Derivate 1

1.1 Introduzione

[1] Il problema di determinare la velocità istantanea ci ha portati a conoscere i numeri infinitesimi e, attraverso questi, l'insieme dei numeri iperreali. Ora siamo in grado di cercare la risposta alla domanda rimasta in sospeso: come si determina la velocità istantanea?
La risposta, che conosciamo nelle forme moderne, da più di 400 anni, propone al nostro studio un nuovo potentissimo strumento di calcolo, adatto a risolvere problemi in ogni ambito scientifico: la derivata.

1.2 Velocità di caduta

Nel Settecento fiorirono alcune leggende su Galileo Galilei. Una di queste racconta che per dimostrare che i gravi cadono con la stessa velocità, gettò dalla Torre di Pisa due sfere di peso diverso, ma di uguali dimensioni. I due oggetti, come oggi possiamo immaginare, raggiunsero il suolo contemporaneamente.
La Torre di Pisa è alta circa $56m$ e immaginiamo, per semplificare, che la distanza percorsa dai due oggetti sia di $56m$ (ti lascio calcolare il percorso effettivo: tieni presente che al giorno d'oggi l'inclinazione della Torre è di $4,8°$).
Oggi sappiamo che un oggetto in caduta libera ha la seguente legge del moto: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Come al solito, s è lo spazio in metri, t è il tempo in secondi, $g = 9,81m/s^2$ è l'accelerazione di gravità, costante nei pressi della superficie terrestre.
Se cerchiamo la velocità media, basta dividere lo spazio percorso per il tempo impiegato:

$$\begin{aligned} s_{tot} &= 56m \\ s &= \frac{1}{2}gt^2 \;\rightarrow\; t_{tot} = \sqrt{\frac{2s_{tot}}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 56}{9,81}} = 3,36s. \\ v_m &= \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{56m}{3,36s} = 16,67m/s, \end{aligned}$$

che corrispondono a circa $60km/h$ di media.
Ma gli oggetti partono fermi e arrivano velocissimi: è possibile sapere quale è loro velocità in ogni istante? È il momento di usare le quantità infinitesime.
Chiamiamo dt un intervallo di tempo infinitesimo, fra due istanti successivi t e $t + dt$. Lo spazio percorso nella caduta, in quell'intervallo di tempo, applicando la legge del moto, sarà:

$$ds = \frac{1}{2}g\,(t+dt)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(t^2 + 2tdt + (dt)^2\right) - \frac{1}{2}gt^2 = gtdt + \frac{1}{2}(dt)^2.$$

[1] Per scrivere questo capitolo mi sono ispirato ai lavori di Giorgio Goldoni "Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale". Chi volesse approfondire l'argomento può acquistare il testo all'indirizzo: www.unilibro.it/libri/f/autore/goldoni_giorgio

Dividendo il tutto per dt si ottiene la velocità istantanea, quella che cambia istante per istante:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{gt\,dt + \frac{1}{2}dt^2}{dt} = gt + \frac{1}{2}dt.$$

L'espressione $gt + \frac{1}{2}dt = 9,81t + \frac{1}{2}dt$ diventa un numero ben preciso per ogni valore di t, un iperreale finito che è la somma di un numero standard e di un numero infinitesimo. Per averne il valore reale, applichiamo la parte standard:

$$\mathrm{st}\left(9,81t + \frac{1}{2}dt\right) = 9,81t$$

Questa è la velocità istantanea che cerchiamo: dipende dal tempo t, cioè cresce con il passare dei secondi.

t (in s)	$v = 9,81 \times t$ (in m/s)
0	0
1	$9,81 \times 1 = 9,81$
2	$9,81 \times 2 = 19,62$
...	...
3,6	$9,81 \times 3,36 = ...$

La formula $v = 9,81 \times t$ ci permette il calcolo della velocità per ogni valore di t. Per quale valore di t la velocità sarà uguale a quella media?

1.3 Continuità

La semplicità dei calcoli precedenti lascia intuire la ragione del successo del calcolo con gli infinitesimi. Questo tipo di calcolo fiorì per 150 anni a partire dall'epoca di Newton e Leibniz. Ma suscitava vivaci polemiche fra gli specialisti, perché non si era in grado di spiegare come mai i risultati, espressi attraverso numeri infinitesimi, alla fine diventano numeri "di uso comune". Oggi i matematici conoscono meglio la materia e queste difficoltà sono superate. Siamo quindi in grado di procedere nello studio dei questa nuova branca della matematica, che si chiama *Analisi infinitesimale*.

Continuità, intervalli, differenze

C'è un punto critico nei ragionamenti svolti a proposito della caduta dei gravi, un punto che si dà sempre per scontato in fisica, ma non lo è per i matematici e per i logici.
Tutto il ragionamento vale perché si presuppone che il tempo scorra in modo uniforme. Se il tempo scorresse a scatti, anche minuscoli, quei calcoli non sarebbero possibili. Si dice infatti che il tempo t è una variabile continua, cioè assume tutti i valori, dal minimo al massimo, con regolarità, senza salti.

Definizione 1.1. Una variabile è una grandezza che può assumere valori diversi. L'insieme dei valori possibili costituisce il suo insieme di definizione.

Definizione 1.2. Una variabile continua è definita in un intervallo di valori continuo. Le variazioni dei suoi valori possono essere arbitrariamente piccole.

Il più semplice esempio di una variabile continua in matematica è la posizione x sull'asse reale dei numeri. Infatti sappiamo che la retta reale non ha buchi. A maggior ragione, è una variabile continua anche la posizione sull'asse degli Iperreali: x, con $x \in {}^*\mathbb{R}$.
Viceversa una variabile che pesca i suoi valori in un insieme formato da numeri isolati, cioè con differenze finite fra l'uno e l'altro, si dice *variabile discreta*.

Definizione 1.3. Una variabile discreta assume valori che variano per quantità finite.

Un semplice esempio di variabile discreta è $n, n \in \mathbb{N}$.
Nel calcolo precedente, t varia con continuità da 0 a $3,6$, assumendone tutti i valori, dal minimo al massimo. In matematica si scrive così: $t \in [0;\ 3,6]$. Le parentesi quadre sono importanti, indicano che gli estremi dell'intervallo sono valori possibili, sono inclusi.
I tipi possibili di intervallo sono:

intervallo	sigla	significato
chiuso	$[a;\ b]$	estremi compresi
aperto/chiuso	$]a;\ b]$	a escluso, b compreso
chiuso/aperto	$[a;\ b[$	a compreso, b escluso
aperto	$]a;\ b[$	estremi esclusi

Tutti i tipi di intervallo precedenti, nella retta reale o iperreale, sono continui, a meno di indicazioni diverse. Se un intervallo $[a;\ b]$ contiene un punto (o più punti) di discontinuità, per esempio d, allora occorre usare indicazioni diverse: $[a;\ d[\cup]d;\ b]$
La differenza $a - b$ fra due numeri della retta iperreale $a, b \in {}^*\mathbb{R}$, può essere positiva, negativa o nulla. Indicheremo con Δ la differenza fra due numeri standard, cioè una differenza finita, mentre, se la differenza è infinitesima, sarà indicata con δ oppure ε o altra lettera minuscola dell'alfabeto greco.
In analisi infinitesimale, le differenze infinitesime sono protagoniste.

1.4 Differenziale

Parte principale

I risultati dei calcoli che seguono in molti casi hanno la forma di una somma fra infinitesimi di ordine diverso, come avviene nel prossimo esempio sul differenziale della funzione quadratica e più avanti con le funzioni potenza.
In una somma di infinitesimi, gli infinitesimi di grado superiore (che sono quelli più vicini allo zero) pesano sul risultato infinitamente meno degli altri: sono più trascurabili. Quando in una somma di infinitesimi si trascurano quelli di minor peso, si dice che si prende la *parte principale della somma*. Lo si può fare perché la somma esatta e quella approssimata sono numeri indistinguibili.

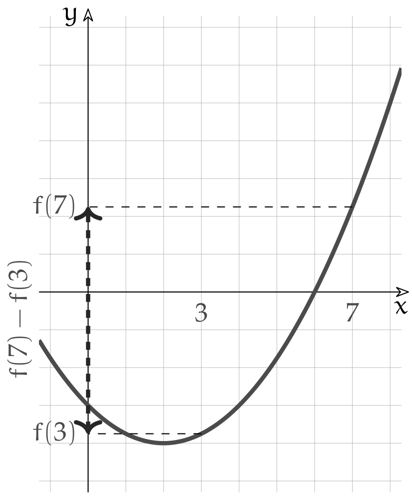
Incremento di una funzione

Definizione 1.4. L'incremento di una funzione è un valore che indica di quanto aumenta una funzione partendo da un certo valore della variabile indipendente (x) quando la variabile indipendente aumenta di una certa quantità:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta) - f(x_0)$$

Vediamo un esempio: Vogliamo calcolare l'incremento della funzione: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$
Quando x parte da 3 e aumenta di 4.
Devo calcolare quanto vale la funzione nei due punti 3 e $3 + 4 = 7$ e calcolare la differenza del secondo valore meno il primo:

$$\begin{aligned}
\Delta &= f(3+4) - f(3) = \\
&= f(7) - f(3) = \\
&= \frac{7^2}{4} - 7 - 3 - \frac{3^2}{4} + 3 + 3 = \\
&= \frac{49}{4} - 10 - \frac{9}{4} + 6 = \\
&= 12,25 - 10 - 2,25 + 6 = \\
&= 2,25 + 3,75 = 6
\end{aligned}$$



È abbastanza evidente che il valore dell'incremento dipende dalla funzione, dal punto di partenza e dall'incremento della x.

Con Python.

```
"""
Funzione che calcola l'incremento di una funzione.
"""
# Funzioni
def incremento(funzione, x_0, delta_x):
    return funzione(x_0 + delta_x) - funzione(x_0)

# programma principale
print(incremento(lambda x: 1/4*x**2-x-3, 3, 4))
print(incremento(lambda x: 1/4*x**2-x-3, 1, 4))
print(incremento(lambda x: 1/4*x**2-x-3, 1, 2))
```

Quindi la funzione `incremento` ha 3 parametri, nel programma precedente l'ho invocata tre volte con argomenti diversi e ottenendo: nel primo caso 6, nel secondo 2 e nel terzo 0. Ovviamente, utilizzando una funzione diversa, gli incrementi calcolati con gli stessi parametri saranno, in generale diversi. (Prova ad esempio con la funzione $f(x) = 2^x$)

Differenziale di una funzione

In matematica, e nelle sue applicazioni, sono particolarmente importanti gli incrementi che si verificano in una funzione quando la variabile indipendente (x) subisce una variazione infinitesima. Incrementi di questo tipo, se esistono, si chiamano "differenziali".

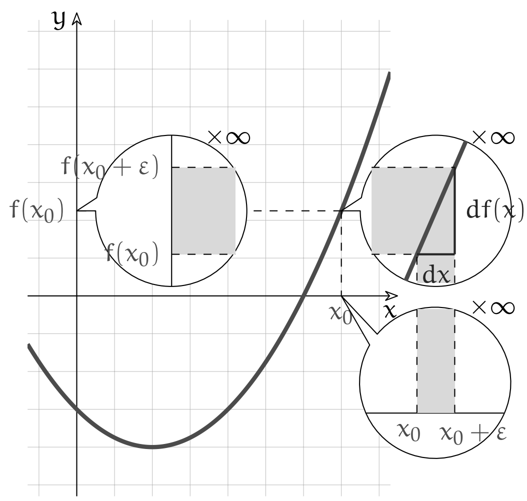
Definizione 1.5. Il differenziale di una funzione è un valore che indica di quanto aumenta la funzione partendo da un certo valore della variabile indipendente (x) quando la variabile indipendente aumenta di una quantità infinitesima:

$$df(x_0) = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$$

Parliamo di differenziale di una funzione quando incrementi infinitesimi della x producono incrementi infinitesimi della y. I differenziali, essendo infinitesimi, sono osservabili solo utilizzando microscopi non standard.

Vediamo un esempio:

Vogliamo calcolare l'incremento della funzione: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ quando x parte da 7 e aumenta di ε.



$$\begin{aligned} df(7) &= f(7+\varepsilon) - f(7) = \\ &= \frac{(7+\varepsilon)^2}{4} - (7+\varepsilon) - 3 - \frac{7^2}{4} + 7 + 3 = \\ &= \frac{49 + 14\varepsilon + \varepsilon^2}{4} - 10 - \varepsilon - \frac{49}{4} + 10 = \\ &= \frac{14\varepsilon + \varepsilon^2}{4} - \varepsilon = \\ &= \frac{10\varepsilon + \varepsilon^2}{4} = \\ &= 2,5\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \end{aligned}$$

Possiamo osservare che, in questo caso, il differenziale della funzione è un infinitesimo che è la somma di due infinitesimi di ordine diverso.

Per calcolare il differenziale di una funzione devo conoscere la funzione $f(x)$, il punto in cui calcolarlo x_0 e l'incremento infinitesimo ε.

1.4.1 Differenziale della variabile x

Chiamiamo dx la differenza fra i due valori infinitamente vicini della variabile x (dx si legge *"de x"*).

Vogliamo calcolare il differenziale della variabile x partendo dal punto x_0 quando l'incremento è ε. In simboli: $dx|_{x=x_0}$. Questa espressione si legge: *"de x, per x uguale a x zero"*.

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$dx|_{x=x_0} = (x_0 + \varepsilon) - x_0 = \varepsilon$$

Si può osservare che il risultato non dipende dal valore in cui viene calcolato il differenziale, ma solo dal valore dell'incremento ε, infatti, nel risultato, x_0 scompare.

❑ **Osservazione** L'infinitesimo ε potrebbe anche essere negativo, in questo caso sarebbe un "decremento". Il segno di ε non cambia comunque il calcolo.

$x_0 + \varepsilon$ indica valori che possono trovarsi a destra di x_0 (più grandi) o alla sua sinistra (più piccoli).

1.4.2 Differenziale di alcune funzioni

Iniziamo a differenziare le funzioni più semplici, in un generico punto x_0. Ma prima di tutto, una precisazione essenziale:

❑ **Osservazione** Il differenziale di una funzione è calcolabile solo negli intervalli in cui la funzione è continua. Perché solo in questo caso a incrementi *infinitesimi* di x corrispondono incrementi *infinitesimi* di $f(x)$.

Funzione costante

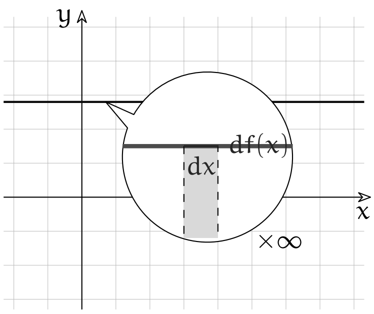
Una funzione è costante se qualunque sia il valore di x il risultato è sempre lo stesso. Possiamo indicare questa funzione in diversi modi:

$$f : x \mapsto k \quad \text{o} \quad f(x) = k \quad \text{o} \quad y = k$$

Il suo differenziale sarà:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = k - k = 0$$

Quindi, se la funzione è costante, il suo differenziale è nullo. Infatti, avendo sempre lo stesso valore per qualsiasi x, la differenza tra due suoi valori è zero.



Resta così dimostrato il seguente

Teorema 1.1. *Il differenziale di una costante è nullo.*

Nel piano cartesiano, la funzione $y = k$ è una retta orizzontale e, come tutte le rette, è una funzione continua. Quindi il risultato non dipende da x_0 e vale su tutto l'asse iperreale.

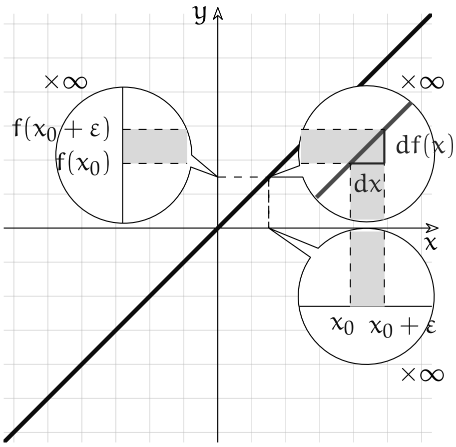
Funzione identica

La funzione identica (o identità) è una funzione che riceve un valore e dà come risultato lo stesso valore ricevuto. Possiamo indicare questa funzione in diversi modi:

$$f : x \mapsto x \quad \text{o} \quad f(x) = x \quad \text{o} \quad y = x$$

Se $f(x) = x$, allora, banalmente: $df(x) = dx = \varepsilon$. Il risultato è generale, cioè non dipende da x_0. Infatti:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = (x_0 + \varepsilon) - x_o = \varepsilon$$



È dimostrato così il seguente

Teorema 1.2. *Il differenziale della funzione identica è* $dx = \varepsilon$.

D'ora in poi useremo indifferentemente dx oppure ε, dato che sono equivalenti.
Il grafico di $f(x) = x$ nel piano cartesiano è dato dalla retta $y = x$. Che significato dobbiamo attribuire a $dy = dx$? L'uguaglianza dei due differenziali indica che due punti infinitamente vicini sulla retta individuano sugli assi due differenze infinitesime uguali.

Succederebbe la stessa cosa con altre rette, più o meno inclinate passanti o non passanti dall'origine?

Funzione lineare

Una funzione lineare è una funzione espressa da un polinomio di primo grado:

$$f : x \mapsto mx + q \quad \text{o} \quad f(x) = mx + q \quad \text{o} \quad y = mx + q$$

Esempio 1.1. Iniziamo con un esempio numerico, supponiamo che $m = \dfrac{2}{3}$ e $q = 4$ Proviamo quindi a differenziare in x_0 la funzione $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 4$.

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0 + dx) - f(x_0) = \\ &= \frac{2}{3}(x_0 + dx) + 4 - \left(\frac{2}{3}x_0 + 4\right) = \frac{2}{3}x_0 + \frac{2}{3}dx + 4 - \frac{2}{3}x_0 - 4 = \frac{2}{3}dx \end{aligned}$$

Questa volta il grafico della funzione $y = \frac{2}{3}x$ mostra che l'incremento infinitesimo dei valori x provoca un incremento corrispondente a $\frac{2}{3}$ sui valori y. Il risultato è generale, cioè vale $\forall x_0$, il differenziale non dipende dal particolare punto in cui lo calcolo.

Esempio 1.2. Proviamo con la funzione di un'altra retta: $f(x) = -5x - 2$. Ci aspettiamo che anche in questo caso il differenziale sia indipendente dal punto in cui lo calcolo:

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0 + dx) - f(x_0) = \\ &= -5(x_0 + dx) - 2 - (-5x_0 - 2) = -5x_0 - 5dx - 2 + 5x_0 + 2 = -5dx \end{aligned}$$

Quindi $df(x) = -5dx, \forall x_0 \in {}^*\mathbb{R}$.

Teorema 1.3. *Il differenziale di una funzione lineare* $f(x) = mx + q$ *è* mdx, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$.

Ipotesi: $f(x) = mx + q$. Tesi: $df(x) = mdx$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0 + dx) - f(x_0) = \\ &= m(x_0 + dx) + q - (mx_0 + q) = mx_0 - mdx + q - mx_0 - q = mdx \end{aligned}$$

Poiché nel risultato non compare x_0, anche in questo caso $df(x)$ non dipende dal punto x_0. □

Funzione quadratica

Una funzione quadratica è una funzione che dà come risultato il quadrato della variabile indipendente:

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{o} \quad f(x) = x^2 \quad \text{o} \quad y = x^2$$

Teorema 1.4. *Il differenziale della funzione quadratica* $f(x) = x^2$ *è* $2xdx + (dx)^2$, $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$.

Ipotesi: $f(x) = x^2$. Tesi: $df(x) = 2xdx + (dx)^2$.

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0 + dx) - f(x_0) = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0dx + (dx)^2 - x_0^2 = 2x_0dx + (dx)^2$$

Questa volta nel risultato compare x_0. Quindi il valore del differenziale della funzione cambia al cambiare del punto x_0 che viene incrementato. Anche in questo caso il differenziale è un infinitesimo, ma questa volta è dato dalla somma di due infinitesimi di diverso ordine. □

Funzioni potenza

Una funzione potenza è una funzione che dà come risultato la potenza della variabile indipendente:

$$f : x \mapsto x^n \quad \text{o} \quad f(x) = x^n \quad \text{o} \quad y = x^n$$

Ricaviamo per gradi il differenziale della funzione potenza è $f(x) = x^n$, con un procedimento per induzione.
Iniziamo dai casi già noti $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ e esaminiamo i successivi aumentando progressivamente l'esponente.

$$\begin{aligned} d(x) &= x + dx - x = dx \\ d(x^2) &= (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 \\ d(x^3) &= (x + dx)^3 - x^3 = [x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3] - x^3 = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 \\ d(x^4) &= (x + dx)^4 - x^4 = [x^4 + 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4] - x^4 = \\ &= 4x^3dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 \end{aligned}$$

Possiamo osservare che, nel calcolo dell'incremento, il termine non infinitesimo si annulla sempre. Quindi, qualunque sia il valore di x_0, l'incremento della funzione è infinitesimo. Queste funzioni sono quindi continue in tutto $^*\mathbb{R}$ perché a spostamenti infinitesimi sull'asse x corrispondono sempre spostamenti infinitesimi sull'asse y.

Possiamo anche osservare che il differenziale è sempre più complesso, ma se consideriamo la parte principale dell'infinitesimo cioè se trascuriamo gli infinitesimi di ordine superiore il risultato si semplifica e diventa facilmente memorizzabile.

