1 k^2 上の多項式でパラメータ付けされる曲線が, あるアフィン代数多様体に含まれることを示す

c. b より, $C : x = f(t), y = g(t)$ を任意のパラメータ付けされた k^2 上の曲線としたとき, C がある $F \in k[x, y]$ での $\mathbf{V}(F)$ に含まれることを示せ

Proof. 小問 (b) より $\{[f(t)]^a[g(t)]^b | a, b \geq 0, a + b \leq m\}$ が k 上の線形空間の元として一次従属になる. よって, $e_{(a,b)} \in k$ が存在して

$$\sum_{a,b} e_{(a,b)} f^a g^b = 0$$

が成立する.

この $e_{(a,b)}$ を用いて $F(x, y) = \sum_{a,b} e_{(a,b)} x^a y^b$ と $F \in k[x, y]$ を定めると, $F(x, y)$ は $x = f(t), y = g(t)$ でパラメータ付けされた曲線 C 上で 0 になる.

$\mathbf{V}(F) = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ という定義より, この曲線 C は $\mathbf{V}(F)$ に含まれる. □