1 invlex が lex のある変数の並べ替えであることを示せ

Proof. invlex は, 多項式の変数を $x_1 \leftrightarrow x_n, x_2 \leftrightarrow x_{n-1}, \ldots$ と入れ替えて lex で順序付けしたものと同等であることを示す.

最初に主張を厳密なものにする. $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 上の (自己同型) 写像 $F : k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を

$$
\begin{aligned}
F(a) &= a \\
F(x_m) &= x_{n-m+1} \\
F(f+g) &= F(f) + F(g) \\
F(fg) &= F(f)F(g) \\
&\quad (a \in k, f, g \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n])
\end{aligned}
$$

で定める. (今回は単項式の f, g だけ考えれば良いので, $F(f+g) = F(f) + F(g)$ は蛇足で, この証明では使わない.)

$F^{-1} = F$ であり, $f >_{invlex} g \Rightarrow F(f) >_{lex} F(g), f >_{lex} g \Rightarrow F(f) >_{invlex} F(g)$ を満たすことを示す.

$F^{-1} = F$ を示すために F^2 が恒等写像であることを示す.

$a \in k$ に対し, $F(F(a)) = F(a) = a$.

x_m に対し, $F(F(x_m)) = F(x_{n-m+1}) = F(x_{n-(n-m+1)+1}) = x_m$.

一般の $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は, k の元および x_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ の和と積で書けるので, 構造的帰納法により $F(F(f)) = f$ が示せる.

$F^{-1} = F$ より F が自己同型だと分かるので, 残りは $f >_{lex} g \Rightarrow F(f) >_{invlex} F(g)$ を示せば良い.

多重指数の視点で F の作用を調べる.

$F(x_m) = x_{n-m+1}$ より $F(x^\alpha) = x^{\alpha'}$ (α' は α の左右を入れ替えたもの). $F(x^{\alpha+\beta}) = F(x^\alpha x^\beta) = F(x^\alpha)F(x^\beta) = x^{\alpha'} x^{\beta'} = x^{\alpha'+\beta'} = x^{(\alpha+\beta)'}$ より, 一般の α について α' ($F(x^\alpha)$ の多重指数) は α の左右を入れ替えたものになる.

$f = ax^\alpha, g = bx^\beta$ と置く.

$$
\begin{aligned}
f >_{lex} g &\Leftrightarrow \alpha - \beta \text{の最も左のゼロでない要素が正} \\
&\Leftrightarrow \alpha' - \beta' \text{の最も右のゼロでない要素が正} \\
&\Leftrightarrow ax^{\alpha'} >_{invlex} bx^{\beta'} \\
&\Leftrightarrow F(ax^\alpha) >_{invlex} F(bx^\beta) \\
&\Leftrightarrow F(f) >_{invlex} F(g)
\end{aligned}
$$

□