Quindi se invece del valore esatto ci accontentiamo della parte principale, abbiamo:

$$\begin{aligned}
d(x) &= x + dx - x = dx \\
d(x^2) &= 2x dx + (dx)^2 \sim 2x dx \\
d(x^3) &= 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 \sim 3x^2 dx \\
d(x^4) &= 4x^3 dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4 \sim 4x^3 dx \\
d(x^5) &= 5x^4 dx + 10x^3(dx)^2 + 10x^2(dx)^3 + 5x(dx)^4 + (dx)^5 \sim 5x^4 dx \\
d(x^6) &= 6x^5 dx + \cdots + (dx)^6 \sim 6x^5 dx \\
d(x^7) &= 7x^6(dx) + \cdots + (dx)^7 \sim 7x^6 dx \\
\ldots &= \ldots \\
d(x^{10}) &= 10x^9(dx) + \cdots + (dx)^{10} \sim 10x^9 dx \\
\ldots &= \ldots \\
d(x^n) &= nx^{n-1}(dx) + \cdots + (dx)^n \sim nx^{n-1} dx
\end{aligned}$$

Ora che il meccanismo è chiaro e possiamo ritenere sufficientemente dimostrato il teorema seguente.

Teorema 1.5. *Il differenziale della funzione potenza è*

$$d(x^n) \sim nx^{n-1} dx$$

❑ **Osservazione** Anche se abbiamo usato solo esponenti interi, si dimostra che la regola vale per qualsiasi esponente reale. Lo puoi verificare nei due casi che seguono, riscrivendo le funzioni come potenze.

Funzione radice quadrata

Teorema 1.6. *Il differenziale della funzione radice quadrata è*

$$d(\sqrt{x}) \sim \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \textit{se} \quad x \neq 0$$

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$. Tesi: $df(x) \sim \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x)|_{x=x_0} &= f(x_0+dx) - f(x_0) = \sqrt{x_0+dx} - \sqrt{x_0} = \\ &= \left(\sqrt{x_0+dx} - \sqrt{x_0}\right) \times \frac{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}} = \\ &= \frac{x_0+dx-x_0}{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}} = \frac{dx}{\sqrt{x_0+dx}+\sqrt{x_0}} \sim \frac{dx}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Anche questa volta il risultato dipende da x_0.

Prendendo la parte principale dell'infinitesimo possiamo confrontare il risultato con quello ottenuto applicando la regola della funzione potenza:

$$d(\sqrt{x}) = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \sim \frac{1}{2}x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

□

Funzione reciproca

Teorema 1.7. *Il differenziale della funzione reciproca* $f(x) = \frac{1}{x}$ *è*

$$d\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{dx}{x^2} \quad \textit{se} \quad x \neq 0$$

Ipotesi: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Tesi: $df(x) \sim -\dfrac{dx}{x^2}$

Dimostrazione.

$$df(x)|_{x=x_0} = f(x_0+dx) - f(x_0) = \frac{1}{(x_0+dx)} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0-x_0-dx}{x_0(x_0+dx)} = \frac{-dx}{x_0^2+x_0dx} \sim -\frac{dx}{x_0^2}$$

Anche questa volta il valore del differenziale dipende dal punto in cui si calcola x_0.

Anche in questo caso possiamo vedere la funzione reciproca come una funzione potenza:

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = d\left(x^{-1}\right) \sim -x^{(-1-1)}dx = -x^{-2}dx = -\frac{dx}{x^2}$$

□

Differenziali problematici

Quest'ultimo calcolo ci porta un punto importante: dato che nel risultato x_0 si trova al denominatore, abbiamo un problema. Che succede se $x_0 = 0$?

Esempio 1.3. Calcola $df(x)|_{x=0}$, con $f(x) = \frac{1}{x}$.
$d\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=0} = \frac{1}{0+dx} - \frac{1}{0} = ?$
La funzione è differenziabile $\forall x$, ma non per $x = 0$. Se $x \approx 0$ il differenziale diventa la differenza fra due infiniti, una forma di indecisione che non siamo in grado di risolvere. Il problema viene dal fatto che in $x = 0$, $f(x)$ non è definita.

Esempio 1.4. Differenzia la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$.
$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} = ?$
$d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)|_{x=-1} = \frac{1}{(x+dx)^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{-2dx+(dx)^2} - \frac{1}{0} = ?$
Questa volta i punti critici sono due. Poiché la funzione non è calcolabile per $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$, non è calcolabile nemmeno il suo differenziale.

Esempio 1.5. Nei due esempi precedenti cercavamo di calcolare il differenziale in un punto in cui la funzione non era definita. Ci vuole poca immaginazione per capire che se non è definita la funzione non può essere definito neppure il differenziale.

Ma che dire del differenziale della radice quadrata in zero? Lì la funzione è definita: $f(0) = \sqrt{0} = 0$. Mentre non è definito il suo differenziale: $df(0) \sim \dfrac{dx}{2\sqrt{0}}$

Calcoliamo il differenziale della radice in zero seguendo la definizione:

$$df(x)|_{x=x_0} = f(0+dx) - f(0) = \sqrt{0+dx} - \sqrt{0} = \sqrt{dx}$$

Intanto possiamo osservare che per poter effettuare i calcoli dx deve essere positivo quindi il resto del ragionamento ha senso soltanto assumendo $dx > 0$.

Il differenziale ottenuto, $\sqrt{dx}$, è un infinitesimo "molto" più grande di dx. Se $\sqrt{dx} = \delta$ allora $dx = \delta \cdot \delta$ cioè dx è un infinitesimo di $\sqrt{dx}$. Quando con uno strumento ottico non standard riesco a visualizzare dx, non potrò vedere anche $\sqrt{dx}$, questo sarà fuori dal campo visivo, si troverà all'infinito.

Possiamo concludere che in zero la funzione radice ha un differenziale (solo sul lato positivo), ma questo differenziale è infinitamente più grande di dx.

Nel piano cartesiano tracciamo il grafico delle funzioni degli ultimi tre esempi: $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2-1}$.

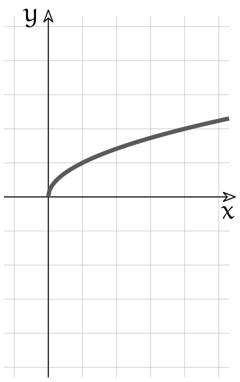


FIGURA 1.1: $y = \sqrt{x}$

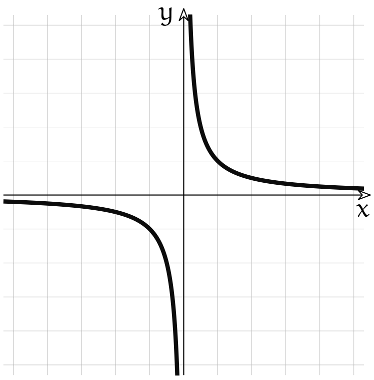


FIGURA 1.2: $y = \frac{1}{x}$

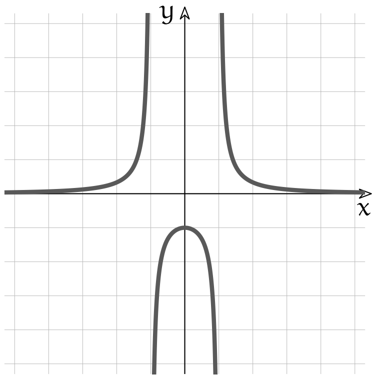
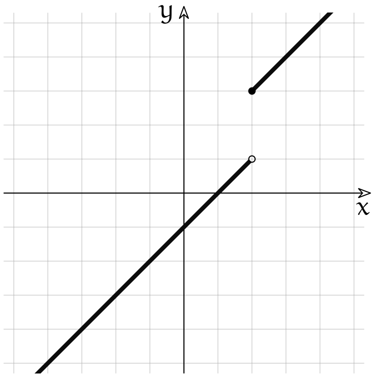


FIGURA 1.3: $y = \frac{1}{x^2-1}$

Guardando i grafici si può osservare che $y = \sqrt{x}$, essendo definita per i valori $x \geqslant 0$, non può essere calcolata per esempio, se $x = -2$ e quindi nemmeno il suo differenziale ha senso in questo punto.

Gli altri due grafici mettono in evidenza questo problema: dove la funzione non è calcolabile, non esiste il punto che rappresenta la funzione nel piano cartesiano reale.



Consideriamo un tipo diverso di problema.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x < 2 \\ x+1, & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$f(x)$ ha due rami e il grafico compie un salto per $x = 2$. Le differenze infinitesime calcolate a destra di tale punto saranno diverse da quelle calcolate a sinistra: i differenziali sono calcolabili ma non hanno uguali valori. Anche in questo caso $f(x)$ non è differenziabile per $x = 2$

Continuità e funzioni

Il tema della continuità è vasto e importante e viene trattato nei dettagli nel prossimo capitolo. Per ora ci limitiamo a considerazioni di carattere intuitivo.
Se una funzione è continua, ne puoi tracciare il grafico nel piano cartesiano senza staccare la matita dal foglio. Se ci fosse un punto (o più punti) di discontinuità, saresti obbligato a interrompere il disegno e riprenderlo da punti vicini.

Esempio 1.6. La funzione $f(x) = x$, che ha per grafico la retta $y = x$ è evidentemente una funzione continua: puoi tracciarne il grafico senza interruzioni nell'intervallo $(-M,\ M)$. Sono anche continue tutte le funzioni che hanno per grafico una retta, come per esempio $f(x) = -\frac{4}{5}x + 9$.
Quindi anche la funzione costante $f(x) = k$, che ha per grafico una retta orizzontale, è una funzione continua.

Esempio 1.7. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua ovunque in $\mathbb{R}$, tranne che per $x = 0$. Infatti se $x = 0$, $f(x)$ non è calcolabile, quindi nel piano cartesiano non puoi disegnare un punto che rappresenta il valore standard $(0;\ \frac{1}{0})$. Il punto è comunque visibile nel piano iperreale, con un telescopio.

Esempio 1.8. Per ragioni simili, sono discontinue in uno o più punti le funzioni (algebriche o trascendenti), per le quali occorra specificare condizioni di esistenza relative a questi punti. Così $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ è discontinua per $x = \pm 1$, mentre $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ è continua.

Dagli esempi si capisce che *la continuità delle funzioni è una condizione di carattere locale*, cioè per punti. Infatti si possono riconoscere dei punti di discontinuità di una funzione, non degli intervalli di discontinuità. Se ci si accorge che un punto $(x_0;\ f(x_0))$ è di discontinuità per $f(x)$, allora si dice: $f(x)$ *è discontinua per* $x = x_0$, cioè si indica solo la coordinata x che pone questo problema (non si usa dire: $f(x_0)$ è discontinua). Una funzione può essere discontinua in infiniti punti.

Esempio 1.9. La funzione $f(x) = \tan x$ è discontinua per $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$.

Definizione 1.6. Se una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo $[a;\ b]$, allora si dice continua in $[a;\ b]$.

❑ **Osservazione** Ovviamente la definizione non cambia se l'intervallo è di tipo diverso.

Esempio 1.10. $f(x) = \ln x$ è definita per $x \in (0;\ M)$ ed è ivi continua.

1.4.3 Combinare differenziali

Nella sezione 1.4.2 e in altre ci siamo avvalsi di proprietà così naturali che non è stato necessario sottolinearle. Ma è meglio non lasciarcele sfuggire.

Differenziale del prodotto per una costante

Teorema 1.8. *Se una funzione è moltiplicata per una costante, anche il suo differenziale risulta moltiplicato per la stessa costante.*

Ipotesi: $f(x) = a \cdot g(x)$. Tesi: $df(x) = a \cdot dg(x)$.

Dimostrazione.

$$df(x) = d\,[a \cdot g(x)] = a \cdot g(x+dx) - a \cdot g(x) = a \cdot [g(x+dx) - g(x)] = a \cdot dg(x).$$

□

Differenziale di una somma di funzioni

Teorema 1.9. *Se una funzione è la somma (la differenza) di due funzioni, anche il suo differenziale sarà la somma (la differenza) dei due differenziali.*

Ipotesi: $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. Tesi: $df(x) = df_1(x) \pm df_2(x)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} df(x) &= d[f_1(x) \pm f_2(x)] = [f_1(x+dx) \pm f_2(x+dx)] - [f_1(x) \pm f_2(x)] = \\ &= [f_1(x+dx) - f_1(x)] \pm [f_2(x+dx) - f_2(x)] = df_1(x) \pm df_2(x) \end{aligned}$$

□

Esempio 1.11. Un generico polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una funzione quadratica composta di tre termini. Con le regole precedenti abbiamo: $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ e $df(x) = df_1 + df_2 + df_3$.

- ➡ $f_1 = ax^2 \;\Rightarrow\; df_1 \sim 2axdx$;
- ➡ $f_2 = bx \;\Rightarrow\; df_2 = bdx$
- ➡ $f_3 = c \;\Rightarrow\; df_3 = 0$

Quindi $df(x) \sim 2axdx + bdx$. Il grafico della funzione è una parabola generica e il differenziale ci dice che l'incremento infinitesimo dx provoca un incremento (o un decremento) variabile sull'asse Y, che dipende dal punto x a partire dal quale si calcola dx.

Completiamo il quadro delle regole di calcolo con l'esame dei differenziali del prodotto e del rapporto di funzioni. Lo studente smart, che si fida un po' troppo delle analogie, potrebbe pensare: "siccome il differenziale di una somma è la somma dei differenziali e lo stesso avviene per la differenza, succederà una cosa simile anche per il prodotto e per il rapporto". Per (s)fortuna le cose a volte sono un po' meno smart.

Differenziale del prodotto di due funzioni

Questa volta, al posto della immarcescibile dimostrazione algebrica, ricorriamo alla geometria. Immaginiamo che le due funzioni, calcolate in un generico punto x, esprimano la base e l'altezza di un rettangolo: $b(x) = b$ sarà la base e $h(x) = h$ sarà l'altezza . L'area ovviamente si ottiene da $b(x) \cdot h(x) = A(x)$. Differenziare il prodotto $d\,[A(x)]$ vuol dire calcolare di quanto aumenta l'area del rettangolo, se i lati subiscono un incremento infinitesimo.

❑ **Osservazione** Gli incrementi della base e dell'altezza possono essere diversi, perché $b(x)$ e $h(x)$ sono funzioni diverse, le quali possono reagire in modo diverso all'incremento dx.

Teorema 1.10. *Se una funzione è il prodotto di due funzioni, il suo differenziale sarà dato da una somma fra tre prodotti: il differenziale della prima funzione per la seconda più la prima funzione per il differenziale della seconda più il prodotto dei due differenziali.*

Ipotesi: $A(x) = b(x) \cdot h(x)$. Tesi: $dA(x) = db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x) + db(x) \cdot dh(x)$.

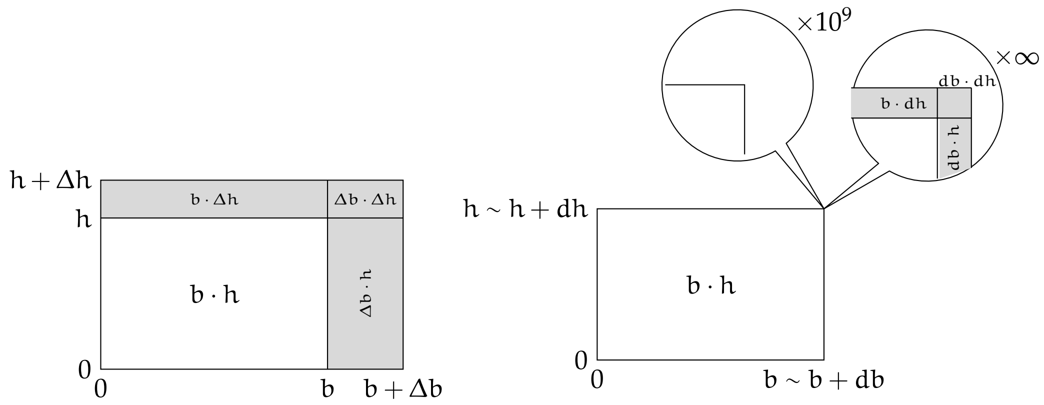


FIGURA 1.4: Incrementi finito e infinitesimo dell'area di un rettangolo

❑ **Osservazione** Si chiama "gnomone" la figura, a forma di L rovesciata, che rappresenta la crescita dell'area di un rettangolo.

Dimostrazione. L'incremento infinitesimo di area è la zona colorata del disegno, lo *gnomone*. È formato da tre parti:

- ➡ un rettangolo sottile, verticale e sulla destra, di base infinitesima $db(x)$ e altezza $h(x)$;
- ➡ un rettangolo orizzontale, in alto, di base $b(x)$ e altezza infinitesima $dh(x)$;
- ➡ un rettangolino in alto a destra, di area $db(x)dh(x)$.

La descrizione geometrica rappresenta bene la tesi e per i nostri scopi è una prova sufficiente. □

Dato che l'ultimo termine è un infinitesimo di ordine superiore, il risultato può essere approssimato alla sua parte principale, senza gravi danni: $\mathrm{d}A(x) \sim \mathrm{d}b(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot \mathrm{d}h(x)$.

Differenziale del rapporto fra due funzioni

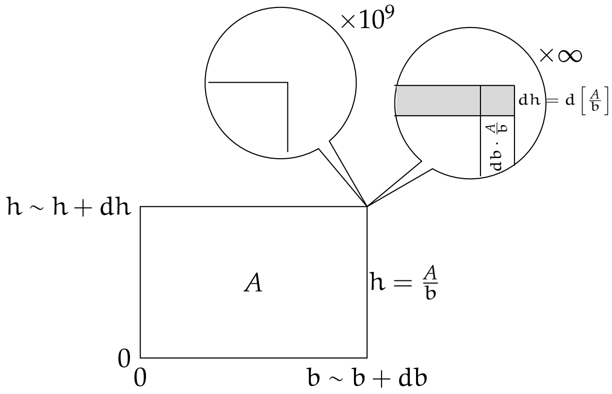
Teorema 1.11. *Se una funzione è data dal rapporto fra due funzioni, con il denominatore non nullo, il suo differenziale si ottiene calcolando la differenza fra due prodotti (il differenziale del numeratore per il denominatore meno il numeratore per il differenziale del denominatore) e dividendo il risultato per il quadrato del denominatore.*

Ipotesi: $h(x) = \dfrac{A(x)}{b(x)}$, con $b(x) \neq 0$. Tesi: $\mathrm{d}h(x) \sim \dfrac{\mathrm{d}A(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot \mathrm{d}b(x)}{(b(x))^2}$

Dimostrazione. Ricorriamo alla geometria anche in questo caso.

Essendo $A(x) = b(x) \times h(x)$ allora: $h(x) = \frac{A(x)}{b(x)}$. Ovviamente è necessario che $b(x) \neq 0$.

Guardando il disegno, possiamo osservare che $\mathrm{d}h(x)$ è l'incremento infinitesimo dell'altezza, si tratta dell'altezza della fascia superiore colorata. Questa altezza si può calcolare dividendo il rettangolo superiore dello gnomone per la base del rettangolo. Il rettangolo superiore dello gnomone è uguale a tutto lo gnomone infinitesimo, $\mathrm{d}A$,



meno il rettangolo destro infinitesimo, di area $h \cdot \mathrm{d}b$ e meno il rettangolino, sempre infinitesimo, che si trova in alto a destra. Dunque:

$$\mathrm{d}\left[\frac{A(x)}{b(x)}\right] = \mathrm{d}h(x) = \tag{1.1}$$

$$= \frac{[\mathrm{d}A(x) - h \cdot \mathrm{d}b(x) - \mathrm{d}b(x) \cdot \mathrm{d}h(x)]}{b(x)} = \tag{1.2}$$

$$= \frac{\left[\mathrm{d}A(x) - \dfrac{A(x)}{b(x)} \cdot \mathrm{d}b(x) - \mathrm{d}b(x) \cdot \mathrm{d}h(x)\right]}{b(x)} = \tag{1.3}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}A(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot \mathrm{d}b(x) - b(x) \cdot \mathrm{d}b(x) \cdot \mathrm{d}h(x)}{b(x)}}{b(x)} = \tag{1.4}$$

$$= \frac{\mathrm{d}A(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot \mathrm{d}b(x) - b(x) \cdot \mathrm{d}b(x) \cdot \mathrm{d}h(x)}{(b(x))^2} \sim \tag{1.5}$$

$$\sim \frac{\mathrm{d}A(x) \cdot b(x) - A(x) \cdot \mathrm{d}b(x)}{(b(x))^2} \tag{1.6}$$

□

Sintesi della sezione

Ci siamo limitati a calcolare solo alcuni differenziali elementari, attraverso esempi e dimostrazioni. Manca del tutto la trattazione dei differenziali delle funzioni trascendenti. Avremo modo di vedere anche questi nel corso della prossima sezione, dove, quanto ottenuto fin qui, viene utilmente ripreso e ampliato.

I risultati che abbiamo visto valgono sotto le ovvie ipotesi che si parli di funzioni continue e che i differenziali siano calcolabili per tutti i possibili x del dominio di tali funzioni. Unificando i simboli e restando all'essenziale, abbiamo:

1. $f = k \ \rightarrow \ df = 0$;
2. $f = x \ \rightarrow \ df = dx$;
3. $f = x^{\alpha} \ \rightarrow \ df \sim \alpha x^{\alpha-1} dx$;

4. $d(a \cdot f) = a df$ differenziale del prodotto per una costante;
5. $d(f \pm g) = df \pm dg$ differenziale di una somma o differenza;
6. $d(f \cdot g) \sim f \cdot g + f \cdot dg$ differenziale del prodotto;
7. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) \sim \dfrac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ differenziale del rapporto ($g \neq 0$).

dove k, a, α rappresentano delle costanti, mentre f e g sono funzioni continue.

Sulla scia delle applicazioni illustrate al termine del Cap.2, esaminiamo alcuni problemi facilmente risolvibili con l'aiuto dei differenziali.

