1 $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle$ を満たすとき $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ を示せ (定理 4 の証明の穴埋め)

Proof. $I \supset \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ は明らかなので $I \subset \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ を示す. I の任意の元を f と置き, この f に除算アルゴリズムを適用していく.

もし $f = 0$ であれば $f \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. 以下では $f \neq 0$ と置く. $LT(f) \in \langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle$ より $\{h_i\}_{i=1}^t$ $(h_i \in k[x_1, \ldots, x_n])$ が存在して $LT(f) = \sum_{i=1}^t h_i LT(g_i)$ となる. 2 章 4 節の補題 2 と同様の議論により, ある単項式 $a \in k[x_1, \ldots, x_n]$ と $1 \leq j \leq t$ が存在して

$$LT(f) = aLT(g_j)$$

が成立する.

ここで $f^{(1)} = f - ag_j$ と置く. a は単項式なので $LT(a) = a$. よって $LT(ag_j) = LT(a)LT(g_j) = aLT(g_j) = LT(f)$. 右辺の引き算 $f - ag_j$ で $LT(f)$ の項が打ち消し合うので $LT(f) > LT(f^{(1)})$ が成立する.

同様に $f^{(i)}$ $(i \geq 2)$ を定義すると, 単項式の降下列

$$LT(f) > LT(f^{(1)}) > LT(f^{(2)}) > \ldots$$

が得られ, 2 章 2 節の補題 2 よりこの降下列はどこかで止まる. (つまり, ある $s \geq 0$ があって $f^{(i)} = f^{(s)}$ $(i \geq s)$ となる.) $f^{(i)} \neq 0$ であれば $f^{(i)} \neq f^{(i+1)}$ なので, 降下列は 0 で止まる.

$f^{(i+1)} \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ を仮定すると $f^{(i)} = f^{(i+1)} + ag_j \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ となる. ある $s \geq 0$ で $f^{(s)} = 0 \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ となるので $f = f^{(0)} \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$.

以上で $I \subset \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ が示された. $\square$