retta

4.3.1 Convenzioni

Nei testi si trovano di solito queste convenzioni:

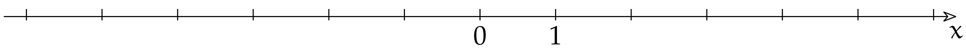
- Agli assi cartesiani di solito si dà un nome di una lettera prendendo le lettere tra le ultime dell'alfabeto: *asse* x, *asse* y o *asse* z.
- Ai punti diamo come nome delle lettere maiuscole: P, A, B, ...
- La coordinata di P sull'asse x viene indicata con x_P.
- Per indicare il punto P che ha coordinata a scriviamo P(a;)

Esempio 4.1. Trova le coordinate dei punti.



Con riferimento alla figura precedente possiamo dire che:
$x_A = \dots$ $\quad x_B = \dots$ $\quad x_C = \dots$ $\quad x_D = \dots$ $\quad x_E = \dots$ $\quad x_F = \dots$

Esempio 4.2. Date le coordinate disegna i punti.



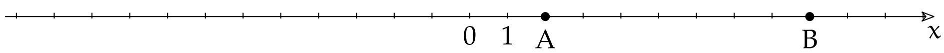
In questo altro asse cartesiano inserisci i seguenti punti:
$A(7;\,)$; $B(2;\,)$; $C(-4;\,)$; $D(-1;\,)$; $E(6,5;\,)$; $F(-5,5;\,)$.

4.3.2 Lunghezza di un segmento

Un primo problema che possiamo affrontare e risolvere avendo un riferimento cartesiano è quello di trovare la lunghezza di un segmento date le coordinate dei suoi estremi. Andiamo per gradi.

Primo caso: gli estremi sono entrambi positivi

Disegniamo su un asse cartesiano i due punti: $A(2;\,)$ e $B(9;\,)$. Il segmento AB si ottiene togliendo dal segmento OB il segmento OA: $AB = OB - OA$.



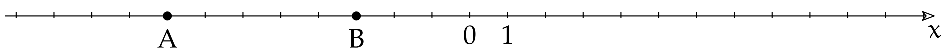
Le distanze di A e B dall'origine si trovano senza calcoli, sono proprio le coordinate dei due punti e quindi la distanza di A da B si ottiene calcolando la differenza delle coordinate di B e di A:

$$\overline{AB} = x_B - x_A = 9 - 2 = 7$$

Risultato che possiamo verificare facilmente.

Secondo caso: gli estremi sono entrambi negativi

Consideriamo ora due punti negativi ad esempio: $A(-8;\,)$ e $B(-3;\,)$.



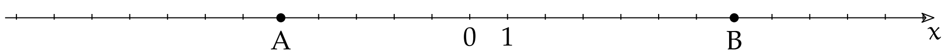
La lunghezza del segmento AB si ottiene togliendo dalla lunghezza di AO la lunghezza di BO. La lunghezza di AO è l'opposto della coordinata di A e la lunghezza di BO è l'opposto della coordinata di B, quindi:

$$\overline{AB} = (-x_A) - (-x_B) = x_B - x_A = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$$

Dopo aver verificato il risultato nel disegno osserviamo che la formula usata è identica a quella utilizzata nel caso precedente.

Terzo caso: gli estremi sono uno negativo e uno positivo

Ora prendiamo un punto negativo e uno positivo: $A(-5;\,)$ e $B(7;\,)$.



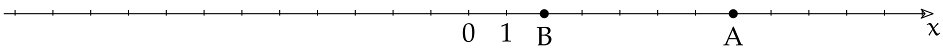
È chiaro che il segmento AB si ottiene sommando i due segmenti: AO e OB. Ma la lunghezza di AO è l'opposto della sua coordinata, quindi otteniamo:

$$\overline{AB} = -x_A + x_B = x_B - x_A = 7 + 5 = 12$$

Anche qui possiamo verificare facilmente il risultato ottenuto.

Situazione strana: segmento di lunghezza negativa

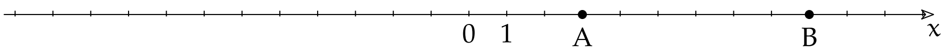
Abbiamo visto che in tutti questi casi la formula:
$\overline{AB} = x_B - x_A$ funziona quindi non dobbiamo preoccuparci del segno delle coordinate per trovare la lunghezza di un segmento facciamo sempre la coordinata del secondo punto meno la coordinata del primo.
Ma cosa succede se questa regola la applichiamo al segmento: $A(7;)$ e $B(2;)$?



Applicando la solita regola: $\overline{AB} = x_B - x_A = 2 - 7 = -5$ otteniamo un numero negativo, strano per una lunghezza! I matematici, piuttosto che complicare la formuletta preferiscono dare un senso anche alle lunghezze negative parlando di *segmento orientato*. Un segmento orientato ha lunghezza positiva se il verso del segmento è uguale al verso del sistema di riferimento, ha lunghezza negativa se il verso del segmento è opposto a quello del sistema di riferimento. Qualche volta questo meccanismo può risultare scomodo, in questo caso si applica la funzione *valore assoluto* al risultato ottenuto, cioè, se è negativo gli si cambia il segno.