1.4.4 Problemi con i differenziali

Esempio 1.12. Un triangolo equilatero ha l'altezza di 8 cm. Di quanto aumenta il suo perimetro, man mano che aumenta l'altezza? L'aumento è legato alla misura iniziale di h?
Il perimetro è $2p = 3l$ e con il Teorema di Pitagora si ha: $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Quindi $l = \frac{2}{\sqrt{3}} h$ e $2p = 2\sqrt{3}h$. Incrementiamo l'altezza a partire da $h_0 = 8$ e ricaviamo il perimetro corrispondente.
$d(2p)|_{h_0=8} = d\left(2\sqrt{3}h\right)|_{h_0=8} = 2\sqrt{3} \cdot (8 + dh) - 2\sqrt{3} \cdot 8 = 2\sqrt{3} \cdot dh$.
Per ogni incremento infinitesimo dell'altezza, il perimetro aumenta di $2\sqrt{3}$. Si tratta di un incremento costante, che non dipende dalla misura iniziale dell'altezza. Infatti, se si ripete il calcolo scrivendo il simbolo h_0 al posto della sua misura 8, h_0 non compare nel risultato.
La soluzione può essere ricavata in modo più diretto, applicando le regole 4 e 2 della sintesi a pag.**??**.

Esempio 1.13. Di quanto aumenta il lato di un triangolo equilatero, man mano che aumenta la sua area? L'aumento è legato al valore iniziale del lato?
Dalla formula dell'area $A = \frac{bh}{2}$ e dall'esempio precedente ($h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$), ricaviamo: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$.
Differenziando, con l'aiuto delle regole 4 e 3 della sintesi a pag. **??**, abbiamo:
$d(A) = d\left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} d\left(l^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2l \cdot dl + (dl)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2l + dl)\, dl$.
Questa volta la relazione con l'incremento del lato non è elementare: per ogni incremento infinitesimo del lato si ha un incremento di area pari a $\frac{\sqrt{3}}{4}(2l + dl)$, che dipende dalla misura iniziale del lato e dallo stesso incremento. Per gestire il risultato, occorre approssimare questo numero all'indistinguibile più vicino:

$\mathrm{d}\,(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(2l + \mathrm{d}l)\,\mathrm{d}l \sim \frac{\sqrt{3}}{2} l\,\mathrm{d}l.$
Da qui, applicando la formula inversa, si ottengono le risposte: $\mathrm{d}l \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}(A)}{l}$.

❑ **Osservazione** Una via più diretta per giungere alla soluzione potrebbe essere:
$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \;\to\; l = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} A} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{A} \;\to\; \mathrm{d}l = \mathrm{d}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{A}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \mathrm{d}\left(\sqrt{A}\right)$
A questo punto dobbiamo fermare il calcolo, perché sappiamo calcolare $\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)$, ma non sappiamo ancora come calcolare $\mathrm{d}\left(\sqrt{f(x)}\right)$. Per farlo, occorre approfondire le conoscenze.

1.5 Introduzione alla derivata

La derivata è un ente matematico conosciuto dalla metà del 1700, che da allora si applica utilmente allo studio di fenomeni naturali di ogni tipo.
Studieremo l'argomento puntando lo sguardo sulle funzioni e sui loro grafici nel piano cartesiano. Iniziamo dai grafici più semplici.

1.5.1 Pendenza di una retta

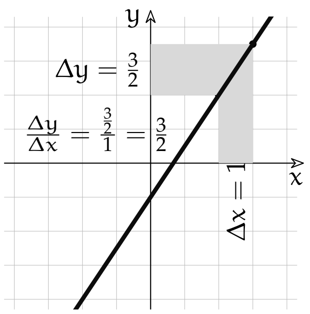


FIGURA 1.5: $y = \frac{3}{2}x - 1$

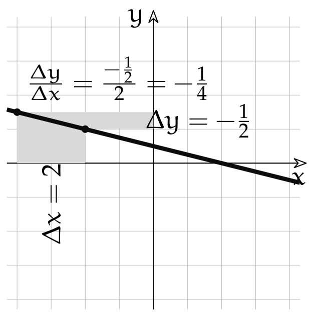


FIGURA 1.6: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

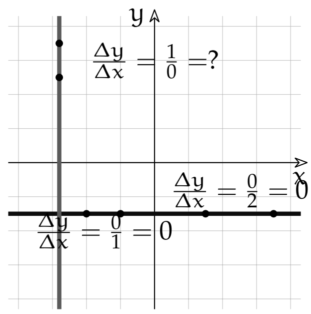


FIGURA 1.7: $y = -\frac{3}{2}$ e $x = -2,8$

Sappiamo già calcolare la pendenza di una retta dalla semplice osservazione del suo grafico: si fissano sulla retta due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e si calcola il rapporto $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
È come se si volesse misurare la distanza verticale fra i due punti usando la loro distanza orizzontale come unità di misura. Nel caso della retta r, $m = \frac{3}{2}$ e si potrebbe dire: "un punto che si muove sulla retta, se si sposta di due quadretti in orizzontale ne guadagna (o perde) tre in verticale.
Un punto che scorre sulla retta orizzontale, non subisce alcuna variazione lungo l'asse y e per questo $m = 0$; al contrario per la retta verticale le variazioni sono solo verticali e la pendenza è infinita.
Sintetizziamo la formula come rapporto fra differenze: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il simbolo m ci riporta all'equazione di una retta generica in forma esplicita $y = mx + q$, dove m rappresenta appunto il coefficiente angolare, cioè l'inclinazione o pendenza.

❑ **Osservazione** Secondo l'uso del capitolo precedente, le indicazioni con la lettera maiuscola Δ (Δx, Δy) si riferiscono a *quantità finite*, cioè a numeri standard.

Rapporto incrementale

C'è un fatto importante: per calcolare la pendenza di una retta, la scelta dei due punti è indifferente. Possono essere molto vicini o molto lontani, scambiati l'uno con l'altro o presso l'origine, oppure no: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è sempre lo stesso, come è giusto che sia per una retta. Da $x_B - x_A = \Delta x$ ricaviamo banalmente $x_B = x_A + \Delta x$, cioè nel piano cartesiano B si colloca a destra (se $\Delta x \geqslant 0$) di A di una quantità finita, grande o piccola che sia.
Δx, Δy sono anche chiamati *incrementi* e quindi...

Definizione 1.7. Si dice *Rapporto Incrementale* (R.I.) il rapporto degli incrementi, cioè la quantità R.I. = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si tratta di una quantità finita, calcolabile se $\Delta x \neq 0$.
Il Rapporto Incrementale, calcolato su una retta fornisce la sua pendenza ed è un valore costante, come abbiamo visto.
Ma il calcolo si può applicare a qualsiasi funzione, anche a quelle che nel piano cartesiano sono rappresentate da curve. Allora le cose cambiano.

Esempio 1.14. I prossimi grafici appartengono alla stessa funzione.

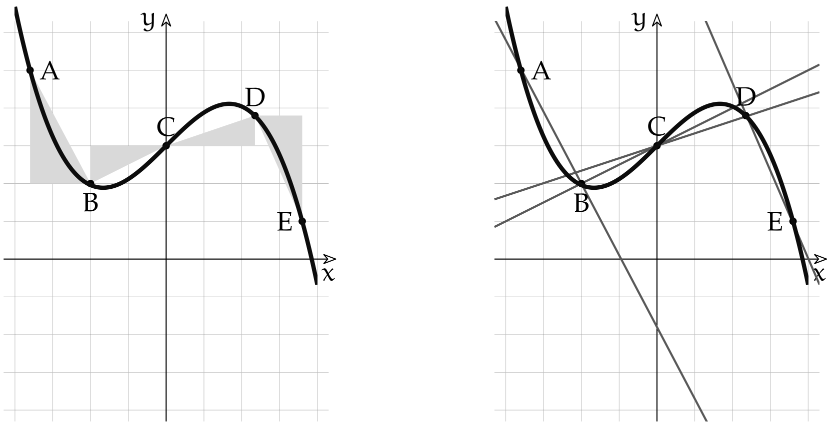


FIGURA 1.8: Rapporti incrementali in una curva e secanti.

Scegliamo alcuni punti sulla curva e mettiamo in evidenza gli intervalli che consentono il calcolo del rapporto incrementale, in un caso, e la pendenza delle secanti nell'altro.
Rapporti Incrementali:

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{-2-(-3.5)} = \frac{-3}{1.5} = -2 \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-2}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3.8-3)}{2.4-0} = \frac{0.8}{2.4} = \frac{1}{3} \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{1-3.8}{3.5-2.3)} = \frac{-2.8}{1.2} = -\frac{7}{3}$$

Pendenze.

$$m_{AB} = -2 \qquad m_{BC} = \frac{1}{2} \qquad m_{CD} = \frac{1}{3} \qquad m_{DE} = -\frac{7}{3}$$

I calcoli confermano che se il grafico è una curva, il Rapporto Incrementale, calcolato fra varie coppie di punti, ha valori diversi. Il R.I. cambia a seconda della coppia di punti fissati sulla curva.
Se si traccia la retta che unisce la coppia di punti, ne risulta una secante alla curva.
In conclusione, si hanno le seguenti proprietà:

1. Il R.I. è un numero finito e esiste solo se $\Delta x \neq 0$.
2. Il R.I fra le coppie di valori di una funzione è a sua volta una funzione, che dipende dalla coppia scelta.
3. La funzione è costante se applicata al grafico di una retta. In questo caso il R.I calcola la sua pendenza.
4. In generale, R.I. calcola la pendenza della retta secante che unisce due punti del grafico.

Rapporto differenziale

Esempio 1.15. Fissiamo su una curva due punti: uno fisso (A) e l'altro mobile P, cioè in grado di spostarsi lungo la curva dalla posizione più lontana P_1, alla più prossima ad A, cioè oltre P_7, fin quasi a sovrapporsi con A.

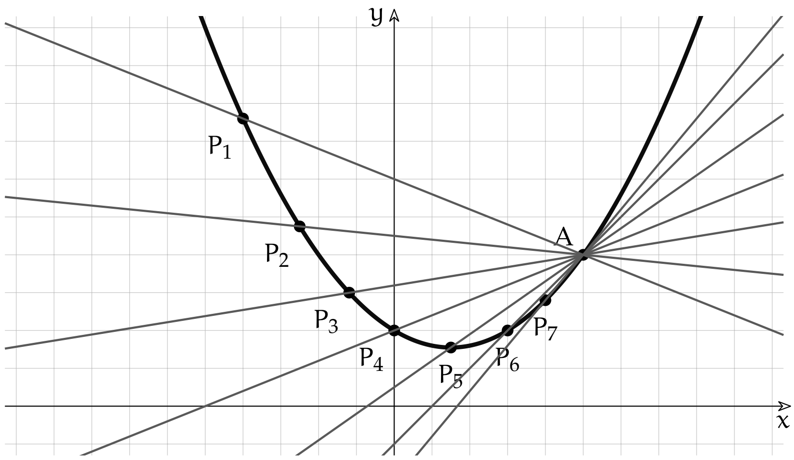


FIGURA 1.9: Dalle secanti alla tangente.

Tracciamo le secanti che uniscono A con le varie posizioni di P_n. Man mano che P si avvicina ad A, la secante che li unisce tende ad allinearsi alla tangente ideale.
Quando P è così vicino ad A che la loro distanza è $\overline{AP} < \frac{1}{n}$, $\forall n$, siamo nel campo degli infinitesimi: cambia la natura del Rapporto Incrementale che avevamo imparato a calcolare. Il R.I. si trasforma da un rapporto fra quantità finite a un rapporto fra infinitesimi, quindi non possiamo essere certi su quale sia il tipo del risultato che fornisce.
Se escludiamo il caso $dx = 0$ (P_n coinciderebbe con A) e se il rapporto dà un risultato

finito, otterremo la pendenza della secante fra i due punti infinitamente vicini $A\,(x_A;\ y_A)$ e $P_n\,(x_A + dx;\ f(x_A + dx))$, quindi di una retta infinitamente vicina alla tangente, cioè distinta da essa solo se guardata con il microscopio a ingrandimento infinito.

Definizione 1.8. Si dice Rapporto Differenziale della funzione $f(x)$, relativo a x_0 il rapporto $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ fra il differenziale della funzione e quello della variabile, calcolati nel punto x_0. $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$, con $dx \neq 0$.

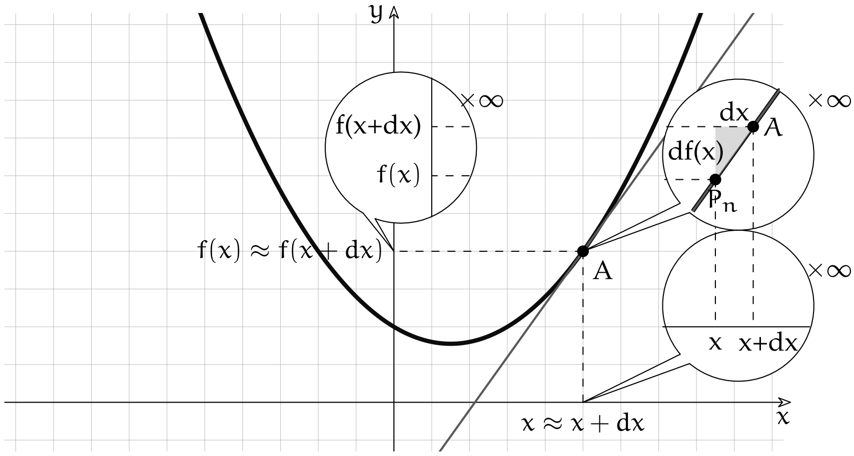


FIGURA 1.10: Secante per due punti infinitamente vicini.

Esempio 1.16. La curva della Fig.12 rappresenta la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2$. Calcoliamo la pendenza della secante che passa per $A\,(5;\ 4)$ e per un altro punto infinitamente vicino.
La funzione è visibilmente continua nel punto A e il differenziale per $x = x_A$, secondo le regole della sezione precedente, è:

$$d(f(x)|_{x=5} = d\left(\frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2\right)\Big|_{x=5} = d\left(\frac{x^2}{5}\right)\Big|_{x=5} - d\left(\frac{3}{5}x\right)\Big|_{x=5} + d(2)|_{x=5} =$$
$$= \frac{1}{5}\left(2x dx + (dx)^2\right)\big|_{x=5} - \frac{3}{5}dx\big|_{x=5} + 0 = \frac{2}{5}x|_{x=5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx =$$
$$= \frac{2}{5}5dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 2dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{7}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2$$

Raccogliendo dx nel differenziale della funzione, il rapporto differenziale è:

$$\frac{d(f(x)}{dx}\Bigg|_{x=5} = \frac{\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx\right)dx}{dx} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}dx.$$

Come si vede, la pendenza di questa secante è un numero finito del tipo $a + \varepsilon$, che dipende sia dal valore $x_A = 5$, sia dall'infinitesimo dx che compare nel risultato. Si tratta dunque di una pendenza infinitamente vicina al valore $m = \frac{7}{5}$.

Esempio 1.17. Ripetiamo il calcolo precedente, con riferimento all'ascissa del vertice $x_V = \frac{3}{2}$ (per il valore dell'ascissa può essere di aiuto la lettura del grafico, se per caso nel tempo si fosse attenuato il ricordo della regola: $x_V = -b/2a$).
$d(f(x)\big|_{x=3/2} = \frac{2}{5}x|_{x=3/2}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = \frac{2}{5}\frac{3}{2}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx =$
$= \frac{3}{5}dx + \frac{1}{5}(dx)^2 - \frac{3}{5}dx = 0 + \frac{1}{5}(dx)^2.$
Quindi il rapporto differenziale:
$$\frac{d(f(x)}{dx}\bigg|_{x=3/2} = \frac{\frac{1}{5}(dx)^2}{dx} = \frac{1}{5}dx.$$
La secante per punti infinitamente vicini al vertice della parabola differisce dalla retta orizzontale per un infinitesimo, cioè è infinitamente vicina alla retta orizzontale.

❑ **Osservazione** La pendenza calcolata nell'esempio **??** è $m \approx \frac{7}{5}$, mentre in quest'ultimo esempio **??** è $m \approx 0$. Questo conferma che m cambia a seconda del punto della curva: $m = m(x)$.

Esempio 1.18. In quale punto del piano cartesiano la parabola precedente è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale?
Risposta: poiché solo la retta $y = x$ ha in qualsiasi suo punto l'inclinazione richiesta dal problema, occorre cercare in quale punto la parabola risulta inclinata come la retta, cioè ha lo stesso coefficiente angolare. È chiaro che non si può calcolare il coefficiente angolare di una parabola, ma si può immaginare che nel punto desiderato esista una retta tangente che risponde alle nostre esigenze. Cerchiamo quindi in quale punto, almeno approssimativamente, si possa disegnare una retta che ha $m = 1$ e che quasi coincida con la parabola.
Utilizziamo i calcoli precedenti e teniamo incognita x, dato che conosciamo già la pendenza desiderata:
$$\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=?} = 1 \rightarrow \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}dx - \frac{3}{5} = 1 \rightarrow \frac{2}{5}x = 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}dx \rightarrow x = \frac{8-dx}{5}\frac{5}{2} = \frac{8-dx}{2}.$$
Il punto in questione ha coordinata $x = 4 - \frac{1}{2}dx \approx 4$.

1.6 Derivata: definizione

Gli esercizi precedenti sono stati risolti con esattezza. Purtroppo, però, il rapporto differenziale ci dà le soluzioni più semplici solo in pochi casi, praticamente inutili, cioè quando si applica alle funzioni polinomiali di primo grado (le rette nel p8iano cartesiano)). In tutti gli altri casi il risultato iperreale contiene infinitesimi che possono essere scomodi da gestire negli sviluppi successivi.

Esempio 1.19. Proseguendo con l'esempio **??**, calcoliamo in due modi, esatto e approssimato, la coordinata y del punto in questione:

Calcolo esatto: $x = 4 - \frac{1}{2}dx \rightarrow y = \frac{x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 2 = \frac{(4-\frac{1}{2}dx)^2}{5} - \frac{3}{5}(4 - \frac{1}{2}dx) + 2 =$
$= \frac{1}{5}\left(16 - dx + \frac{1}{4}(dx)^2\right) - \frac{12}{5} + \frac{3}{10}dx + 2 = \cdots = \frac{14}{5} + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{20}(dx)^2 \approx \frac{14}{5} = 2,8$

Calcolo approssimato: $x \approx 4 \ \rightarrow \ y \approx \frac{4^2}{5} - \frac{3}{5}4 + 2 = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} + 2 = \frac{14}{5} = 2,8.$

È chiaro che la seconda linea di calcoli è molto più gestibile della prima e vorremmo poter avere sempre la comodità di una gestione facilitata.
Esiste una tecnica da applicare al risultato esatto iperreale per trasformarlo nel numero reale più vicino? Se esiste, possiamo guadagnare in agilità di calcolo, senza perdere troppo in precisione.

Definizione 1.9. La *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto $(x_0;\ f(x_0))$ è, se esiste, la parte standard del rapporto differenziale della funzione, calcolato nello stesso punto. La derivata si indica con $f'(x_0)$.
$f'(x_0) = \text{st}\left(\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x=x_0}\right).$

La derivata, cioè l'applicazione della funzione $\text{st}()$ al rapporto differenziale, soddisfa le nostre esigenze: fornisce la migliore approssimazione reale del risultato ottenuto con il rapporto differenziale. La differenza fra questo e la derivata vale uno o più infinitesimi di ordine superiore, che nella maggior parte dei casi sono trascurabili.
$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0) \ \rightarrow \ f'(x_0) \approx \left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x=x_0}.$

Significato della derivata

L'operazione di derivazione ha uno scopo molto più importante dell'indubbia comodità di fornire un risultato privo di infinitesimi: essa consente di calcolare il tasso di variazione di una funzione in un dato punto. Per tasso di variazione non si intende semplicemente la differenza fra due valori prossimi della funzione $df(x)$, ma la misura di tale differenza, ottenuta usando come unità di misura dx, cioè confrontandola con la variazione della variabile.
Dal punto di vista geometrico, se si considera il grafico della funzione nel piano cartesiano iperreale, la derivata in un punto misura il tasso di crescita della funzione lungo l'asse Y rispetto alla variazione infinitesima lungo l'asse X, quindi misura la pendenza della tangente al grafico in quel punto. Queste osservazioni sono la conseguenza del fatto che la derivata di una funzione in un punto è un numero standard.

❑ **Osservazione** L'operazione di derivazione è conosciuta dai tempi di Leibniz e di Newton, più o meno nei termini che qui sono stati esposti. Il problema attorno al quale i matematici di quell'epoca concentravano i loro sforzi era relativo alle variazioni: le variabili erano chiamate *quantità fluenti* e le variazioni di queste erano dette *flussioni*. Calcolare una velocità, per esempio, era calcolare il rapporto fra la flussione dello spazio rispetto alla flussione del tempo.

Nomi per la derivata

Il nome *derivata* per indicare il calcolo che abbiamo descritto ha origini storiche. Si è diffuso ovunque (derivative, derivada, dérivée, ...) anche se non rende pienamente il significato di ciò che rappresenta. Se ne potrà intuire la ragione in un capitolo successivo, quando parleremo

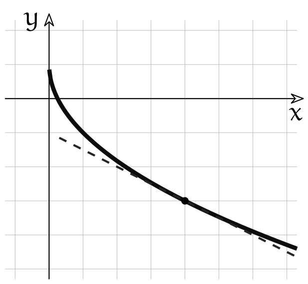
anche di funzioni primitive.
Sempre per ragioni storiche, si sono diffusi vari simboli che rappresentano l'operazione di derivazione:

1. $f'(x_0)$ è il simbolo per il risultato della derivazione di f per $x = x_0$: semplice e sintetico;
2. $D[f(x)]$ indica la formula della derivazione di f, per es. $D\left[5x\sqrt[3]{x^2}\right] = 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{x}}$;
3. $\dot{f}$ equivale a f'; si usa in alcuni corsi universitari;
4. $\dfrac{d}{dx}f(x)$ è come $f'(x)$: si pone in evidenza che si tratta di una rapporto con dx;
5. $\dfrac{df(x)}{dx}$ si trova spesso nei libri come se fosse esattamente uguale a $f'(x)$. Sottolineamo che sono due cose diverse. Nella maggior parte dei casi quest'uguaglianza si può accettare, trattandosi di quantità infinitamente vicine, anzi indistinguibili. Per praticità, potremo anche noi seguire quest'uso, specificando la distinzione solo quando sarà necessario.

