

Peubah Acak Diskrit dan Sebaran Peluang

1. Konsep Dasar

- Peubah Acak: suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang contoh

↳ Jika suatu ruang contoh mengandung titik yang berhingga banyaknya atau sederetan anggota yang banyaknya sebanyak bilangan bulat maka ruang contoh itu dinamakan ruang contoh diskrit.

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

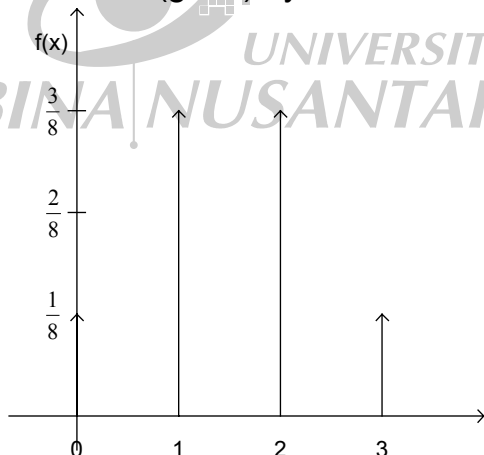
Feb - 2003

Sebaran peluangnya menjadi:

$X = x$	0	1	2	3
$f(x)=P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$f(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{untuk } x = 0, 3 \\ 3/8, & \text{untuk } x = 1, 2 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Grafik balok (garis) nya:



BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

↳ Bila ruang contoh mengandung titik contoh yang tak berhingga banyaknya dan banyaknya sebanyak titik pada sepotong garis, maka ruang contoh itu disebut ruang contoh kontinu.

Sebaran Peluang Diskrit

Hasil eksperimen pelemparan sekeping mata uang seimbang sebanyak 3 kali diperoleh ruang contoh.

$$S = \{BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB, MMM\}$$

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$X = \text{banyaknya sisi muka} = M \text{ muncul}$$

$$P = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}$$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang atau sebaran peluang peubah acak X bila, untuk setiap kemungkinan hasil X :

$$\bullet f(x) \geq 0$$

$$\bullet \sum_x f(x) = 1$$

$$\bullet P(X = x) = f(x)$$

Sebaran kumulatif atau fungsi sebaran $F(x)$ suatu peubah acak X dengan sebaran peluang $f(x)$ dinyatakan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

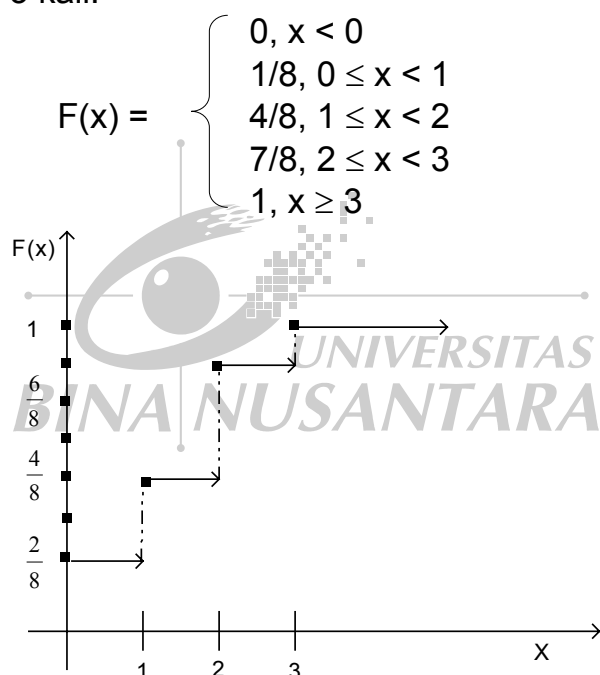
BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Dari pelemparan mata uang seimbang 3 kali:



Sebaran kumulatif peubah acak diskrit

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

- Ragam dan Simpangan Baku Peubah Acak X

$$V(x) = \sigma^2 = E((x - \mu)^2) = \sum_{1 \leq j < \infty} (X_j - \mu)^2 f(x_j)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{1 \leq j < \infty} (X_j - \mu) f(x_j)}$$

$V(x) = \sigma^2$ = ragam peubah acak X
 σ = simpangan baku peubah acak X

3. Fungsi Peluang Sebaran Hipergeometrik

$$h(x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{maks } (0, n - (N-D)) \leq x \leq \min(n, D)$$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

