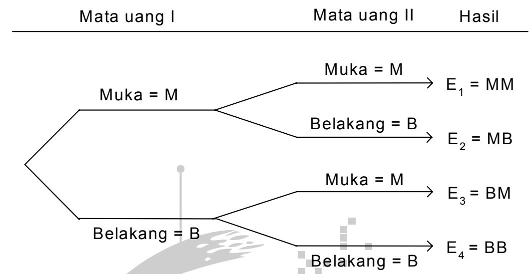
Teori Peluang (Probabilitas)

- Ruang contoh : himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen dan biasa dilambangkan dengan S.
- Eksperimen : proses di mana pengamatan atau pengukuran dilaksanakan.
- Kejadian sederhana : suatu hasil tunggal dari suatu eksperimen
- Kejadian majemuk A: kumpulan dari kejadian-kejadian tunggal
- Diagram pohon hasil percobaan (eksperimen)

Pelemparan dua keeping mata uang



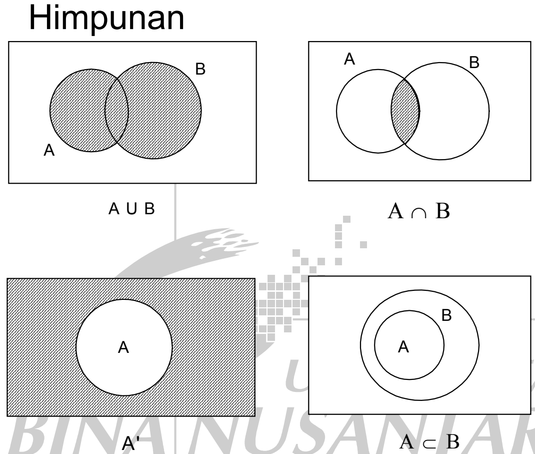
Dalam bentuk tabel

Kejadian	M. uang I	M. Uang II
E_1	Muka	Muka
E_2	Muka	Belakang
E_3	Belakang	Muka
E_4	Belakang	Belakang

- Ruang contoh diskrit

$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$; ruang contoh terhingga
$S = \{S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots\}$; ruang contoh tak hingga

- Diagram Venn dan Operasi Himpunan



$$(1)\ A \cup B = B \cup A$$
$$(2)\ A \cap B = B \cap C$$
$$(3)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(4)\ (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(5)\ (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Peluang kejadian :
Sekeping mata uang seimbang dilemparkan n kali maka peluang munculnya M :

$$P(M) = \frac{\#M}{n}; \text{untuk n besar} \rightarrow P(M) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#M}{n}$$

#M = banyak kalinya M muncul dari n Lemparan

- Kaidah – Kaidah Peluang

$$\text{Bila } A \subset S \rightarrow P(A) \geq 0$$
$$P(S) = 1$$
$$\text{Bila } A_i \cap A_j = \varphi,\ i \neq j \text{ maka :}$$
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Peluang kejadian komplemen $A = A'$

$$P(A') = 1 - P(A) \text{ dan } P(A) + P(A') = P(S) = 1$$

Gabungan peluang dua kejadian

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

- Penghitungan Kejadian

  Permutasi = pengaturan r obyek dari n obyek berbeda dengan memperhatikan urutan

$$P_r^n = n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{dimana}\quad n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(3)\,(2)\,(1)$$

$$0! = 1$$

Kombinasi : pemilikan r obyek dari n obyek yang berbeda tanpa memperhatikan urutan

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Peluang Bersyarat, Kejadian Bebas dan Kaidah Bayes

- Peluang bersyarat:

$$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(A)},$$

$P(B/A) =$ peluang kejadian B dengan syarat peluang A telah diketahui

Contoh :
A = penderita kanker
B = perokok berat
Diketahui (A) = 135 , #(A ∩ B) = 122
Hitung peluang : P(B/A)
Penyelesaian:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{N},\ P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{N}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)/N}{\#(A)/N} = \frac{122}{135} = 0{,}90$$

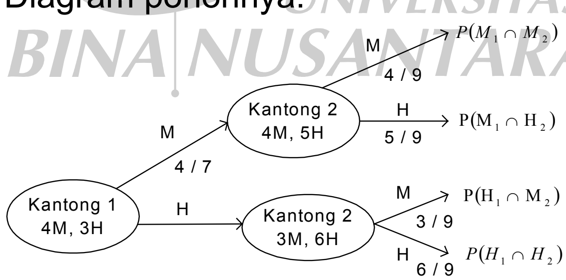
$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B/A) \text{ atau } P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)$$

Bila A dan B bebas :

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

Contoh soal :
Suatu kantong berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam dan kantong kedua berisi 3 bola merah dan 5 bola hitam. Satu bola diambil dari kantong pertama dan dimasukkan tanpa melihatnya ke kantong kedua. Berapa peluangnya mengambil bola hitam dari kantung kedua?

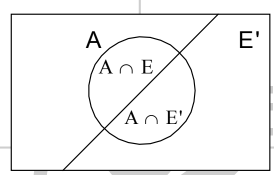
Diagram pohonnya:



$$P(M_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap H_2) = \frac{38}{63}$$

H_1 = mengambil 1 bola hitam dari kantong 1
H_2 = mengambil 1 bola hitam dari kantong 2
M_1 = mengambil 1 bola merah dari kantong 1
M_2 = mengambil 1 bola merah dari kantong 2

- Kaidah Bayes



$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E')$$

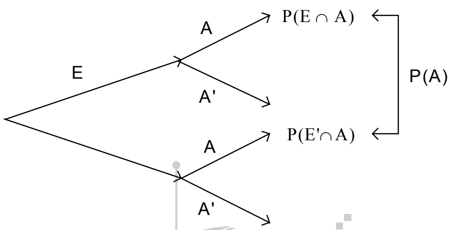
$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap E')$$

Diagram Venn untuk kejadian A,E dan E′

$$P(E/A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{P(A \cap E)}{P(A \cap E) + P(A \cap E')}$$

$$P(E/A) = \frac{P(E)\,P(A/E)}{P(E)\,P(A/E) + P(E')\,P(A/E')}$$

Diagram pohonnya



Bentuk umumnya:

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ kejadian sekatan dari ruang contoh dengan $P(B_i) \neq 0, i = 1,2,\ldots,k$ maka setiap kejadian A anggota dari ruang contoh $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A/B_i)$

Bila $P(A) \neq 0$ maka kaidah Bayes:

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A/B_i)}$$

Untuk k=3 ; B_1, B_2, B_3 dan A

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3)}$$

$P(B_2/A) = \ldots\ldots\ldots\ldots?$

$P(B_3/A) = \ldots\ldots\ldots\ldots?$

Soal tentang peluang total dan kaidah Bayes :

Sebuah perusahaan memproduksi suatu barang yang dihasilkan dari tiga mesin B_1, B_2, B_3. Dari seluruh produksi, mesin B_1 menghasilkan 200 unit, mesin B_2 = 300 unit dan mesin B_3 = 100 unit. Bila diketahui bahwa produksi yang rusak berasal dari B_1 = 5% dari B_2 = 2% dan dari B_3 = 10% dan seorang membeli 1 unit secara acak.

a. Berapakah peluang pembeli tersebut memperoleh barang yang rusak.
b. Bila barang yang dibelinya ternyata rusak berapakah peluangnya ber-asal dari mesin B_1?