СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

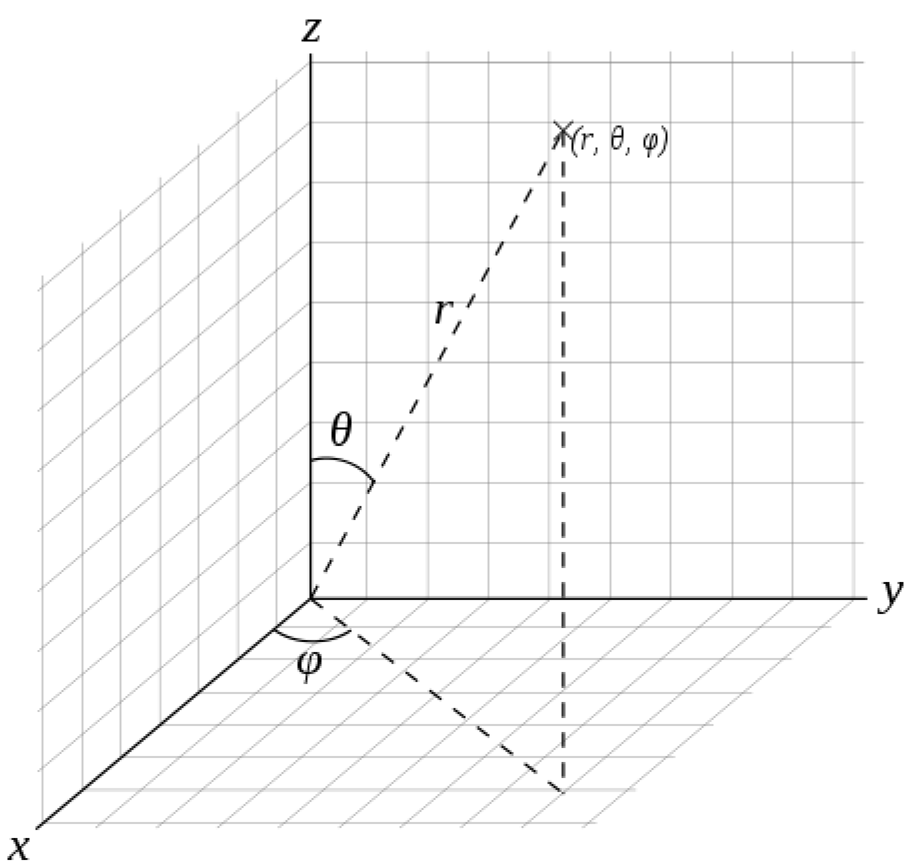
Определение (из Википедии)

Вектор в трехмерной сферической системе кординат задаётся радиусом r, зенитным углом θ и азимутным углом ϕ.

Зенитом называется направление, указывающее непосредственно «вверх» над конкретным местом, т.е. это одно из двух вертикальных направлений, ортогональных к горизонтальной плоскости в точке положения наблюдателя.

Азимут – угол между положительной осью x и проекцией вектора на плоскость xy.

Фундаментальная плоскость – плоскость, в которой содержится начало координат и отсчитывается азимутный угол.



Изображение 1: Сферическая система координат, стандарт ISO

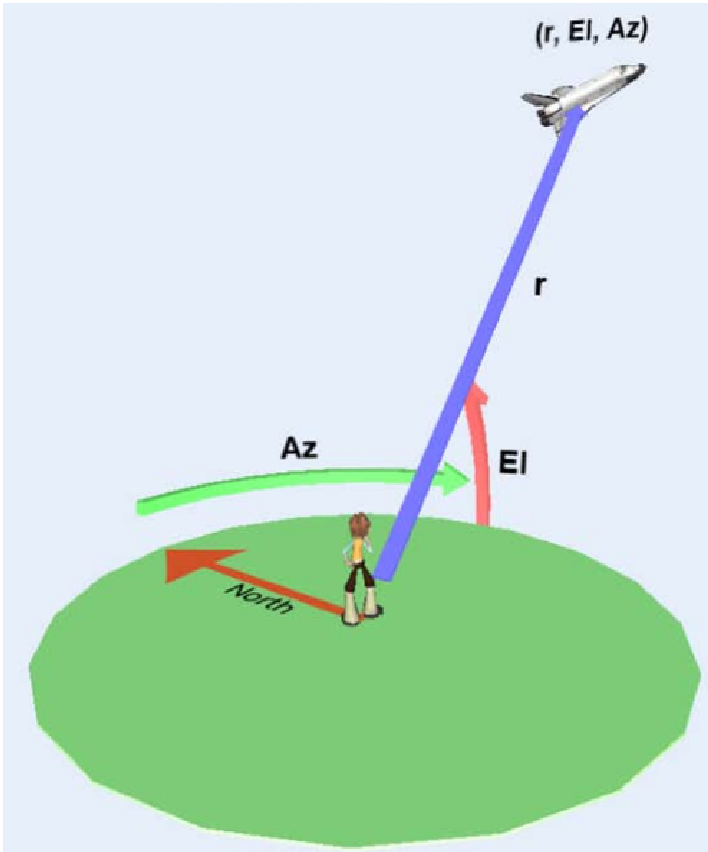
Используемые символы координат и их порядок варьируется от источника к источнику. В физике часто используется (r, θ, ϕ): радиус r, зенитный угол θ и азимутный угол ϕ, тогда как в математике часто используется (r, θ, ϕ) как радиус r, азимутный угол θ и зенитный угол ϕ. Так же, вместо r часто используется p. Так же в сферических системах координат могут применяться другие соглашения. В данном документе и исходном коде библиотеке используется соглашение, указанное в стандарте ISO 80000-2:2009.

