1 $f = x^3 - x^2y - x^2z + x$ の $f_1 = x^2y - z, f_2 = xy - 1$ での割り算を調査する

a. grlex での割り算を計算せよ

a.1. f を (f_1, f_2) で割った余り r_1

$p = f, a_1 = a_2 = 0$ と初期化する.
$LT(p) = x^3, LT(f_1) = x^2y \to$ 商が立たない.
$LT(p) = x^3, LT(f_2) = xy \to$ 商が立たない.
p, r を更新 $\to p := -x^2y - x^2z + x, r := x^3$.
$LT(p) = -x^2y, LT(f_1) = x^2y \to LT(p)/LT(f_1) = -1$.
p, a_1 を更新 $\to p := p + f_1 = -x^2z + x - z, a_1 := a_1 + (-1) = -1$.
$LT(p) = -x^2z, LT(f_2) = xy \to$ 商が立たない.
$LT(p) = -x^2z, LT(f_1) = x^2y, LT(f_2) = xy \to$ どちらも商が立たない. p, r を更新 $\to p := x - z, r := x^3 - x^2z$ と更新. (ここが下と異なる)
$LT(p) = x - z, LT(f_1) = x^2y, LT(f_2) = xy \to$ どちらも商が立たない. p, r を更新 $\to p := -z, r := x^3 - x^2z + x$ と更新.
$LT(p) = -z, LT(f_1) = x^2y, LT(f_2) = xy \to$ どちらも商が立たない. p, r を更新 $\to p := 0, r := x^3 - x^2z + x - z$ と更新.
$p = 0$ となったので終了. $f = -f_1 + r_1, r_1 = x^3 - x^2z + x - z$ となった.

a.2. f を (f_2, f_1) で割った余り r_2

$p = f, a_1 = a_2 = 0$ と初期化する.
$LT(p) = x^3, LT(f_1) = x^2y \to$ 商が立たない.
$LT(p) = x^3, LT(f_2) = xy \to$ 商が立たない.
p, r を更新 $\to p := -x^2y - x^2z + x, r := x^3$.
$LT(p) = -x^2y, LT(f_2) = xy \to LT(p)/LT(f_2) = -x$.
p, a_2 を更新 $\to p := p + xf_2 = -x^2z, a_2 := -x$.
$LT(p) = -x^2z, LT(f_1) = x^2y, LT(f_2) = xy \to$ どちらも商が立たない. p, r を更新 $\to p := 0, r := x^3 - x^2z$. (ここが上と異なる)
$p = 0$ となったので終了. $f = -xf_2 + r_2, r_2 = x^3 - x^2z$ となった.

b. $r = r_1 - r_2$ はイデアル $\langle f_1, f_2 \rangle$ に含まれるか?

Proof.

$$r \equiv r_1 - r_2 \equiv f - f \equiv 0 \mod \langle f_1, f_2 \rangle$$

より $r \in \langle f_1, f_2 \rangle$. □

具体的には,

$$
\begin{aligned}
r &= r_1 - r_2 \\
&= (f + f_1) - (f + xf_2) \\
&= f_1 - xf_2 \in \langle f_1, f_2 \rangle
\end{aligned}
$$

となる.

c. r を $\langle f_1, f_2 \rangle$ で割った余りを求めよ．除算をせずに所属判定が何故できたのか?

$r = r_1 - r_2 = x - z$. r の全ての項は 1 次式であり, f_1 は 3 次式, f_2 は 2 次式なので, $grlex$ を使っている限り商が立たない. なので, 余りは $x - z$ $(\neq 0)$ となる.

イデアルの所属判定ができたのは　$\mathrm{mod}\ \langle f_1, f_2 \rangle$ で考えたから.

d. r 以外の $g \in \langle f_1, f_2 \rangle$ で, (f_1, f_2) で割った余りが 0 でないものを求めよ

ヒントに従って, 上手く Leading Term が消し合うような計算を考える.

$y \cdot f_1 = x^2y^2 - yz, (xy + 1) \cdot f_2 = x^2y^2 - 1$ と同じ Leading Term を作り, $g = y \cdot f_1 - (xy + 1) \cdot f_2 = -yz + 1 \in \langle f_1, f_2 \rangle$ と定める.

$g <_{grlex} f_1, g <_{grlex} f_2$ より g を (f_1, f_2) で割った余りは ((f_2, f_1) で割った余りも) g $(\neq 0)$ である.

e. 除算アルゴリズムがイデアルの所属問題を解決するか?

しない. 上の小問の回答がその反例.

本質的な障壁は f_1, f_2 の次数が高過ぎることなので, $x - z$ 内の項 x を消去できるような別の基底を選ぶ必要がある.