1　k^2 上の多項式でパラメータ付けされる曲線が, あるアフィン代数多様体に含まれることを示す

d.　a, b, c を一般化して k^3 上での同じ主張を示せ

Proof. 小節 a, b, c と同じ議論を使う.

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a+b+c \leq m$ という条件を満たす $(a,b,c) \in \mathbb{Z}$ の組み合わせの数は

$$
\begin{aligned}
n(m) &= \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m-i} \left(\sum_{k=0}^{m-i-j} 1 \right) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{m-i} m-i-j+1 \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} (m-i+1)(m-i+1) - \frac{(m-i)(m-i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{(i+1)(i+2)}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{(i+1)(i+2)(i+3) - i(i+1)(i+2)}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}
\end{aligned}
$$

よって $n(m) \in \Theta(m^3)$.

次に $[f(t,u)]^a[g(t,u)]^b[h(t,u)]^c$ に出現する単項式 t^pu^q の種類を数える.

$[f(t,u)]^a[g(t,u)]^b[h(t,u)]^c$ に出現する単項式 t^pu^q は, それぞれ f,g,h に出現するある単項式を $t^{p_1}u^{q_1}, t^{p_2}u^{q_2}, t^{p_3}u^{q_3}$ と置いたとき, $p = ap_1 + bp_2 + cp_3, q = aq_1 + bq_2 + cq_3$ と書ける. ($(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)$ の組み合わせは複数あり得る.)

$a+b+c \leq m$ より $a,b,c \in O(m)$. よって $p,q \in O(m)$. t^pu^q の種類の数は $O(m^2)$ となり, ある程度大きな m で (a,b,c) の組み合わせの数が t^pu^q の種類の数を越え, $\{[f(t,u)]^a[g(t,u)]^b[h(t,u)]^c | a,b,c \geq 0, a+b+c \leq m\}$ が k 上の線形空間の元として一次従属になる. よって, $e_{(a,b,c)} \in k$ が存在して

$$
\sum_{a,b,c} e_{(a,b,c)} f^a g^b h^c = 0
$$

が成立する.

この $e_{(a,b,c)}$ を用いて $F(x,y,z) = \sum_{a,b,c} e_{(a,b,c)} x^a y^b z^c$ と $F \in k[x,y,z]$ を定めると, $F(x,y,z)$ は $x = f(t,u), y = g(t,u), z = h(t,u)$ でパラメータ付けされた曲線 C 上で 0 になる.

$\mathbf{V}(F) = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$ という定義より, この曲線 C は $\mathbf{V}(F)$ に含まれる. $\square$