

УГЛЫ ЭЙЛЕРА

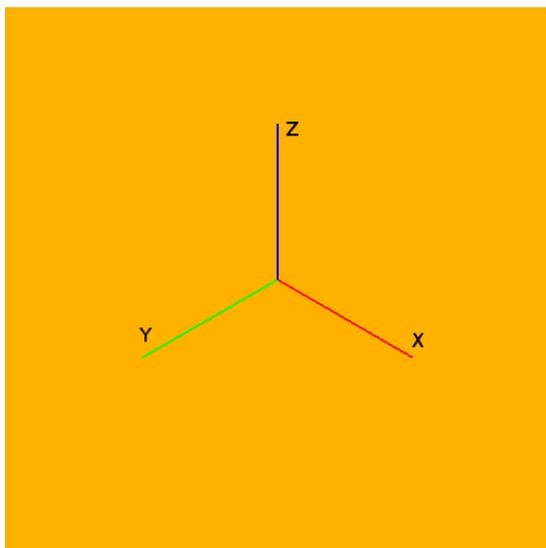
Вращение – это круговое движение объекта вокруг заданного центра. Для 3-мерного объекта центром вращения будет ось вращения, для 2-мерного - точка.

Ориентация объекта, в отличии от вращения, наряду с позицией описывает, как объект расположен в пространстве.

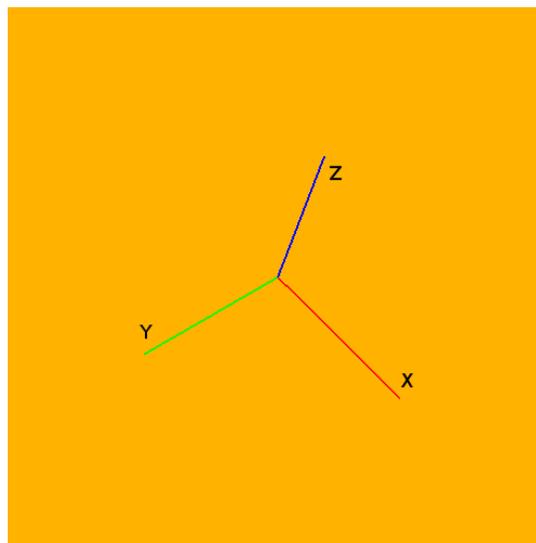
Вращение описывает, как объект переместить, а ориентация – как объект расположен.

Углы Эйлера - это представление вращения твёрдого тела вокруг произвольной оси в 3-мерном пространстве при помощи комбинации вращений вокруг координатных осей X, Y и Z. Углы Эйлера могут быть использованы для представления ориентации объекта как вращение объекта из некоторого начального расположения.

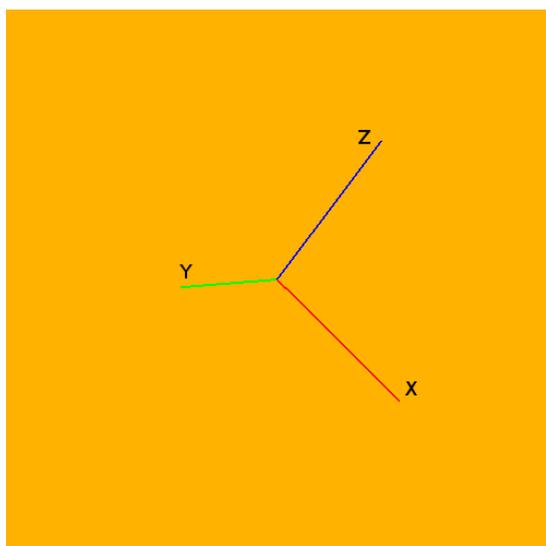
Существуют разные виды углов Эйлера – вращение вокруг двух осей (первая-вторая-первая) и вокруг трёх, с перемещением самих осей и без. Далее показано вращение ($20^\circ, 30^\circ, -30^\circ$) вокруг трех осей, в порядке Y-X-Z, с перемещением осей.



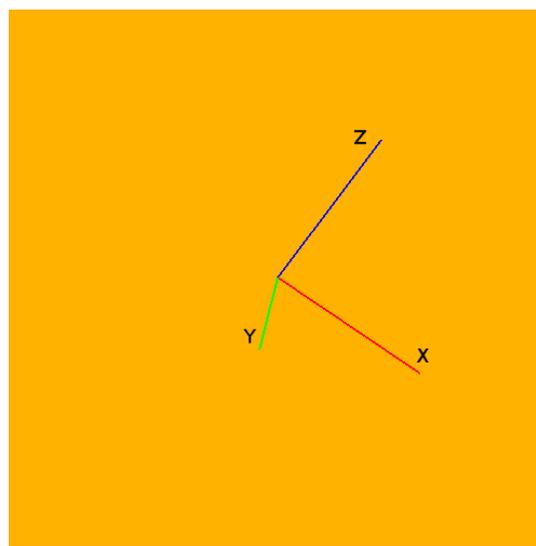
Начальное положение



Вращение вокруг оси Y на 20° (Yaw)



Вращение вокруг полученной оси X на 30° (Pitch)



Вращение вокруг полученной оси Z на -30° (Roll)

МАТРИЦА ТРАНСФОРМАЦИИ ДЛЯ УГЛОВ ЭЙЛЕРА

Вращение вокруг перемещённых осей равносильно вращению вокруг неподвижных осей в обратном порядке (в данном случае – Z-X-Y). Таким образом, можно получить матрицу трансформации для углов Эйлера:

