1　補題 8 から $multideg$ の 2 つの性質が得られる

a.　補題 8 を証明せよ

Proof. $multideg(fg) = multideg(f) + multideg(g)$ を示す.

f, g が単項式の定数倍のときは $multideg(f) = multideg(ax^\alpha) = \alpha$ より明らか.

f が単項式の定数倍, g が多項式のときは

$$\begin{aligned}
multideg(fg) &= multideg\left(ax^\alpha \sum_\beta b_\beta x^\beta\right) \\
&= multideg\left(\sum_\beta ab_\beta x^{\alpha+\beta}\right) \\
&= \max_\beta \{\alpha + \beta | b_\beta \neq 0\} \\
&= \alpha + \max_\beta \{\beta | b_\beta \neq 0\} \\
&= multideg(f) + multideg(g).
\end{aligned}$$

f, g が多項式のときは

$$\begin{aligned}
multideg(fg) &= multideg\left(\left(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha\right)\left(\sum_\beta b_\beta x^\beta\right)\right) \\
&= multideg\left(\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta}\right) \\
&= \max_{\alpha,\beta} \{\alpha + \beta | a_\alpha b_\beta \neq 0\} \\
&= \max_\alpha \{\max_\beta \{\alpha + \beta | b_\beta \neq 0\} | a_\alpha \neq 0\} \\
&= \max_\alpha \{\alpha + \max_\beta \{\beta | b_\beta \neq 0\} | a_\alpha \neq 0\} \\
&= \max_\alpha \{\alpha + multideg(g) | a_\alpha \neq 0\} \\
&= \max_\alpha \{\alpha | a_\alpha \neq 0\} + multideg(g) \\
&= multideg(f) + multideg(g).
\end{aligned}$$

□

Proof. $f + g \neq 0$ のとき $multideg(f + g) \leq \max(multideg(f), multideg(g))$ を示す.

ある多項式 f に出現する単項式 (つまり係数が 0 でない項の単項式部分) の集合を $mono(f)$ と書くとする．$f+g$ に出現する単項式は f もしくは g に出現しなければならないので,

$$mono(f+g) \subset mono(f) \cup mono(g)$$

が成立する．これより $LM(f{+}g) \in mono(f)$ または $LM(f{+}g) \in mono(g)$ が分かるので, $LM(f+g) \leq LM(f)$ または $LM(f+g) \leq LM(g)$．よって, $multideg(f+g) \leq \max(multideg(f), multideg(g))$

特に, $multideg(f) \neq multideg(g)$ のときは, 対称性より $multideg(f) > multideg(g)$ として良い．$LM(f) \notin mono(g)$ より係数が打ち消し合う可能性が無いため $LM(f) \in mono(f+g)$ となる．よって, $multideg(f+g) \leq multideg(f)$. $multideg(f) > multideg(g)$ より $\max(multideg(f), multideg(g)) = multideg(f)$.
両者を合わせて $multideg(f{+}g) = multideg(f) = \max(multideg(f), multideg(g))$ が導かれる． □

b. $multideg(f+g)$ が $\max(multideg(f), multideg(g))$ になる例, ならない例を示せ

例 1 (例)**.** $k[x, y]$ で例を考える．

$f(x, y) = x, g(x, y) = y$ とすると, $multideg(f) = (1, 0), multideg(g) = (0, 1), multideg(f{+}g) = (1, 0)$ より $multideg(f{+}g) = \max(multideg(f), multideg(g))$.

例 2 (反例)**.** $k[x, y]$ で反例を考える．

$f(x, y) = x{+}y, g(x, y) = -x$ とすると $multideg(f) = (1, 0), multideg(g) = (1, 0), multideg(f{+}g) = (0, 1)$ より $multideg(f{+}g) < \max(multideg(f), multideg(g))$.