ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Линейная функция

Линейной называется функция $F(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$F(x+y)=F(x)+F(y)$,

$F(ax)=aF(x)$.

Вложенные системы координат

Дан вектор $\bar{v}$ в системе координат, заданной векторами $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ относительно исходной системы координат. Тогда координаты вектора $\bar{v}$ в исходной системе координат:

$$\bar{v}'=F(\bar{v})=\bar{p}\cdot v_x+\bar{q}\cdot v_y+\bar{r}\cdot v_z=\begin{bmatrix} p_x\cdot v_x+q_x\cdot v_y+r_x\cdot v_z \\ p_y\cdot v_x+q_y\cdot v_y+r_y\cdot v_z \\ p_z\cdot v_x+q_z\cdot v_y+r_z\cdot v_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}=M_{transform}\times\bar{v}$$, где

$$M_{transform}=\begin{bmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{bmatrix}.$$

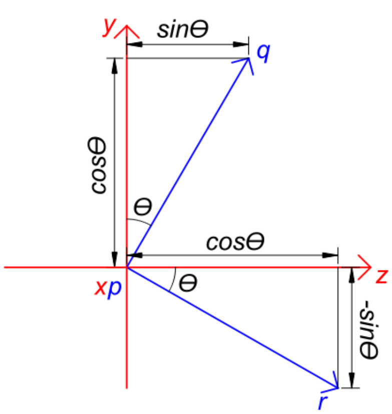
Функция $F(\bar{v})=M_{transform}\times\bar{v}$ является линейной, т.к.:

$F(\bar{v}+\bar{w})=M_{transform}\times(\bar{v}+\bar{w})=M_{transform}\times v+M_{transform}\times w$,

$F(a\bar{v})=M_{transform}\times a\bar{v}=a\,M_{transform}\times\bar{v}$.

Система координат, образованная векторами $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$, называется вложенной.
Матрица $M_{transform}$ называется матрицей линейного оператора, или матрицей трансформации. Её столбцы – базисные векторы вложенной системы координат.
Далее приведены наиболее часто используемые матрицы трансформации.

Поворот вокруг оси x на угол $\boldsymbol{\Theta}$



$|\bar{p}|=|\bar{q}|=|\bar{r}|=1$

$\bar{p}=(1,0,0)$,

$\bar{q}=(0,\cos\Theta,\sin\Theta)$,

$\bar{r}=(0,-\sin\Theta,\cos\Theta)$,

$$M_{transform}=M_{rot\ x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}.$$

Пример трансформации:

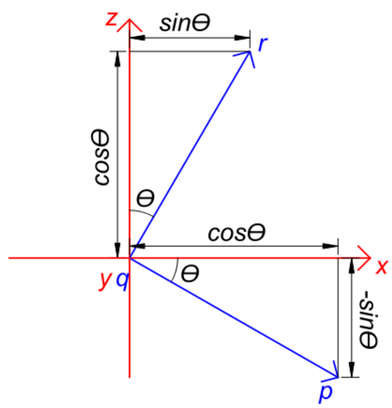
координаты вектора во вложенной системе координат:

$\bar{v}=(0,1,0)$.

Тогда координаты этого вектора в исходной системе координат:

$$\bar{v}'=F(\bar{v})=M_{rot\ x}\times\bar{v}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{bmatrix}.$$

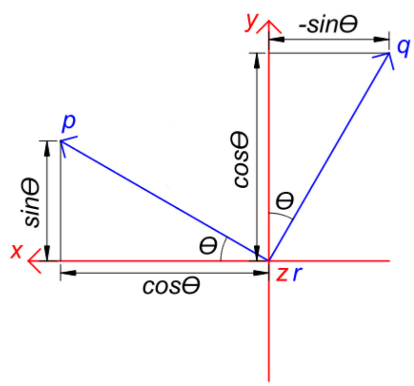
Поворот вокруг оси *y* на угол $\boldsymbol{\Theta}$



$$\bar{p}=(\cos\Theta,0,-\sin\Theta),$$
$$\bar{q}=(0,1,0),$$
$$\bar{r}=(\sin\Theta,0,\cos\Theta),$$
$$M_{transform}=M_{rot\ y}=\begin{bmatrix}\cos\Theta & 0 & \sin\Theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix}.$$

$$|\bar{p}|=|\bar{q}|=|\bar{r}|=1$$

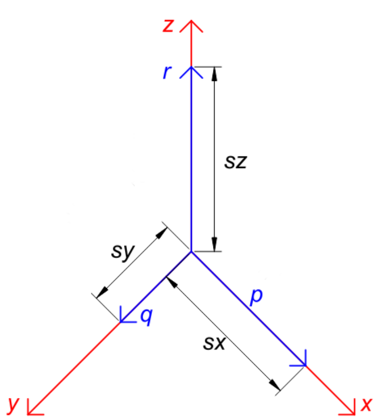
Поворот вокруг оси *z* на угол $\boldsymbol{\Theta}$



$$\bar{p}=(\cos\Theta,\sin\Theta,0),$$
$$\bar{q}=(-\sin\Theta,\cos\Theta,0),$$
$$\bar{r}=(0,0,1),$$
$$M_{transform}=M_{rot\ z}=\begin{bmatrix}\cos\Theta & -\sin\Theta & 0\\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$|\bar{p}|=|\bar{q}|=|\bar{r}|=1$$

Масштабирование



$$\bar{p}=(s_x,0,0),$$
$$\bar{q}=(0,s_y,0),$$
$$\bar{r}=(0,0,s_z),$$
$$M_{transform}=M_{scale}=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & s_z\end{bmatrix}.$$

Отражение относительно плоскости, образованной двумя координатными осями

Может быть представлено в виде масштабирования в -1 раз по оси, перпендикулярной данной плоскости, тогда как остальные оси остаются неизменными.

Отражение относительно плоскости xy :

$$M_{transform} = M_{reflect\ xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Отражение относительно плоскости xz :

$$M_{transform} = M_{reflect\ xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отражение относительно плоскости yz :

$$M_{transform} = M_{reflect\ yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проекция на плоскость, образованную двумя координатными осями

Может быть представлена как масштабирование в 0 раз по оси, перпендикулярной плоскости проекции.

Проекция на плоскость xy :

$$M_{transform} = M_{project\ xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Проекция на плоскость xz :

$$M_{transform} = M_{project\ xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проекция на плоскость yz :

$$M_{transform} = M_{project\ yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$