4.3.3 Punto medio di un segmento

Un altro problema che possiamo affrontare e risolvere avendo un riferimento cartesiano è quello di trovare il punto medio M date le coordinate degli estremi.
Disegniamo su un asse cartesiano i due punti: $A(3;)$ e $b(9;)$.



Per trovare la coordinata del punto medio dobbiamo sommare alla coordinata di A la lunghezza di metà segmento:
$x_M = x_A + \frac{\overline{AB}}{2}$
Riprendendo la formula precedente:
$x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{2x_A + x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$
Detto a parole: *La coordinata del punto medio è uguale alla media delle coordinate degli estremi.*
Verifica questa formula con le coppie di punti degli esempi precedenti.

4.4 Piano cartesiano

Abbiamo visto qualche problema sull'asse cartesiano, ma in realtà un solo asse non è molto interessante. Se invece prendiamo due assi cartesiani non paralleli la situazione diventa più complessa, interessante e divertente.
Due assi non paralleli permettono di realizzare una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri: ad ogni punto corrisponde una ben precisa coppia di numeri e ad ogni coppia di numeri un ben preciso punto. La coppia ordinata di numeri prende il nome di *coordinate* del punto.
In entrambi questi riferimenti cartesiani al punto P corrisponde la coppia di numeri (2; 3). Pur essendo validi entrambi, per noi sarà molto più comodo usare il secondo riferimento cartesiano. Cioè un riferimento in cui gli assi:

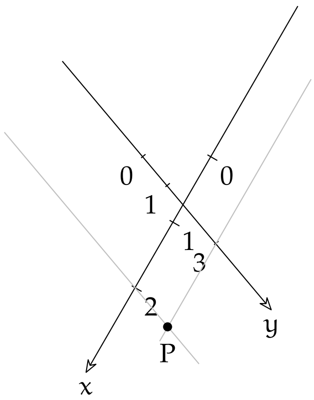


FIGURA 4.1: Riferimento cartesiano.

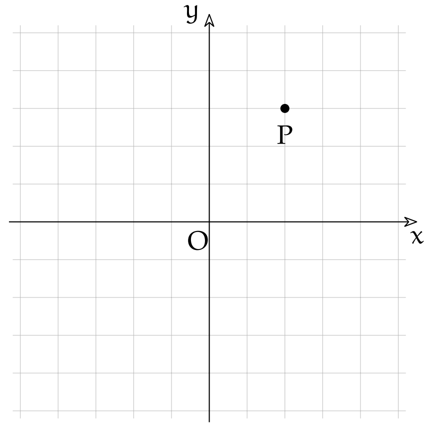


FIGURA 4.2: Rif. cart. ortogonale monometrico.

- hanno l'origine in comune;
- sono perpendicolari;
- hanno la stessa unità di misura.

Un asse, di solito quello orizzontale, si chiama asse delle *ascisse* o asse x; l'altro asse di solito quello verticale, si chiama asse delle *ordinate* o asse y. La prima delle due coordinate si riferisce alla coordinata dell'asse x, la seconda alla coordinata dell'asse y: $(x;\ y)$.
Un riferimento di questo tipo si chiama: *Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico*, (*rcom*).
E noi d'ora in poi, quando parleremo di piano cartesiano o di riferimento cartesiano, ci riferiremo sempre ad un *rcom*.
Riassumendo possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 4.2. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di assi cartesiani perpendicolari, con l'origine in comune e dotati di uguale unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura 4.3.
Tutti i punti che appartengono all'asse x hanno l'ordinata (la y) uguale a zero. Tutti i punti che appartengono all'asse y hanno l'ascissa (la x) uguale a zero. L'intersezione degli assi, l'origine, ha coordinate $(0;0)$
Per rappresentare un punto P date le sue coordinate $(x_p;y_p)$ si procede nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale x_P
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale y_P
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

L'intersezione delle parallele tracciate, è il punto P che ha per coordinate la coppia ordinata $(x_P;y_P)$.
Il procedimento inverso permette di passare da un punto del piano alle sue coordinate,

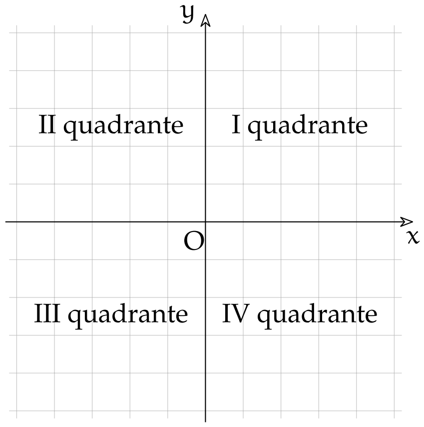


FIGURA 4.3: I quattro quadranti.

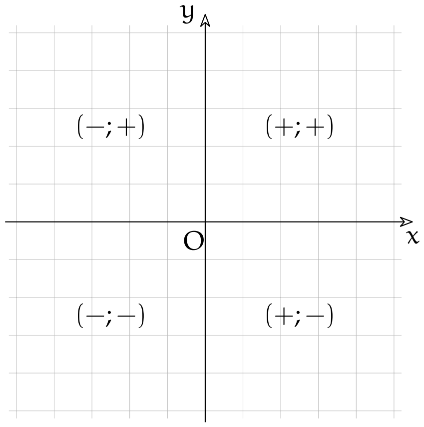


FIGURA 4.4: Collocazione delle coordinate positive e negative.

