# ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 1. Полином от одной переменной

Полином – это выражение, которое может быть построено из констант и переменных при помощи операций сложения, умножения и возведения в неотрицательную целочисленную степень. Два таких выражения, которые могут быть трансформированы друг в друга с использованием свойств сложения и умножения, рассматриваются как один и тот же полином.

Полином от одной переменной всегда может быть записан в форме:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

где $a_0, ..., a_n$ - константы (коэффициенты), а $x$ - переменная.

Степень полинома от одной переменной – это наивысшая степень переменной в данном полиноме.

Функция вида $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ называется полиномиальной функцией.

## 2. Интерполяция

Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

При выполнении научных и инженерных расчетов, чатсо приходится оперировать с наборами значений, полученных опытным путём или методом случайной выборки. Может возникнуть необходимость на основании этих наборов построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Данная задача называется аппроксимацией. Интерполяция – это такая разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой-либо сложной функции другой, более простой функцией. Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, можно попытаться вычислить её значение в нескольких точках и по ним построить, т.е. интерполировать, более простую функцию. Данный подход не позволяет производить настолько же точные вычисления, но может иметь выигрыш в производительности.

## 3. Теорема Вейерштрасса - Стоуна

Пусть $f$- непрерывная функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такой полином $p$ сс вещественными коэффициентами, что для любого $x$ из $[a, b]$ выполнимо условия $|f(x)p(x)| < \epsilon$.

## 4. Полиномиальная интерполяция функции одной переменной

Предположим, что у нас есть таблично заданная функция вида:

| $X$ | $Y$ |
|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ |
| $x_n$ | $y_n$ |

Для интерполяции данной функции полиномом степени $n$, т.е. полиномиальной функцией $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ + c_nx^n$, требуется найти коэффециенты $c_0, c_1, ..., c_n$. Имея значения $x_1, ..., x_n$ и $y_1, , y_n$, можно составить систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + ... + c_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + ... + c_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ ... \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + ... + c_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

В матричном виде данная система уравнений выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

Решение данной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, найдены коэффициенты полинома, интерполирующие таблично заданную функцию на интервале $[x_1; x_n]$.

## 4. Оптимизация инвертирования матрицы

Матрица вида:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

называется Матрицей Вандермонда[1], существуют оптимизации нахождения её инверсии. В данном документе описаноо получение инверсии матрицы Вандермонда при помощи LU декомпозиции.

Квадратная матрица является инвертируемой, если её определитель не равен нулю. Определитель матрицы Вандермонда равен [2]:

$$det(X) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$$

Следовательно, для таблично заданной функции, где значения $x$ не повторяются, матрица Вандермонда является инвертируемой.

Минором $A\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_k \\ b_1 & b_2 & ... & b_k \end{bmatrix}$ матрицы $A$ называется определитель такой квадратной матрицы $B$ порядка $k$, элементы которой стоят в матрице $A$ на пересечении строк с номерами $a_1, a_2, \dots, a_k$ и столбцов с номерами $b_1, b_2, \dots, b_k$. Если матрица $B$ составлена из первых $k$ строк и первых $k$ столбцов матрицы $A$, то такой минор называется ведущим главным минором.

Если квадратная матрица инвертируема, то она допускает LU декомпозицию тогда и только тогда, когда все её ведущие главные миноры не равны нулю [3].

Если посмотреть на матрицу X, то видно, что все матрицы, полученные из неё для расчета всех её главных ведущих миноров, так же являются матрицами Вандермонда, и их определители не равны нулю, если таблично заданная функция не имеет повторяющихся значений $x$. Следовательно, матрица $X$ допускает $LU$ декомпозицию.

LU декомпозиция инверсии матрицы Вандермонда разработана в [4] и приведена здесь в готовом виде:

$$L_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, i < j \\ 1, i = j = 1 \\ \prod_{k=1, k\neq j}^{i} \frac{1}{x_j - x_k}, otherwise \end{cases}$$

$$U_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, i = 0 \\ 1, i = j \\ 0, j = 1 \\ U_{i-1,j-1}^{-1} - U_{i,j-1}^{-1} x_{j-1}, otherwise \end{cases}$$

Интегрирование и дифференцирование численно заданной функции

После нахождения полинома $p(x)$, интерполирующего функцию $f(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$, можно положить, что:

$$f'(x) = p'(x),$$

$$F(x) = P(x),$$

где $f'(x)$, $p'(x)$ – производные функции и интерполирующего её полинома, а $F(x)$ и $P(x)$ – первообразные.