Применение

В географии, навигации сферические системы координат могут использованы, когда точностью представления данных можно в определённой степени пренебречь в пользу простоты расчетов (вращение на сфере, а не эллипсоиде)[http://topography.ltsu.org/geodezy/g3.html, 3.3, Ештокин Александр Николаевич, Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко].

Широта, долгота и высота над уровнем моря позволяют определить точку, находящуюся на поверхности Земли, но для определения позиции над поверхностью Земли может быть использована сферическая система координат [https://www.nasa.gov/pdf/745138main_Speherical_Coordinate_System.pdf].

В астрономии используется система небесных координат для описания положения светил на небе или точек на воображаемой небесной сфере. Координаты светил или точек задаются двумя угловыми величинами (или дугами), однозначно определяющими положение объектов на небесной сфере. Таким образом, система небесных координат является сферической системой координат, в которой третья координата – расстояние – часто неизвестна и не играет роли. Системы небесных координат отличаются друг от друга выбором фундаментальной плоскости и началом отсчета.

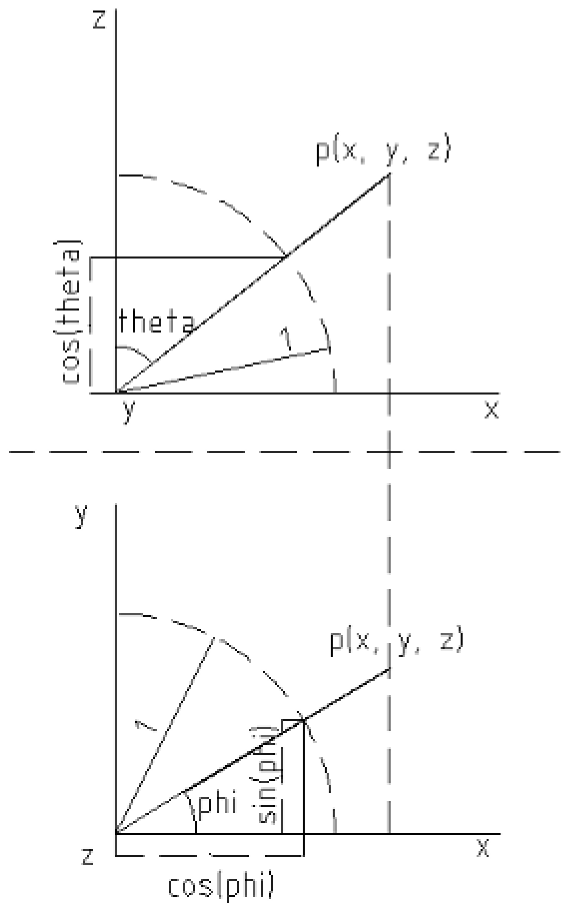


Изображение 2: Задание точки, находящееся над поверхностью Земли

Однозначное представление позиции

Позиция в сферической системе координат так же может быть множеством способов. Для однозначности задания координат, можно применить следующие ограничения: $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [-\pi, \pi]$, при $r = 0$: $\theta = 0, \phi := 0$, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$: $phi := 0$.