Derivate facili e meno facili

Nella definizione di derivata troviamo un inciso essenziale: *se esiste*. Significa che la derivata potrebbe anche non esistere, cioè non essere calcolabile? Vediamo alcuni esempi di calcoli che si portano a termine facilmente ed altri più problematici.

Esempio 1.20. Calcola $f'(4)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.



Si richiede la derivata di $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ nel punto $(4;\ f(4))$, che corrisponde, nel grafico, alla pendenza della retta tangente alla curva, per $x = 4$. Cioè dobbiamo calcolare:

1. il differenziale della funzione;
2. il rapporto fra questo e dx per $x = 4$;
3. la parte standard del risultato precedente.

Lo svolgimento dei calcoli:

1. calcolare il differenziale della funzione: dalle regole apprese sui differenziali (pag.9) sappiamo che
   a) il differenziale di una differenza è la differenza dei differenziali: $d(1 - \sqrt{x}) = d(1) - d(2\sqrt{x})$;
   b) il differenziale di una costante è nullo: $d(1) = 0$;
   c) il differenziale del prodotto fra una costante e una funzione è $d(k(f(x)) = kdf(x)$, quindi: $d(2\sqrt{x}) = 2\dfrac{dx}{(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} \sim \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

   Per cui: $d(1 - 2\sqrt{x}) \sim \left(0 - \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$.
2. calcolare il rapporto fra questo e dx nel punto richiesto: $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Bigg|_{x=4} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Bigg|_{x=4} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$;
3. calcolare la parte standard del risultato: la parte standard di un numero indistinguibile da $-\frac{1}{2}$ è semplicemente: $\mathrm{st}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

La retta tangente in $(4;\ f(4))$ ha pendenza pari a $-\frac{1}{2}$.

Con le regole già date sui differenziali il calcolo è privo di difficoltà, non sembra che la derivata per questa funzione possa creare problemi.

Esempio 1.21. Calcola $f'(0)$ per la funzione $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.
Riutilizziamo i calcoli precedenti.

1. $d(1-2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$;
2. $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=0} \sim \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{0}} = \dots ?$
3. ?

Una frazione nulla al denominatore non ha senso, il rapporto differenziale non è calcolabile e la derivata non esiste.

Cerchiamo allora di capire cosa succede se il radicando è un infinitesimo non nullo $\varepsilon > 0$, quindi infinitamente vicino a 0.

Esempio 1.22. Calcolare $f'(\varepsilon)$, sempre per $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$.

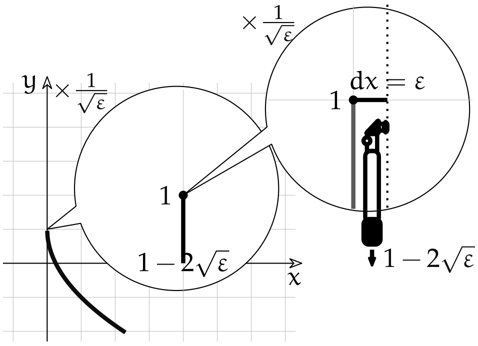
1. $d(1-2\sqrt{x}) = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$;
2. $\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} = \left(\frac{-\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dx}\right)\Big|_{x=\varepsilon} \sim -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = -M$ (con $\varepsilon, M > 0$);
3. $\mathrm{st}\left(\frac{d(f(x))}{dx}\Big|_{x=\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\,(-M) = ?$

❑ **Osservazione** $-M$ è un infinito negativo perché ε si suppone positivo. Non avrebbe senso, comunque, fare un tentativo con ε negativo, perché la radice quadrata di numeri negativi (reali e iperreali) non è definita.

La parte standard di un numero infinito non esiste. La derivata non esiste, quindi la pendenza della tangente per $x = 0$ non può essere calcolata.
Esiste però la pendenza della retta secante fra i due punti infinitamente vicini $(0;\ f(0) = 1)$ e $(\varepsilon;\ f(\varepsilon))$. Infatti il rapporto differenziale appena calcolato approssima questa pendenza.
Vediamo nel dettaglio l'equazione di questa retta, con la formula della retta passante per i due punti: $A\,(0;\ 1)$ e $B\,\left(\varepsilon;\ f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$.

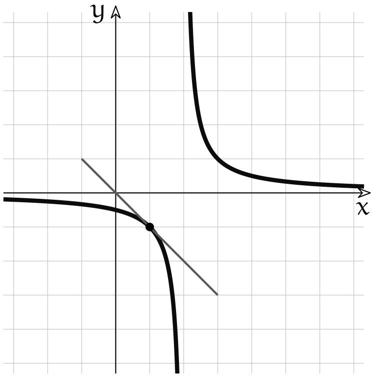
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \ \rightarrow\ \frac{x-0}{\varepsilon - 0} = \frac{y-1}{1 - 2\sqrt{\varepsilon} - 1} \ \rightarrow\ \frac{x}{\varepsilon} = \frac{y-1}{-2\sqrt{\varepsilon}} \ \rightarrow\ y = \frac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}x + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

La pendenza di questa secante è $m = \dfrac{-2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$.
La frazione ha senso per qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi si deve pensare che se x è un infinitesimo sempre più prossimo a 0, m diventa sempre più negativa: la retta accentua sempre più la sua inclinazione verso il basso fino ad assumere una direzione verticale, quando diventerà tangente in $(0;\ 1)$.
Come possiamo visualizzare la pendenza della secante per $x \approx 0$?



In realtà non possiamo. Infatti se $dx = \varepsilon$ abbiamo $f(\varepsilon) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$. Realizziamo un primo microscopio con ingrandimento infinito, pari a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, così $df(x)$ può essere visualizzata con un tratto verticale verso il basso, a partire dal punto $(0;\,1)$. Ma l'ingrandimento non è sufficiente per cogliere $dx = \varepsilon$, infinitesimo di ordine superiore, quindi troppo piccolo. Se poi applichiamo un secondo microscopio che visualizza dx, allora $df(x)$ assume lunghezza infinita e non può essere valutato. Nel punto $(0;\,1)$ la tangente (linea tratteggiata) è verticale.

Esempio 1.23. Per la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ calcola le derivate $f'(1)$ e $f'(2)$.



Per le regole che presto approfondiremo, $d\left[(x-2)^{-1}\right] = d(x^{-1})$ perciò possiamo fare riferimento al teorema pag.10.

1. $d(f(x)) = d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\dfrac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx};$
2. $\left(\dfrac{d(f(x))}{dx}\right)\Bigg|_{x=1} = \left(\dfrac{-\frac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}}{dx}\right)\Bigg|_{x=1} =$
   $= -\dfrac{1}{1-dx};$
3. $\text{st}\left(-\dfrac{1}{1-dx}\right) = -1.$

Per $x = 1$, la tangente ha pendenza $m = -1$.
Vediamo ora la seconda risposta.

1. $d(f(x)) = d\left(\frac{1}{x-2}\right) = -\dfrac{dx}{(x-2)^2 + (x-2)dx};$
2. $\left(\dfrac{d(f(x))}{dx}\right)\Bigg|_{x=2} = \left(\dfrac{-\frac{dx}{(x-2)^2+(x-2)dx}}{dx}\right)\Bigg|_{x=2} = -\dfrac{1}{0-0dx} =?;$
3. è inutile calcolare la parte standard di un numero privo di senso.

Cosa è successo nel secondo caso? Che la funzione è discontinua per $x = 2$. Lo rende evidente il grafico, ma sarebbe stato meglio, prima ancora di disegnarlo, studiare l'insieme di definizione e evitare calcoli inutili. Infatti dobbiamo ricordarci che il differenziale è calcolabile solo nei punti di continuità, di conseguenza il discorso vale anche per la derivata.

Esempio 1.24. Per la funzione $f(x) = \frac{1}{2}|x-2|+2$ calcola le derivate $f'(0)$, $f'(4)$ e $f'(2)$.
La funzione contiene un valore assoluto e può essere più semplice pensarla come se fosse divisa in due rami:

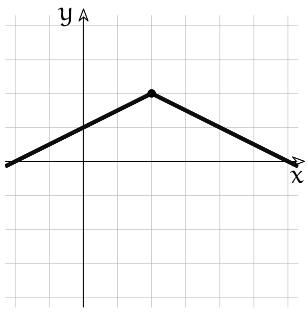


FIGURA 1.11:

$$f(x) = \frac{1}{2}|x-2|+2 = \\ = \begin{cases} \frac{x-2}{2}+2 & \text{per } x-2<0 \\ \frac{-(x-2)}{2}+2 & \text{per } x-2 \geqslant 0 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+1 & \text{per } x<2 \\ -\frac{x}{2}+3 & \text{per } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Si tratta di due semirette che si uniscono in $(2;\ 2)$. L'equazione di ciascuna di loro è una funzione lineare e calcolare le derivate $f'(0)$ e $f'(4)$ è inutile: ne ricaveremmo comunque la pendenze delle semirette, cioè $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $f'(4) = -\frac{1}{2}$.
Il calcolo di $f'(2)$ invece è più interessante:
Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } x<2 \\ -\frac{1}{2} & \text{per } x>2 \end{cases}$. Quale è la pendenza giusta della tangente per $x = 2$, nel punto cioè dove il grafico cambia pendenza all'improvviso?
Tutto dipende dal differenziale e dal rapporto differenziale. La funzione è continua, perciò $df(x)$ è sempre calcolabile.
Immagina $\frac{f(2+dx)-f(2)}{dx}$. Se dx è un qualsiasi infinitesimo positivo, siamo nel ramo destro del grafico e il rapporto risulta negativo. Al contrario, se $dx < 0$ siamo nel ramo sinistro e il rapporto è positivo: la parte standard del rapporto differenziale relativa al punto in cui $x = 2$ non è unica, quindi non esiste. Di conseguenza la derivata non esiste.

Da tutti questi esempi impariamo che per poter calcolare la derivata:

1. $f(x)$ deve essere continua nel punto desiderato ed è una condizione necessaria per poter derivare (ma non sufficiente);
2. il rapporto differenziale deve essere un numero finito;
3. il risultato deve essere indipendente dalla scelta di dx, cioè deve valere $\forall dx$;

❑ **Osservazione** Inoltre abbiamo visto un altro fatto importante: la derivata ha un risultato in genere diverso a seconda del valore x_0 per il quale viene calcolata, cioè varia al variare di x_0. Poiché se si fissa x_0 il risultato, se esiste, è unico allora la derivata di una funzione è a sua volta una funzione.

Definizione 1.10. Una funzione per la quale la derivata è calcolabile $\forall x_0$ del suo dominio si dice funzione derivabile.

❑ **Osservazione** Una funzione derivabile è sicuramente continua, mentre il contrario non vale.

1.7 Derivare funzioni algebriche

Sistemate le questioni preliminari, passiamo al calcolo: impariamo a derivare. Nei casi semplici ci avvarremo di quanto visto a proposito dei differenziali, ma, per le funzioni non trattate allora, dovremo calcolare anche questi. Al termine, raccoglieremo i risultati utili in un prospetto riassuntivo.
Immaginiamo che le funzioni da derivare siano derivabili $\forall x$ dell'insieme di definizione, per cui la derivata di f nel generico punto $(x;\ f(x))$ sarà $f'(x)$.
Grazie al capitolo **??**, sappiamo già come differenziare alcune funzioni algebriche: da quelle regole e dalla definizione di derivata ...deriva direttamente quanto segue.

Teorema 1.12. *La derivata di una funzione costante è 0: $D\left[k\right] = 0$.*

Ipotesi: $f(x) = k$. Tesi: $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 0$ □

Teorema 1.13. *La derivata della funzione identica è 1: $D\left[x\right] = 1$.*

Ipotesi: $f(x) = x$. Tesi: $f'(x) = 1$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = \varepsilon = dx$, quindi il rapporto differenziale è 1 e così anche la sua parte standard. □

❑ **Osservazione** $m = 1$ è quindi anche la pendenza della bisettrice $y = x$, cosa ormai risaputa.

Teorema 1.14. *La derivata della funzione quadratica è: $D\left[x^2\right] = 2x$.*

Ipotesi: $f(x) = x^2$. Tesi: $f'(x) = 2x$.

Dimostrazione. Infatti $df(x) = 2xdx + (dx)^2$ e il rapporto differenziale è $2x + dx$ da cui, applicando la definizione di derivata, ... □

Iniziamo dal ramo sinistro del grafico: al crescere di x, la curva e le sue tangenti, indistinguibili da essa nei punti di tangenza, passano da un'inclinazione fortemente verso il basso ($m < 0$) alla direzione orizzontale, nel vertice. Per $x > 0$, poi, l'inclinazione aumenta progressivamente. Il progresso della pendenza delle tangenti è costante: per questo motivo il grafico di $y = m(x)$ è una retta per l'origine.

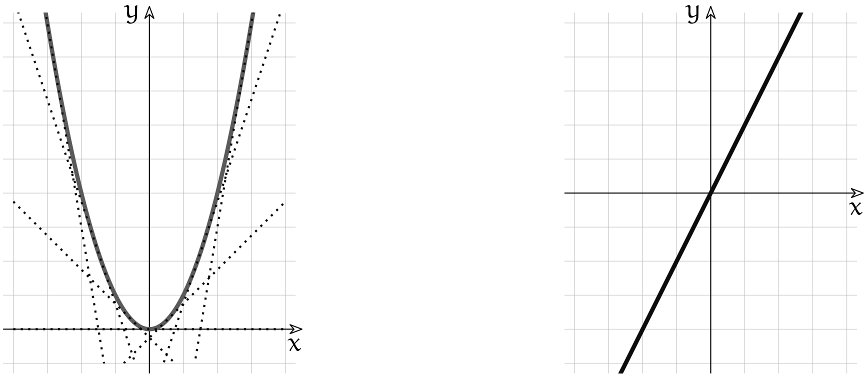


FIGURA 1.12: $y = x^2$ e la pendenza $y = m(x) = 2x$ delle sue tangenti.

❑ **Osservazione** Nota che la funzione derivata di una funzione quadratica è una funzione lineare. Detto con eccessiva sintesi: la derivata di una parabola è una retta.
Con più precisione: la pendenza delle tangenti a una parabola varia come varia la y rispetto alla x in una retta.

Teorema 1.15. *La derivata della generica funzione potenza è:* $D[x^n] = nx^{n-1}$.

Ipotesi: $f(x) = x^n$. Tesi: $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = nx^{n-1}dx + \delta(x)$ e, applicando la definizione di derivata, ... □

❑ **Osservazione** Ripetendo l'osservazione a pag.8 relativa a queste funzioni, il teorema **??** è del tutto generale: si applica con qualsiasi esponente reale. Vale quindi anche per le funzioni radicali di qualsiasi indice e per le funzioni razionali fratte, come esemplifichiamo nei prossimi due casi, molto comuni.

Come esempio di derivata della funzione potenza, consideriamo $f(x) = x^3$ e il suo grafico nel piano cartesiano. I due rami del grafico sono simmetrici rispetto all'origine e quindi lo sono anche le pendenze delle tangenti. Considerando le x crescenti, quindi da sinistra verso destra, le pendenze delle tangenti sono sempre positive, all'inizio molto accentuate, poi diminuiscono fino a $m = 0$. Oltre l'origine, riprendono a crescere, in maniera sempre più accentuata. Il grafico di $y = m(x) = 3x^2$ ha infatti la forma di una parabola simmetrica rispetto all'asse Y.

Corollario 1.16. *La derivata della funzione radice quadrata è:* $D\left[\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$*, con la restrizione* $x \neq 0$.

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \neq 0$. Tesi: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

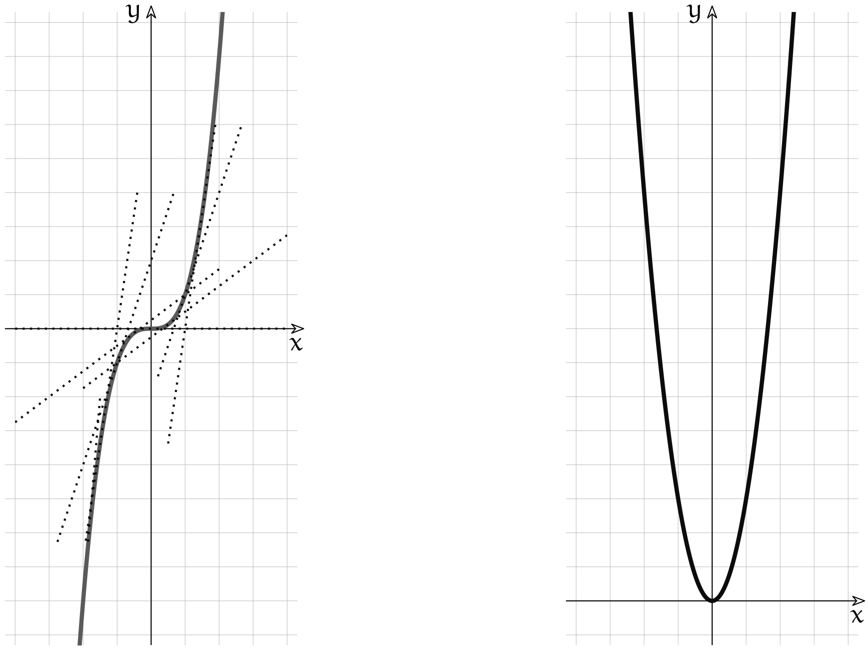


FIGURA 1.13: $y = x^3$ e la pendenza $y = m(x) = 3x^2$ delle sue tangenti.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$\operatorname{st}\left(\frac{dx}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\operatorname{st}\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\operatorname{st}\left(\sqrt{x+dx}\right)+\operatorname{st}\left(\sqrt{x}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \square$$

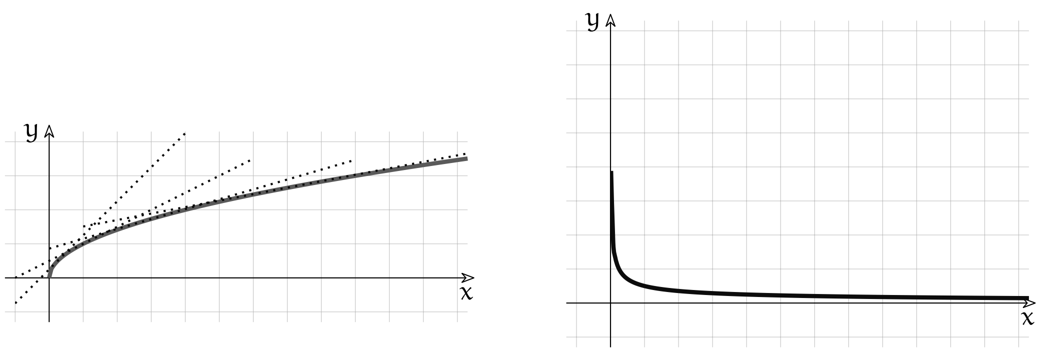


FIGURA 1.14: $y = \sqrt{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ delle sue tangenti.

Le rette tangenti ai punti vicini all'origine hanno una pendenza elevata, che si attenua gradualmente man mano che x aumenta, fino ad assestarsi quasi orizzontalmente.

Corollario 1.17. *La derivata della funzione reciproca è:* $D\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2}$.

Ipotesi: $f(x) = \frac{1}{x}$. Tesi: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Dimostrazione. Infatti il differenziale è $df(x) = \frac{-dx}{x(x+dx)}$ e, applicando la definizione di derivata, si ha:

$$\operatorname{st}\left(\frac{-dx}{dx(x(x+dx))}\right) = \frac{-1}{\operatorname{st}(x(x+dx))} = \frac{-1}{\operatorname{st}(x)\operatorname{st}(x+dx)} = -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}. \qquad \square$$

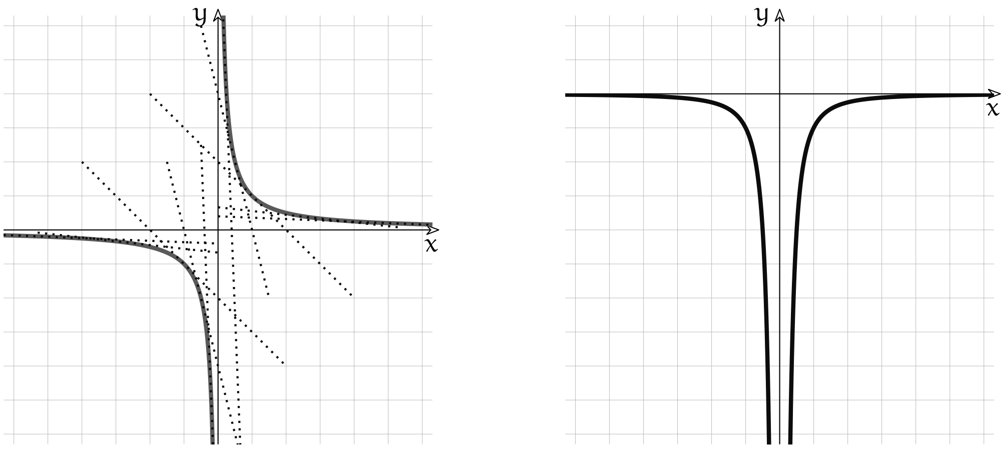


FIGURA 1.15: $y = \frac{1}{x}$ e la pendenza $y = m(x) = \frac{-1}{x^2}$ delle sue tangenti.

❑ **Osservazione** Ovviamente, applicando alla lettera il teorema sulla derivata delle funzioni potenza si ottengono gli stessi risultati esposti in questi due ultimi corollari.

1.8 Regole di derivazione

Possiamo applicare i teoremi precedenti a casi meno elementari, cioè a funzioni algebriche che contengono somme, prodotti e quozienti di funzioni elementari.

