1　$\mathbf{u}, \sigma$ から決定されるウェイト順序 $>_{\mathbf{u},\sigma}$ について

a.　系 6 を使って $>_{\mathbf{u},\sigma}$ が単項式順序であることを示せ

Proof. 単項式順序の定義に従って示す.

(i) 全順序性について

$$\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta \equiv \mathbf{u}\cdot\alpha > \mathbf{u}\cdot\beta \text{ または } \mathbf{u}\cdot\alpha = \mathbf{u}\cdot\beta, \alpha >_\sigma \beta$$

と定義される. 厳密にはこれだけでは $=_{\mathbf{u},\sigma}$ についての定義が無いので,

$$\alpha =_{\mathbf{u},\sigma} \beta \equiv \mathbf{u}\cdot\alpha = \mathbf{u}\cdot\beta, \alpha =_\sigma \beta$$

と定める.

($\alpha =_{\mathbf{u},\sigma} \beta \equiv \alpha \not>_{\mathbf{u},\sigma} \beta$かつ$\alpha \not<_{\mathbf{u},\sigma} \beta$ と定義しても良いが, この場合全順序性が自明になるので採用しない.)

$\mathbf{u}\cdot\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ より,

- $\mathbf{u}\cdot\alpha > \mathbf{u}\cdot\beta$,
- $\mathbf{u}\cdot\alpha = \mathbf{u}\cdot\beta$,
- $\mathbf{u}\cdot\alpha < \mathbf{u}\cdot\beta$

のいづれか 1 つのみが成り立つ. 1 つ目の場合は $\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta$, 3 つ目の場合は $\alpha <_{\mathbf{u},\sigma} \beta$ となる.

2 つ目の場合は, さらに $>_\sigma$ が全順序であることから

- $\alpha >_\sigma \beta$
- $\alpha =_\sigma \beta$
- $\alpha <_\sigma \beta$

のいづれか 1 つのみが成り立つ. 1 つ目の場合は $\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta$, 2 つ目の場合は $\alpha =_{\mathbf{u},\sigma} \beta$, 3 つ目の場合は $\alpha <_{\mathbf{u},\sigma} \beta$ となる.

以上より, $\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta$, $\alpha =_{\mathbf{u},\sigma} \beta$, $\alpha <_{\mathbf{u},\sigma} \beta$ のうち 1 つのみが成り立つので, $>_{\mathbf{u},\sigma}$ は全順序である.

(ii) 和による順序の保存について

$\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とする.

$\mathbf{u}\cdot(\alpha+\gamma) = \mathbf{u}\cdot\alpha + \mathbf{u}\cdot\gamma$ より, $\mathbf{u}\cdot\alpha > \mathbf{u}\cdot\beta \Rightarrow \mathbf{u}\cdot(\alpha+\gamma) > \mathbf{u}\cdot(\beta+\gamma)$. $>_\sigma$ は単項式順序なので $\alpha >_\sigma \beta \Rightarrow \alpha+\gamma >_\sigma \beta+\gamma$.

以上より $\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta \Rightarrow \alpha+\gamma >_{\mathbf{u},\sigma} \beta+\gamma$.

(iii) 整列順序性について

任意の $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ の部分集合 $S = \{\alpha_i | \alpha_i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ に最小元 α_0 が存在することを示す.

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整列集合なので, $\{\mathbf{u} \cdot \alpha | \alpha \in S\}$ に最小元 $s_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する.

$>_\sigma$ は整列順序なので, $\{\alpha | \mathbf{u} \cdot \alpha = s_0\}$ に最小元 α_0 が存在する.

以上より S の $>_{\mathbf{u},\sigma}$ についての最小元 α_0 が存在するため, 整列順序となる. □

b. $>_{\mathbf{u},lex}$ が $>_{grlex}$ となる $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を見付けよ

Proof. $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1)$ とすると, $\mathbf{u} \cdot \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i = |\alpha|$ より $>_{\mathbf{u},lex}$ は $>_{grlex}$ になる. □

c. どんな $\mathbf{u}$ でも, タイブレイクが起き得ることを証明せよ

Proof. 実は $n = 1$ のときは成立しない.

例えば $\mathbf{u} = (1)$ としたとき $\mathbf{u} \cdot \alpha = \alpha$ なので, 明らかに不成立.

以下 $n \geq 2$ のときを考える.

まず任意の $\mathbf{u}$ に対し $\gamma (\neq 0) \in \mathbb{Z}^n$ が存在して $\mathbf{u} \cdot \gamma = 0$ となることを示す.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ と置くと, $\gamma = (t_1 u_n, t_2 u_n, \ldots, t_{n-1} u_n, -(t_1 u_1 + \cdots + t_{n-1} u_{n-1}))$ $((t_1, \ldots, t_{n-1}) \neq 0)$ が条件を満たすので, 実際に構成することで存在が示せた.

次に $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を上手く選ぶことで, $\beta = \alpha + \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とできる. この α, β が構成できたことから, 任意の $\mathbf{u}$ に対し $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ $(\alpha \neq \beta)$ が存在して $\mathbf{u} \cdot \alpha = \mathbf{u} \cdot \beta$ となることが示せた. □

d. ウェイト順序である消去順序が次の性質を持つことを示せ: 単項式 x^α に $x_1, \ldots, x_i$ のどれかが現れる場合, $x_{i+1}, \ldots, x_n$ しか現れない任意の単項式 x^β に対し $x^\alpha >_i x^\beta$. 消去順序は消去定理で重要な役割を担う. これについては次の章で扱う.

Proof. 消去順序 $>_i = >_{\mathbf{u},grevlex}$ で使用するベクトルは, 先頭の i 個が 1 で残りが 0 の $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ である.

$\mathbf{u} \cdot x^\alpha > 0, \mathbf{u} \cdot x^\beta = 0$ より $x^\alpha >_i x^\beta$ となる. □