1 I のグレブナー基底 G が極小ならば，そのときに限り，全ての $g \in G$ に対し $\mathrm{LC}(g) = 1$ であり $\mathrm{LT}(G)$ は単項式イデアル $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ の極小基底である

Proof. $\Rightarrow$ を示す．

G は極小なので定義より，全ての $g \in G$ に対し $\mathrm{LC}(g) = 1$.

次に $G' = \mathrm{LT}(G)$ が極小であることを見る．任意の $f \in I$ に対し $\mathrm{LC}(\mathrm{LT}(f)) = \mathrm{LC}(f)$ より，$g \in G$ に対し $\mathrm{LC}(\mathrm{LT}(g)) = \mathrm{LC}(g) = 1$. これで極小イデアルの定義の (i) を満たすことが示せた．

ある $p' \in G'$ が $\mathrm{LT}(p') \in \langle \mathrm{LT}(G' - \{p'\}) \rangle$ を満たすとする．$\mathrm{LT}(p')$ が $\mathrm{LT}(G') - \{p'\}$ の線型結合で書け，$\mathrm{LT}(p')$ は単項式なので，ある $g' \in G' - \{p'\}$ と，ある単項式 $h_{g'} \in I$ により $\mathrm{LT}(p') = h_{g'}\mathrm{LT}(g')$ と書ける．

$g' = \mathrm{LT}(g)$ なる g を用いて

$$q = p - h_{g'}g \in I$$

と置くと，右辺の減算により最高次の項が消えている．G がグレブナー基底であることから，除算アルゴリズムを用いて $q = \sum_{g \in G} q_g g$ と書けるが，$\mathrm{LT}(q) < \mathrm{LT}(p)$ であり，除算アルゴリズムの性質より $q_p = 0$ となる．

以上より $q = p - h_{g'}g$ が $G - \{p\}$ の線型結合で書け，従って $p = q + h_{g'}g$ も同様となる．これより $p \in \langle G - \{p\} \rangle$ が示せた．これの対偶を取ることで，極小イデアルの定義の (ii) を満たすことが示せた．

$\Leftarrow$ を示す．

証明の前半と同様，任意の $f \in I$ に対し $\mathrm{LC}(f) = \mathrm{LC}(\mathrm{LT}(f))$ より，$g \in G$ に対し $\mathrm{LC}(g) = \mathrm{LC}(\mathrm{LT}(g)) = 1$.

ある $p \in G$ が $\mathrm{LT}(p) \in \langle \mathrm{LT}(G - \{p\}) \rangle$ を満たすとする．

$$\mathrm{LT}(p) = \mathrm{LT}(\mathrm{LT}(p))$$
$$\mathrm{LT}(G - \{p\}) = \mathrm{LT}(\mathrm{LT}(G - \{p\}))$$

より

$$\mathrm{LT}(\mathrm{LT}(p)) \in \langle \mathrm{LT}(\mathrm{LT}(G - \{p\})) \rangle$$

さらに $\mathrm{LT}(G - \{p\}) = \mathrm{LT}(G) - \{\mathrm{LT}(p)\}$ より

$$\mathrm{LT}(\mathrm{LT}(p)) \in \langle \mathrm{LT}(\mathrm{LT}(G) - \{\mathrm{LT}(p)\}) \rangle.$$

$p' = \mathrm{LT}(p), G' = \mathrm{LT}(G)$ と置くと，「$\mathrm{LT}(p) \in \langle \mathrm{LT}(G - \{p\}) \rangle$ ならば $\mathrm{LT}(p') \in \langle \mathrm{LT}(G' - \{p'\}) \rangle$」が言えたので，その対偶である「$\mathrm{LT}(p') \notin \langle \mathrm{LT}(G' - \{p'\}) \rangle$ ならば $\mathrm{LT}(p) \in \langle \mathrm{LT}(G - \{p\}) \rangle$」が示せた． $\square$