1 捻れ 3 次曲線と同じ議論を使って $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x-y)) = \langle x-y \rangle$ を示せ

Proof. $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x-y)) \supset \langle x-y \rangle$ は補題 7 より明らか. $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x-y)) \subset \langle x-y \rangle$ を示す.

$f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(x-y))$ と取ると, f が $\mathbf{V}(x-y)$ 上で 0 になることから, $f(t,t) = 0$ $(\forall t \in k)$.

$$f(x,y) = g(x,y)(x-y) + r(x)$$

と分解すると, $f(x,x) = 0$ $(\forall x \in k)$ より

$$r(x) = 0 \ (\forall x \in k)$$

k は無限体なので $r \equiv 0$. よって $f(x,y) = g(x,y)(x-y)$ が分かり $f \in \langle x-y \rangle$ となる. 以上より, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x-y)) \subset \langle x-y \rangle$ が示せた. □