# Regresi Linier dan Kolerasi

## 1. Konsep Dasar

Suatu contoh acak ukuran n dengan himpunan $\{(x_i,y_i);\ I=1,2,\ldots,n\}$. Harga $y_i$ pada pasangan terurut $(x_i,y_i)$, merupakan harga dari suatu peubah acak $Y_i$. = Y/X yaitu peubah acak Y yang berkaitan dengan suatu nilai tetap x dengan rataan $\mu_{Y/X}$ dan varians $\sigma^2_{Y/X}$.

Regresi linear berarti bahwa rataan $\mu_{Y/X}$ berkaitan linear dengan x dalam bentuk persamaan linear populasi

$$\mu_{Y/X} = \beta_0 + \beta_1 X$$





Parameter: $\mu_{Y/X}$ diduga dengan $\hat{y}$
$\beta_0$ diduga dengan $b_0$
$\beta_1$ diduga dengan $b_1$

Persamaan regresi dugaannya:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

## 2. Metode Kuadrat Terkecil

JKG = Jumlah Kuadrat Galat (sisa) dibuat minimum

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_i x_i)^2$$

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_i x_i) = 0$$

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_i x_i)x_i = 0$$





Persamaan normal menjadi

$$nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0\sum_{i=1}^{n} x_i + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

dan diperoleh penduga $b_1$dan $b_0$

$$\boxed{b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b_1\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$





$$JKG = J_{yy} - b_1 J_{xy},$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}$$

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n}$$

$$S^2 = \frac{JKG}{n-2} = \frac{J_{yy} - b_1 J_{xy}}{n-2} = \frac{J_{yy} - b_1^2 j_{xx}}{n-2}$$

## 3. Inferensia Mengenai Kuefisien Regresi dan Ramalan (Prediksi

- Selang kepercayaan $(1 - \alpha)$ 100% untuk parameter $\beta_1$ dalam persamaan regresi $\mu_{x/y} = \beta_0 + \beta_1 x$ adalah

$$b_1 - \frac{t_{1/2\alpha} \cdot s}{\sqrt{J_{xx}}} < \beta_1 < b_1 + \frac{t_{1/2\alpha} \cdot s}{\sqrt{J_{xx}}}$$ dimana

$t_{1/2\alpha}$ = nilai sebaran t dengan derajat bebasan n – 2

- Statistik uji untuk menguji $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$

$$t = \frac{b_1 - \beta_{10}}{s / \sqrt{J_{xx}}}$$

- Selang kepercayaan (1 - $\alpha$) 100 % untuk parameter $\beta_0$ dalam persamaan garis regresi $\mu_{x/y} = \beta_0 + \beta_1 x$ adalah

$$b_0 - \frac{t_{1/2\alpha} s \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\, J_{xx}}} < \beta_0 < b_0 + \frac{t_{1/2\alpha} \bullet s \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\, J_{xx}}}$$

dimana

$t_{1/2\alpha}$ = nilai t dengan derajat bebas n-2 dan







- Statistik uji untuk menguji $H_0 : \beta_0 = \beta_{10}$

$$t = \frac{b_0 - \beta_{10}}{s\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / nJ_{xx}}}$$

- Selang kepercayaan (1 - $\alpha$) 100% untuk rataan respons $\mu_{y/x_0}$ diberikan oleh :

$$\hat{y}_0 - t_{\alpha/2}.S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})}{J_{xx}}} < \mu_{y_1 x_0} < \hat{y}_0 + t_{\alpha/2} S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}}$$

Dimana $t_{\alpha/2}$ = nilai sebaran t dengan derajat bebas n-2.

- Selang kepercayaan (1 - $\alpha$)100% untuk respons $y_0$ yang tunggal diberikan oleh

$$\hat{y}_0 - t_{\alpha/2} \bullet s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}} < y_0 < \hat{y}_0 + t_{\alpha/2} \bullet s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{J_{xx}}}$$

dimana $t_{\alpha/2}$ = nilai sebaran t dengan derajat bebas n-2.







## ***4. Pendekatan Melalui Analisis Varians***

- Baik tidaknya taksiran (dugaan) persamaan regresi dapat diperiksa dengan analisis varian

$$J_{yy} = b_1 J_{xy} + JKG \text{ atau}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$JKT = JKR + JKG$$

JKT = Jumlah Kuadrat Total
JKR = Jumlah Kuadrat Regresi
JKG = Jumlah Kuadrat Galat

- Statistik uji untuk $H_0 : \beta_1 = 0$ dan hipotesis tandingannya :

$$F = \frac{JKR/1}{JKG/(n-2)} = \frac{JKR}{S^2}$$







- Keputusan menolak $H_0$ bila

$$F > f_{\alpha(1,n-2)}$$

- Analisis varians pengujian $\beta_1 = 0$

| Sumber Variansi | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Rataan Kuadrat | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Regresi<br>Galat | JKR<br>JKG | 1<br>n-2 | JKR<br>$S^2 \frac{JKG}{n-2}$ | $JKR/S^2$<br>- |
| Total | JKT | n-1 | - | - |

## ***5. Korelasi***

Analisis kolerasi berusaha mengukur eratnya hubungan antara dua peubah dengan menggunakan suatu bilangan yang disebut koefisien korelasi.

- Koefisien kolerasi populasi $\rho$ antara dua peubah X dan Y ditaksir dengan koefisien korelasi contoh (sampel) r dengan

$$r = b_1\sqrt{\frac{J_{xx}}{J_{yy}}} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}\,J_{xy}}}$$

$$r^2 = \frac{J_{xy}^2}{J_{xx}J_{yy}} = \frac{JKR}{J_{yy}}$$

$r^2 = R^2$ disebut koefisien determinasi. Untuk data bebas sebaran koefisien kolerasi ditaksir dengan koefisien korelasi Spearman = $r_s$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$ dimana

$d_i$ = selisih peringkat (rank) X dan Y





## ***6. Inferensia Tentang Koefisien Korelasi***

- Pengujian $H_0 : \rho = 0$ dapat digunakan statistik uji

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Wilayah kritiknya :

$t < -\, t_{\alpha}\ (\nu = n - 2)$ bila $H_1 : \rho < 0$

$t > -\, t_{\alpha}\ (\nu = n - 2)$ bila $H_1 : \rho > 0$

$t < -\, t_{\alpha/2}\ (\nu = n - 2)$ atau

$t > t_{\alpha/2}\ (\nu = n-2)$

- Pengujian $H_0 : \rho = \rho_0$ dapat digunakan statistik uji Z.

$$Z = \frac{\sqrt{n-3}}{2}\,\text{en}\left[\frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)}\right]$$





Keputusan menolak $H_0 : \rho = \rho_0$ bila

$Z < -\, Z_{\alpha}$ untuk $H_1 : \rho < \rho_0$

$Z > -\, Z_{\alpha}$ untuk $H_1 : \rho > \rho_0$

$Z < -\, Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2}$ untuk $H_1 : \rho \neq \rho_0$