Переход от декартовой системы координат к сферической



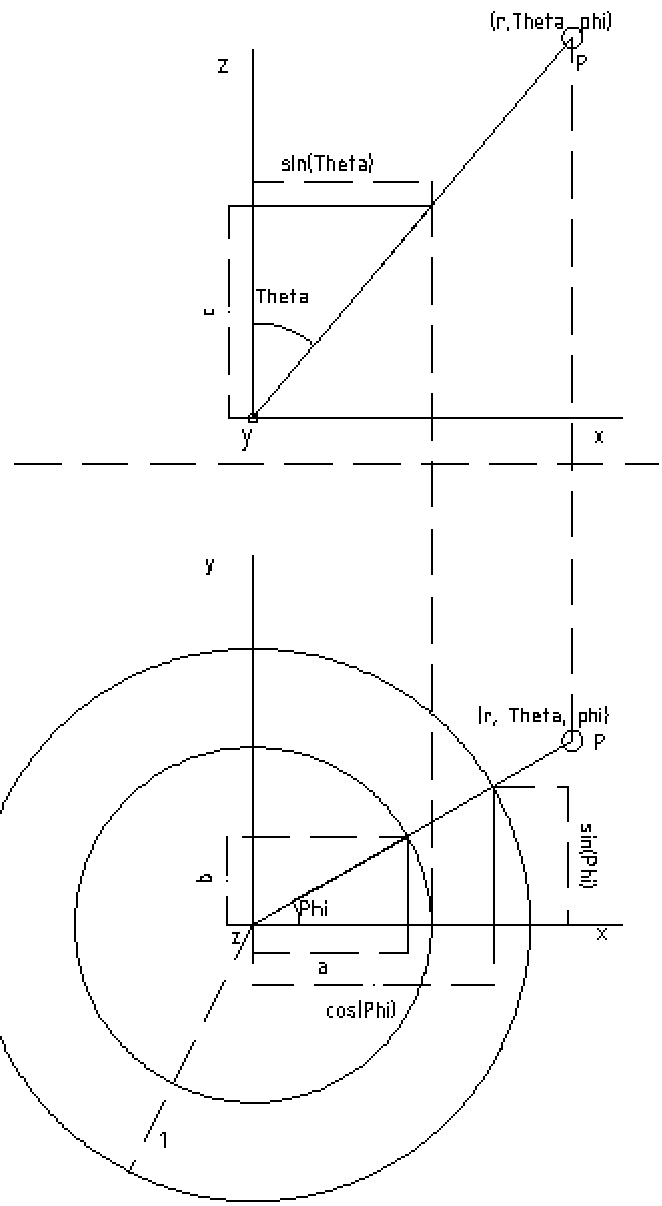
Используя формулу длины вектора и свойство подобных треугольников, получаем:

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

$$\cos\theta / p_z = 1/r$$
$$\cos\theta = p_z/r$$
$$\theta = \arccos p_z/r$$
$$p_x / \cos\phi = p_y / \sin\phi$$
$$p_y/p_x = \tan\phi$$
$$\phi = \begin{cases} 0, p_y = p_x = 0 \\ atan2(p_y, p_x), oterwise \end{cases}$$

$atan2(x, y)$ - функция, вычисляющая арктангенс x/y, учитывая знаки x и y для определения четверти, в которой находится точка (x, y). Результирующий угол положительный для вращения против часовой стрелки (верхние четверти, $y > 0$) и отрицательный для вращения по часовой стрелке (нижние четверти, $y < 0$)

Переход от сферической системы координат к декартовой



Из свойства подобных треугольников:

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta/1 = a/\cos\phi \\
&a = \sin\theta\cdot\cos\phi, \\
&\sin\theta/1 = b/\sin\phi \\
&b = \sin\theta\cdot\sin\phi, \\
&c = \cos\theta
\end{aligned}
$$

Если вычислить длину полученного вектора $\overline{(a,b,c)}$, то окажется, что она равна:

$$
\begin{aligned}
&|\overline{(a,b,c)}| = \sin\theta^2\cdot\cos\phi^2 + \sin\theta^2\cdot\sin\phi^2 + \cos\theta^2 \\
&|\overline{(a,b,c)}| = \sin\theta^2\cdot(cos\phi^2 + \sin\phi^2) + \cos\theta^2 \\
&|\overline{(a,b,c)}| = \sin\theta^2 + \cos\theta^2 \\
&|\overline{(a,b,c)}| = 1
\end{aligned}
$$

Т.е. вектор $\overline{d} = \overline{(a,b,c)}$ является единичным вектором и представляет собой направление от центра координат к точке $\overline{p}$. Умножая его на расстояние от центра координат до точки, мы получим координаты точки:

$$\overline{p} = r\cdot\overline{d} = r\cdot\overline{(\sin\theta\cdot\cos\phi, \sin\theta\cdot\sin\phi, \cos\theta)}$$