Esempio 4.3. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2;3)$, $(-1;4)$, $(-3;-2)$, e $(4;-3)$.
Nella figura 4.5 sono riportati i punti: A che è l'immagine della coppia $(2;\ 3)$, B immagine della coppia $(-1;\ 4)$, C immagine della coppia $(3;\ -2)$ e D della coppia $(4;\ -3)$.

Esempio 4.4. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $R(0;4)$, $S(0;-2)$, $H(-4;0)$, $K(3;0)$.
Osserviamo (figura 4.6) che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia $(0;\ 4)$ sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia $(0;\ -2)$ al punto S dello stesso asse. Analogamente le coppie $(-4;\ 0)$ e $(3;\ 0)$ sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

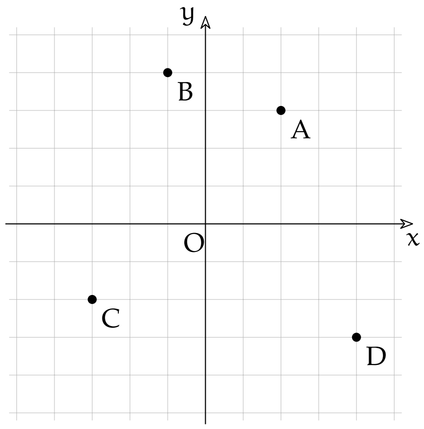


FIGURA 4.5: Punti interni ai quadranti.

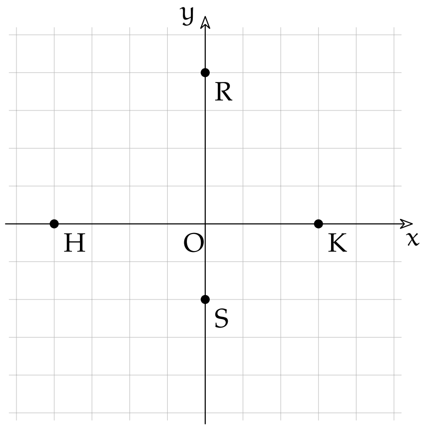
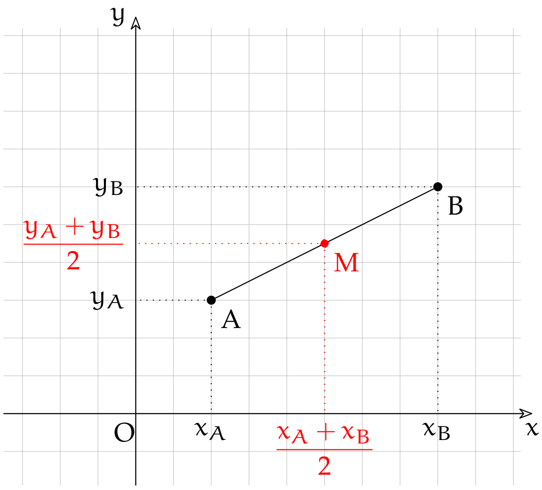


FIGURA 4.6: Punti sugli assi.

4.5 Problemi nel piano cartesiano

4.5.1 Punto medio di un segmento

Utilizzando i risultati ottenuti nel caso dei punti posti su un asse cartesiano possiamo osservare che anche per quanto riguarda un segmento posto nel piano le coordinate del punto medio sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.
Conoscendo le coordinate degli estremi $A(x_A; y_A$ e $B(x_B; y_B)$ le coordinate del suo punto medio sono (figura 4.7):



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

o

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

FIGURA 4.7: Il punto medio.

Esempio 4.5. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-3; -2)$ e $B(5; 7)$. Trova il punto medio usando il righello disegnalo e assegnagli l'etichetta "M". Poi calcola le coordinate del punto medio con la formula precedente e controlla che le coordinate ottenute siano proprio quelle del punto trovato precedentemente.

Esempio 4.6. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(-9; 8)$ e $M(-6; 7)$. Usando il righello trova il punto B in modo che M sia il punto medio del segmento AB. Applica la formula precedente per verificare la correttezza di quanto trovato.

4.5.2 Lunghezza di un segmento

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, date le coordinate degli estremi. Possiamo distinguere due casi:

Primo caso: segmenti paralleli agli assi

i due punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata (figura 4.8). È facile osservare in questo caso che il problema si riduce a quello analogo risolto per segmenti su un asse cartesiano. Se i due punti hanno la stessa ordinata, la stessa y:

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

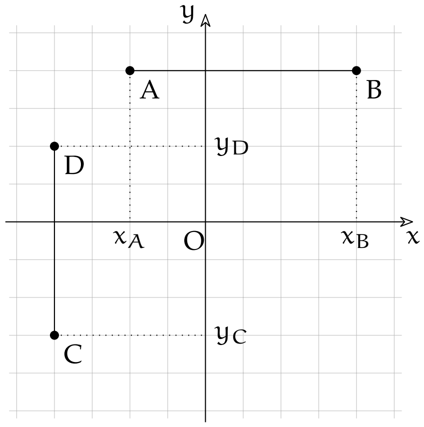


FIGURA 4.8: Lunghezza segmenti paralleli agli assi.