Символьное вычисление производной и первообразной полинома степени $n$ проивзодится с использованием готовых формул для элементарных функций:

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

$$c' = 0,$$

$$\int a dx = ax + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^n + 1}{n + 1} + C, n \neq -1.$$

Так же можно найти определённый интеграл интерполируемой функции, используя теорему Ньютона-Лейбница:

$$,\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b),$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

Возможно символьно вычислить его производную и неопределённый интеграл по стандартным формулам, а так же определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

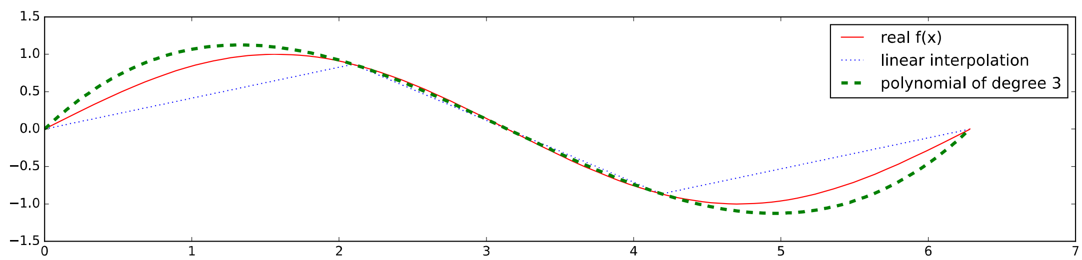
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

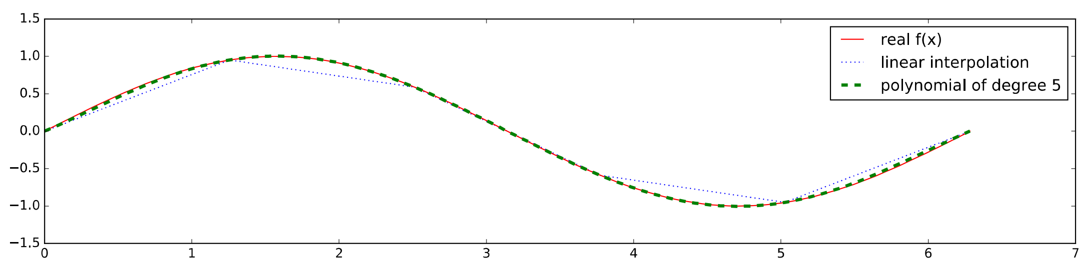
где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Применение

Полиномы могут быть использованы для интерполяции и аппроксимации сложных кривых, например, формы букв в типографии, по нескольким точкам. Полиномы находят применение в вычислении натурального логарифма и тригонометрических функций: если создать таблицу контрольных точек и интерполировать значения между данным точками, производительность будет значительно выше, и при этом качественней, чем линейная интерполяция (которая является часным случаем полинома степени 1).

На следующих графиках изображено сравнение линейной и полиномиальной интерполяции функции $\sin(x)$:




Производная и интеграл имеют много применений в компьютерной графике и моделировании, например, могут быть использованы при вычисления ускорения, скорости и позиции кисти графического редактора при рисовании кривой линии или элемента системы частиц для наложения эффекта цвета или толщины с зависимостью от данных параметров.

## Реализация

Исходный код программы на Python 3, интерполирующей функцию синуса по 6 заданным точкам на интервале [0, 2*pi] можно найти по указанной ссылке: https://gist.github.com/slavust/213f01889c01bccdda8033f8c9ef1075

# ССЫЛКИ

1. Wikipedia: Vandermonde matrix.
   https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix
2. Milne-Thompson, L. M. : The Calculus of Finite Differences. Macmillan Co. , 1933. (page 9).
3. Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. (1985), Matrix Analysis, Cambridge University Press, Corollary 3.5.5.
4. Turner, L. Richard. Inverse of the Vandermonde matrix with applications.