1　$k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルの全ての昇鎖が安定するならば, Hilbert の基底定理が従うことを示せ

Proof. 対偶を示す.

$k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルで, 有限の生成集合を持たないものが存在するとする. それを I と置く.

I の元 x_0 を 1 つ取り, イデアル $\langle x_0 \rangle$ を作る. I は有限の生成集合を持たないので $\langle x_0 \rangle \neq I$. よって $I \setminus \langle x_0 \rangle$ から元 x_1 が取れ, イデアル $\langle x_0, x_1 \rangle$ が作れる. 以下, 同様に x_i が (選択公理より) 選択でき,

$$\langle x_0 \rangle \subsetneq \langle x_0, x_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle x_0, \ldots, x_i \rangle \subsetneq \cdots \subset I$$

という昇鎖列が構成できる. □

この議論では多項式の性質は使ってないので, 一般の環 R において「全てのイデアルが有限生成 (ネーター環, Noetherian ring)」と「全てのイデアルの昇鎖が安定する」は同値であることが言える.