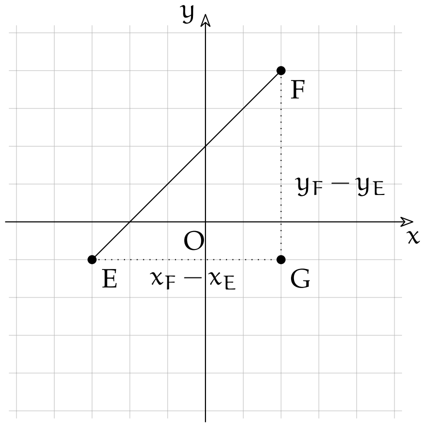


FIGURA 4.9: Lunghezza di un segmento.

Se hanno la stessa ascissa, la stessa x:

$$\overline{CD} = y_D - y_C.$$

Secondo caso: segmento qualunque

è questo il caso generale, il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 4.9).

Dati: $E(x_E; y_E)$, $F(x_F; y_F)$.

Obiettivo: $\overline{EF}$.

Procedura risolutiva: tracciando da E la parallela all'asse x e da F la parallela all'asse y si determina il vertice G del triangolo rettangolo EGF di cui EF è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{EF} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_G - y_F)^2}$.

Poiché $x_G = x_F$ e $y_G = y_E$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}$.

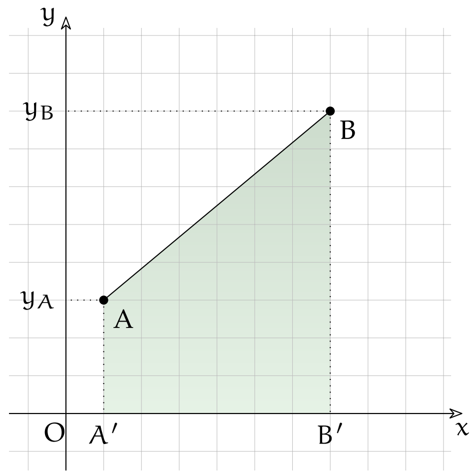
In conclusione, la *misura del segmento* AB, *note le coordinate* dei suoi estremi è:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}.$$

4.5.3 Area sottesa a un segmento

Dati gli estremi di un segmento trovare la superficie compresa tra il segmento e l'asse x.

Partiamo da una situazione particolare: i punti A e B non appartengono all'asse x e il segmento AB non è parallelo all'asse x.



Che forma ha l'area sottesa a questo segmento? È un quadrilatero, ha solo due lati paralleli ha due angoli retti... questa è la descrizione di un trapezio! Forse non hai mai disegnato un trapezio messo in questo modo. Puoi verificare facilmente che è un trapezio, ti basta ruotare il quaderno do 90°. L'area del trapezio è uguale alla somma delle basi per l'altezza diviso due:

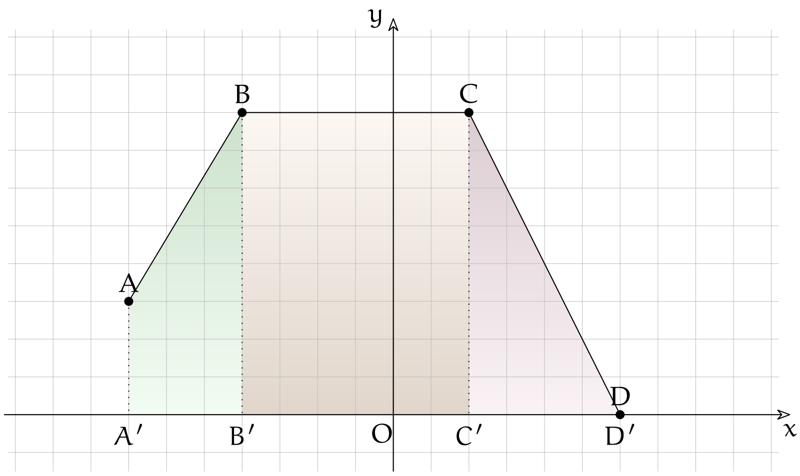
$$Area_{trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Ma quali sono le basi e quale è l'altezza? Nel trapezio le basi sono i due lati paralleli e l'altezza è la distanza tra i due lati paralleli. Uno dei lati paralleli è AA' cioè l'ordinata di A (la y_A) e l'altro è BB' cioè l'ordinata di B (la y_B). L'altezza del trapezio è la lunghezza del segmento $A'B'$ cioè $x_B - x_A$.

Mettendo assieme tutti gli ingredienti otteniamo che l'area sottesa al segmento AB è:

$$\mathcal{A}_{AB} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{2}$$

E se il segmento è messo in un altro modo? Anche limitandoci al primo quadrante possiamo osservare che ci sono svariati casi:



L'area sottesa al segmento AB è un trapezio rettangolo, l'area sottesa al segmento CD è un rettangolo, l'area sottesa al segmento EF è un triangolo rettangolo.
Nel paragrafo precedente abbiamo risolto il primo caso, quello del trapezio, dovremo ripetere tutti quei ragionamenti anche per gli altri due? No! I matematici, che sono un po strani, ritengono che:

- un triangolo rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con una base lunga zero;
- un rettangolo non sia altro che un trapezio rettangolo con le basi uguali.

