



Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

**Aproximación Elipsoidal Para Velocidades Sísmicas
en Medios con Anisotropía Monoclínica.**

Trabajo especial de grado presentado ante la ilustre
Universidad de los Andes
como requisito para optar al título de
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Andrés R. Acosta Pizarro
Tutor:
Dr. Pedro L. Contreras E.
Cotutor:
Ing. Gabriel D. Gutiérrez P.

Mérida, Octubre de 2012.

RESUMEN

En este trabajo se introduce una aproximación elipsoidal para las velocidades de fase de los modos longitudinal -P, y transversales -S1 y -S2 en medios que poseen simetría monoclinica. Esta nueva aproximación es válida para ángulos polares pequeños cerca de la dirección vertical, pero sin restricciones en el ángulo azimutal y es válida para grados arbitrarios de anisotropía. A partir de un tratamiento analítico de la ecuación de Christoffel en términos de las lentitudes, se logra conseguir expresiones matemáticas para las velocidades de fase en medios monoclinicos que resultan ser elipsoides 3D rotados respecto a los ejes principales de simetría. Para establecer el grado de validez de estas expresiones, se resuelve numéricamente la ecuación de Christoffel exacta y se comparan los frentes de onda exactos y aproximados, mediante un instrumento de visualización desarrollado en 3D, encontrándose que la aproximación obtenida es válida cerca del eje vertical de simetría. Aunque los modelos monoclinicos pueden presentarse en formaciones geológicas doblemente fracturadas, han sido poco utilizados en los métodos sísmicos multicomponentes en la detección de fracturas debido principalmente a la gran cantidad de parámetros elásticos presentes. Las aproximaciones elipsoidales del frente de onda pueden ser utilizadas para el cálculo de los tiempos de transito, así como el modelaje e inversión de las constantes elásticas en medios doblemente fracturados y para geometrías de adquisición del tipo perfil sísmico vertical multi-azimutal (multi-azimuth walkaway VSP surveys)

Índice general

RESUMEN	II
INTRODUCCION	2
1. Planteamiento del Problema	4
1.1. Objetivos	4
1.2. Motivación	5
1.3. Limitación	6
2. La Ecuación de Christoffel	7
2.1. Ecuación de Onda Elástica	7
2.2. Ecuación de Christoffel	10
2.3. Tipos de Velocidades Sísmicas	13
3. Anisotropía Sísmica	15
3.1. Fenómeno de Anisotropía Sísmica	15
3.2. Clasificación de los Medios Anisótropos en Sísmica de Exploración . .	16

3.3. Medios transversalmente isótropo (VTI) y medios horizontalmente isótropo(HTI).	17
3.4. Anisotropía Ortorrómbica (ORT)	20
3.5. Anisotropía Monoclínica (MNC)	22
3.6. Anisotropía Elíptica	24
3.7. Presencia de Anisotropía en Rocas sedimentarias.	32
4. Aproximación Elipsoidal en Medio Monoclínicos	33
4.1. Tratamiento especial de la ecuación de Christoffel	33
4.2. Velocidades de Fase Elipsoidales en Medios Monoclínicos.	38
4.3. Velocidades NMO en Medios Monoclínicos.	41
5. Visualización de los Frentes de Onda Sísmicos	47
5.1. Solución Numérica Exacta a la Ecuación de Christoffel.	48
5.2. Visualización 3D Utilizando Java.	54
5.3. Validación de la herramienta de Visualización.	59
5.4. Frente de onda exacto y aproximado.	62
6. Conclusión	76
Bibliografía	78
Apéndice	80

Índice de figuras

2.1. Velocidad NMO donde se observa el efecto hiperbólico por la variación del offset. El NMO corrige este efecto logrando un ajuste en los tiempos de tránsitos para poder apilar los datos.	14
3.1. Frente de onda donde a) es del tipo circular (isótropo) ya que $V_{grupo} = V_{fase}$ y b) es no circular (anisótropo) debido a que $V_{grupo} \neq V_{fase}$. . .	16
3.2. Modelo equivalente a un medio VTI de capas finas	17
3.3. Eje de simetría vertical para un medio VTI.	18
3.4. Respuesta de impulso (velocidad de grupo) de la onda SV, mostrando las triplicaciones para un medio VTI [18].	19
3.5. Modelo de equivalente a un medio HTI.	20
3.6. Modelo equivalente a un medio ortorrómbico.	21
3.7. Alineamiento de fracturas distribuidas no perpendicularmente entre sí característica de un medio monoclinico.	22
3.8. Ángulo polar y acimutal.	27
3.9. Anisotropía elíptica donde el frente de onda representa una elipse. . .	30

