

1 同次分解の一意性を示し, 補題 7 の証明を完成させよ.

Proof. $S = \sum_{\alpha} S'_{\alpha}$ (S'_{α} は多重次数 α の同次なシジジ) と同次分解したとき, ある $1 \leq i \leq s$ について S'_{α} の i 番目の要素について考える.

$S = (h_1, \dots, h_s), h_i = \sum_{\beta} h_{i\beta} x^{\beta}$ ($h_{i\beta} \in k$) と置く. 多項式 h_i に出現する単項式 $h_{i\beta} x^{\beta}$ は, 同次分解の結果 $S'_{\beta + \text{multideg}(f_i)}$ の i 番目の要素になる. これは次数 β から一意に決まるので, 同次分解全体も一意に決まる. \square

蛇足.

「 $S = \sum_{\alpha} S_{\alpha}$ という同次分解において α は重複しない」という仮定を置いているように見える. この仮定を置かない場合, 一意性は言えない.