A questo punto non dobbiamo preoccuparci di casi diversi, la formula trovata per il trapezio rettangolo risolverà anche gli altri casi

---

Esempio 4.7. Dopo aver trovato le coordinate dei punti della figura precedente calcola le aree sottese ai tre segmenti sia usando le formule della geometria sia usando la formula dell'area sottesa e confronta i risultati.

Esempio 4.8. In un piano cartesiano disegna i punti: $A(3; -2)$ e $B(8; -6)$. Calcola l'area sottesa a questo segmento sia usando la formula dell'area del trapezio sia usando la formula dell'area sottesa... Cosa puoi osservare?

Anche per le aree sottese abbiamo una situazione strana: in certi casi l'area di una figura risulta negativa. Questo fatto può essere irritante, ma in certi casi risulterà comodo.
Ci sono certi segmenti che formano con l'asse x una figura con una superficie diversa da zero ma che hanno area sottesa uguale a zero. Quando avviene questo?

4.5.4 Area di un triangolo

Date le coordinate dei vertici di un triangolo trova l'area della sua superficie.

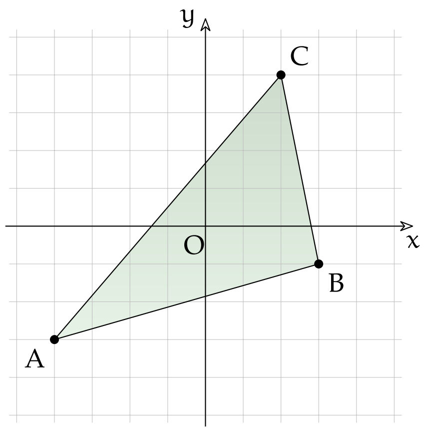


FIGURA 4.10: Area con la formula di Erone.

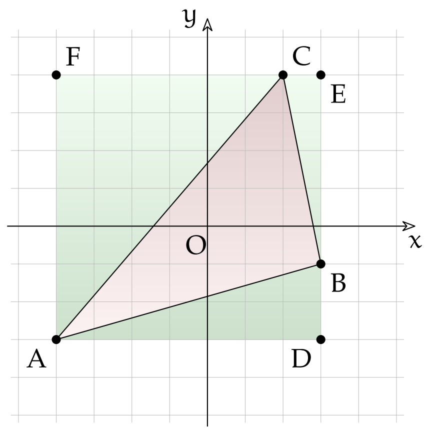


FIGURA 4.11: Area come differenza di superfici.

Formula di Erone

Se conosciamo le coordinate dei tre vertici possiamo trovare le lunghezze dei tre lati e conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo possiamo trovare la sua area utilizzando la formula di Erone. Chiamando: a, b e c i tre lati e p il semiperimetro:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ma spesso le lunghezze dei lati sono numeri approssimati e quindi la formula di Erone, già complicata di suo, risulta piuttosto scomoda.

Differenza di superfici

Un altro metodo consiste nell'iscrivere il triangolo in un rettangolo, trovare l'area del rettangolo e sottrarre da questa le aree dei tre triangoli complementari.

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \mathcal{A}_{rettangolo} - \mathcal{A}_{tri1} - \mathcal{A}_{tri2} - \mathcal{A}_{tri3}$$

Casi particolari

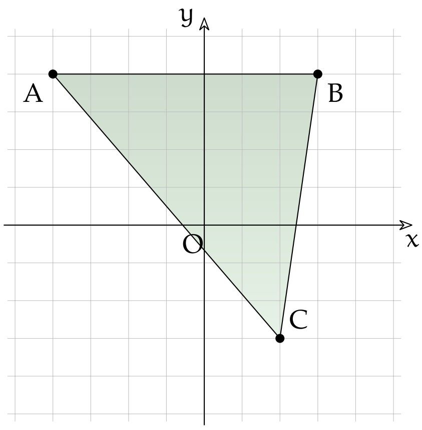


FIGURA 4.12: Area con la formula di Erone.

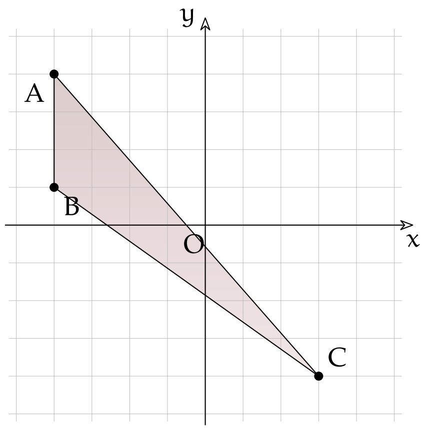


FIGURA 4.13: Area come differenza di superfici.

Se il triangolo ha un lato parallelo ad uno degli assi allora è facile calcolare l'altezza rispetto a questo lato e quindi si può usare la solita formula:

$$\mathcal{A}_{triangolo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Dopo aver trovato le coordinate dei vertici delle figure precedenti:

Esempio 4.9. Con riferimento alla figura 4.10 calcola la lunghezza dei lati e l'area del triangolo con la formula di Erone.