3.10. Geometría de adquisición para un VSP donde la fuente está localizada en la cercanía de la boca del pozo para simular incidencia vertical. Los receptores usados son de tecnología multicomponente lo que permite el grabado de onda completo. Tomado de VSFusion, op. cit.	31
3.11. Sección sísmica para un VSP, se muestra el arribo de las ondas a los geófonos ubicados debajo del pozo exploratorio.	31
3.12. Rocas sedimentarias	32
4.1. Velocidad de fase en función del ángulo polar θ_1 y azimutal θ_2	34
4.2. Expansión en series de Taylor alrededor de la vertical.	35
4.3. Sistema de fracturas no ortogonales característica de un medio monoclinico.	41
4.4. NMO elipses obtenidos a partir de las ecuaciones (4.25) - (4.33) para las onda P, S_1 y S_2 en medios monoclinicos considerando el modelo de la ecuación (4.34).	45
5.1. Diagrama del programa <i>dchristoffel</i> que se encarga de generar los autovalores y autovectores de la matriz de Christoffel (G_{ik}) por medio del comando "eig" en GNU Octave.	51
5.2. Matriz de datos que contiene la información de los ángulos de elevación y acimutal, velocidades de fase y polarización para cada modo de propagación.	53
5.3. Nube de puntos obtenido por medio de las iteraciones entre los ángulos de EL y AZ que geoméricamente forman una esfera de radio 1. . . .	53

5.4. Diagrama de programación que constituye a una serie de clases que manipulan a la matriz de datos para luego generar las figuras en 3D. Todas la clases están relacionadas entre sí por medio de la clase principal "main".	55
5.5. Autovalores representados en la nube de datos.	57
5.6. Mallado y vector de polarización para la onda P en medios monoclinicos.	58
5.7. Ángulo entre el vector normal y vector de polarización para una coordenada correspondiente a un autovalor.	58
5.8. Mapa de colores para las normales y autovectores donde los colores vienen representados por la escala en la parte inferior derecha.	59
5.9. Velocidades de fase en el cristal de óxido de telurio. a) Vista desde el plano XY y b) vista en 3D del modelo. Tomado de <i>Laboratory for Scientific Visual Analysis</i>	60
5.10. Modelo desarrollado por la herramienta de visualización en Java. Se muestra en a) Vista al plano XY donde se observa las 3 ondas P (rojo), SV (verde) y SH (azul). b)La figura ahora en 3D donde se muestra la onda P y SV. Nótese la similitud con la figura 5.12.	61
5.11. Onda P aproximada para medios monoclinicos.	63
5.12. Onda S1 aproximada para medios monoclinicos.	63
5.13. Onda S2 aproximada para medios monoclinicos.	64
5.14. Onda P exacta (verde-mallado), onda P aproximada (rojo).	64
5.15. Onda S1 exacta (rojo-mallado), onda S1 aproximada (verde).	65
5.16. Onda S2 exacta (verde-mallado), onda S2 aproximada (azul).	65

5.17. Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (rojo) y aproximada (azul) de la onda P en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 10° y d) 20° cerca del eje vertical.	66
5.18. Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (verde) y aproximada (rojo) de la onda S1 en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 15° y d) 20° cerca del eje vertical. Nótese que ya para 20° ambas soluciones comienzan a separarse.	67
5.19. Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (verde) y aproximada (rojo) de la onda S2 en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 15° y d) 20° cerca del eje vertical. Nótese como ambas soluciones comienzan a separarse para la apertura de 20°.	68
5.20. Onda P exacta (azul-mallado) y aproximada (rojo) desarrollado a partir del modelo mostrado en Eq. (4.34).	69
5.21. a) Onda S1 exacta (rojo mallado) y aproximada (verde) y b) Muestra el comportamiento interno de la solución exacta.	70
5.22. Onda S2 exacta (verde) aproximada (azul-mallado).	71
5.23. Cortes horizontales para la onda P considerando la matriz Muir-Schoemberg para una apertura de a) 5°, b) 10°, c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.	72

5.24. Cortes horizontales para la onda S1 considerando la matriz Muir-Schoenberg para una apertura de a) 5°, b) 10°, c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.	73
5.25. Cortes horizontales para la onda S2 considerando la matriz Muir-Schoenberg para una apertura de a) 5°, b) 10°, c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.	74

INTRODUCCION

La importancia de la adquisición de datos sísmicos en zonas complejas, permite que cada vez más geofísicos de vanguardia se interesen por tratar de modelar fenómenos y resolver estructuras en zonas fracturadas y buzantes. La presencia de anisotropía y heterogeneidades en el subsuelo sugieren implementar algoritmos que permitan la incorporación de parámetros medidos con la ayuda de la sísmica multicomponente, con la finalidad de utilizarlos en el modelaje e inversión de datos sísmicos complejos.

