Peubah Acak Kontinu dan Fungsi Kepekatannya

1. Konsep Dasar

Suatu peubah acak kontinu mempunyai peluang nol pada setiap titik x. Bila x kontinu :

$$P(a \le X \le b) = P(X = a) + P(a < X < b) + P(X = b))$$
$$= P(a < X < b)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

f(x) = fungsi kepekatan peluang

- Fungsi f(x) adalah fungsi kepekatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila:

(1) $f(x) \ge 0$ *untuk semua* $x \in R$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(3) $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

- Fungsi F(x) = fungsi sebaran (kumulatif)
  Suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi kepekatan peluang f(x) dimana:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty < X < \infty$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Contoh soal :
Misalkanlah bahwa galat suhu reaksi, dalam ^{o}C, pada percobaan laboratorium yang dikontrol merupakan peubah acak X yang mempunyai fungsi kepekatan peluang:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3\, x^2, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

(a) Tunjukkan bahwa f(x) adalah fungsi kepekatan
(b) Hitunglah P (0 < X ≤ 1)
(c) Carilah F(x) dari fungsi kepekatan f(x) dan gunakan F(x) untuk menghitung pertanyaan (b) sekali lagi ?

Petunjuk:
(a) Ingat sifat fungsi kepekatan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
(b) P (a < X < b) = $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$
(c) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ dan $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

2. Nilai Harapan dan Ragam Peubah Acak Kontinu

Misalkan peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan f(x) maka :

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \text{ dan ragam } X = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Secara praktis:

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \mu'_2 = momen\ kedua$$

Momen ke-k : $\mu'_k = E\left(x^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$

Contoh soal:
Diketahui fungsi kepekatan peluang f(x):

$$f(x) = \begin{cases} 2\,(1 - x), & 0 < x < 1 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah μ = nilai tengah x dan ragamnya = σ^2
Petunjuk jawaban:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} x.2(1-x)dx = \frac{1}{3}$$

$$E\left(x^2\right) = \int_{0}^{1} x^2.2(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left(x^2\right) - \mu^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

3. Sebaran Normal

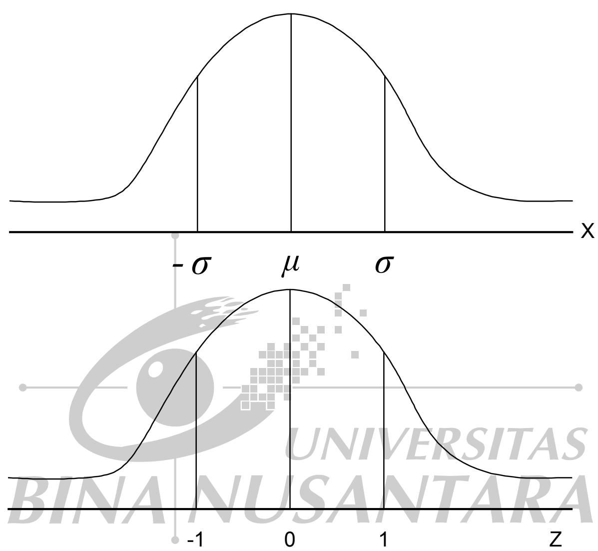
Peubah acak X yang menyebar secara normal dengan fungsi kepekatan peluang:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & -\infty < X < \infty \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Peubah acak normal baku : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, & -\infty < z < \infty \\ 0, & z \text{ lainnya} \end{cases}$$

Nilai harapan peubah acak X = μ dan ragam σ^2, sedangkan peubah acak Z mempunyai nilai harapan = 0 dan ragam = 1.



Gambar 1. Kurva peubah acak normal X dan peubah acak normal baku Z.

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

$$Z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad , \quad Z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

$P(Z_1<Z<Z_2)$ ditentukan dengan menggunakan tabel normal baku.

Contoh soal:
Diketahui X menyebar secara normal dengan μ = 50 dan σ =10. Carilah peluang bahwa X mendapat nilai antara 45 dan 62.
Petunjuk:

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) &= P(-0{,}5 < Z < 1{,}2) \\ &= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5) \\ &= 0{,}8849 - 0{,}3085 \\ &= 0{,}5764 \end{aligned}$$

4. Hampiran Normal Terhadap Binom

Bila X peubah acak Binom dengan nilai tengah $\mu = np$ dan ragam $\sigma = np(1-p)$ maka bentuk limit sebaran normal baku:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{n(p)(1-p)}}, \text{bila n} \rightarrow \infty$$

Contoh soal:
Suatu ujian pilihan ganda terdiri atas 200 soal masing-masing dengan 4 pilihan dan hanya satu jawaban yang benar. Tanpa memahami soal sedikitpun masalahnya dan hanya dengan menerka saja, berapakah peluang seorang mahasiswa menjawab 25 sampai dengan 30 soal dengan benar, untuk 80 dari 200 soal?

Petunjuk :

$$P(25 < X < 30) = P(24{,}5 < X < 30{,}5) = P(1{,}16 < Z < 2{,}71)$$
$$= 0{,}1196$$

5. Sebaran Gamma dan Eksponensial

Peubah acak kontinu X menyebar secara Gamma, dengan parameter α dan β bila fungsi kepekatannya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-X/\beta}, X > 0 \\ 0 \text{ , x lainnya} \end{cases}$$

bila $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Nilai tengah dan ragam peubah acak X yang menyebar secara Gamma adalah:

$$\mu = a\beta \text{ dan } \sigma^2 = a\beta^2$$

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty X^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ , } \alpha > 0$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)!$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Peubah acak kontinu X yang menyebar secara eksponensial, dengan parameter β , bila fungsi kepekatannya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \text{ , x} > 0 \\ 0 \text{, untuk x lainnya} \end{cases}$$

dengan $\beta > 0$.

Nilai tengah dari peubah acak X yang menyebar secara eksponensial adalah $\mu = \beta$ dan ragamnya $\sigma^2 = \beta^2$.

Fungsi sebaran (kumulatif) peubah acak X yang menyebar eksponensial :

$$F(x : \beta) = \begin{cases} 0 \text{ , } x < 0 \\ 1 - e^{-X/\beta} \text{ , } x \geq 0 \end{cases}$$