Esempio 4.10. Con riferimento alla figura 4.11 calcola l'area del triangolo come differenza di aree. Confronta poi il risultato con quello ottenuto nel calcolo precedente.

Esempio 4.11. Con riferimento alla figura 4.12 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

Esempio 4.12. Con riferimento alla figura 4.13 calcola l'area del triangolo in due modi diversi e confronta i risultati.

4.6 Esercizi

4.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.3 Problemi sulla retta

4.1. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, calcola il il punto medio e la lunghezza dei seguenti AB:

a) $A = (9;)$; $B = (-12;)$ $[M_{AB} = -1.5;\ \overline{AB} = -21]$
b) $A = (-6;)$; $B = (-11;)$ $[M_{AB} = -8.5;\ \overline{AB} = -5]$
c) $A = (-8;)$; $B = (-10;)$ $[M_{AB} = -9.0;\ \overline{AB} = -2]$
d) $A = (-9;)$; $B = (-12;)$ $[M_{AB} = -10.5;\ \overline{AB} = -3]$
e) $A = (1;)$; $B = (-11;)$ $[M_{AB} = -5.0;\ \overline{AB} = -12]$
f) $A = (-2;)$; $B = (7;)$ $[M_{AB} = 2.5;\ \overline{AB} = 9]$
g) $A = (-3;)$; $B = (3;)$ $[M_{AB} = 0.0;\ \overline{AB} = 6]$
h) $A = (-4;)$; $B = (9;)$ $[M_{AB} = 2.5;\ \overline{AB} = 13]$
i) $A = (-5;)$; $B = (-12;)$ $[M_{AB} = -8.5;\ \overline{AB} = -7]$
j) $A = (3;)$; $B = (6;)$ $[M_{AB} = 4.5;\ \overline{AB} = 3]$
k) $A = (11;)$; $B = (8;)$ $[M_{AB} = 9.5;\ \overline{AB} = -3]$
l) $A = (-3;)$; $B = (1;)$ $[M_{AB} = -1.0;\ \overline{AB} = 4]$
m) $A = (-8;)$; $B = (11;)$ $[M_{AB} = 1.5;\ \overline{AB} = 19]$
n) $A = (8;)$; $B = (-2;)$ $[M_{AB} = 3.0;\ \overline{AB} = -10]$
o) $A = (-7;)$; $B = (4;)$ $[M_{AB} = -1.5;\ \overline{AB} = 11]$

4.5 Problemi nel piano cartesiano

4.2. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-5;1)$; $B = (-2;-4)$ $[M_{AB} = (-3.5,-1.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_AB = -4.5]$
b) $A = (-3;0)$; $B = (-1;-4)$ $[M_{AB} = (-2.0,-2.0);\ \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47;\ A_AB = -4.0]$
c) $A = (-3;0)$; $B = (0;-5)$ $[M_{AB} = (-1.5,-2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_AB = -7.5]$
d) $A = (-7;-2)$; $B = (0;-6)$ $[M_{AB} = (-3.5,-4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{65} = 8.06;\ A_AB = -28.0]$
e) $A = (-4;-1)$; $B = (1;-4)$ $[M_{AB} = (-1.5,-2.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_AB = -12.5]$
f) $A = (-7;-3)$; $B = (-6;-7)$ $[M_{AB} = (-6.5,-5.0);\ \overline{AB} = \sqrt{17} = 4.12;\ A_AB = -5.0]$
g) $A = (-4;-3)$; $B = (-1;-6)$ $[M_{AB} = (-2.5,-4.5);\ \overline{AB} = \sqrt{18} = 4.24;\ A_AB = -13.5]$
h) $A = (-5;0)$; $B = (-3;-3)$ $[M_{AB} = (-4.0,-1.5);\ \overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61;\ A_AB = -3.0]$
i) $A = (-7;-2)$; $B = (-2;-5)$ $[M_{AB} = (-4.5,-3.5);\ \overline{AB} = \sqrt{34} = 5.83;\ A_AB = -17.5]$
j) $A = (-2;-3)$; $B = (2;-6)$ $[M_{AB} = (0.0,-4.5);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_AB = -18.0]$
k) $A = (-4;0)$; $B = (-3;-6)$ $[M_{AB} = (-3.5,-3.0);\ \overline{AB} = \sqrt{37} = 6.08;\ A_AB = -3.0]$
l) $A = (-7;2)$; $B = (-3;-1)$ $[M_{AB} = (-5.0,0.5);\ \overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0;\ A_AB = 2.0]$
m) $A = (-2;-2)$; $B = (0;-6)$ $[M_{AB} = (-1.0,-4.0);\ \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47;\ A_AB = -8.0]$
n) $A = (-5;0)$; $B = (-1;-2)$ $[M_{AB} = (-3.0,-1.0);\ \overline{AB} = \sqrt{20} = 4.47;\ A_AB = -4.0]$
o) $A = (-3;-2)$; $B = (-1;-8)$ $[M_{AB} = (-2.0,-5.0);\ \overline{AB} = \sqrt{40} = 6.32;\ A_AB = -10.0]$