Hoy en día existen dos aproximaciones de importancia en sísmica de exploración cuyo desarrollo se basa en ecuaciones, que en particular, están en función de parámetros extraíbles de los datos sísmicos. La primera de ellas es la de ángulos pequeños [1], [2], que se refiere a la disposición geométrica existente entre fuentes y receptores en una adquisición sísmica, y su relación con ciertas direcciones preferenciales de propagación. La segunda aproximación es la anisotropía débil [3], [4], que se refiere a la anisotropía presente en rocas sedimentarias cuya proporción resulta ser muy baja por lo que se considera débil dentro de un medio elástico. La importancia de la primera aproximación es que permite desarrollar para el caso de la cinemática (medición solo de tiempos de tránsitos), expresiones para las velocidades de fase en los diferentes modos de propagación y la segunda permite extraer ciertos parámetros que caracterizan la velocidad de las ondas en las rocas [3].

A través de una generalización teórica, esta investigación se refiere a la aproximación de ángulos pequeños que en principio permitirá resolver la ecuación de onda elástica para un determinado sistema de interés en la sísmica de exploración. Las ecuaciones desarrolladas permiten modelar estructuras que presentan anisotropía

acimutal. El modelo más simple acimutalmente anisótropo es el de isotropía transversal con el eje de simetría horizontal (HTI), cuyas características describen una formación geológica con un sistema de fracturas verticales y paralelas [5], contenidas dentro de un medio isótropo. Cuando el modelo (HTI) se complica, por ejemplo, la adición de un conjunto de fracturas perpendiculares o no perpendiculares, es necesario recurrir a sistemas de simetría más baja como el caso del ortorrómbico (sistemas de fracturas perpendiculares) y monoclinico (sistema de fracturas no perpendiculares).

Por otra parte, se presenta una solución generalizada a la ecuación de Christoffel, que permite desarrollar un tratamiento simple con el fin de obtener aproximaciones elipsoidales para velocidades de fase en sus tres modos de propagación (P, S1 y S2), en medios con simetría monoclinica cerca del eje de simetría vertical. Las aproximaciones presentadas son válidas para grados arbitrarios de anisotropía, pero restringidas a la propagación cerca de la vertical.

Para conocer el grado de validez de este tipo de aproximación, se emplea una herramienta de visualización en 3D de los frentes de ondas aproximados junto al planteamiento de una solución numérica exacta a la ecuación de Christoffel donde se espera que ambas soluciones se junten (o solapen) cerca del eje de simetría vertical. La importancia de modelar las velocidades de fase en 3D llevará a estudiar más de cerca los medios de simetría monoclinica que han sido poco estudiados, debido a la complejidad que estos poseen.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

A partir de un tratamiento especial a la ecuación de Christoffel en términos de las lentitudes, se pretende encontrar expresiones para las velocidades de fase en términos de constantes elásticas características del medio con simetría monoclinica y de los parámetros polar y azimutal utilizados en la sísmica de exploración. Por medio de una expansión en series de Taylor alrededor de la vertical, las ecuaciones deberán poseer geometría elíptica ya que simularán incidencia vertical para un tipo de geometría de adquisición VSP.

1.1. Objetivos

Los objetivos planteados para esta investigación son:

1. Solución analítica de la ecuación de Christoffel en términos de la lentitud vertical en medios de anisotropía monoclinica.

2. Solución numérica exacta de la ecuación de Christoffel para las velocidades de fase y grupo de la polarización en medios monoclinicos.
3. Visualización 3D de los frentes de onda elástica y de la polarización para los tres modos de propagación en medios monoclinicos.
4. Comparación y validación de la solución elipsoidal aproximada con respecto la solución numérica exacta de los tres frentes de onda para posterior utilización en inversión de parámetros elásticos.

1.2. Motivación

Este trabajo parte como motivación en el estudio que abarca la sísmica de exploración para obtener imágenes del subsuelo, considerando anisotropía sísmica. Las ecuaciones para velocidades de fase que se desarrollan en este trabajo, permiten a futuro realizar la inversión de parámetros elásticos en términos de las velocidades sísmicas, que en particular, son obtenidas directamente en los geófonos. En general, la teoría de geofísica de exploración se enfoca en modelar el campo de onda invertido, es decir, estudiar el comportamiento de las ondas registradas en los receptores hasta el momento que son generadas, esto permite obtener los tiempos de tránsito que a su vez, poseen la información necesaria para obtener imágenes del subsuelo estudiado, cuya aplicación directa se enfoca en encontrar hidrocarburos, acuíferos, etc.

1.3. Limitación

Este trabajo se limita únicamente a la propagación de las ondas sísmicas alrededor de la vertical de acuerdo al tipo de geometría de adquisición utilizada (VSP).