Esempio 1.25. Derivare la funzione $f(x) = 3x - \frac{3}{x}$ in $x_0 = 3$

Si tratta di una funzione nuova, ma è facile riconoscere che è formata dalla somma (algebrica) di due funzioni e ciascuna di queste è data dal prodotto fra la costante 3 e una funzione

appena trattata. Perciò:
$D[3x] = 3 \cdot D[x] = 3 \cdot 1 = 3;$ $\quad D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 \cdot D\left[\frac{1}{x}\right] = 3 \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2};$
$f'(x) = D\left[3x - \frac{3}{x}\right] = D[3x] - D\left[\frac{3}{x}\right] = 3 - \frac{-3}{x^2} = 3 + \frac{3}{x^2};$
$f'(3) = 3 + \frac{3}{9} = 10.$

Senza troppi problemi, abbiamo dato per scontato che

1. La derivata del prodotto tra una costante e una funzione è il prodotto fra la costante e la derivata della funzione:
   $D[kf(x)] = kD[f(x)].$
2. La derivata della somma algebrica fra due funzioni è la somma algebrica delle due derivate:
   $D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)].$

Da dove derivano queste certezze? Basta tornare alle regole di composizione dei differenziali (pag.**??**) per averne la conferma.

Esempio 1.26. Deriva la funzione che nel piano cartesiano è rappresentata dalla retta $y = x + 9$.
$D[x + 9] = 1.$

Sempre in riferimento a quanto appreso sui differenziali e vista la definizione di derivata e le proprietà della parte standard, giustifichiamo facilmente anche le regole 3 e 4:

3. La derivata del prodotto fra due funzioni è la somma fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) più la prima funzione (non derivata) per la derivata della seconda:
   $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$
4. La derivata del quoziente fra due funzioni è la frazione che ha per denominatore il quadrato del divisore e per numeratore la differenza fra due prodotti: la derivata della prima funzione per la seconda (non derivata) meno la prima funzione (non derivata) per la derivata della seconda:
   $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$

Esempio 1.27. Calcola la derivata del prodotto $f(x) = x\sqrt{x}$.
$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}.$
Fin qui l'applicazione della regola. Ma il risultato si può scrivere in forma più compatta, perché $\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
In realtà per fare questo calcolo non avremmo bisogno della regola del prodotto, poiché $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Puoi quindi applicare il teorema **??** e controllare il risultato.

Esempio 1.28. Derivare $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

Seguendo la regola n.4: $f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ma guarda che combinazione: abbiamo ottenuto la derivata della radice! Allora la funzione di partenza è equivalente a una radice? (Ad essere precisi, non esattamente. Infatti ...)

Esempio 1.29. Sappiamo già che $D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$. Mettiamo alla prova ancora una volta la regola n.4: $f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \dots$

Esempio 1.30. Ora finalmente un calcolo che si può svolgere solo con la regola n.4. Derivare $f(x) = \frac{x+2}{x^3 - x + 4}$.
$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^3 - x + 4) - (x+2)(3x^2 - 1)}{(x^3 - x + 4)^2}$. Fin qui l'applicazione della regola.
Con ulteriori calcoli: $\dots = \frac{x^3 - x + 4 - (3x^3 - x + 6x^2 - 2)}{(x^3 - x + 4)^2} = \frac{-2x^3 - 6x^2 + 6}{(x^3 - x + 4)^2}$.

1.9 Derivare funzioni composte e funzioni inverse

1.9.1 Funzioni composte

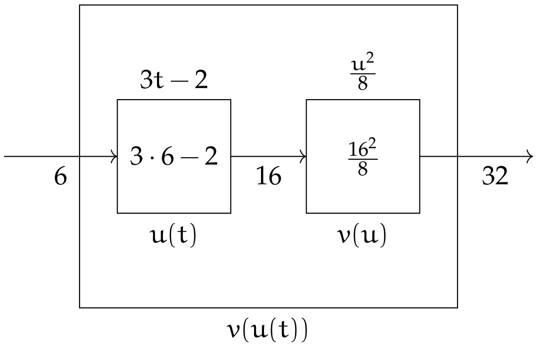
Esempio 1.31. $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ è la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato. Anche se nella formula mancano le usuali sigle $f(x)$, y, x, si tratta di una comunissima funzione polinomiale di 2° grado e le si possono applicare le regole che stiamo studiando, senza problemi.
Infatti, derivando si ottiene $s'(t) = 0 + v_0 + \frac{1}{2} \cdot 2at = v_0 + at$ che, essendo la derivata dello spazio rispetto al tempo, esprime la velocita $v(t)$ in questo tipo di moto.

L'esempio serve a ricordare che le funzioni e le variabili si esprimono con sigle qualsiasi, ma questo non cambia le regole dell'analisi o, più in generale, della matematica. La libertà di uso dei simboli può facilitare i calcoli, come si vede nel caso della derivata di una funzione composta.

Esempio 1.32. Deriva la funzione $v(u) = \frac{u^2}{8}$. Soluzione: $v'(u) = \frac{1}{8} 2u = \frac{u}{4}$. Infatti il differenziale è $dv(u) = \frac{1}{8}[2udu + (du)^2]$ perché $df(x) = 2xdx + (dx)^2$ e $d(kf(x) = kdf(x)$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato $\frac{u}{4}$.

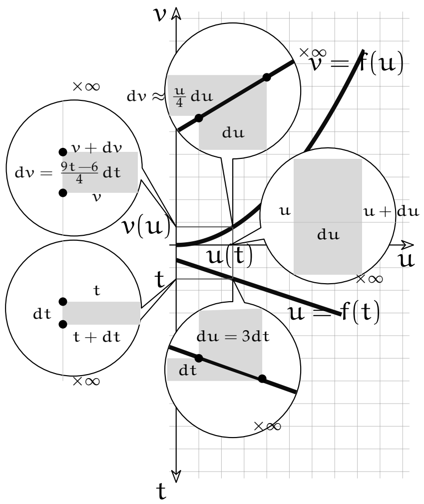
Esempio 1.33. Deriva la funzione $u(t) = 3t - 2$. Soluzione: $u'(t) = 3$. Infatti il differenziale è $du(t) = 3dt + 0$. Allora la parte standard del rapporto differenziale fornisce il risultato 3.

Combiniamo i due esempi: $v = f(u)$ e $u = f(t)$, cioè v è funzione di u, perché i suoi valori dipendono dai quadrati, divisi per 8, dei numeri u , invece u è funzione di t, nel senso che i suoi valori sono i valori t triplicati e poi ridotti di 2. In "matematichese" $v(u(t)) = \frac{[u(t)]^2}{8} = \frac{(3t-2)^2}{8}$.



Si tratta di una specie di catena: se si immette il valore $t = 6$, la macchina sviluppa $u(6) = 3 \cdot 6 - 2 = 16$ in u e infine produce $v(16) = \dfrac{16^2}{8} = 32$. Una catena del genere si chiama *funzionedi funzione* e v, che produce il risultato finale, si dice *funzione composta*: $v(u(t))$.

Come deriviamo v rispetto a t? Dalla definizione di derivata: $D\left[v(u(t))\right] = \operatorname{st}\left(\dfrac{d(v(u(t)))}{dt}\right)$, quindi il punto è il calcolo dei differenziali.



Dal primo esempio sappiamo che $dv = \dfrac{u}{4}du$ + infinitesimi di ordine superiore. Poiché $u = 3t - 2$, $du = 3dt$, avremo:

$dv \approx \dfrac{u}{4}du.$ $\qquad du = 3dt.$

$\to dv = \dfrac{3t-2}{4}3dt \to$

$\to \operatorname{st}\left(\dfrac{d(v(u(t)))}{dt}\right) = \dfrac{(3t-2)3dt}{4dt} = \dfrac{9}{4}t - \dfrac{3}{2}.$

C'è un modo più semplice? Sì: basta sviluppare il quadrato $(3t-2)^2$, dividere ogni termine per 8 e poi derivare il polinomio. Ma a volte il modo più semplice non c'è.

Esempio 1.34. Calcolare $f'(x)$, con $f(x) = \sqrt{3-x^2}$.
$f(x)$ è composta: si può pensare formata così: $g(x) = 3 - x^2$ e $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{3-x^2}$.
In questo modo si vedono meglio i differenziali. $df(x) = d\left(\sqrt{g(x)}\right) \approx \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x)$ e $dg(x) = d(3-x^2) \approx -2xdx$. Per brevità, raccogliamo sotto un'unica sigla ε tutti gli infinitesimi di ordine superiore, che poi la parte standard si incaricherà di far scomparire nel momento di calcolare la derivata.
Il differenziale: $df(x) = df(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot dg(x) + \delta = \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x)dx + \varepsilon$.

Da qui la derivata: $f'(x) = \operatorname{st}\left(\dfrac{\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{3-x^2}} + \varepsilon}{dx}\right) = \dfrac{-x}{\sqrt{3-x^2}}.$

Esaminiamo in modo astratto come abbiamo costruito il rapporto differenziale della funzione composta nell'esempio precedente: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$. Sembra un'uguaglianza banale, perché semplificando si ottiene l'identità. In realtà i due differenziali dg hanno un significato diverso. Quello al denominatore differenzia la variabile indipendente per f, quello al numeratore differenzia la variabile che dipende da x.
L'espressione giustifica il teorema seguente.

Teorema 1.18. *Se esistono le derivate $g'(x)$ e $f'(g(x))$ per il medesimo valore x, la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile e la sua derivata si calcola così: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g)g'(x)$, cioè la derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate delle funzioni componenti, ciascuna rispetto alla propria variabile.*

Ipotesi: $f(x) = f(g(x))$, f,g derivabili . Tesi: $f'(x) = f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Dimostrazione. Tralasciando di specificare la scomparsa degli infinitesimi di ordine superiore e grazie alle proprietà della funzione st (), abbiamo:
$f'(g(x)) = \text{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \text{st}\left(\frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx}\right) = \text{st}\left(\frac{df(g))}{dg}\right)\text{st}\left(\frac{dg(x)}{dx}\right) = f'(g(x))g'(x)$. □

Esempio 1.35. Derivare $f(x) = \left(-\frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - 6\right)^5$.

Poniamo $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ e $f(g) = g^5$.
Allora: $f'(g) = 5g^4$ e $g'(x) = -2x^2 + 4x$,
quindi: $f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4(-2x^2 + 4x) = 5\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4(-2x^2 + 4x) =$
$= 10x\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6\right)^4(-x + 2)$.

❑ **Osservazione** La regola della funzione composta si estende ai casi in cui le funzioni in gioco sono tre, o più: $D\left[f(g(h(x)))\right] = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$.

❑ **Osservazione** Lo studente smart si era già accorto che la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate. Ora arriva la conferma: il prodotto delle derivate non è la derivata di un prodotto.

1.9.2 Funzioni inverse

Non è difficile invertire una funzione nota, partendo dalla sua espressione analitica. Con pochi pochi passaggi elementari, si ricava la formula inversa.. Ecco alcuni esempi di semplici funzioni algebriche.

$y = f(x)$	$x = g(y)$	$f'(x)$	$g'(y)$
$y = x + c$	$x = y - c$	1	1
$y = kx$	$x = y/k$	k	$\frac{1}{k}$
$y = x^2, x \geqslant 0$	$x = \sqrt{y}$	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$
$y = \frac{1}{x}$	$x = \frac{1}{y}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{y^2} = -x^2$

❑ **Osservazione** La funzione $y = x^2$, nella terza riga della tabella, è definita $\forall x$. Tuttavia qui si restringe il dominio, in modo da considerare un solo ramo della parabola, perché altrimenti la formula inversa non potrebbe essere una funzione. Occorre sempre porre attenzione al dominio di f, quando si vuole definirne l'inversa. Una buona regola pratica per capire se f^{-1} è definibile, è di tagliare il grafico di f con una retta orizzontale: se la retta incrocia il grafico di f in più punti, f^{-1} non esiste.

Le ultime due colonne riportano le derivate rispettive e insinuano in noi qualche sospetto. Considera il caso semplice che segue.

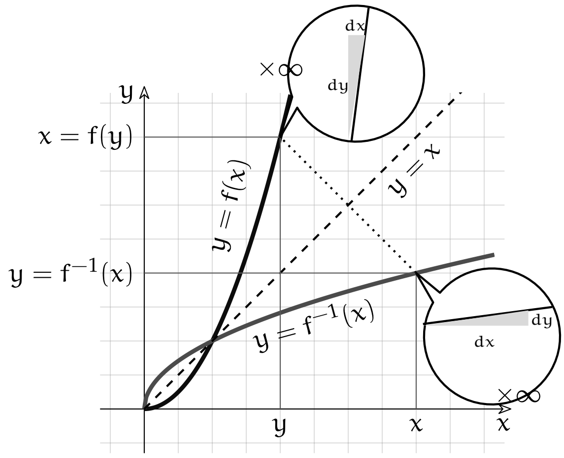
Esempio 1.36. Derivare $f(x) = \sqrt{x^2}$.
Si dirà: non c'è problema, si calcola la funzione e risulta $f(x) = \sqrt{x^2} = x$, perciò $f'(x) = 1$.
Vero. Ma poniamo $g(x) = x^2$ e $f(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$.
Con la regola delle funzioni composte si ha:
$f'(x) = f'(g)g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g}} \cdot 2x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \dfrac{1}{2x} \cdot 2x = 1.$
Conclusione: $D\left[x^2\right] = \dfrac{1}{D\left[\sqrt{x}\right]}$

Si intuisce che: siccome $f'(g)g'(x) = 1$, allora $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g)}$. Se fosse dimostrato, diventerebbe più facile derivare per esempio le funzioni logaritmiche: basterebbe saper derivare le corrispondenti esponenziali. E così via. Ovviamente occorre qualche cautela: la regola sarebbe applicabile

1. se esiste l'inversa della funzione da derivare;
2. se entrambe le funzioni sono derivabili;
3. se $f'(g) \neq 0$.

Infatti, nell'esempio tutto funziona alla perfezione, ma solo se $x \neq 0$ (ricorda anche l'esempio **??**).
Se valgono tutte le condizioni favorevoli, allora esistono la funzione f e la sua inversa $g = f^{-1}$.
$y = f(x)$ e $y = g(x) = f^{-1}(x)$ hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

❑ **Osservazione** $y = kx$ e $x = \frac{y}{k}$, per esempio, sono formule inverse l'una dell'altra. Ma non sono funzioni inverse, sono due espressioni della stessa iperbole equilatera e hanno lo stesso grafico, quindi le stesse tangenti al grafico e le stesse derivate rispetto a x.
La funzione inversa di cui parliamo, nel caso dell'iperbole è $y = \frac{x}{k}$, cioè è la formula inversa, ma applicata a x. Se invece consideriamo la formula inversa $x = \frac{y}{k}$ come funzione $x = f(y)$, allora dovremo derivare rispetto a y: $x' = \dfrac{dx}{dy}$.



Ogni punto $(x;\ f^{-1}(x))$ sulla curva della funzione inversa ha un corrispondente $(y;\ f(y))$ sulla curva $y = f(x)$, nella simmetria rispetto alla bisettrice. Guardiamo come si corrispondono i differenziali: dx e dy sono invertiti in una curva rispetto all'altra. Quindi le derivate corrispondenti sono reciproche l'una con l'altra.

Teorema 1.19. *Le derivate di due funzioni* f, g, *inverse l'una dell'altra, se esistono e sono diverse da zero, sono reciproche l'una rispetto all'altra.*

Ipotesi: $y = f(x)$, $x = g(y)$ f,g derivabili, con $f' \neq 0$, $g' \neq 0$. Tesi: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Dimostrazione. Grazie alle proprietà della funzione st (), abbiamo:
$f'(x) \cdot g'(y) = \mathrm{st}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \cdot \mathrm{st}\left(\dfrac{dx}{dy}\right) = \mathrm{st}\left(\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy}\right) = \mathrm{st}\,(1) = 1$
per cui: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$. □

❑ **Osservazione** La dimostrazione fa leva su una semplificazione che sembra banale. In realtà i due rapporti differenziali sono diversi per significato: nel primo la variabile indipendente è x, nel secondo è y.

Esempio 1.37. Trova la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$.

1. Usando il teorema **??** e le regole precedenti:
   $f'(x) = D\left[\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}\right] = D\left[(5-x)^{\frac{-1}{2}}\right] = -\dfrac{1}{2}(5-x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \dfrac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}$.
2. Usando la regola appena appresa:
   Costruiamo la formula inversa con pochi passaggi algebrici: riavremo la stessa funzione, in cui y figura come variabile indipendente: $x = f(y)$.
   Quindi deriviamo: $D\,[x] = x' = f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$.
   $f(x) = y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} \ \rightarrow\ y^2 = \dfrac{1}{5-x} \ \rightarrow\ y^{-2} = 5 - x \ \rightarrow\ x = 5 - y^{-2}$ (formula inversa)
   $x' = \dfrac{dx}{dy} = -2y^{-3}$ (derivata della funzione inversa) $\rightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{2} = \dfrac{1}{2(\sqrt{5-x})^3}$.

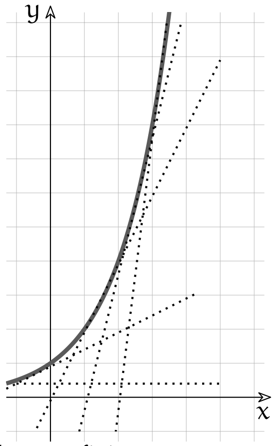
In genere la funzione inversa si costruisce in pochi passaggi semplici, poi la derivazione risulta elementare.

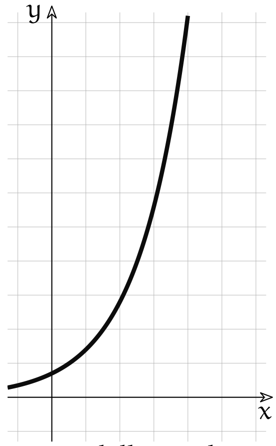
1.10 Derivare funzioni trascendenti

Nel capitolo 1.4 abbiamo imparato a differenziare le funzioni algebriche. In questa parte, quindi, per imparare a derivare le funzioni trascendenti, dovremo calcolare anche i loro differenziali. Si tratta in realtà di un lavoro minimo, perché abbiamo già discusso (pag.**??** il comportamento di queste funzioni nell'insieme degli Iperreali e abbiamo ormai un bagaglio di conoscenze sulle derivate che agevola il lavoro.

1.10.1 Derivata di $f(x) = a^x$

Il grafico di una generica funzione esponenziale $y = a^x$, confrontato con quello dell'andamento delle tangenti è una sorpresa rispetto ai confronti che abbiamo fatto per altre funzioni. I due grafici praticamente si accompagnano: rivelano uguali pendenze in coppie di punti di uguale ordinata.





Anche se i due grafici non sono esattamente identici, l'andamento delle pendenze delle tangenti, cioè l'andamento della derivata della funzione, è anch'esso esponenziale. Sviluppiamo matematicamente questa intuizione, ricordando le proprietà delle potenze.
Differenziale di $y = a^x$: $dy = a^{x+dx} - a^x = a^x a^{dx} - a^x = a^x\left(a^{dx} - 1\right)$.
Rapporto differenziale: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(a^{dx} - 1\right)}{dx} a^x$.
Ora dovremmo applicare la parte standard e se vogliamo seguire le indicazioni del grafico, il risultato dovrà essere un'esponenziale. Quindi dobbiamo concentrarci sul rapporto $\dfrac{\left(a^{dx} - 1\right)}{dx}$, il fattore che potrebbe provocare l'allontanamento del grafico dalla forma esponenziale a cui puntiamo.
Negli esponenziali succede che $f(0) = 1$ e $f(x + dx) = f(x)f(dx)$ e il rapporto differenziale in queste funzioni diventa:
$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \dfrac{f(x)f(dx) - f(x)}{dx} = \dfrac{f(dx) - 1}{dx} f(x) = \dfrac{f(0 + dx) - f(0)}{dx} f(x) \sim$
$\sim f'(0)f(x) \ \rightarrow\ f'(x) = f'(0)f(x)$.
La derivata di una funzione esponenziale generica è proporzionale alla funzione stessa, attraverso un fattore che corrisponde alla derivata calcolata in $x = 0$.
Per capire di più cos'è questo fattore, forziamo la situazione e imponiamo che corrisponda a 1. In questo modo la funzione e la sua derivata saranno proprio identiche e i due grafici saranno sovrapposti: finalmente potremo conoscere quanto vale la base generica a.

$f'(0) = 1 \rightarrow \dfrac{(a^{dx}-1)}{dx} = 1 \rightarrow a^{dx} = dx+1 \rightarrow a = (dx+1)^{\frac{1}{dx}}$.
Abbiamo già incontrato un'espressione analoga in **??**: l'espressione individua il Numero di Nepero e.

Teorema 1.20. *La derivata della funzione esponenziale* $D[e^x]$ *coincide con la funzione stessa.*

Ipotesi: $f(x) = e^x$. $f'(x) = e^x$

Dimostrazione. La dimostrazione è già stata costruita gradualmente per via intuitiva. Occorrerebbe dimostrare l'unicità della tesi, ma non è essenziale per i nostri scopi. Resta comunque stabilito che *se una funzione coincide con la propria derivata, allora è una funzione esponenziale.* □

A questo punto, l'importanza del numero e risulta ingigantita. Ce ne serviamo subito.

Teorema 1.21. *La derivata della generica funzione esponenziale è:* $D[a^x] = a^x \ln a$.

Ipotesi: $f(x) = a^x$; Tesi: $f'(x) = a^x \ln a$.