4.3. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A = (-8;0)$; $B = (0;-4)$; $C = (2;3)$ $[2p = 26.66\ A = 32.0]$
b) $A = (-7;0)$; $B = (-1;-2)$; $C = (5;7)$ $[2p = 31.03\ A = 33.0]$

c) $A = (-3; -3)$; $B = (-2; -6)$; $C = (3; 5)$ [$2p = 25.25$ $A = 13.0$]
d) $A = (-4; 0)$; $B = (-2; -8)$; $C = (6; 1)$ [$2p = 30.34$ $A = 41.0$]
e) $A = (-7; -3)$; $B = (1; -6)$; $C = (5; 3)$ [$2p = 31.81$ $A = 42.0$]
f) $A = (-6; 2)$; $B = (0; -8)$; $C = (2; 3)$ [$2p = 30.90$ $A = 43.0$]
g) $A = (-5; -1)$; $B = (-3; -3)$; $C = (5; 7)$ [$2p = 28.44$ $A = 18.0$]
h) $A = (-6; 0)$; $B = (-5; -3)$; $C = (-2; 7)$ [$2p = 21.66$ $A = 9.5$]
i) $A = (-2; -1)$; $B = (2; -4)$; $C = (5; 3)$ [$2p = 20.68$ $A = 18.5$]
j) $A = (-3; 0)$; $B = (-2; -6)$; $C = (5; 4)$ [$2p = 27.23$ $A = 26.0$]
k) $A = (-4; 0)$; $B = (0; -4)$; $C = (2; 7)$ [$2p = 26.06$ $A = 26.0$]
l) $A = (-6; 2)$; $B = (-2; -3)$; $C = (4; 4)$ [$2p = 25.82$ $A = 29.0$]
m) $A = (-5; 2)$; $B = (2; 0)$; $C = (3; 7)$ [$2p = 23.79$ $A = 25.5$]
n) $A = (-7; 0)$; $B = (1; -7)$; $C = (4; 2)$ [$2p = 31.30$ $A = 46.5$]
o) $A = (-7; 2)$; $B = (-1; -7)$; $C = (5; 6)$ [$2p = 37.78$ $A = 66.0$]

4.6.2 Esercizi riepilogativi

4.4. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, calcola il il punto medio e la lunghezza dei seguenti AB:

a) $A = (4;)$; $B = (-7;)$ [$M_{AB} = -1.5$; $\overline{AB} = -11$]
b) $A = (-12;)$; $B = (-4;)$ [$M_{AB} = -8.0$; $\overline{AB} = 8$]
c) $A = (-5;)$; $B = (5;)$ [$M_{AB} = 0.0$; $\overline{AB} = 10$]
d) $A = (-11;)$; $B = (2;)$ [$M_{AB} = -4.5$; $\overline{AB} = 13$]
e) $A = (-10;)$; $B = (-3;)$ [$M_{AB} = -6.5$; $\overline{AB} = 7$]
f) $A = (9;)$; $B = (-6;)$ [$M_{AB} = 1.5$; $\overline{AB} = -15$]
g) $A = (-10;)$; $B = (2;)$ [$M_{AB} = -4.0$; $\overline{AB} = 12$]
h) $A = (3;)$; $B = (8;)$ [$M_{AB} = 5.5$; $\overline{AB} = 5$]
i) $A = (-5;)$; $B = (-10;)$ [$M_{AB} = -7.5$; $\overline{AB} = -5$]
j) $A = (2;)$; $B = (0;)$ [$M_{AB} = 1.0$; $\overline{AB} = -2$]
k) $A = (10;)$; $B = (-12;)$ [$M_{AB} = -1.0$; $\overline{AB} = -22$]
l) $A = (-4;)$; $B = (-11;)$ [$M_{AB} = -7.5$; $\overline{AB} = -7$]
m) $A = (8;)$; $B = (9;)$ [$M_{AB} = 8.5$; $\overline{AB} = 1$]
n) $A = (-4;)$; $B = (-9;)$ [$M_{AB} = -6.5$; $\overline{AB} = -5$]
o) $A = (2;)$; $B = (-8;)$ [$M_{AB} = -3.0$; $\overline{AB} = -10$]

4.5. Dopo aver riportato in un riferimento cartesiano i seguenti punti, per ogni segmento AB calcola: punto medio, lunghezza e area sottesa.