Capítulo 2

La Ecuación de Christoffel

2.1. Ecuación de Onda Elástica

Como punto de partida para estudiar el fenómeno de anisotropía sísmica, es necesario introducir las ecuaciones que gobiernan al sistema. En general las rocas que constituyen a la corteza terrestre se encuentran sometidas de manera constante a esfuerzos (fuerza aplicada sobre un cuerpo) y deformaciones (distorsión producto del esfuerzo) ya que desde el punto de vista tectónico la Tierra es considerada como un planeta dinámico. Estudios realizados arrojan que las deformaciones sufridas en rocas son linealmente proporcionales a los esfuerzos aplicados. Este hecho experimental es conocido como la *Ley Generalizada de Hooke*, la cual establece, para cada punto de un cuerpo tridimensional y linealmente elástico que las seis componentes del tensor de esfuerzo están linealmente relacionadas con las seis componentes del tensor de deformación por medio del tensor de elasticidad (de cuarto orden) denotado como C_{ijkl} , analíticamente se expresa como [6]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

donde C_{ijkl} representa el tensor de elasticidad, σ_{ij} es el tensor de esfuerzo y ε_{kl} es el tensor de deformación de segundo orden, el cual está definido como [7]:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (2.2)$$

con u_l el vector de deformación.

Es importante destacar que tanto el tensor de esfuerzo como el de deformación son tensores simétricos lo que permite simplificar al tensor de elasticidad de 81 componentes a 21 componentes por dos razones:

- Existe simetría intrínseca por lo que, el tensor de constantes elásticas se reduce a 36.

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (2.3)$$

- La corteza terrestre es considerada como un sólido deformable isotérmico y/o adiabático.

Para que un medio se encuentre en equilibrio dinámico y en ausencia de fuerzas externas, se requiere que la fuerza inercial sobre un elemento de volumen sea igual a

la fuerza neta causada por el gradiente del tensor de esfuerzo (2da Ley de Newton) [6, 7].

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad y \ddot{u}_i es la segunda derivada temporal con respecto al desplazamiento (aceleración) y f_i es una fuerza externa.

Considerando la ecuación (2.2) en la *Ley Generalizada de Hooke* Eq.(2.1) se tiene:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (2.5)$$

Luego, sustituyendo la ecuación (2.5) en (2.4):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Nótese que se ha asumido que $f_i = 0$ en la expresión 2.6.

La ecuación (2.6) representa la ecuación de onda generalizada. Reagrupando, se obtiene [7]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0. \quad (2.7)$$

Esta última expresión representa la ecuación de onda en el equilibrio, la cual es válida para medios isótropos y anisótropos. Esta ecuación sirve como punto de partida para estudiar el fenómeno de anisotropía a partir del planteamiento de una solución en términos de ondas planas y monocromáticas, en particular la solución planteada tendrá como resultado una expresión que permite encontrar ciertas veloci-

dades de interés dentro de la sismica, dicha expresión es conocida como la ecuación de Christoffel.

2.2. Ecuación de Christoffel

La ecuación (2.7) deducida a partir de ecuaciones de la teoría de elasticidad, es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de segundo orden, lineal y homogénea con coeficientes constantes, que representa la ecuación de movimiento para cualquier medio (isótropos y anisótropos). Esto permite plantear una solución en términos de ondas planas monocromáticas de la forma [7]:

$$u_i = A_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}, \quad (2.8)$$

donde A_i representa la amplitud de la onda, k_j es el vector de onda y ω la frecuencia. Considerando $A_i = A \hat{v}_i$ y $k_j = k \hat{n}_j$ con \hat{v}_i y \hat{n}_j definidos como los vectores unitarios en la dirección del desplazamiento y de la normal del frente de onda en la ecuación (2.8) se tiene:

$$u_i = A \hat{v}_i e^{ik(\hat{n}_j x_j - V_f t)}, \quad (2.9)$$

Se consideró además que:

$$k \equiv \frac{\omega}{V_f}, \quad (2.10)$$

con V_f igual a la velocidad de fase. Evaluando en la ecuación (2.9) se obtiene final-

mente [6]:

$$(C_{ijkl}n_jn_l - \rho V_f^2 \delta_{ik}) \hat{v}_i = 0, \quad (2.11)$$

donde δ_{ik} es el simbolo de Kronecker.

La ecuación (2.11) se denomina la *Ecuación de Christoffel*. Nótese que la solución de la ecuación de movimiento Eq. (2.4) se ha llevado a un problema de autovalores para V_f y autovectores para \hat{v}_i .

Existe una forma más sencilla de escribir la ecuación de Christoffel, para ello es necesario considerar la notación de Voigt que permite expresar al tensor de elasticidad de manera más compacta a través de la transformación:

