

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Определение (из Википедии)

Полярная система координат – это двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата ρ соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата ϕ также называется полярным углом или азимутом и равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтоб попасть в эту точку.

Определённая таким образом радиальная координата может принимать значение от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360° . Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

Одной из важных особенностей полярной системы координат является то, что одна и та же точка может быть представлена бесконечным количеством способов. Это происходит потому, что для определения азимута точки нужно повернуть полярную ось так, чтобы она указывала на точку. Но направление на точку не изменится, если осуществить произвольное число дополнительных полных оборотов.

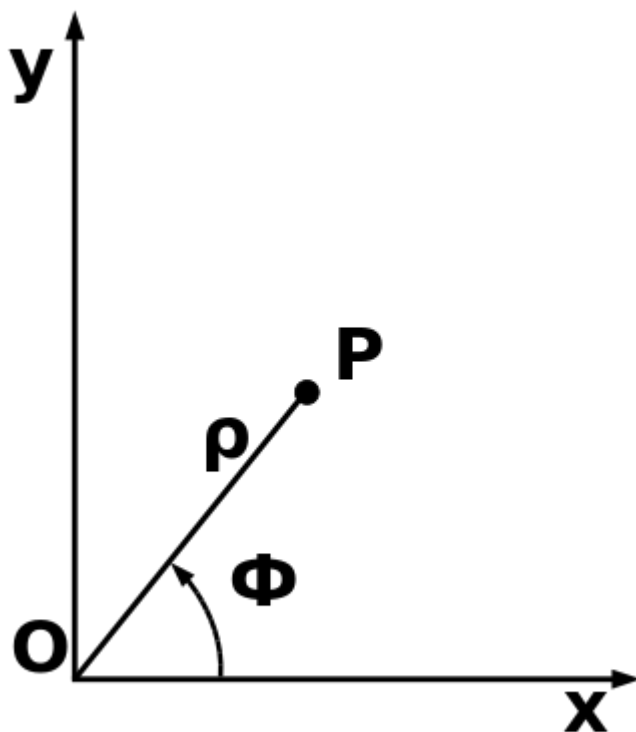


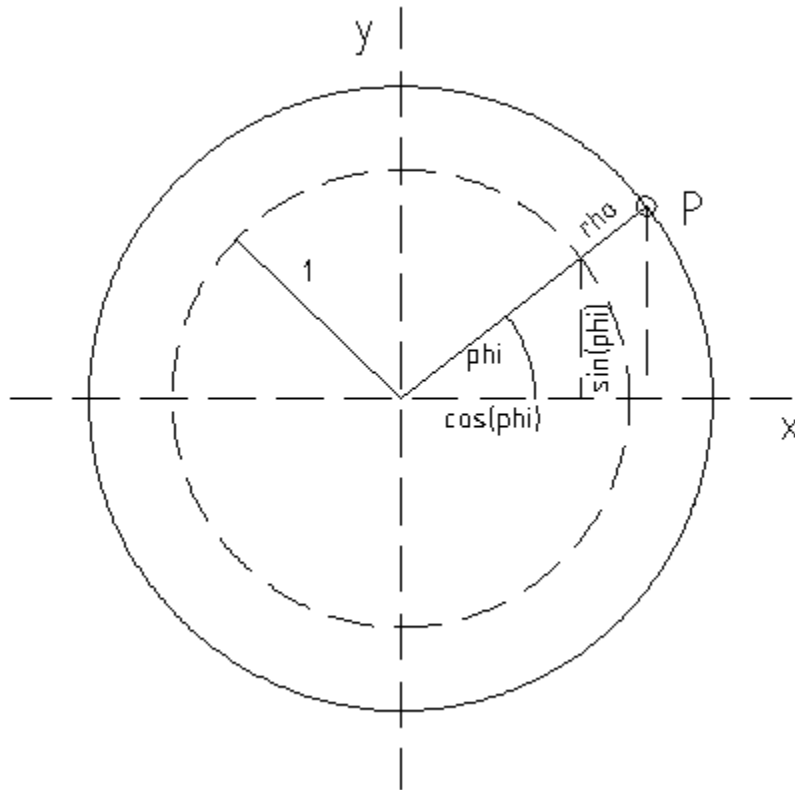
Рисунок 1: Точка в полярной системе координат

Однозначное представление точки в полярной системе координат

Как было описано выше, одна точка в полярной системе координат может быть представлена бесконечным множеством координат. Для задач вроде сравнения координат двух точек, может потребоваться привести координаты к такому виду, где они задаются однозначно. Для полярной системы координат дополнительными ограничениями, которые обуславливают однозначное задание координат точки, может быть требование положительного радиуса ρ , угла ϕ в пределах $(-\pi, \pi]$ и требование $\phi = 0$ при $\rho = 0$. Ниже приведены формулы приведения полярных координат к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \phi &:= 0, \rho = 0 \\ \phi &:= \phi + \pi, \rho < 0 \\ \rho &:= -\rho, \rho < 0 \\ \phi &:= \phi - \text{floor}((\phi + \pi)/2\pi) \cdot 2\pi, |\phi| > \pi \end{aligned}$$

Переход от полярной системы координат к декартовой



Применяя свойство подобия треугольников, получаем:

$$\begin{aligned} 1/\rho &= \cos \phi / p_x, \\ p_x &= \rho \cos \phi; \\ 1/\rho &= \sin \phi / p_y, \\ p_y &= \rho \sin \phi. \end{aligned}$$

Переход от декартовой системы координат к полярной

Функции $\sin x$ и $\cos x$ не являются монотонными, и их обратные функции не определены на интервале $[0, 2\pi)$, поэтому функция нахождения угла ρ является кусочной. В языках программирования удобно использовать функцию $\text{atan2}(x, y)$, принимающую в качестве параметров x и y и вычисляющую арктангенс x/y с

учетом знаков параметров, что позволяет определить четверть, в которой находится угол. Далее приведены формулы перехода из декартовой системы координат в сферическую:

$$\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2};$$

$$\sin \phi / p_y = \cos \phi / p_x,$$

$$\sin \phi / \cos \phi = p_y / p_x,$$

$$\tan \phi = p_y / p_x,$$

$$\phi = \text{atan2}(p_y, p_x).$$