Pendugaan Titik dan Selang (Interval)

1. Pendugaan Titik

Besaran contoh (sample) digunakan sebagai penduga besaran populasi. Besaran contoh disebut statistik sebagai penduga besaran populasi yang disebut parameter.

Misalnya parameter θ diduga dengan besaran contoh $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$

- Beberapa besaran contoh antara lain:
  1. Rata-rata (nilai tengah) contoh = $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1} X_i}{n} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

2. Ragam contoh = S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

3. Simpangan baku contoh = S

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Xi - \overline{X})^2} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

- Sebaran nilai tengah contoh = $\overline{X}$

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$v(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

, masing - masing merupakan penduga tidak bias, selainnya disebut penduga yang bias.

- Sifat-sifat Penduga
  a. Penduga tak bias
  $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bisa bagi θ jika E($\hat{\theta}$) = θ.

  Suatu peubah acak X dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2. misalkan dari populasi tersebut diambil contoh acak berukuran n dengan pengamatan X_1, X_2, … X_n. Tunjukkan bahwa $\overline{X}$ dan S^2 merupakan penduga tidak bias terhadap μ dan σ^2 petunjuk :

$$\blacklozenge E(\overline{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Xi/n\right) = \frac{E(X_1)}{n} + \frac{E(X_2)}{n} + \cdots + \frac{E(X_n)}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Xi) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\blacklozenge E(S^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - n\,E(\overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} = \left(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\,\sigma^2 = \sigma^2$$

b. Penduga Efisien
Jika ragam θ_1 dan θ_2 masing-masing sebesar $v(\theta_1)$ dan $v(\theta_2)$ dinamakan penduga yang lebih efisien dari penduga θ_2 apabila:

$$\frac{v(\hat{\theta}_1)}{v(\hat{\theta}_2)} < 1 \text{ atau ragam } \hat{\theta}_1 \text{ lebih}$$

kecil dari ragam $\hat{\theta}_2$

c. Penduga Konsisten
Penduga konsisten adalah penduga dimana semakin besar contohnya semakin mendekati nilai parameternya

$$\lim_{n \to \sim} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$$

$\overline{X}$ *penduga yang konsisten*

2. Penduga Selang (Interval)

1. Pendugaan selang bagi nilai tengah populasi μ bila σ^2 diketahui

$$P\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

2. Pendugaan selang kepercayaan bagi nilai tengah μ bila σ^2 tidak diketahui

a. $n \geq 30$

$$P\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

b. $n < 30$

$$P\left(\overline{X} - \alpha/2\,(n\text{-}1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1).\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

3. Pendugaan selang μ_1 - μ_2 :

a. Bila dua populasi dengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui maka:

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

b. Bila dua populasi dengan ragam σ_1^2, σ_2^2 tidak diketahui tetapi n_1, $n_2 \geq 30$ maka:

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

c. Bila dua populasi dengan ragam $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tetapi besarnya tidak diketahui dan n_1, n_2 < 30 maka:

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\alpha/2}.(\nu).Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\alpha/2}.(\nu).Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\nu = n_1 + n_2 - 2\ ;\ Sp = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

d. Bila dua populasi dengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan n_1, n_2 < 30 maka:

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\alpha/2}.(\nu).\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\alpha/2}.(\nu).\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\nu = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\left(S_1^2/n_1\right)^2 / n_1 - 1 + \left(S_2^2/n_2\right)^2 / n_2 - 1}$$

e. Bila dua populasi saling bergantung (berpasangan) maka:

$$P\left(\bar{d} - t_{\alpha/2}(n-1).\frac{Sd}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2}(n-1).\frac{Sd}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$d_i = X_{2i} - X_{1i}, Sd^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} d_i\right)^2}{n\,(n\text{ - }1)}$$

4. Pendugaan selang kepercayaan populasi = P untuk contoh (sample) besar.

$$P\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$\hat{P}$ = Proporsi yang sukses dalam contoh acak berukuran n
$\hat{q} = 1 - \hat{p}$

5. Pendugaan ragam (varians). Selang kepercayaan untuk σ^2 dari suatu populasi normal.

$$P\left(\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

S^2 = ragam contoh acak

$$S^2 \frac{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

6. Pendugaan nisbah suatu populasi normal

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}.\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)\right) = 1-\alpha$$