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{mn}.$$

El cambio es tal, que los ij (ó kl) cambian a “ m ” (ó n) siguiendo la regla:

$$m = i \rightarrow i = j.$$

De lo anterior, el tensor de elasticidad queda escrito de la siguiente manera:

$$C_{mn} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}.$$

Reescribiendo la ecuación de Christoffel se tiene [6] :

$$(G_{ik} - \rho V_j^2 \delta_{ik}) \hat{v}_i = 0, \quad (2.12)$$

donde G_{ik} es la matriz de Christoffel y está en función de las constantes elásticas del medio y por los vectores unitarios n_j y n_l . Los autovalores de la ecuación (2.12) son hallados aplicando el determinante de la forma:

$$|G_{ik} - \rho V_j^2 \delta_{ik}| = 0. \quad (2.13)$$

Desde el punto de vista físico, la solución de la ecuación de Christoffel Eq 2.12, estará conformada por 3 autovalores que representan la velocidad de fase para cada modo de propagación y nueve autovectores asociados a cada autovalor que a su vez representa el vector de polarización característico del medio (isótropo o anisótropo). Por otra parte, la densidad del medio puede ser homogénea (constante) o heterogénea (la densidad varía con la posición), en este trabajo se considera la densidad homogénea debido a se puede utilizar para aproximar a densidades homogéneas por medio de tomografías planteadas por Michelena (1994).

2.3. Tipos de Velocidades Sísmicas

Velocidad instantánea: Es la velocidad en un punto dado del frente de onda en dirección a la propagación de energía (perpendicular al frente de onda).

$$V_{inst} = \frac{dz}{dt}, \quad (2.14)$$

donde z es la profundidad y t el tiempo de tránsito¹.

Velocidad Promedio: Es el cociente entre la distancia y el tiempo que tarda en recorrer esta distancia.

$$V_{prome} = \frac{z}{t} \quad (2.15)$$

Velocidad interválica: Es la velocidad promedio sobre un intervalo en particular.

$$V_{int} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} \quad (2.16)$$

donde h_2 y h_1 son profundidades de la base y tope de un intervalo.

Velocidad Media Cuadrática: Es la velocidad de una onda que viaja a través del subsuelo estratificado a lo largo de una trayectoria específica y se define como:

$$V_{rms}^2 = \frac{(\sum V_{int}^2 t_k)}{\sum t_k}, \quad (2.17)$$

donde V_{int} y t_k son la velocidad interválica y el tiempo de recorrido simple a través del k -ésimo intervalo.

¹Tiempo que tardan las ondas sísmicas en recorrer desde la fuente y el receptor

Velocidad Normal Moveout (NMO): Velocidad que permite apilar y/o aplanar el efecto hiperbólico obtenidos en el receptor para lograr un mejor ajuste entre los tiempos de tránsito y la distancia fuente-receptor (offset).

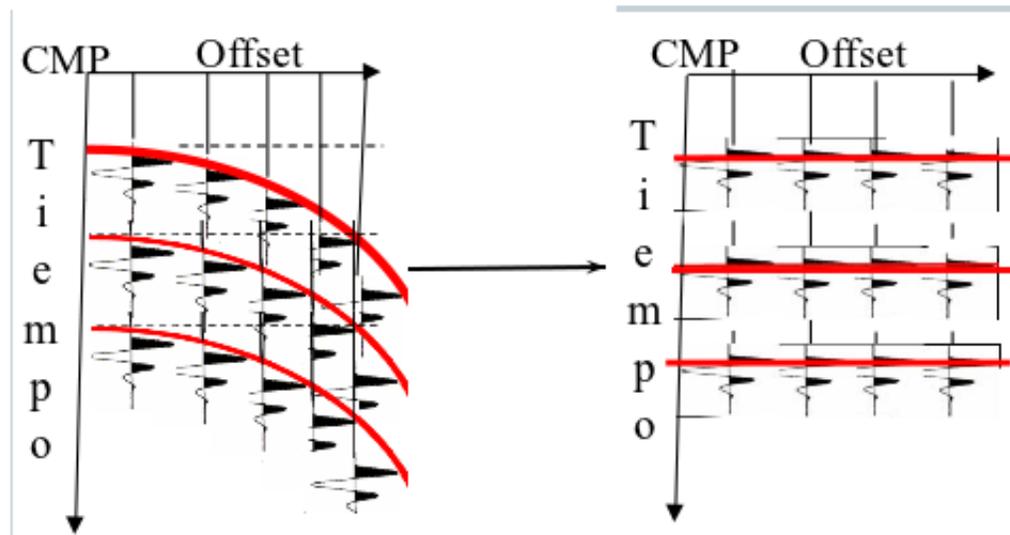


Figura 2.1: Velocidad NMO donde se observa el efecto hiperbólico por la variación del offset. El NMO corrige este efecto logrando un ajuste en los tiempos de tránsito para poder apilar los datos.

Velocidad de fase: Velocidad con la cual un punto de fase constante viaja perpendicular en dirección normal a la superficie de la onda.

$$V_f = \frac{\omega}{k}, \quad (2.18)$$

donde ω es la frecuencia y k es el vector de onda.

Velocidad de grupo: Velocidad con la que viaja un tren de onda.

