

1 $S(f, g)$ は使う単項式順序に依存するか?

Proof. 依存することを実例で示す.

$f = x + y, g = y \in k[x, y]$ とし, 2 つの単項式順序を以下のように定める.
変数どうしの順序を

$$x >_{mo1} y$$

$$y >_{mo2} x$$

で定め, 任意の単項式については辞書式順序で定める.

単項式順序 $mo1$ を用いると, $\text{LCM}(\text{LM}(f), \text{LM}(g)) = \text{LCM}(x, y) = xy$
より

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{xy}{x} \cdot f - \frac{xy}{y} \cdot g \\ &= y(x + y) - xy \\ &= y^2. \end{aligned}$$

単項式順序 $mo2$ を用いると, $\text{LCM}(\text{LM}(f), \text{LM}(g)) = \text{LCM}(y, y) = y$
より

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{y}{y} \cdot f - \frac{y}{y} \cdot g \\ &= x + y - y \\ &= x. \end{aligned}$$

□