1 イデアルの生成集合の元が因数分解できる場合の議論

a. $g = g_1 g_2$ のとき，任意の f について $\mathbf{V}(f,g) = \mathbf{V}(f,g_1) \cup \mathbf{V}(f,g_2)$

Proof. $g_i(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow g(\mathbf{x}) = 0$ $(i = 1,2)$ より $\mathbf{V}(f,g_i) \subset \mathbf{V}(f,g)$ $(i = 1,2)$. よって $\mathbf{V}(f,g_1) \cup \mathbf{V}(f,g_2) \subset \mathbf{V}(f,g)$ が分かる.

「$g(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow g_1(\mathbf{x}) = 0$ または $g_2(\mathbf{x}) = 0$」より，「$\mathbf{x} \in \mathbf{V}(f,g) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{V}(f,g_1)$ または $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(f,g_2)$」. よって $\mathbf{V}(f,g_1) \cup \mathbf{V}(f,g_2) \supset \mathbf{V}(f,g)$ が示された.

以上より $\mathbf{V}(f,g_1) \cup \mathbf{V}(f,g_2) = \mathbf{V}(f,g)$ が示せた. □

b. $\mathbb{R}^3$ において，$\mathbf{V}(y - x^2, xz - y^2) = \mathbf{V}(y - x^2, xz - x^4)$ を示せ

Proof. $y - x^2 = 0$ かつ $xz - y^2 = 0$ ならば $xz - x^4 = 0$. $y - x^2 = 0$ かつ $xz - x^4 = 0$ ならば $xz - y^2 = 0$.

以上より $\mathbf{V}(y - x^2, xz - y^2) = \mathbf{V}(y - x^2, xz - x^4)$. □

c. a を使って b の代数多様体を描け

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(y - x^2, xz - y^2) &= \mathbf{V}(y - x^2, xz - x^4) \\
&= \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \cup \mathbf{V}(y - x^2, x) \\
&= \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \cup \mathbf{V}(y, x) \\
&= \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \cup \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

より，この代数多様体は twisted cubic と z 軸の併合となる.