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.19)$$

Capítulo 3

Anisotropía Sísmica

3.1. Fénomeno de Anisotropía Sísmica

La anisotropía sísmica es la variación de un parámetro, debido a los cambios de dirección o cambios en la polarización [8]. Esta investigación se refiere a la anisotropía presente en la propagación de las ondas sísmicas, comúnmente denominada anisotropía elástica o anisotropía de velocidad. En general cuando se realizan mediciones en la dirección y polarización de una onda que se mueve en un medio anisótropo, su frente de onda es arbitrario, en cambio, para un medio isótropo (las propiedades físicas no varían con respecto a la dirección y polarización), el frente de onda es circular [5].

La forma del frente de onda depende de la velocidad de grupo y la velocidad de fase. Para un medio isótropo la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase ($V_{grupo} = V_{fase}$), mientras que para un medio anisótropo ocurre una dispersión, es decir, la velocidad de fase es distinta a la de grupo ($V_{grupo} \neq V_{fase}$), esto principalmente se debe a que la velocidad varía con respecto a la frecuencia (véase figura 3.1).

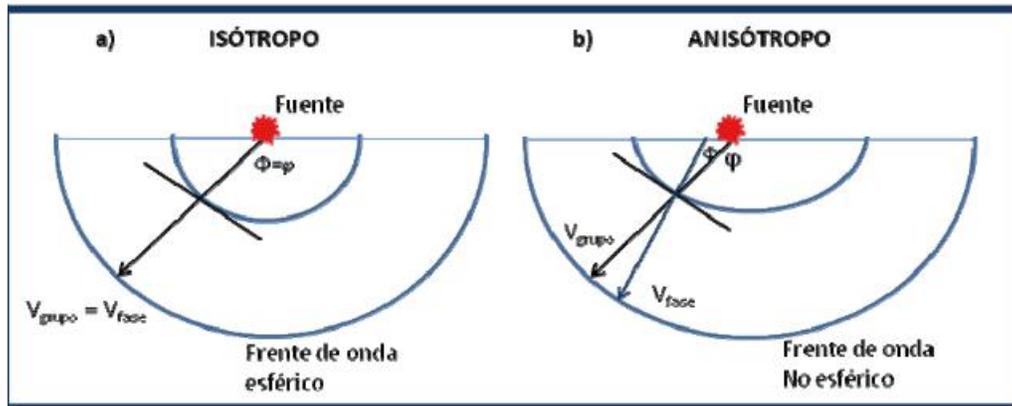


Figura 3.1: Frente de onda donde a) es del tipo circular (isótropo) ya que $V_{grupo} = V_{fase}$ y b) es no circular (anisótropo) debido a que $V_{grupo} \neq V_{fase}$.

3.2. Clasificación de los Medios Anisótropos en Sísmica de Exploración

La anisotropía sísmica puede ser clasificada en tres grupos, que por orden de complejidad son:

1. Medios transversalmente isótropo (VTI) y medios horizontalmente isótropo (HTI).
2. Anisotropía Ortorrómica (ORT).
3. Anisotropía Monoclínica (MNC).

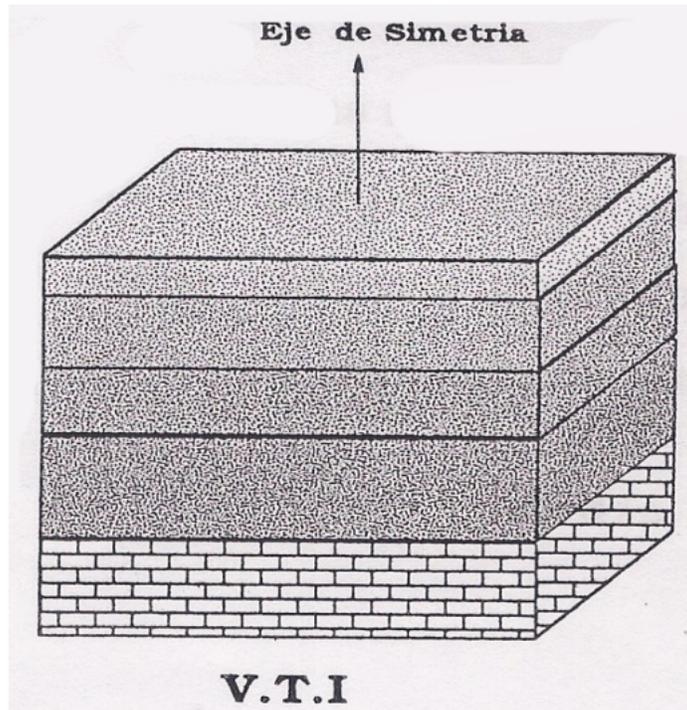


Figura 3.2: Modelo equivalente a un medio VTI de capas finas

3.3. Medios transversalmente isótropo (VTI) y medios horizontalmente isótropo (HTI).

Uno de los tipos más importantes de anisotropía transversal es la anisotropía polar [6] (medio transversalmente isótropo VTI), que posee un eje de simetría vertical y es equivalente a un medio de muchas capas horizontales muy finas, todas isótropas, producto de fragmentos de placas de arcilla (preferiblemente alineados por efectos de gravedad durante la formación de depósitos).