a) $A = (-7; 0)$; $B = (-6; -5)$ [$M_{AB} = (-6.5, -2.5)$; $\overline{AB} = \sqrt{26} = 5.10$; $A_AB = -2.5$]
b) $A = (-5; 2)$; $B = (-4; 0)$ [$M_{AB} = (-4.5, 1.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24$; $A_AB = 1.0$]
c) $A = (-4; 0)$; $B = (-3; -6)$ [$M_{AB} = (-3.5, -3.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{37} = 6.08$; $A_AB = -3.0$]
d) $A = (-4; 0)$; $B = (0; -6)$ [$M_{AB} = (-2.0, -3.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{52} = 7.21$; $A_AB = -12.0$]
e) $A = (-3; 1)$; $B = (2; -5)$ [$M_{AB} = (-0.5, -2.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{61} = 7.81$; $A_AB = -10.0$]
f) $A = (-3; -3)$; $B = (0; -5)$ [$M_{AB} = (-1.5, -4.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{13} = 3.61$; $A_AB = -12.0$]
g) $A = (-4; -2)$; $B = (-3; -4)$ [$M_{AB} = (-3.5, -3.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{5} = 2.24$; $A_AB = -3.0$]
h) $A = (-8; 0)$; $B = (-6; -6)$ [$M_{AB} = (-7.0, -3.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{40} = 6.32$; $A_AB = -6.0$]
i) $A = (-5; -2)$; $B = (-2; -6)$ [$M_{AB} = (-3.5, -4.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{25} = 5.0$; $A_AB = -12.0$]
j) $A = (-6; -2)$; $B = (-4; -4)$ [$M_{AB} = (-5.0, -3.0)$; $\overline{AB} = \sqrt{8} = 2.83$; $A_AB = -6.0$]

k) $A=(-5;-1);\ B=(2;-7)$ $[M_{AB}=(-1.5,-4.0);\ \overline{AB}=\sqrt{85}=9.22;\ A_AB=-28.0]$
l) $A=(-5;0);\ B=(-4;-3)$ $[M_{AB}=(-4.5,-1.5);\ \overline{AB}=\sqrt{10}=3.16;\ A_AB=-1.5]$
m) $A=(-8;-1);\ B=(-3;-3)$ $[M_{AB}=(-5.5,-2.0);\ \overline{AB}=\sqrt{29}=5.39;\ A_AB=-10.0]$
n) $A=(-4;-1);\ B=(1;-3)$ $[M_{AB}=(-1.5,-2.0);\ \overline{AB}=\sqrt{29}=5.39;\ A_AB=-10.0]$
o) $A=(-2;-3);\ B=(2;-6)$ $[M_{AB}=(0.0,-4.5);\ \overline{AB}=\sqrt{25}=5.0;\ A_AB=-18.0]$

4.6. Disegna i triangoli che hanno per vertici i seguenti punti poi calcolane perimetro e area.

a) $A=(-8;-3);\ B=(1;-6);\ C=(3;-2)$ $[2p=25.00\ A=21.0]$
b) $A=(-6;-3);\ B=(-4;-5);\ C=(4;7)$ $[2p=31.39\ A=20.0]$
c) $A=(-4;2);\ B=(2;-5);\ C=(6;4)$ $[2p=29.27\ A=41.0]$
d) $A=(-5;-2);\ B=(-1;-5);\ C=(7;1)$ $[2p=27.37\ A=24.0]$
e) $A=(-8;-1);\ B=(1;-4);\ C=(4;1)$ $[2p=27.48\ A=27.0]$
f) $A=(-6;0);\ B=(-3;-4);\ C=(-2;5)$ $[2p=20.46\ A=15.5]$
g) $A=(-2;2);\ B=(1;-8);\ C=(4;5)$ $[2p=30.49\ A=34.5]$
h) $A=(-3;-2);\ B=(-2;-7);\ C=(-1;2)$ $[2p=18.63\ A=7.0]$
i) $A=(-8;-3);\ B=(-2;-6);\ C=(-1;-1)$ $[2p=19.09\ A=16.5]$
j) $A=(-7;0);\ B=(-2;-3);\ C=(2;5)$ $[2p=25.07\ A=26.0]$
k) $A=(-3;-2);\ B=(1;-5);\ C=(6;1)$ $[2p=22.30\ A=19.5]$
l) $A=(-5;-2);\ B=(2;-8);\ C=(6;-1)$ $[2p=28.33\ A=36.5]$
m) $A=(-4;2);\ B=(0;0);\ C=(3;6)$ $[2p=19.24\ A=15.0]$
n) $A=(-8;-1);\ B=(-2;-7);\ C=(6;0)$ $[2p=33.15\ A=45.0]$
o) $A=(-5;-2);\ B=(-4;-7);\ C=(6;4)$ $[2p=32.50\ A=30.5]$

4.7. Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$
Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del ....
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del ....
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del ....
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;0)$ individuano punti del ....
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti dell'asse y

4.8. Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$ È vero che $\overline{AB}=\overline{MN}$?

4.9. Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$ Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$

4.10. Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

4.11. Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$

4.12. Determina la distanza di $P\ (-3;2,5)$ dall'origine del riferimento.

4.13. Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$

4.14. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$

4.15. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$

4.16. Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$

4.17. Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

4.18. Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$ Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$

4.19. I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

4.20. I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$

4.21. Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$
c) $A(-1;4), B(1;-4)$
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B(-2;-1)$
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$

4.22. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC

4.23. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC Determina il perimetro di ABC e di MNP Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

4.24. Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

4.25. Verifica che i segmenti AB e CD di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

4.26. Verifica che il triangolo di vertici $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(-4;\ 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

4.27. Verifica che il triangolo di vertici $A(-4;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(1;\ 6)$ è isoscele e calcola l'area. [17]

4.28. Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici $A(0;\ 4)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ -2)$ [5]

4.29. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(2;\ -3)$ [(2; 0)]

4.30. Calcola le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici $A(-3;\ 4)$, $B(-1;\ -3)$, $C(1;\ 5)$ [(-1; 2)]

....