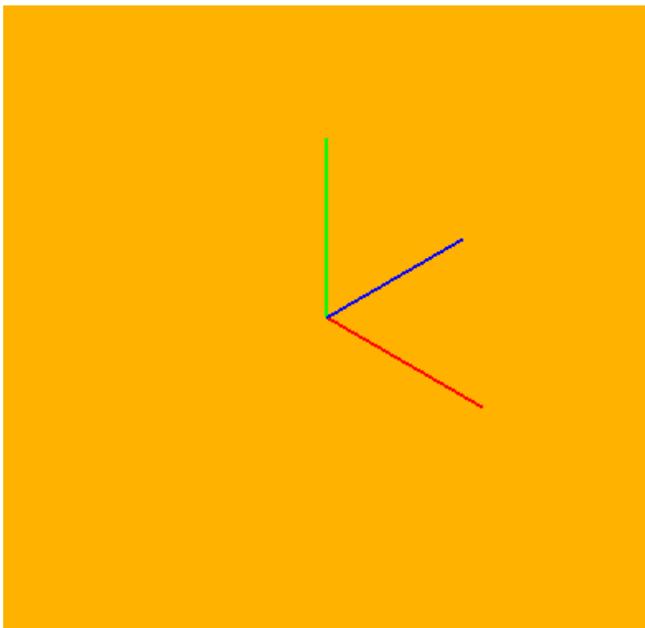
$$\begin{aligned}
 M_{euler}(yaw, pitch, roll) &= M_{rotate\ y}(yaw) \times M_{rotate\ x}(pitch) \times M_{rotate\ z}(roll) = \begin{bmatrix} \cos(yaw) & 0 & \sin(yaw) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(yaw) & 0 & \cos(yaw) \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(pitch) & -\sin(pitch) \\ 0 & \sin(pitch) & \cos(pitch) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(roll) & -\sin(roll) & 0 \\ \sin(roll) & \cos(roll) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sin(pitch) \cdot \sin(roll) \cdot \sin(yaw) + \cos(roll) \cdot \cos(yaw) & \sin(pitch) \cdot \sin(yaw) \cdot \cos(roll) - \sin(roll) \cdot \cos(yaw) & \sin(yaw) \cdot \cos(pitch) \\ \sin(roll) \cdot \cos(pitch) & \cos(pitch) \cdot \cos(roll) & -\sin(pitch) \\ \sin(pitch) \cdot \sin(roll) \cdot \cos(yaw) - \sin(yaw) \cdot \cos(roll) & \sin(pitch) \cdot \cos(roll) \cdot \cos(yaw) + \sin(roll) \cdot \sin(yaw) & \cos(pitch) \cdot \cos(yaw) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(данная матрица описывает вращение с использованием углов Эйлера вокруг перемещающихся осей в порядке Y-X-Z; применяется к вектору-столбцу, т.е. матрица умножается на вектор:

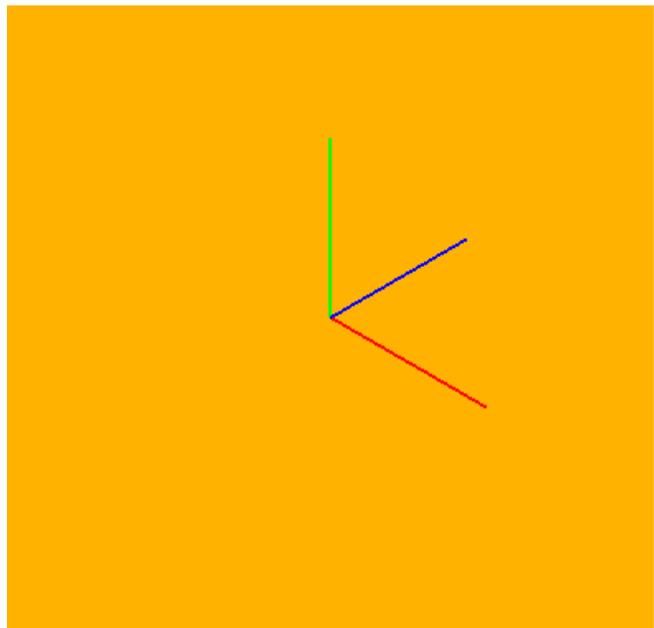
$$v_{rotated} = M_{euler} \times v$$

GIMBAL LOCK

Некоторые повороты вокруг осей приводят к тому, что остальные повороты выполняются вокруг параллельных осей, происходит потеря степени свободы. Для нашего случая (Y-X-Z) таким поворотом является поворот вокруг оси X на 90° или 270° :



Поворот на $(20^\circ, 90^\circ, 20^\circ)$



Поворот на $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$

В данном случае, поворот вокруг оси на 90° делает ось Z равной начальной $-Y$, таким образом компенсируя поворот вокруг оси Y (обратно на те же 20°).

Если подставить $pitch=90^\circ$ в приведённую выше матрицу M_{euler} , то $\sin(pitch)=1$, и $\cos(pitch)=0$, получается:

$$M_{euler}(yaw, 90^\circ, roll) = \begin{bmatrix} \cos(roll - yaw) & -\sin(roll - yaw) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin(roll - yaw) & \cos(roll - yaw) & 0 \end{bmatrix}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ

1. [Углы Эйлера \(en wikipedia\)](#)
2. [Линейные матричные преобразования \(альманах СБ\)](#)
3. [Gimbal lock \(en wikipedia\)](#)
4. [Форматы представления вращения в 3-мерном пространстве \(en wikipedia\)](#)