Este sistema contribuye a caracterizar zonas que contienen lutitas, las cuales a su vez, pueden ser trampas estructurales; es descrito por cinco parámetros elásticos, en

el que se propagan tres tipos de ondas: P , S_1 , y S_2 . Como se observa en la figura 3.3, los medios VTI permanecen invariante con respecto al ángulo polar definido como el ángulo medido con respecto al eje vertical de simetría.

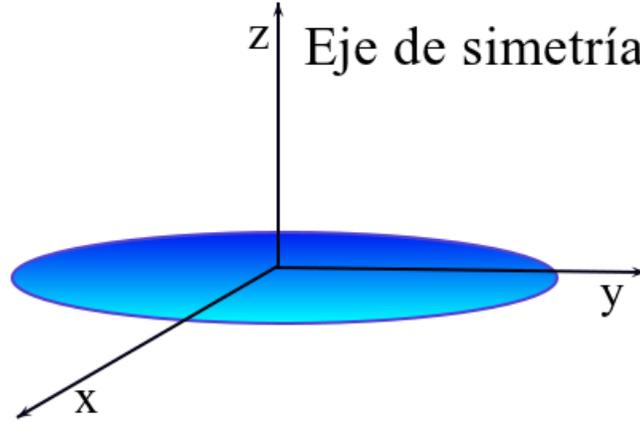


Figura 3.3: Eje de simetría vertical para un medio VTI.

El tensor elástico en este sistema viene dado por

$$C_{mn} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} - 2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Hay que considerar también que en este tipo de anisotropía el comportamiento de las ondas transversales presenta algunas anomalías; entre ellas se puede mencionar la denominada triplicación de la onda S_V , referida a diferentes valores de la velocidad de grupo para ciertos valores del ángulo polar de grupo θ_g [5].

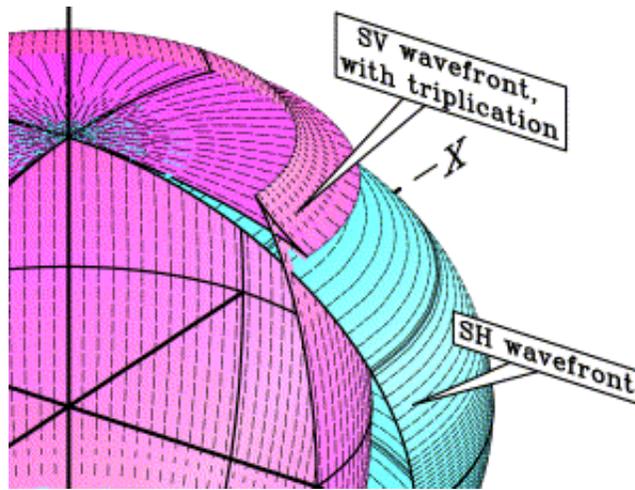


Figura 3.4: Respuesta de impulso (velocidad de grupo) de la onda SV, mostrando las triplicaciones para un medio VTI [18].

El otro tipo de anisotropía es la acimutal (medio HTI), que matemáticamente representa lo mismo que un medio con anisotropía polar, excepto por la rotación del eje de simetría. Sin embargo en el contexto geológico, el medio se representa por un sistema de fracturas horizontales paralelas entre sí [8].

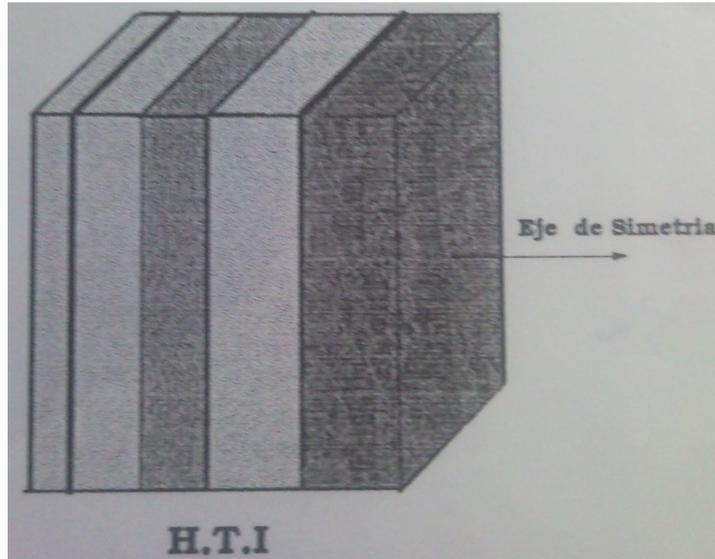


Figura 3.5: Modelo de equivalente a un medio HTI.