Dimostrazione. Usiamo una trasformazione appresa con lo studio dei logaritmi e applichiamo il teorema **??**: $f(x) = a^x = e^{\ln a^x}$. Se poniamo $g(x) = \ln a^x = x \ln a$, si ottiene:
$f(g(x)) = e^{g(x)} \rightarrow f'(g(x)) = f'(g)g'(x) = e^{x\ln a} \ln a = e^{\ln a^x} \ln a = a^x \ln a$. □

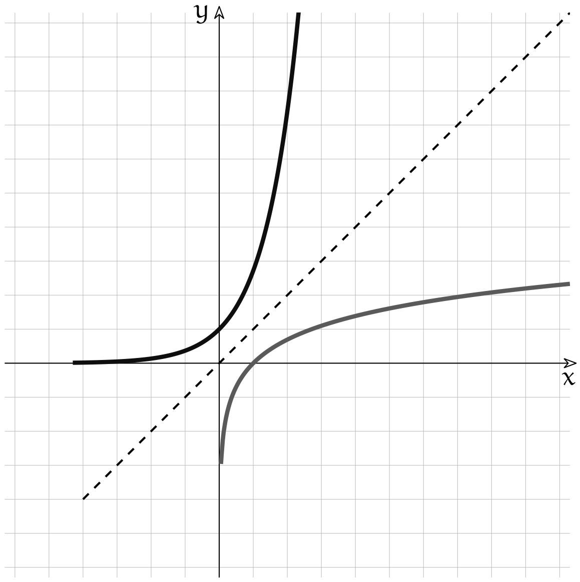
Esempio 1.38. Calcola la derivata di $f(x) = 3e^{x-1}$.
Poniamo $g(x) = x-1$. $f(x) = 3e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = 3e^{g(x)} \cdot g'(x) = 3e^{x-1} \cdot 1 = 3e^{x-1}$.

Esempio 1.39. Calcola la derivata di $f(x) = e^{x^2}$.
Poniamo $g(x) = x^2 \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

1.10.2 Derivata di $f(x) = \log_a x$

Esempio 1.40. Calcola la derivata di $f(x) = e^{\ln x}$.
Poniamo $g(x) = \ln x \rightarrow f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\ln x} \ldots$???.
Ragioniamo: dalle proprietà dei logaritmi si ha: $e^{\ln x} = x$, che è la funzione identica. Quindi

1. $e^{\ln x} = x$ e anche $\ln e^x = x \ln e = x$, così come $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$: le due funzioni sono una inversa dell'altra, il logaritmo naturale $g(x) = \ln x$ è la funzione inversa della funzione esponenziale $f(x) = e^x$;
2. $D\left[f^{-1}(x)\right] = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;
3. $D[\ln x] = \dfrac{1}{D\left[e^{g(x)}\right]} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.



Teorema 1.22. *La derivata della funzione logaritmo naturale è:* $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

Ipotesi: $f(x) = \ln x$. b $f'(x) = \frac{1}{x}$

Dimostrazione. La dimostrazione è nei ragionamenti dell'esempio precedente, ai quali bisogna aggiungere le precauzioni perché le due funzioni siano invertibili e derivabili: poiché $\ln x$ esiste per $x > 0$, i ragionamenti valgono solo per $x > 0$ □

Vediamo ora il caso generale, quando la base del logaritmo è genericamente $a > 0$.

Teorema 1.23. *La derivata della funzione logaritmo in base* a *è:* $D\left[\log_a x\right] = \frac{1}{x \ln a}$.

Ipotesi: $f(x) = \log_a x$. $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

Dimostrazione. Si ottiene direttamente dalla formula del cambiamento di base:
$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$. □

Esempio 1.41. Derivare la funzione $f(x) = \text{Log}(x^2+1)^2$.
$g(x) = (x^2+1)^2 \rightarrow f(x) = \text{Log}(g(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{g(x)}g'(x) =$
$= \frac{1}{(\ln 10)(x^2+1)^2} 2(x^2+1)2x = \frac{4x}{(\ln 10)(x^2+1)}$.
Nota che $g(x) = (x^2+1)^2$ è a sua volta una funzione composta del tipo $g(x) = [h(x)]^2$ e quindi è stata applicata la regola della derivata di più funzioni composte.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per convalidare l'osservazione al teorema **??**, a proposito delle funzioni potenza.

Teorema 1.24. *La derivata della funzione potenza* $f(x) = x^\alpha$ *è:* $D[x^\alpha] = (\alpha-1)x^\alpha, \forall \alpha$.

Ipotesi: $f(x) = x^\alpha$. $f'(x) = (\alpha-1)x^\alpha, \forall \alpha$.

Dimostrazione. Combinando alcune delle regole precedenti, si ha:
$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$
$f'(x) = e^{\alpha \ln x}\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Poiché non è stata fatta nessuna particolare ipotesi sull'esponente (intero o razionale positivo o negativo, irrazionale ...), allora vale per qualsiasi esponente. □

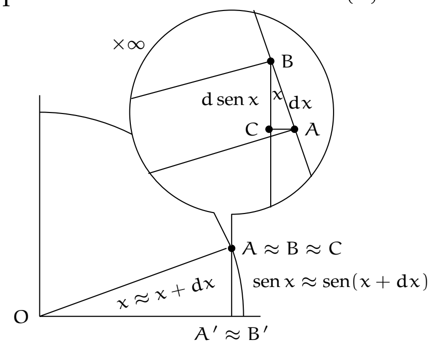
Esempio 1.42. Derivare $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.
$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

1.10.3 Derivata di funzioni circolari

Anche per queste funzioni dobbiamo dapprima definire il differenziale. Per una migliore comprensione, ci affidiamo soprattutto al piano cartesiano.

Derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$

Nel capitolo sugli Iperreali abbiamo già visto (vedi pag. **??**) che per angoli infinitesimi il seno e l'angolo sono indistinguibili: $\operatorname{st}\left(\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 1$. Dall'analisi del disegno ricaviamo l'espressione del differenziale $df(x) = d(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x + dx) - \operatorname{sen} x$.



Nell'ingrandimento al microscopio nonstandard, l'incremento infinitesimo di arco $\overset{\frown}{AB}$ (che corrisponde all'incremento di angolo da x a $x + dx$) è racchiuso fra due raggi indistinguibili da segmenti paralleli nei punti $A \equiv (x; \operatorname{sen} x)$ e $B \equiv (x + dx; \operatorname{sen}(x + dx))$. L'arco, a sua volta, risulta indistinguibile dal segmento rettilineo AB. I segmenti che uniscono A e B con le loro proiezioni sull'asse X sono verticali e paralleli, perciò ABC è un triangolo rettangolo infinitesimo, simile al triangolo BOC. La sua altezza BC corrisponde a $d \operatorname{sen} x$.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC rispetto al lato BC:
$BC = AB \cdot \cos x \;\rightarrow\; d(\operatorname{sen} x) = dx \cdot \cos x$

Teorema 1.25. *La derivata della funzione* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *è* $D[\operatorname{sen} x] = \cos x$.

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{sen} x$. $f'(x) = \cos x$.

Dimostrazione. Il commento al disegno giustifica la tesi. □

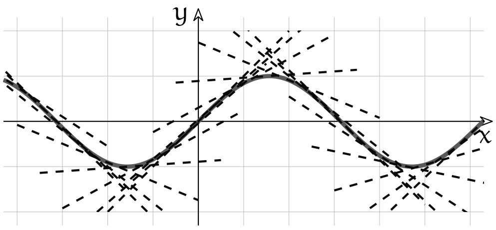
❑ **Osservazione** Si potrebbe criticare il metodo per la dimostrazione: chi assicura che negli altri quadranti le relazioni fra le variabili non cambino? Saremo troppo legati al disegno?
Ci sono altri modi per dimostrare la tesi, più vincolati al calcolo e meno al disegno. Per esempio, dalle formule di addizione abbiamo: $\operatorname{sen}(x + dx) = \operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x$. Allora:

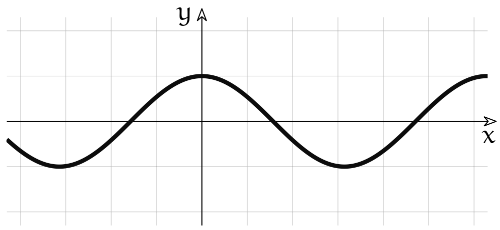
$$\frac{\operatorname{sen}(x + dx) - \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x - \operatorname{sen} x}{dx} =$$

$$= \operatorname{sen} x \frac{\cos x - 1}{dx} + \cos x \frac{\operatorname{sen} dx}{dx} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,$$

in cui si fa uso delle forme indeterminate discusse a pag. **??**. Alla fine basta applicare la funzione $\operatorname{st}()$.

❑ **Osservazione** Anche il grafico dell'andamento delle tangenti conferma la tesi in modo assai espressivo.





Esempio 1.43. Quale pendenza ha il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'origine?
$f(x) = \operatorname{sen} x \;\to\; f'(x) = \cos x \;\to\; f'(0) = \cos 0 = 1.$
La tangente al grafico nell'origine è la retta $y = x$.

Esempio 1.44. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x^2$.
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$.

Esempio 1.45. Derivare $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2x$.
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$.

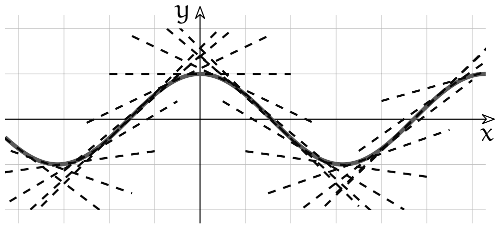
Esempio 1.46. Derivare $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.
Si tratta di una funzione di tipo nuovo, un misto fra una funzione potenza e una funzione esponenziale. Si risolve con una trasformazione che abbiamo già visto e con l'uso delle regole della funzione composta e del prodotto.
$x^{\operatorname{sen} x} = e^{(\ln x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\operatorname{sen} x \ln x}$
$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln x}(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}) = x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}).$

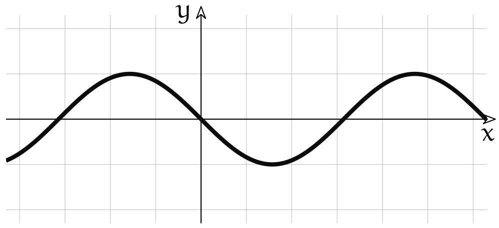
Derivata di $f(x) = \cos x$

Teorema 1.26. *La derivata della funzione* $f(x) = \cos x$ *è* $D[\cos x] = -\sin x$.

Ipotesi: $f(x) = \cos x$. $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Dimostrazione. Il disegno con cui dimostrare la tesi è uguale a quello di pag. **??**. Lo puoi riprodurre, tenendo però l'attenzione concentrata sul segmento AC.
L'unica osservazione importante è che nel passare da x a $x + dx$, cioè mentre l'angolo cresce, il valore del coseno decresce. Infatti, al contrario di quanto avviene per il seno, nel primo quadrante si ha: $\cos(x + dx) < \cos x$. Questa è la ragione del segno meno nel risultato. □





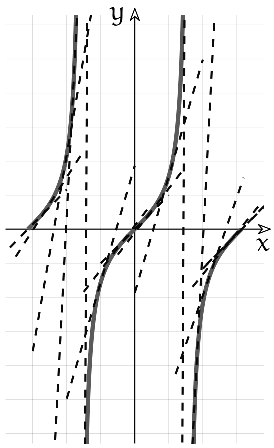
Esempio 1.47. Quale pendenza ha il grafico di $y = \cos x$ nell'origine?
$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$.
La tangente al grafico nell'origine è orizzontale.

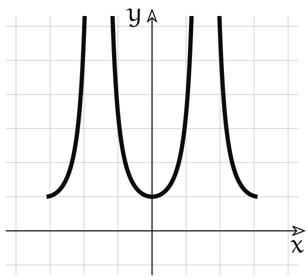
Esempio 1.48. Derivare $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \cos x^2$.
$f'(x) = 2\cos x(-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} x \cos x$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x^2 \cdot 2x = -2x \operatorname{sen} x^2$.

Esempio 1.49. Derivare $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$.
$f'(x) = -2\operatorname{sen} x \cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$.

Derivata di $f(x) = \operatorname{tg} x$

La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è discontinua per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. La derivata quindi non può esistere nei punti corrispondenti, come dimostra il grafico.





Teorema 1.27. *La derivata della funzione* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *è* $D\,[\operatorname{tg} x] = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ *per* $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

Ipotesi: $f(x) = \operatorname{tg} x$. $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, per $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

Dimostrazione. Per calcolare la derivata nei punti in cui la funzione è continua, ricorriamo alla seconda relazione fondamentale: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e sfruttiamo la regola della derivata di un quoziente (pag. **??**).

$$D[\operatorname{tg} x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{D[\operatorname{sen} x] \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot D[\cos x]}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 + 1$$

□

Esempio 1.50. Quale è la pendenza del grafico di $y = \operatorname{tg} x$, per $x = \frac{\pi}{4}$? E per $x = \frac{\pi}{2}$?
$f'(x) = 1 + tg^2 x \rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + tg^2 \frac{\pi}{4} = 2$
$f'(x) = 1 + tg^2 x \rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 1 + tg^2 \frac{\pi}{2} = ???$
Per $x \approx \frac{\pi}{2}$ il grafico della funzione cresce verticalmente, la sua pendenza è un numero infinito e la parte standard di un infinito non esiste. D'altra parte, se x è esattamente uguale a $\frac{\pi}{2}$, la tangente ha un punto di discontinuità.

1.11 Applicazioni

Si è tanto parlato delle tangenti ai grafici di funzione e delle loro pendenze, senza mai arrivare a definire l'effettiva equazione delle tangenti che interessano. Ora cercheremo di colmare questa lacuna.

1.11.1 Derivata e tangente

Hai già incontrato negli anni scorsi dei problemi in cui si chiedeva di calcolare la tangente ad una parabola in un suo punto. Il metodo di calcolo algebrico che usavi è efficace ma macchinoso e, sfortunatamente, vale solo per le coniche. Il metodo delle derivate, invece, si rivela molto più potente e rapido.
Poiché la tangente è una retta, la sua equazione è del tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$, dove $(x_0;\ y_0)$ è il punto di tangenza e m è la pendenza della retta, sulla quale sappiamo ormai tutto. Si ha $y = m(x - x_0) + y_0$ e poiché $m = f'(x_0)$, relativo alla funzione $f(x)$ di cui si sta studiando il grafico, l'equazione risolvente è:
$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Esempio 1.51. Trova le equazioni delle tangenti alla parabola $f(x) = x^2$ nei suoi punti $V \equiv (0;\ f(0)) = 0$ e $B \equiv (-6;\ f(-6))$.
Soluzione. Nel punto V: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 = m$. La tangente è orizzontale e coincide con l'asse X: $y = m(x - x_0) + y_0 = 0$.
Nel punto B: $f'(-6) = 2 \cdot (-6) = -12$. $m = -12$, la tangente è inclinata verso il basso: $y = m(x - x_0) + y_0 = -12(x - 6) + 36 \rightarrow y = -12x + 108$.

Esempio 1.52. Trova i punti di intersezione degli assi con la tangente in $(2;\ f(2))$ alla curva $f(x) = 2x^3 - x$.
Soluzione. Ricerca della tangente per $x = 2$: $f'(x) = 6x^2 - 1$ e $f'(2) = 6 \cdot 4 - 1 = 23$.
$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 = 14$. La tangente: $y = 23(x - 2) + 14 = 23x - 32$. Le intersezioni:
Con l'asse X: $y = 0 \rightarrow x = \frac{32}{23} \rightarrow \left(\frac{32}{23};\ 0\right)$.
Con l'asse Y: $x = 0 \rightarrow y = -32 \rightarrow (0;\ -32)$.

Esempio 1.53. In quale punto del suo grafico la parabola $y = 4x^2 - 3x + 6$ è inclinata di 45°?
Soluzione. Nel punto che cerchiamo, la parabola avrà un'inclinazione indistinguibile da

quella della tangente. Le rette inclinate di 45° hanno pendenza $m = 1$, come la bisettrice del primo-terzo quadrante. Dobbiamo quindi imporre alla derivata il valore 1.
$f(x) = 4x^2 - 3x + 6 \rightarrow f'(x) = 8x - 3$.
$8x - 3 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Il punto è $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Esempio 1.54. È vero che l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$ ha per vertici i punti medi del segmento che gli assi staccano sulle tangenti ai vertici?
Risposta. Consideriamo per comodità solo il ramo destro del grafico. Il vertice sarà un punto V di coordinate uguali, essendo l'iperbole equilatera. Quindi $V = V(4; 4)$.
Poiché la funzione è $y = \frac{16}{x}$, la sua derivata in V è $y'|_{x=4} = -\left.\frac{16}{x^2}\right|_{x=4} = -1$ e l'equazione della tangente in V è $y = -1(x-4) + 4 = -x + 8$.
La retta $y = -x + 8$ interseca gli assi in $(8; 0)$ e $(0; 8)$ ed è facile verificare che il punto V è medio fra i due. Per ragioni di simmetria accade lo stesso con il vertice opposto $(-4; -4)$.

❑ **Osservazione** In realtà si tratta di una proprietà generale dell'iperbole equilatera. Qualsiasi retta tangente al grafico stacca sugli assi coordinati dei segmenti che hanno il punto medio coincidente con il punto di tangenza. Non è difficile dimostrarlo usando l'equazione generica $yx = k^2$ e per punto di tangenza le coordinate $\left(a; \frac{k^2}{a}\right)$.

Esempio 1.55. È vero che è inclinato di 30° il raggio della circonferenza $x^2 + y^2 = 20$ che unisce l'origine al suo punto di ascissa 4?
Risposta. No, non è vero.
Il modo più elementare per verificarlo è calcolare l'ordinata del punto e cercare l'angolo di inclinazione dell'ipotenusa coincidente con il raggio.
L'alternativa è calcolare la derivata: $x^2 + y^2 = 20 \rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$ (data lo posizione del punto, consideriamo solo la semicirconferenza per $y > 0$).
$f'(4) = \left.\frac{-2x}{2\sqrt{20 - x^2}}\right|_{x=4} = \frac{-4}{\sqrt{20 - 16}} = \frac{-4}{2} = -2$.
Dunque la tangente ha una pendenza pari a -2. Poiché il raggio e la tangente sono perpendicolari, la retta che contiene questo raggio avrà pendenza $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.
Possiamo controllare la risposta con la calcolatrice.

1.11.2 Derivata e normale

Come si vede dall'ultimo esempio, una volta che si sappia come calcolare la tangente ad una curva, il calcolo della normale risulta molto facile. Poiché la tangente e la normale, se passano per lo stesso punto, sono rette perpendicolari e quindi hanno i coefficienti angolari antireciproci, l'equazione di una normale ad una curva $y = f(x)$ in un punto $(x_0; y_0)$ sarà:
$y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$,
dove la pendenza della normale $m_n = \frac{-1}{m_t}$ è appunto l'antireciproco della pendenza della tangente.

Esempio 1.56. Scrivi l'equazione della tangente e della normale alla curva di equazione $y = \dfrac{x^2-1}{\ln x - 1}$ nel suo punto di ascissa 1.

Soluzione. $y'|_{x=1} = \left.\dfrac{2x(\ln x - 1) - (x^2-1)\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}\right|_{x=1} = \dfrac{2 \cdot 1(0-1) - (1-1)\cdot 1}{(0-1)^2} = -2.$

La pendenza della tangente è $m = -2$. Per $x = 1$ la funzione vale: $\dfrac{1^2-1}{\ln 1 - 1} = 0 = y_0$.
L'equazione della tangente è quindi: $y = -2(x-1) = -2x + 2x$. Di conseguenza la normale ha equazione $y = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Esempio 1.57. Scrivi l'equazione della tangente e della normale alla curva di equazione $y = \dfrac{x^2+1}{\ln x + 1}$ nel suo punto di ascissa 1.

Soluzione. $y'|_{x=1} = \left.\dfrac{2x(\ln x + 1) - (x^2+1)\frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2}\right|_{x=1} = \dfrac{2 \cdot 1(0+1) - (1+1)\cdot 1}{(0+1)^2} = 0.$
La tangente è quindi una retta orizzontale. Di conseguenza la normale è verticale, come si vede subito se si prova a calcolare l'antireciproco di 0.

1.11.3 Derivata della derivata

Abbiamo già notato che la derivata di una funzione dipende dal punto in cui si calcola e che, una volta stabilito questo punto, ha un unico risultato, se esiste. Quindi la derivata di una funzione è a sua volta una funzione e, se ci sono le condizioni, può essere derivata a sua volta.

Definizione 1.11. Se una funzione $f(x)$ è derivabile, la sua derivata è la funzione $f'(x)$. Se anche $f'(x)$ è derivabile, allora esiste la funzione $f''(x)$ ed è chiamata *derivata seconda di* $f(x)$.

Le regole di calcolo della derivata seconda sono le stesse regole che abbiamo già visto, quindi la seconda derivazione, se è possibile, non comporta problemi diversi da quelli conosciuti.
Riferendoci a un generico grafico di funzione $y = f(x)$, la derivata prima $f'(x)$ ci consente di trovare le pendenze delle tangenti al grafico. La derivata seconda $f''(x)$ descrive con quanta rapidità (o lentezza) variano queste pendenze, perciò ci indica quanto siano aperte o chiuse le concavità che $y = f(x)$ disegna nel piano cartesiano.
Se le condizioni sono favorevoli, esistono e sono calcolabili anche le derivate terze, quarte, ecc. di una funzione, anche se non sono essenziali per i nostri scopi. Il loro calcolo segue i metodi già visti.

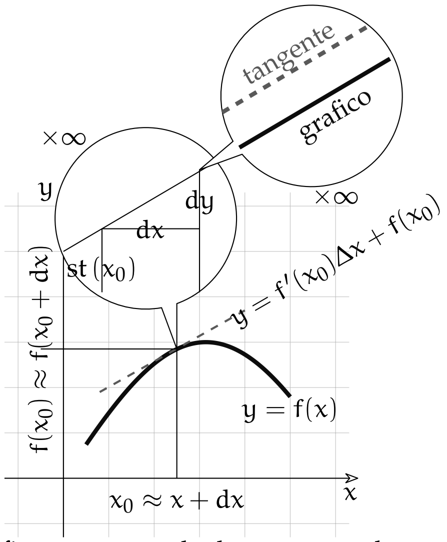
Esempio 1.58. Calcola $f''(1)$ di $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 9$.
Derivata prima: $f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 10x - 6$
Derivata seconda per $x = 1$: $(40x^3 - 36x^2 + 6x + 10)|_{x=1} = 40 - 36 + 6 + 10 = 20$

Esempio 1.59. Calcola $f''(x)$ di $f(x) = \ln x$.
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

❑ **Osservazione** La funzione $\ln x$ esiste per $x > 0$. Le derivate prima e seconda esistono per $x \neq 0$. In generale, l'esistenza di una derivata (prima, seconda, terza. ...) è indipendente dall'esistenza della funzione da derivare (funzione primitiva).

