Sebaran Penarikan Contoh

Sebaran peluang dari suatu statistik diperoleh bila contoh acak berukuran n ditarik secara berulang dari suatu populasi. Sebaran peluang ini disebut sebaran penarikan contoh (sampling distribution).

1. Sebaran Nilai Tengah Contoh

1) Bila suatu contoh acak diambil dari populasi dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2 maka sebaran nilai tengah contoh $\bar{x}$ mempunyai rata-rata μ dan ragam σ^2/n.

(2) Bila populasinya menyebar secara normal, maka nilai tengah contoh $\bar{x}$

menyebar secara normal tanpa pertimbangan ukuran contohnya.

(3) Bila populasinya tidak menyebar normal,nilai tengah contoh $\bar{x}$ menyebar menghampiri normal untuk ukuran contoh besar (Dalil Limit Pusat).

(4) Jika ukuran populasi terbatas = N dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2 maka ragam dari $\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

untuk N ≥ 20 n ragam $\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

2. Dalil Limit Pusat

Bila $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan contoh acak berukuran n dari populasi dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2

maka $\bar{x}$ menyebar normal dengan nilai tengah dan ragam :

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$
$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

untuk n besar

Dalil ini berlaku juga untuk total contoh acak. $T = \sum X_i$ dengan:

$$E(T) = n\mu$$
$$\sigma_T^2 = n\sigma^2$$

Contoh soal:
Suatu contoh acak berukuran n =200 dipilih dari populasi N =12.000.000 , dengan μ = 6 dan ragam σ^2 = 81. Tentukan peluang bahwa $\bar{x}$ lebih besar atau sama dengan 7 ?

Petunjuk:

$$P(\bar{x} \geq 7) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{7-6}{9/\sqrt{200}}\right) = P\left(Z > \frac{\sqrt{200}}{9}\right)$$
$$= P(Z \geq 1{,}57) = 1 - P(Z \leq 1{,}57) = 0{,}0582$$

3. Sebaran Khi-Kuadrat

Bila $z_1, z_2, \ldots, z_n$ merupakan peubah acak normal baku maka:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} Z_i^2$$

Fungsi kepekatan peluang dari Z^2 adalah:

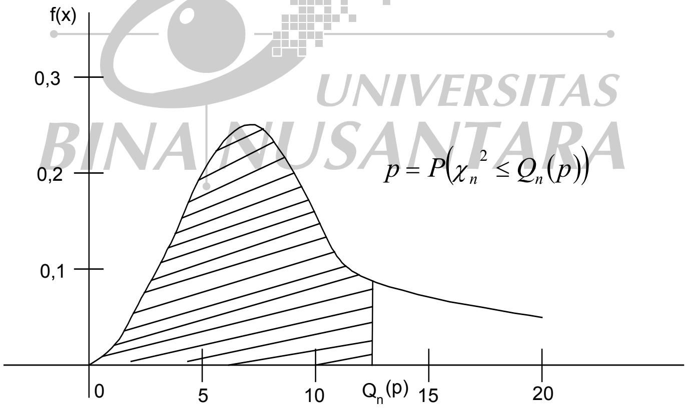
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

yang merupakan bentuk khusus fungsi kepekatan Gamma dengan parameter

$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$

- Persentil sebaran Khi-Kuadrat

$$P\left(\chi^2 \leq Q_n(p)\right) = p$$



Gambar. Persentil 100p dari Khi-Kuadrat

Batas nilai kritis sebaran Khi-Kuadrat adalah titik $\chi_{n(\alpha)}$ maka:

$$P\left(\chi^2 > \chi_{n(\alpha)}^{\ 2}\right) = \alpha$$

$$\chi_{n(\alpha)}^{\ 2} = Q_{n(1-\alpha)}$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_{n(\alpha)}^{\ 2}\right) = 1 - P\left(\chi^2 \leq \chi_{n(\alpha)}^{\ 2}\right) = 1 - \alpha$$

Contoh soal:
Gunakan Tabel A.5 buku 2 untuk menentukan batas nilai kritis sebaran Khi-Kuadrat

(1) $\chi^2_{10(0,95)}$, (2) $\chi^2_{10(0,05)}$

Petunjuk Jawaban:
(1) Untuk $\alpha = 0{,}95$, $n = 10$, $\chi^2_{10(0,95)} = Q_{10(0,05)}$
= 3,940

(2) Untuk $\alpha = 0{,}05$, $n = 10$, $\chi^2_{10(0,05)} = Q_{10(0,95)}$
=18,307

4. Sebaran Ragam Contoh

Ragam Contoh $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2$

Simpangan baku contoh :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2}$$

Rumus pintas ragam contoh:

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_1^{\ 2} - \left(\sum X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Bila s^2 merupakan ragam contoh yang diambil dari populasi normal maka sebaran

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \ adalah \ \chi^2_{n-1}$$

Contoh soal:
Suatu contoh acak berukuran n = 19 diambil dari populasi normal dengan σ^2 = 9. Tentukan peluang simpangan baku contoh = s ada di antara 2 dan 4.

Petunjuk :

$$P(a < s < b) = P\left(\frac{(n-1)a^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)b^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)a^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1} \leq \frac{(n-1)b^2}{\sigma^2}\right)$$

n-1 = 18, σ^2 = 9, a^2 = 4, b^2 = 16

$$P(2 \le s \le 4) = P(8 \le \chi^2_{18} \le 32) = 0{,}98 - 0{,}02 = 0{,}96$$

(digunakan tabel $\chi_v^2 : P(\chi_v^2 \le Q_{(p)} = p)$) dengan pembulatan.

5. Sebaran t. Student

Suatu nilai tengah contoh yang diambil dari populasi sebaran normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2/μ sehingga:

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}$ menyebar normal dengan nilai tengah nol dan ragam =1

Bila σ tidak diketahui dan diganti dengan s maka $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}$ menyebar secara t-student dengan derajat bebas n-1.

Bila $Z \sim N_{(0,1)}$ dan $V \sim \chi_n^2$ dan keduanya bebas maka :

$$\frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t_n$$

Wilayah kritik dari sebaran t :

$$P\left(t > t_{V(\alpha)}\right) = \alpha$$

Contoh soal:

(1) Hitung nilai t-student dengan menggunakan tabel t.
  (a) $t_{12(0,05)}$ (b) $t_{12(0,05)}$ (c) $t_{15(0,025)}$

(2) Hitunglah c agar :
  (a) $P(t_6 \ge c) = 0{,}05$
  (b) $P(|t_6| \ge c) = 0{,}05$

6. Sebaran F

U_1 dan U_2 merupakan peubah acak Khi-Kuadrat yang bebas satu dengan yang lain dan mempunyai derajat bebas v_1 dan v_2 maka:

$$F = \frac{U_1/v_1}{U_2/v_2}$$

Nilai kritik sebaran F adalah titik $F_{v_1,v_2}(\alpha)$ pada sumbu x, sehingga:

$$P\left(F > F_{v_1,v_2}(\alpha)\right) = \alpha$$

Contoh soal:
Hitung dengan menggunakan tabel F.
(1) $F_{2,27(0,05)}$ dan
(2) $F_{4,40(0,01)}$