1　$F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ を固定し $r = \overline{f}^F$ と置く．この演習で $\overline{f}^{F\cup\{r\}} = 0$ を証明する．

a.　除算アルゴリズムの中間の割られる多項式 p の最高次の項がどの $\mathrm{LT}(f_i)$ でも割れない最初の場所を考える．なぜ $\mathrm{LT}(p) = \mathrm{LT}(r)$ になり，なぜ次の割られる多項式が $p - r$ になるのか説明せよ．

Proof. p 最高次の項で $LT f_i$ で割れないものは最終的に余りとして r の項となる．除算アルゴリズムでは順序が大きな項から処理するので $\mathrm{LT}(p) = \mathrm{LT}(r)$ となる．

そのときの商として $\mathrm{LT}(p)/\mathrm{LT}(r) = 1$ が立つので，次の割られる多項式は $p - r$ となる．□

b.　前小問から続けて除算アルゴリズムで，これから出てくる中間の割られる多項式の最高次の項は，必ず $\mathrm{LT}(f_i)$ のうちの 1 つで割れることを説明せよ

Proof. 前の小問の続きから始める．

前小問以降の各ステップに出現する割られる多項式の最高次の項で，いづれの $\mathrm{LT}(f_i)$ でも割れない項はそのまま r に移動するだけとなる．よって $p - r$ という減算をした時点で，最終的に余りとなる項は消去されており，必ずいづれかの $\mathrm{LT}(f_i)$ で割れる．□

c.　余りが 0 になる，という求める結論を導け

Proof. 中間の割られる多項式 p の最高次の項 $\mathrm{LT}(p)$ が必ずいづれかの $\mathrm{LT}(f_i)$ で割れる場合 (小問 (a) の前提が不成立の場合) は，除算アルゴリズムが $r = 0$ のまま進み $r = 0$ で完了する．この場合，示したかった結果は成立する．

いづれかの中間の割られる多項式 p の最高次の項が $\mathrm{LT}(p)$ いづれの $\mathrm{LT}(f_i)$ でも割れない場合 (小問 (a) の前提が成立する場合) は，小問 (a), (b) より余りが 0 となる．□

d.　(§3 の演習 11 を解いた人向け) §3 の演習 11 を使い，$remainder f F \cup \{r\} = 0$ の別の証明を与えよ

Proof. TBP □