Esempio 1.60. Calcola le derivate successive di $f(x) = \operatorname{sen} x$.
$f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'''(x) = -\cos x$ $\quad f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \ldots$

1.11.4 Derivata, differenza e differenziale

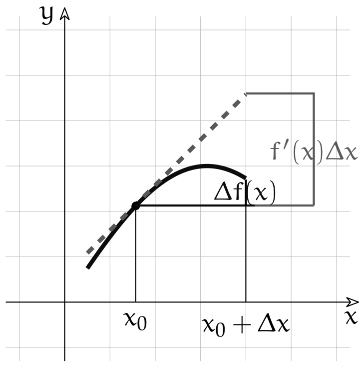


Nel punto $(x_0; f(x_0))$ il grafico della funzione e la tangente sono indistinguibili. Il campo visivo del primo microscopio mostra x_0 e dx, uno fra gli infiniti infinitesimi nella monade di x_0. A livello microscopico la curvatura del grafico non esiste, per cui il grafico e la tangente sono sovrapposti. Per cogliere la distinzione fra i due occorre un secondo microscopio non standard, centrato a distanza infinitesima dal punto. Nel suo campo visivo la tangente e il grafico della funzione appaiono come rette parallele. Nella rappresentazione doppiamente ingrandita il punto di coordinate reali più vicino a quello raffigurato si trova a distanza infinita (∞^2).

La figura mostra che la tangente e la secante per due punti infinitamente vicini sono distinguibili solo al dettaglio degli infinitesimi. Lo stesso avviene per la derivata e il rapporto differenziale.
Dalla definizione di derivata $f'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ ricaviamo che $f'(x) \sim \frac{df(x)}{dx}$: la derivata e il rapporto differenziale sono quantità quasi, ma non esattamente, uguali. Possiamo esprimere meglio questo concetto:
$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon(x)$ e quindi $df(x) = f'(x)dx + \varepsilon(x)dx$.
$\varepsilon(x)$ è l'infinitesimo, o l'insieme di infinitesimi, che fa la differenza fra la derivata e il rapporto differenziale. $\varepsilon(x)dx$, un prodotto fra infinitesimi, forma un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f'(x)dx$. Nella maggior parte dei casi pratici si tratta di una differenza trascurabile e si può accettare l'espressione $f'(x)dx$ al posto dell'espressione $df(x)$, che può essere meno comoda da calcolare.
Nella storia del calcolo infinitesimale l'uso di una formula al posto dell'altra è diventato normale e molti testi definiscono differenziale della funzione il prodotto $f'(x)dx$, invece della differenza infinitesimale $df(x)$.

Il problema diventa più critico nelle applicazioni pratiche, quando si devono usare le differenze finite al posto dei differenziali. Si usa allora, per analogia,:
$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x$.
Dato che l'ultimo termine è il meno rilevante, si ha:

$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x \ \rightarrow\ f(x) - f(x_0) \cong f'(x_0)(x - x_0) \ \rightarrow\ f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Si tratta dell'usuale equazione della tangente per $x = x_0$.
La formula è esatta solo per le funzioni rappresentate da rette. Per le altre funzioni la differenza $\Delta f(x)$ fra due valori della funzione può essere anche molto diversa da $f'(x_0)\Delta x$, che è in realtà la differenza fra due valori y, calcolati lungo la tangente.



Allontanandosi da x_0 di una quantità finita Δx, le differenze della funzione $\Delta f(x)$, calcolate a partire da x_0, possono essere anche molto diverse dalle differenze $f'(x_0)\Delta x$, calcolate lungo la tangente.

Nei testi in cui si scrive che $\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x$, $f'(x_0)\Delta x$ viene chiamato differenziale, anche se si tratta di una differenza, una quantità .finita, non infinitesima. In tali testi la differenza $\Delta f(x)$ è detta incremento e l'equazione
$\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x$ (*Equazione alle differenze*)
esprime il cosiddetto *teorema dell'incremento*.
Ai fini pratici l'Equazione alle differenze è un'equazione utile, soprattutto quando si studiano i fenomeni naturali, perché le variazioni che si misurano in questi ambiti sono differenze finite. Ovviamente i risultati che si ottengono utilizzando il teorema dell'incremento saranno tanto più precisi quanto più piccola è la variazione Δx, in rapporto ai valori x.

Esempio 1.61. Fare una stima ragionevole della quantità $\sqrt{25,162}$.
Si sta usando la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, la cui derivata è: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Utilizziamo il teorema dell'incremento, fissando $x_0 = 25$ e $\Delta x = 0,162$.
$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \delta(x)\Delta x \cong f'(x_0)\Delta x \ \rightarrow\ f(x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$
$f(25,162) \cong f'(25) \cdot 0,162 + f(25) \ \rightarrow\ \sqrt{25,162} \cong \dfrac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0,162 + \sqrt{25} = \dfrac{0,162}{10} + 5 \cong 5,0162.$
Confronta il risultato con quanto propone la calcolatrice.
Poiché l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è Δx, ripeti l'esercizio con $x_0 = 25,1001$ (la cui radice è $5,01$) e quindi $\Delta x = 0,06199$.

1.11.5 Sintesi

Derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$
x	1	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	e^x	e^x

Regole di derivazione

$D\,[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

$D\,[kf(x)] = kf'(x)$

$D\,[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$D\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$D\,[f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)]$

1.11.6 Applicazioni non solo matematiche

Il calcolo della derivata è entrato da protagonista nella descrizione matematica dei fenomeni naturali da almeno 300 anni e più recentemente anche nello studio delle scienze umane e sociali.
Gli esempi che seguono si servono di questo calcolo in due modi:

1. per trovare il tasso di variazione: data una funzione, si deve cercare quanto rapidamente essa varia rispetto alla sua variabile;
2. attraverso l'equazione alle differenze, nella forma diretta $\Delta f(x) \cong f'(x_0)\Delta x$, o nella forma inversa $\Delta x \cong \dfrac{\Delta f(x)}{f'(x_0)}$.

L' utilità dell'equazione alle differenze viene dal fatto che si tratta di un'equazione di primo grado in Δx, perché i termini infinitesimi di grado superiore sono trascurati. Le soluzioni che così si ottengono sono approssimate, ma in genere il grado di imprecisione è sopportabile.

Esempio 1.62. Se lanci verso l'alto una palla alla velocità iniziale $v = 20$ m/s, questa viene frenata dalla forza di gravità e la sua legge del moto risulta all'incirca $h(t) = 20t - 5t^2$. Trova a quale altezza h la palla si ferma.

Risposta. Se la palla si ferma, la sua velocità è nulla, quindi:
$v(t) = \dfrac{dh(t)}{dt} = 20 - 10t = 0 \rightarrow t = 2s \rightarrow h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20m.$
Dopo quanto tempo dal lancio la palla si trova a metà altezza?
Risposta. $\Delta t \cong \dfrac{\Delta h(t)}{v(0)} = \dfrac{10}{20} = 0,5$ s. Considera l'imprecisione dell'ultima risposta, visto che puoi avere il il risultato esatto direttamente dall'equazione del moto, con $h(t) = 10$.

Esempio 1.63. L'aereo A parte da Milano a mezzogiorno e vola in direzione Ovest mediamente a 800 km/h, mentre l'aereo B parte due ore dopo e si dirige a Sud a 800 km/h. Se volano alla stessa quota, con quale velocità si allontanano l'uno dall'altro dopo 4 ore?
Soluzione. Le due equazioni del moto sono $s_A = 800t$ e $s_B = 800(t-2)$. Calcoliamo prima la distanza fra i due, poi la loro velocità relativa. Si tratta di direzioni perpendicolari e possiamo applicare il teorema di Pitagora.
$s_{AB} = \sqrt{s_A^2 + s_B^2} = \sqrt{(800t)^2 + [(800(t-2)]^2} = 800\sqrt{t^2 + t^2 - 2t + 4} = 800\sqrt{2t^2 - 2t + 4}.$
$v_{AB}|_{t=4} = \dfrac{ds_{AB}}{dt} = \left.\dfrac{800(2t-4)}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 4}}\right|_{t=4} \cong 358$ km/h.

Esempio 1.64. Un circuito è percorso da corrente variabile. Infatti la carica che attraversa il conduttore ad un certo istante t è data da $q(t) = t^3 - 24t$. È possibile che in qualche istante le cariche siano ferme?
Riposta. Se le cariche sono ferme, la corrente è nulla.
$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = 3t^2 - 24 = 0 \rightarrow t = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ s.

Esempio 1.65. Il biologo Jacques Monod mostrò che lo sviluppo di una colonia di batteri di Escherichia Coli segue una crescita esponenziale, se sufficientemente nutrita. Ogni microrganismo si scinde in due dopo circa 20 minuti, per cui la popolazione al tempo t, misurato in ore, conta $N(t) = N_0 e^{\frac{t}{3}}$ individui. Dopo quante ore il numero di batteri passa da 10^6 a 10^9?
Soluzione: $\Delta N = N'(t)\Delta t = \dfrac{N_0}{3} e^{\frac{t}{3}} \Delta t \rightarrow \Delta t = \dfrac{3\Delta N}{N_0 e^{\frac{t}{3}}} = \dfrac{3\Delta N}{N(t)}.$

Il numero iniziale di batteri è $10^6 = N(0) = N_0 e^0$. Perciò: $\Delta t = \dfrac{3(10^9 - 10^6)}{10^9}$, che, calcolato in ore, corrisponde a 3 ore meno 11 secondi circa.

❑ **Osservazione** Si tratta di un problema tipico sulla crescita esponenziale, di quelli già risolti quando ancora non conoscevi l'esistenza delle derivate, riguardanti per esempio l'interesse composto o il decadimento radiattivo.

❑ **Osservazione** Come mai in un caso del genere l'uso delle derivate non è indispensabile? Perché la funzione esponenziale è l'unica funzione che ha per derivata...

❑ **Osservazione** Dunque, la risposta è che in quasi 3 ore il numero di batteri passa da un milione a un miliardo, che è 1000 volte tanto. Possiamo pensare che occorra lo stesso tempo per passare da 1 individuo a 1000, oppure da 1000 individui a 1 milione?

Esempio 1.66. Il costo marginale è l'aumento di costo che si ha quando si vuole produrre un'unità in più di un certo bene.

Supponi che per produrre un certo numero n di aghi il costo in euro sia $y = \sqrt{n}$. Calcola il costo marginale per produrne più di 10.000.
Soluzione: $y = \sqrt{n} \;\to\; y' = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Se $n = 10000$, $\Delta y = \dfrac{1}{2\sqrt{10000}}\Delta n = \dfrac{\Delta n}{200}$. Il costo marginale, cioè per unità in più, è quindi dello $0,5\%$.

❑ **Osservazione** Anche in questo caso concreto, non è possibile pensare che Δn sia un infinitesimo, dato che non ha senso calcolare il costo per frazioni infinitesime di un ago.

Esempio 1.67. Una barra metallica è lunga 10 m a $T = 0°C$ e al crescere della temperatura si dilata secondo la legge $l(T) = 10(1 + 0,000024T)$. Di quanti gradi occorre aumentare la temperatura perché aumenti la sua lunghezza di 5 cm?
La risposta è la stessa in ogni caso, oppure dipende dal valore iniziale di T?
Risposta. $\Delta T \cong \dfrac{\Delta l(T)}{l'(T)} = \dfrac{0,05}{10 \cdot 0,000024} = 208,3°C$.
Nella formula risolutiva non compare il simbolo T, quindi la risposta non dipende dalla temperatura iniziale. Ovviamente tutto questo deve avvenire nei limiti del fenomeno, cioè finché non si raggiunge la temperatura di fusione.

❑ **Osservazione** Si tratta di un semplice esercizio di fisica: la legge coinvolta si chiama legge della dilatazione lineare, perché il suo grafico nel piano cartesiano è una retta. Poiché la legge è espressa da un polinomio di primo grado, la soluzione non contiene la variabile T e l'equazione alle differenze è esatta: non ci sono infinitesimi da trascurare.
Non è indispensabile coinvolgere il calcolo infintesimale per un problema di primo grado come questo: avresti potuto risolverlo anche in terza media.

1.12 Esercizi

1.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.4 Differenziale

1.1. Calcola il differenziale della variabile x nel punto $x = 2$. Ripeti poi il calcolo per $x = \frac{1}{5}$ e per $x = -\frac{2}{3}$.

a) $dx|_{x=2}$
b) $dx|_{x=\frac{1}{5}}$
c) $dx|_{x=-\frac{2}{3}}$
d) $dx|_{x=a}$
e) $dy|_{y=a}$
f) $dz|_{z=k}$
g) $dx|_{x=\varepsilon}$
h) $dx|_{x=M}$

1.2. Calcola il differenziale della funzione identica $y = x$ per i valori elencati.

a) $dy|_{x=0}$
b) $dy|_{x=\frac{1}{2k}}$
c) $dy|_{x=-\frac{2}{3}}$
d) $dy|_{x=a}$
e) $dy|_{x=2\varepsilon}$

1.3. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $y = \frac{3}{2}x$, per $x = 1$ e per $x = 0$; $[\frac{3}{2}dx]$
b) $y = ax$, per $x = 9$ e per $x = -\frac{3}{2}$; $[a dx]$
c) $y = (6-k)x$, per $x = -1$ e per $x = \frac{22}{5}$; $[(6-k)dx]$
d) $y = \frac{k^2+2}{5}x$, per $x = 3$ e per $x = k$; $[\frac{k^2+2}{5}dx]$
e) $y = 5x$, per $x = 0$ e per $x = -10$; $[5dx]$

1.4. Calcola il differenziale delle seguenti funzioni per i valori di x assegnati.

a) $f(x) = -5 + 2x$; $df(x)|_{x=0} = \dots,$ $df(x)|_{x=-1} = \dots$
b) $f(x) = (a+3)x$; $df(x)|_{x=a} = \dots$; $df(x)|_{x=-a} = \dots$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 9$; $df(x)|_{x=\frac{2}{7}} = \dots;$ $df(x)|_{x=0} = \dots$
d) $f(x) = \frac{x}{n}$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots;$ $df(x)|_{x=\varepsilon} = \dots$
e) $f(x) = x + k$; $df(x)|_{x=x_0} = \dots;$ $df(x)|_{x=k} = \dots$

1.5. Calcola i differenziali per le funzioni date

a) Data $y = x^2$, calcola: $dy|_{x=5}$; $[10dx + d^2x \sim 10dx]$
$dy|_{x=-5}$ $[-10dx + d^2x \sim -10dx]$
$dy|_{x=2}$; $[4dx + d^2x \sim 4dx]$
b) Data $y = -x^2$, calcola: $dy|_{x=0}$; $dy|_{x=\frac{1}{2}}$ $dy|_{x=a}$ $[\sim 0; \sim -dx, \sim -2a dx]$;
c) Data $f(x) = 3x^2$, calcola: $df(x)|_{x=-2}$; $f(x)|_{x=\sqrt{2}}$ $[\sim -12dx; 6\sqrt{2}dx]$
$df(x)|_{x=b^2}$; $[\sim 6b^2 dx]$

d) Data $f(x) = \frac{x^2}{4}$, calcola: $df(x)|_{x=-4}$; $f(x)|_{x=\sqrt{2}}$ [$\sim -2dx$; $\sim \frac{\sqrt{2}}{2}dx$]
$df(x)|_{x=b}$; [$\sim \frac{b}{2}dx$]

1.6. Differenzia:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ per i valori: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$ $x = a$; [imp.; $\sim -12dx$;$\sim -\frac{3dx}{a^2}$]
b) $y = \frac{1}{3-x}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$ $x = 3$; [$\sim \frac{dx}{9}$; $\sim -\frac{4dx}{25}$; imp.]
c) $f(x) = \frac{2}{x} - 2$ per: $x = 2$; $x = \frac{a}{3}$; $x = \frac{1}{2}$ [$\sim -\frac{dx}{2}$; $\sim -\frac{18dx}{a^2}$; $\sim -8dx$.]
d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\sqrt{2}$; [imp.; $\sim -16dx$;$\sim -\frac{\sqrt{2}dx}{2}$]
e) $y = \frac{1}{2-x^2}$ per: $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\sqrt{2}$; [~ 0; $\sim \frac{4dx}{9}$; imp.]

1.7. Scrivi la funzione che esprime il differenziale delle funzioni date, secondo l'esempio:
$f(x) = 3x^2 - 2x + 9 \rightarrow df(x) = 3(2xdx + d^2x) - 2dx \sim 6xdx - 2dx = (6x - 2)dx$.

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; [$\sim (4x - 5)dx$]
b) $f(x) = (2x + 3)^2$; [$\sim (8x + 12)dx$]
c) $\frac{(1-5x)^2}{2}$; [$\sim (-5 + 25x)dx$]
d) $f(x) = x^3 - 1$; [$\sim 3x^2dx$]
e) $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 6x + 8$; [$\sim (3x^2 + 18x - 6)dx$]
f) $f(x) = 5\sqrt{x}$ [$\sim \frac{5}{2\sqrt{x}}dx$]

1.8. Applica le regole di pag.**??** per trovare l'espressione del differenziale.

a) $f(x) = x(1 - x^2)$; [$\sim (1 - 3x^2)dx$]
b) $f(x) = \frac{1}{x} + 3x^2$; [$\sim (-\frac{1}{x^2} + 6x)dx$]
c) $f(x) = \frac{6-3x}{2x^2} + \sqrt{x}$; [$\sim \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$]
d) $f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{x}}$; [$\sim (9x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x}})dx$]
e) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{1-x}$; [$\sim (\frac{-2x^3+4x^2-2x}{(1-x)^2})dx$]
f) $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$; [$\sim (10x\sqrt{x} + \frac{5x^2}{2\sqrt{x}})dx$]

1.12.2 Esercizi sulle derivate

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto c.

   a) $f(x) = -5x^5 - 5x^2 + 2x$, $c = -1$ [-13]
   b) $f(x) = 3x^5 + 3x^4 + 5x$, $c = -5$ [7880]
   c) $f(x) = -5x^3 - 2x$, $c = -2$ [-62]
   d) $f(x) = 3x^5 - 3x^4$, $c = 1$ [3]
   e) $f(x) = -4x^4 - 2x^3$, $c = -4$ [928]
   f) $f(x) = -3x^3 - x$, $c = -1$ [-10]

g) $f(x) = 2x, \quad c = 2$ [2]
h) $f(x) = x^4 + 4x + 2, \quad c = -4$ [-252]
i) $f(x) = -4x^5 - 2x^4 - x^2, \quad c = -1$ [-10]
j) $f(x) = -x^2, \quad c = -2$ [4]
k) $f(x) = x^5 + x, \quad c = -4$ [1281]
l) $f(x) = 8x^3 + 2x, \quad c = 1$ [26]
m) $f(x) = 2x^5 + x^3, \quad c = 0$ [0]
n) $f(x) = -x^5 + x^4, \quad c = -2$ [-112]
o) $f(x) = -3x^5 + x^4 - x^2, \quad c = -1$ [-17]

2. Calcola la retta tangente alla funzione nel punto P.

a) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 4x - 8, \quad P(2;\,-4)$ [$y = 28x - 60$]
b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 7, \quad P(1;\,-7)$ [$y = 3x - 10$]
c) $f(x) = -9x^3 + 12x^2 + 12x - 10, \quad P(-3;\,305)$ [$y = -303x - 604$]
d) $f(x) = -5, \quad P(2;\,-5)$ [$y = -5$]
e) $f(x) = 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 10x + 7, \quad P(0;\,7)$ [$y = -10x + 7$]
f) $f(x) = 11x^3 - 12x^2 - x + 7, \quad P(-4;\,-885)$ [$y = 623x + 1607$]
g) $f(x) = 11x^3 - 11x^2 - 9x - 6, \quad P(-5;\,-1611)$ [$y = 926x + 3019$]
h) $f(x) = -7x - 5, \quad P(-3;\,16)$ [$y = -7x - 5$]
i) $f(x) = -8, \quad P(2;\,-8)$ [$y = -8$]
j) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x + 5, \quad P(3;\,347)$ [$y = 450x - 1003$]
k) $f(x) = 11, \quad P(0;\,11)$ [$y = 11$]
l) $f(x) = -3x^3 - 7x^2 + 3x - 10, \quad P(1;\,-17)$ [$y = -20x + 3$]
m) $f(x) = 4x + 4, \quad P(-3;\,-8)$ [$y = 4x + 4$]
n) $f(x) = 5, \quad P(-3;\,5)$ [$y = 5$]
o) $f(x) = 10x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x - 7, \quad P(4;\,3021)$ [$y = 2869x - 8455$]

