1　命題 4 を証明せよ

Proof. $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ および $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s) \supset \mathbf{V}(g_1,\ldots,g_t)$ を示せば良い.

ある多項式 $f \in \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ を取るとある $\{e_i \mid e_i \in k[x_1,\ldots,x_n]\}$ で

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{s} e_i(x_1,\ldots,x_n) f_i(x_1,\ldots,x_n) \tag{1}$$

と書ける.

$\{g_i\}$ はイデアル $\mathbf{I}$ の基底なので, 各 f_i について,

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{t} h_j^{(i)}(x_1,\ldots,x_n) g_j(x_1,\ldots,x_n) \tag{2}$$

と書ける.

(2) を (1) に代入し,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} e_i(x_1,\ldots,x_n) h_j^{(i)}(x_1,\ldots,x_n)\right) g_j(x_1,\ldots,x_n).$$

よって $f \in \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ が示せた. ここまでで $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ が言えた.

ある点 $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{V}(g_1,\ldots,g_t)$ を取ると $g_i(a_1,\ldots,a_n) = 0$ $(i = 1,\ldots,t)$ が成立する.

今, 上の式 (2) で f_i $(i = 1,\ldots,s)$ が $\{g_j\}_{j=1}^{t}$ の線型結合で書けることが分かっているので, f_i も点 a で 0 になる. よって $a \in \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$. この後半部の議論で $\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s) \supset \mathbf{V}(g_1,\ldots,g_t)$ が言えた. □

前半部の短い証明. $\{f_i\}$ と $\{g_j\}$ はともにイデアル $\mathbf{I}$ の基底なので, $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle = \mathbf{I} = \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$. □