

1 代数多様体を \mathbb{Q} 上で考える

$$F_n = \mathbf{V}(x^n + y^n - 1)$$

- a. F_n の自明な解は, n が奇数のとき 2 つ, 偶数のとき 4 つあることを示せ

Proof. $x = 0$ である点は $y^n = 1$ を満たす. n が奇数のときは $y = 1$, 偶数のときは $y = \pm 1$.

y についても同様に考えられ,

$$(x, y) = \begin{cases} (0, 1), (1, 0) & (n: \text{奇数}) \\ (0, \pm 1), (\pm 1, 0) & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

□

- b. Fermat の最終定理が成立しない場合, F_n ($n \geq 3$) が非自明な解を持つことを示せ

Proof. Fermat の最終定理が成立しないため, $n \geq 3$ に対して $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ が存在して $x^n + y^n = z^n$ を満たす. 両辺を z^n で割ると $(x/z)^n + (y/z)^n = 1$ となり, $(x/z, y/z)$ は F_n 上の点だと分かる. x, y, z は 0 ではないので, これは非自明な解となる. □