2. Nilai Harapan dan Ragam Peubah Acak

- Nilai harapan peubah acak X dengan fungsi peluang $f(x) = E(x) = \mu$

$$E(x) = \sum_x xP(X = x) = \sum_x xf(x)$$

Pada sebaran peluang:

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = 0 \left(\frac{1}{8} \right) + 1 \left(\frac{3}{8} \right) + 2 \left(\frac{3}{8} \right) + 3 \left(\frac{1}{8} \right) = 1,5$$

- Momen peubah acak X = μ_k

$$\mu'_k = E(x^k), \text{ dengan } k = 1, 2, \dots$$

$$\mu'_k = E(x^k) = \sum_x x^k f(x)$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = \sum_x x^2 f(x)$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = 0^2 + \left(\frac{1}{8} \right) + 1^2 \left(\frac{3}{8} \right) + 2^2 \left(\frac{3}{8} \right) + 3^2 \left(\frac{1}{8} \right) = 3$$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Contoh soal:

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dikatakan memenuhi syarat penerimaan bila berisi tidak lebih dari 3 yang cacat. Cara pengambilan contoh (sampel) acak ialah dengan memilih 5 suku cadang secara acak dari dalamnya dan menolak kotak tersebut bila diantaranya ada yang cacat. Berapakah peluang mendapatkan tepat satu yang cacat dalam contoh acak berukuran 5. Bila kotak tersebut berisi 3 yang cacat.

Petunjuk: $N = 40$, $n = 5$, $D = 3$, dan $x = 1$

Nilai tengah = μ dan ragam = σ^2 dari peubah acak X yang menyebar secara Hipergeometrik:

$$\mu = \frac{nD}{N} \quad ; \quad \sigma^2 = n \left(\frac{D}{N} \right) \left(1 - \frac{D}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Pada soal di atas:

$$\mu = \frac{5(3)}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8},$$

$$\sigma^2 = 5 \left(\frac{3}{40} \right) \left(1 - \frac{3}{40} \right) \left(\frac{40-5}{40-1} \right) = \frac{3885}{12480} = 0,311$$

4. Fungsi Peluang Sebaran Binom

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n$$

Contoh soal:

Suatu suku cadang dapat menahan uji guncangan tertentu dengan peluang $\frac{3}{4}$. Hitunglah peluang bahwa tepat 2 dari 4 suku cadang yang diuji tidak akan rusak :

Petunjuk : $p = \frac{3}{4}$, $n = 4$, $x = 2$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

5. Fungsi Peluang Sebaran Poisson

$$P(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$$

$$\mu > 0$$

Contoh soal:

Rata-rata banyaknya partikel radioaktif yang meliputi suatu penghitung selama 1 milidetik dalam suatu percobaan di laboratorium adalah 4. Berapakah peluang 6 partikel melewati penghitung dalam 1 milidetik tertentu?

Petunjuk : $x = 6$, $\mu = 4$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Contoh soal: (dapat menggunakan tabel Binom)

Peluang untuk sembuh seorang penderita penyakit darah yang jarang adalah 0,4. Bila diketahui 15 orang yang telah mengidap penyakit tersebut, berapakah peluangnya:

- (a) paling sedikit 10 akan sembuh
- (b) antara sama dengan 3 sampai sama dengan 8 akan sembuh
- (c) tepat lima yang sembuh

Petunjuk:

$$(a) P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10) = 1 - \sum_{x=0}^9 b(x; 15, 0,4)$$

$$(b) P(3 \leq x \leq 8) = \sum_{x=3}^8 b(x; 15, 0,4) - \sum_{x=0}^2 b(x; 15, 0,4)$$

- Nilai tengah peubah acak X yang menyebar secara Binom = $\mu = np$ dan ragamnya $\sigma^2 = np(1-p)$

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003

Contoh soal: (dapat menggunakan tabel Poisson)

Rata-rata banyaknya tangker minyak yang tiba tiap hari di suatu pelabuhan adalah 10. Pelabuhan tersebut hanya mampu menerima paling banyak 15 tangker sehari. Berapakah peluang pada suatu hari tertentu tangker terpaksa ditolak karena pelabuhan tak mampu melayaninya?

Petunjuk :

$$\mu = 10, P(x > 15) = 1 - P(x \leq 15)$$

- Nilai tengah peubah acak X yang menyebar secara Poisson = μ dan ragamnya $\sigma^2 = \mu$.

BINA NUSANTARA

Edisi : 1

Revisi : 0

Feb - 2003