1　単項式イデアル $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ が有限の基底 $\langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle$ を持つとき，A の有限部分集合による基底 $\langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} : \alpha(i) \in A, x^{\alpha(i)} | x^{\beta(i)} \rangle$ が存在することを示せ

これは定理 5 (Dickson の補題) の証明の穴埋めの問題.

Proof. 条件を満たすような有限基底を構成する.

$x^{\beta(i)} \in \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ と補題 2 より $\exists \alpha(i) \in A, x^{\alpha(i)} \mid x^{\beta(i)}$. この $\alpha(i)$ を使い, イデアル $\langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$ を定義する.

ここからは $\langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle = \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$ を示す.

$\subset$ の方向.

$x^{\alpha(i)} \mid x^{\beta(i)}$ より $x^{\beta(i)} \in \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$. イデアルの基底の元を全て含んでいるので, $\langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle \subset \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$ が示された.

$\supset$ の方向.

$\{x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)}\}$ はイデアル I の基底なので, $x^\alpha \in \langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle$ $(\alpha \in A)$. 特に $x^{\alpha(i)} \in \langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle$. イデアルの基底の元を全て含んでいるので, $\langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle \supset \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$ が示された.

以上より $I = \langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(s)} \rangle = \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)} \rangle$ が示された. $\square$