1 $V \subset \mathbb{R}^3$ を (t, t^m, t^n) $(m, n \geq 2)$ でパラメタ付けされた曲線とする

a. V が affine 多様体であることを示せ

Proof. $V = \mathbf{V}(y - x^m, z - x^n)$ であることを示す.
$\supset$ の方向.
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が $y - x^m = 0, z - x^n = 0$ を満たしているとする. $t = x$ と定めると $(x, y, z) = (t, t^m, t^n)$ となり, 上記のパラメタ表現になる.
$\subset$ の方向.
逆に $(x, y, z) = (t, t^m, t^n)$ とすると, $y - x^m = 0, z - x^n = 0$ を満たすので, この点は $\mathbf{V}(y - x^m, z - x^n)$ に含まれる.
よって $V = \mathbf{V}(y - x^m, z - x^n)$ であり V は affine 多様体である. □

b. 演習 9 のアイディアを使って $\mathbf{I}(V)$ を決定せよ

Proof. $I = \mathbf{I}(V)$ と置いて, $I = \langle y - x^m, z - x^n \rangle$ であることを示す.
$\supset$ の方向.
$\langle y-x^m, z-x^n \rangle$ の任意の元を $f = g \cdot (y-x^m) + h \cdot (z-x^n)$ $(f, g, h \in \mathbb{R}[x, y, z])$ とする. V 上の点 (x, y, z) では $y - x^m = 0, z - x^n = 0$ が成立しているので, そこでは $f = 0$ となる. よって, $f \in I$.
$\subset$ の方向.
I の任意の元を f とする. $f \in \mathbf{V}(y-x^m, z-x^n)$ より, $y-x^m = 0, z-x^n = 0$ を満たす全ての点で $f(x, y, z) = 0$ となる.
まず f を $y - x^m$ で割ると, $f = g \cdot (y - x^m) + r(x, z)$ $(g \in \mathbb{R}[x, y, z], r \in \mathbb{R}[x, z])$ となる.
次に r を $z - x^n$ で割ると, $r = h \cdot (z - x^n) + s(x)$ $(h \in \mathbb{R}[x, z], s \in \mathbb{R}[x])$ となる.
まとめると $f = g \cdot (y - x^m) + h \cdot (z - x^n) + s(x)$ となる.
$\forall (x, y, z) \in V$ に対して $f(x, y, z) = 0, y-x^m = 0, z-x^n = 0$ より $r(x) = 0$ となる. 今 x は $\mathbb{R}$ (無限集合) 上の任意の点を動くので, $r = 0$ となる. よって, $f = g \cdot (y - x^m) + h \cdot (z - x^n)$ より $f \in \langle y - x^m, z - x^n \rangle$. □