3. Deriva le seguenti funzioni del tipo: y=f(x)+g(x).

a) $f(x) = -4x^5 + 5x^2 + 4x$ [$-20x^4 + 10x + 4$]
b) $f(x) = 5x^5 - 4x^2 + x$ [$25x^4 - 8x + 1$]
c) $f(x) = -x^4 + x + 4$ [$-4x^3 + 1$]
d) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ [$8x^3 + 9x^2$]
e) $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1$ [$8x^3 + 6x^2$]
f) $f(x) = -5x^4 + 3$ [$-20x^3$]
g) $f(x) = -x^4 + x^2 + 1$ [$-4x^3 + 2x$]
h) $f(x) = -2x^3 - 3x^2$ [$-6x^2 - 6x$]
i) $f(x) = 4x^4 - x^2 - 3x$ [$16x^3 - 2x - 3$]

j) $f(x) = -x^5 + 3x^2$ $[-5x^4 + 6x]$

k) $f(x) = 2$ $[0]$

l) $f(x) = 11x^3$ $[33x^2]$

m) $f(x) = 5x^3$ $[15x^2]$

n) $f(x) = x^4 - 3x$ $[4x^3 - 3]$

o) $f(x) = 3x^4 - x^2$ $[12x^3 - 2x]$

4. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

a) $f(x) = \left(9 + \frac{5}{x}\right)\left(-2x^3 + 5\right)$ $[-6x^2\left(9 + \frac{5}{x}\right) - \frac{5}{x^2}\left(-2x^3 + 5\right)]$

b) $f(x) = \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)(5x - 3)$ $[5 + \frac{20}{x^2} - \frac{8}{x^3}(5x - 3)]$

c) $f(x) = \left(-9 + \frac{2}{x^4}\right)\left(-6 + \frac{2}{x^2}\right)$ $[-\frac{4}{x^3}\left(-9 + \frac{2}{x^4}\right) - \frac{8}{x^5}\left(-6 + \frac{2}{x^2}\right)]$

d) $f(x) = \left(-2 + \frac{3}{x}\right)(-x - 1)$ $[2 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}(-x - 1)]$

e) $f(x) = (3x - 10)\left(2x^2 - 10\right)$ $[6x^2 + 4x(3x - 10) - 30]$

f) $f(x) = -\frac{3}{x}\left(1 + \frac{4}{x^3}\right)$ $[\frac{3}{x^2}\left(1 + \frac{4}{x^3}\right) + \frac{36}{x^5}]$

g) $f(x) = \left(-7 - \frac{5}{x^4}\right)\left(x^4 - 6\right)$ $[4x^3\left(-7 - \frac{5}{x^4}\right) + \frac{20}{x^5}\left(x^4 - 6\right)]$

h) $f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x}\right)\left(-x^4 - 2\right)$ $[-4x^3\left(-2 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\left(-x^4 - 2\right)]$

i) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(3x^4 + 9\right)$ $[12x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(3x^4 + 9\right)]$

j) $f(x) = \left(10 - \frac{5}{x^2}\right)\left(-4x^4 - 9\right)$ $[-16x^3\left(10 - \frac{5}{x^2}\right) + \frac{10}{x^3}\left(-4x^4 - 9\right)]$

k) $f(x) = \left(-3 + \frac{5}{x}\right)(-5x - 5)$ $[15 - \frac{25}{x} - \frac{5}{x^2}(-5x - 5)]$

l) $f(x) = -3x^3\left(8 + \frac{2}{x}\right)$ $[-9x^2\left(8 + \frac{2}{x}\right) + 6x]$

m) $f(x) = \left(5x^2 + 5\right)\left(x^3 - 4\right)$ $[3x^2\left(5x^2 + 5\right) + 10x\left(x^3 - 4\right)]$

n) $f(x) = \left(5 + \frac{1}{x}\right)\left(-x^4 - 8\right)$ $[-4x^3\left(5 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\left(-x^4 - 8\right)]$

o) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{x^4}\right)\left(2x^4 + 1\right)$ $[8x^3\left(5 - \frac{3}{x^4}\right) + \frac{12}{x^5}\left(2x^4 + 1\right)]$

5. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

a) $y = \frac{10\,x - 8}{9\,x + 6}$ $[\, y' = 10\ (9\,x + 6)^{-1} - 9\ \frac{10\,x - 8}{(9\,x + 6)^2}\ ]$

b) $y = \frac{-5\,x - 9}{4\,x + 6}$ $[\, y' = -5\ (4\,x + 6)^{-1} - 4\ \frac{-5\,x - 9}{(4\,x + 6)^2}\ ]$

c) $y = \frac{-6\,x - 8}{-7\,x - 9}$ $[\, y' = -6\ (-7\,x - 9)^{-1} + 7\ \frac{-6\,x - 8}{(-7\,x - 9)^2}\ ]$

d) $y = \frac{x - 6}{3\,x + 4}$ $[\, y' = (3\,x + 4)^{-1} - 3\ \frac{x - 6}{(3\,x + 4)^2}\ ]$

e) $y = (3\,x + 4)^{-1} - 3\ \frac{x - 6}{(3\,x + 4)^2}$ $[\, y' = -6\ (3\,x + 4)^{-2} + 18\ \frac{x - 6}{(3\,x + 4)^3}\ ]$

f) $y = \frac{4\,x - 3}{-7\,x + 3}$ $[\, y' = 4\ (-7\,x + 3)^{-1} + 7\ \frac{4\,x - 3}{(-7\,x + 3)^2}\ ]$

g) $y = \frac{-6\,x+6}{2\,x-2}$ $[\ y' = -6\ (2\,x-2)^{-1} - 2\ \frac{-6\,x+6}{(2\,x-2)^2}\ ]$

h) $y = \frac{-3\,x-9}{-3\,x-2}$ $[\ y' = -3\ (-3\,x-2)^{-1} + 3\ \frac{-3\,x-9}{(-3\,x-2)^2}\ ]$

i) $y = \frac{5\,x+3}{4\,x+5}$ $[\ y' = 5\ (4\,x+5)^{-1} - 4\ \frac{5\,x+3}{(4\,x+5)^2}\ ]$

j) $y = \frac{-3\,x-8}{-3\,x-3}$ $[\ y' = -3\ (-3\,x-3)^{-1} + 3\ \frac{-3\,x-8}{(-3\,x-3)^2}\ ]$

k) $y = \frac{-9\,x-1}{-5\,x-10}$ $[\ y' = -9\ (-5\,x-10)^{-1} + 5\ \frac{-9\,x-1}{(-5\,x-10)^2}\ ]$

l) $y = -\frac{x+8}{9\,x}$ $[\ y' = -\frac{1}{9\,x} + \frac{x+8}{9\,x^2}\ ]$

m) $y = \frac{-4\,x+3}{-9\,x+7}$ $[\ y' = -4\ (-9\,x+7)^{-1} + 9\ \frac{-4\,x+3}{(-9\,x+7)^2}\ ]$

6. Deriva le seguenti funzioni del tipo: $y = f(x) \cdot g(x)$.

a) $f(x) = -x^3 \cos(x)$ $[x^3 \sin(x) - 3x^2 \cos(x)]$

b) $f(x) = -5x^4 \sin(x)$ $[-5x^4 \cos(x) - 20x^3 \sin(x)]$

c) $f(x) = -3x^3 \tan(x)$ $[-3x^3 \left(\tan^2(x) + 1\right) - 9x^2 \tan(x)]$

d) $f(x) = -2x^3 \sin(x)$ $[-2x^3 \cos(x) - 6x^2 \sin(x)]$

e) $f(x) = 2x^2 \sin(x)$ $[2x^2 \cos(x) + 4x \sin(x)]$

f) $f(x) = -4x \cos(x)$ $[4x \sin(x) - 4 \cos(x)]$

g) $f(x) = x \cos(x)$ $[-x \sin(x) + \cos(x)]$

h) $f(x) = 5x \cos(x)$ $[-5x \sin(x) + 5 \cos(x)]$

i) $f(x) = x^3 \tan(x)$ $[x^3 \left(\tan^2(x) + 1\right) + 3x^2 \tan(x)]$

j) $f(x) = x^2 \tan(x)$ $[x^2 \left(\tan^2(x) + 1\right) + 2x \tan(x)]$

k) $f(x) = -4x^4 \sin(x)$ $[-4x^4 \cos(x) - 16x^3 \sin(x)]$

l) $f(x) = 5x^4 \sin(x)$ $[5x^4 \cos(x) + 20x^3 \sin(x)]$

m) $f(x) = 2x^3 \cos(x)$ $[-2x^3 \sin(x) + 6x^2 \cos(x)]$

n) $f(x) = -4x^3 \sin(x)$ $[-4x^3 \cos(x) - 12x^2 \sin(x)]$

o) $f(x) = 2x \sin(x)$ $[2x \cos(x) + 2 \sin(x)]$

7. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: y=f[g(x)].

a) $f(x) = -3 \cos(5x)$ $[15 \sin(5x)]$

b) $f(x) = 5 \cos\left(4x^4\right)$ $[-80x^3 \sin\left(4x^4\right)]$

c) $f(x) = -3 \cos\left(2x^4\right)$ $[24x^3 \sin\left(2x^4\right)]$

d) $f(x) = -5 \tan\left(3x^2\right)$ $[-30x \left(\tan^2\left(3x^2\right) + 1\right)]$

e) $f(x) = 5 \tan(5x)$ $[25 \tan^2(5x) + 25]$

f) $f(x) = 4 \sin\left(2x^2\right)$ $[16x \cos\left(2x^2\right)]$

g) $f(x) = -3 \cos\left(x^2\right)$ $[6x \sin\left(x^2\right)]$

h) $f(x) = 5 \cos(5x)$ $[-25 \sin(5x)]$

i) $f(x) = \sin\left(4x^3\right)$ $[12x^2 \cos\left(4x^3\right)]$

j) $f(x) = -\sin(3x^2)$ $[-6x\cos(3x^2)]$

k) $f(x) = 5\sin(5x)$ $[25\cos(5x)]$

l) $f(x) = 5\sin(2x)$ $[10\cos(2x)]$

m) $f(x) = 3\sin(5x^4)$ $[60x^3\cos(5x^4)]$

n) $f(x) = 5\cos(2x^3)$ $[-30x^2\sin(2x^3)]$

o) $f(x) = -4\tan(4x^4)$ $[-64x^3(\tan^2(4x^4)+1)]$

8. Deriva le seguenti funzioni composte del tipo: $y = f[g(x)]$.

a) $f(x) = -3e^{\sqrt{x^2+3}}$ $[-\frac{3xe^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}}]$

b) $f(x) = 3e^{\sqrt{3x^2+3}}$ $[\frac{9xe^{\sqrt{3x^2+3}}}{\sqrt{3x^2+3}}]$

c) $f(x) = e^{\sqrt{3x^3-5}}$ $[\frac{9x^2e^{\sqrt{3x^3-5}}}{2\sqrt{3x^3-5}}]$

d) $f(x) = -e^{\sqrt{5x^3-3}}$ $[-\frac{15x^2e^{\sqrt{5x^3-3}}}{2\sqrt{5x^3-3}}]$

e) $f(x) = -e^{\sqrt{-5x^3+1}}$ $[\frac{15x^2e^{\sqrt{-5x^3+1}}}{2\sqrt{-5x^3+1}}]$

f) $f(x) = 5e^{\sqrt{2x^4-5}}$ $[\frac{20x^3e^{\sqrt{2x^4-5}}}{\sqrt{2x^4-5}}]$

g) $f(x) = -e^{\sqrt{-x+1}}$ $[\frac{e^{\sqrt{-x+1}}}{2\sqrt{-x+1}}]$

h) $f(x) = -5e^{\sqrt{3x^3+1}}$ $[-\frac{45x^2e^{\sqrt{3x^3+1}}}{2\sqrt{3x^3+1}}]$

i) $f(x) = 2e^{\sqrt{-x^3-5}}$ $[-\frac{3x^2e^{\sqrt{-x^3-5}}}{\sqrt{-x^3-5}}]$

j) $f(x) = 2e^{\sqrt{-2x^4+5}}$ $[-\frac{8x^3e^{\sqrt{-2x^4+5}}}{\sqrt{-2x^4+5}}]$

k) $f(x) = 2e^{\sqrt{2x^3-4}}$ $[\frac{6x^2e^{\sqrt{2x^3-4}}}{\sqrt{2x^3-4}}]$

l) $f(x) = -4e^{\sqrt{-5x^3-3}}$ $[\frac{30x^2e^{\sqrt{-5x^3-3}}}{\sqrt{-5x^3-3}}]$

m) $f(x) = 2e^{\sqrt{-4x^4-4}}$ $[-\frac{16x^3e^{\sqrt{-4x^4-4}}}{\sqrt{-4x^4-4}}]$

n) $f(x) = 2e^{\sqrt{-3x^2-4}}$ $[-\frac{6xe^{\sqrt{-3x^2-4}}}{\sqrt{-3x^2-4}}]$

o) $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+1}}$ $[\frac{3x^2e^{\sqrt{2x^3+1}}}{\sqrt{2x^3+1}}]$

9. Deriva le seguenti funzioni contenenti funzioni esponenziali e logaritmiche.

a) $f(x) = 4(\log x - 1)$ $[\frac{4}{x}]$

b) $f(x) = \log 4x)$ $[\frac{1}{x}]$

c) $f(x) = x(\ln x - 1)$ $[\ln x]$

d) $f(x) = e^x(\ln x)$ $[e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)]$

e) $f(x) = x^3(\log x)$ $[x^2\left(3\log x + 1\right)]$

f) $f(x) = e^{3x} - \ln x^2$ $[3e^{3x}\frac{2}{x}]$

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $[\dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)]$

h) $f(x) = e^x(\ln x)$ $[e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)]$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $[-\dfrac{1}{x\ln^2 x}]$

j) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$ $[\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{x-2}{x}}]$

k) $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ $[\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}]$

l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + 3$ $[2xe^{x^2} + e^x]$

m) $f(x) = e^{2x}\ln(1 + x)$ $[e^{2x}\left[2\ln(1 + x) + \dfrac{1}{1 + x}\right]]$

n) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\sqrt{x}}$ $[\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}]$

10. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

a) $f(x) = \left(x^2 - 6\right)\left(2x^2 + 6\right)$ $[4x\left(x^2 - 6\right) + 2x\left(2x^2 + 6\right)]$

b) $f(x) = -5\tan\left(x^2\right)$ $[-10x\left(\tan^2\left(x^2\right) + 1\right)]$

c) $f(x) = 4e^{\sqrt{4x^2-2}}$ $[\frac{16xe^{\sqrt{4x^2-2}}}{\sqrt{4x^2-2}}]$

d) $f(x) = 4e^{\sqrt{-5x^2-1}}$ $[-\frac{20xe^{\sqrt{-5x^2-1}}}{\sqrt{-5x^2-1}}]$

e) $f(x) = -8x^3 + 2x, \quad c = -1$ $[-22]$

f) $f(x) = -x^2, \quad c = 1$ $[-2]$

g) $f(x) = -2\sin\left(5x^3\right)$ $[-30x^2\cos\left(5x^3\right)]$

h) $f(x) = -5x^4\sin(x)$ $[-5x^4\cos(x) - 20x^3\sin(x)]$

i) $f(x) = -5x^4 - 5x^3 + 5$ $[-20x^3 - 15x^2]$

j) $f(x) = -4\tan\left(2x^2\right)$ $[-16x\left(\tan^2\left(2x^2\right) + 1\right)]$

k) $f(x) = -2\tan\left(5x^2\right)$ $[-20x\left(\tan^2\left(5x^2\right) + 1\right)]$

l) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 12, \quad P(-3;\ -57)$ $[y = 47x + 84]$

m) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + x^2$ $[-4x^3 + 6x^2 + 2x]$

n) $f(x) = -x^3\tan(x)$ $[-x^3\left(\tan^2(x) + 1\right) - 3x^2\tan(x)]$

o) $f(x) = -4x^4$ $[-16x^3]$

p) $f(x) = -7x + 1, \quad P(0;\ 1)$ $[y = -7x + 1]$

q) $f(x) = 2e^{\sqrt{x^4+1}}$ $[\frac{4x^3e^{\sqrt{x^4+1}}}{\sqrt{x^4+1}}]$

r) $f(x) = -3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 3x - 12, \quad P(-1;\ -15)$ [$y = 10x - 5$]

11. Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

a) $f(x) = 3x^5 - 3x^4, \quad c = -5$ [10875]

b) $f(x) = -2x^4, \quad c = 4$ [−512]

c) $y = \frac{-5\,x+6}{9\,x-6}$ [$y' = -5\ (9\,x-6)^{-1} - 9\ \frac{-5\,x+6}{(9\,x-6)^2}$]

d) $y = \frac{8\,x-9}{-9\,x+3}$ [$y' = 8\ (-9\,x+3)^{-1} + 9\ \frac{8\,x-9}{(-9\,x+3)^2}$]

e) $y = \frac{-7\,x+6}{-5\,x+3}$ [$y' = -7\ (-5\,x+3)^{-1} + 5\ \frac{-7\,x+6}{(-5\,x+3)^2}$]

f) $f(x) = -8x^4$ [$-32x^3$]

g) $f(x) = 2x^5 - 2x^3 - 5x$ [$10x^4 - 6x^2 - 5$]

h) $y = \frac{-4\,x+4}{5\,x+6}$ [$y' = -4\ (5\,x+6)^{-1} - 5\ \frac{-4\,x+4}{(5\,x+6)^2}$]

i) $y = \frac{-10\,x+10}{-5\,x-8}$ [$y' = -10\ (-5\,x-8)^{-1} + 5\ \frac{-10\,x+10}{(-5\,x-8)^2}$]

j) $y = \frac{6\,x-10}{2\,x-9}$ [$y' = 6\ (2\,x-9)^{-1} - 2\ \frac{6\,x-10}{(2\,x-9)^2}$]

k) $y = \frac{4\,x+6}{-2\,x+10}$ [$y' = 4\ (-2\,x+10)^{-1} + 2\ \frac{4\,x+6}{(-2\,x+10)^2}$]

l) $y = \frac{10\,x-6}{-x+2}$ [$y' = 10\ (-x+2)^{-1} + \frac{10\,x-6}{(-x+2)^2}$]

m) $f(x) = -4x^5 - 4x^4, \quad c = 0$ [0]

n) $f(x) = -3x\tan(x)$ [$-3x\left(\tan^2(x) + 1\right) - 3\tan(x)$]

o) $f(x) = \sin\left(3x^4\right)$ [$12x^3\cos\left(3x^4\right)$]

p) $f(x) = \left(-5x^2 + 9\right)\left(4x^2 - 5\right)$ [$8x\left(-5x^2 + 9\right) - 10x\left(4x^2 - 5\right)$]

q) $y = \frac{8\,x-9}{-x-8}$ [$y' = 8\ (-x-8)^{-1} + \frac{8\,x-9}{(-x-8)^2}$]

r) $y = \frac{-2\,x-9}{3\,x+10}$ [$y' = -2\ (3\,x+10)^{-1} - 3\ \frac{-2\,x-9}{(3\,x+10)^2}$]

s) $y = \frac{4\,x+10}{-8\,x+1}$ [$y' = 4\ (-8\,x+1)^{-1} + 8\ \frac{4\,x+10}{(-8\,x+1)^2}$]

t) $y = \frac{-7\,x+6}{-2\,x+3}$ [$y' = -7\ (-2\,x+3)^{-1} + 2\ \frac{-7\,x+6}{(-2\,x+3)^2}$]

1.12.3 Problemi che coivolgono l'uso della derivata

1. Quale è l'equazione delle rette tangenti al grafico di $y = \operatorname{sen} x$, nell'intervallo $[0;\ 2\pi]$, nei punti comuni con l'asse delle x? [$y = \pm x \mp k\pi$]

2. Data la curva $y = \dfrac{x+3}{x}$, trova il punto in cui la tangente ha la pendenza $m = -2$. Spiega la ragione del doppio risultato. [$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$]

3. Trova le equazioni delle tangenti al grafico della parabola $y = -x^2 + 7x - 6$ nei punti in cui esse formano rispettivamente un angolo di 45° e di 135° rispetto all'orizzontale e trova la loro intersezione. [$y = x + 3$; $y = -x + 10$; $\left(\frac{7}{2};\ \frac{13}{2}\right)$]

4. Se la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore segue la legge $q = e^{-2t+3}$, determina l'intensità di corrente dopo $5\,\mathrm{s}$. q è la quantità di carica in Coulomb e t è il tempo in secondi. [$i = -1,8 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}$]

5. Un triangolo rettangolo elastico ha per base un cateto di $10\,\mathrm{cm}$. Il secondo cateto c all'inizio misura $0\,\mathrm{cm}$, ma cresce al ritmo di $1\,\mathrm{cm}$ ogni secondo. Con quale ritmo cresce l'ipotenusa i? Si tratta di un ritmo costante o variabile? Controlla le risposte calcolando la velocità di crescita dell'ipotenusa quando il secondo cateto misura $10\,\mathrm{cm}$, $20\,\mathrm{cm}$, $30\,\mathrm{cm}\ldots$ [$\frac{di}{dt} = \frac{c}{\sqrt{100+c^2}}$; variabile]

6. È noto che il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato è uguale a $\sqrt{2}$. Prolungando la diagonale di un infinitesimo, anche il lato subisce un allungamento infinitesimo. Che rapporto c'è fra i due allungamenti? Puoi giustificare la risposta alla luce delle tue conoscenze del calcolo infinitesimale?

7. Un recipiente ha la cavità interna a forma di cono equilatero (rovesciato), con il diametro di base di $30\,\mathrm{cm}$. Il rubinetto che lo riempie eroga 4 litri al minuto. Il livello dell'acqua all'interno cresce in modo costante? In quanto tempo il recipiente sarà riempito fino a metà altezza? A quel punto, con quale velocità cresce il livello dell'acqua? E quando è quasi pieno? [No; $13,25\,\mathrm{s}$; $2,26\,\mathrm{dm/min}$; $0,57\,\mathrm{dm/min}$]

8. Una lastra di policarbonato spessa $1\,\mathrm{cm}$ è trasparente per l'85%, cioè trattiene il 15% della radiazione luminosa che l'attraversa. Due lastre uguali non trattengono il doppio, perché la seconda trattiene il 15% di quanto le perviene dalla prima lastra: il 15% dell'85%. La diminuzione di intensità luminosa $dI(s)$ è quindi proporzionale alla radiazione in arrivo I e allo spessore ds della lastra: $dI = -0,15 \cdot I \cdot ds$. Riscrivi la legge come derivata: quali funzioni hanno la derivata proporzionale alla funzione stessa? Scrivi la legge dell'attenuazione luminosa $I = f(s)$. Quale spessore di policarbonato è sufficiente ad attenuare l'intensità luminosa del 40%? [$I'(s) = -0,15 \cdot I(s)$; $I = I_0 e^{-0,15s}$; $3,4\,\mathrm{cm}$]