3.4. Anisotropía Ortorrómbica (ORT)

Considérese un medio que posee dos planos de simetría mutuamente perpendiculares, además permanece invariante ante rotaciones de 180° alrededor de los ejes de simetría; estas son las características más apreciables de un material de simetría ortorrómbica. En sismica, un medio que posea dos sistemas de fracturas mutuamente perpendiculares o un medio de capas planas y delgadas, y además un sistema de fracturas verticales, representa un medio con anisotropía ortorrómbica.

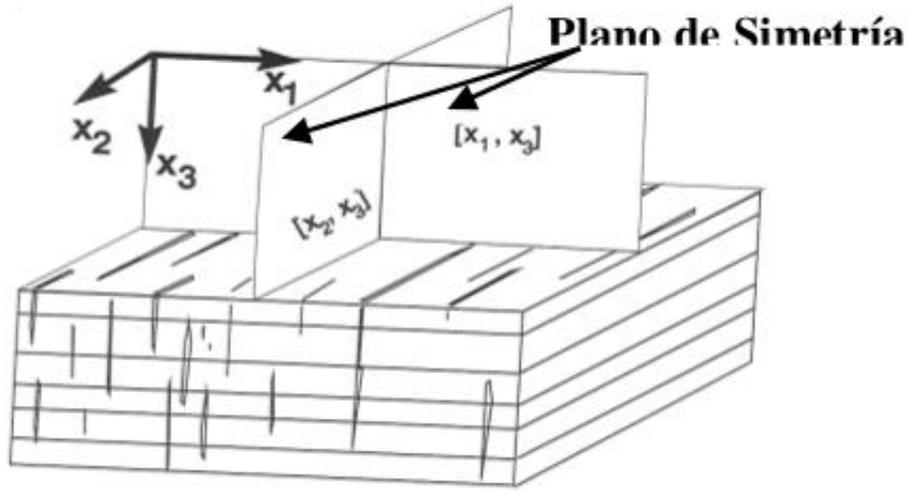


Figura 3.6: Modelo equivalente a un medio ortorrómbico.

Para este tipo de anisotropía, la matriz de los coeficientes elásticos tiene la forma:

$$C_{mn} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Los medios de anisotropía ortorrómbica, son descritos por nueve constantes elásticas en lugar de dos como es el caso isótropo (los parámetros de Lamé λ y μ). Desde el punto de vista físico un medio ortorrómbico es similar a un medio HTI con la diferencia de que este posee un sistema de fracturas adicional [6].

3.5. Anisotropía Monoclínica (MNC)

La anisotropía monoclínica está relacionada con un medio que posee un sistema de fracturas verticales distribuidas de forma arbitraria (no perpendicular) [4]. Los medios con simetría monoclínica permanecen invariantes ante rotaciones de 180° alrededor del eje vertical, además poseen un plano de simetría horizontal y al igual que en la anisotropía ortorrómbica no existe una expresión analítica para las expresiones de las velocidades de fase y grupo de las ondas P , S_1 y S_2 .



Figura 3.7: Alineamiento de fracturas distribuidas no perpendicularmente entre sí característica de un medio monoclínico.

La matriz de constantes elásticas viene dada por:

$$c_{mn} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Estudiando algunos coeficientes elásticos de interés se tiene:

- C_{11} y C_{22} Controlan la propagación horizontal de la onda P.
- C_{33} : Controla la propagación vertical de las ondas P.
- C_{44} :Controla la propagación vertical de la onda S_2 .
- C_{55} : Controla la propagación vertical de la onda S_1 .
- C_{66} :Controla la propagación horizontal de las onda S_2 .
- C_{13} , C_{23} y C_{12} : Controlan la propagación oblicua de las ondas P, S_1 y S_2 .
- C_{16} , C_{26} y C_{36} : Controlan la propagación de las ondas P S_1 y S_2 con respecto al plano XY [4].

Las constantes c_{33} , c_{44} , c_{55} juegan un rol muy importante ya que este trabajo está desarrollado en función de un perfil sísmico vertical (VSP) donde la velocidad de las ondas sísmicas se propaga alrededor de la vertical.

Un medio de simetría monoclinico, describe el medio más general que puede ser considerado en la sísmica de exploración. En este trabajo se escoge un sistema de

referencia, cuyas coordenadas horizontales (x_1, x_2) coincide con los vectores de polarización de las ondas de cizalla verticales S_1 y S_2 , esto implica que la constante c_{45} se anule ($c_{45} = 0$) por lo tanto el tensor de constantes elásticas definido en la ecuación (3.3) se reduce a 12 constantes elásticas no nulas como sigue:

$$c_{mn} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.6. Anisotropía Elíptica

Cuando se está en presencia de un medio anisótropo y la onda al propagarse contiene un frente de onda elíptico, hablamos de un medio con anisotropía elíptica. Este tipo de medio se puede observar cerca de los ejes de simetría cuando nos encontramos en un medio VTI. Esta propiedad es usada por [5] y [1] para aproximar el frente de onda P y SV a una elipse. Este último estima constantes elásticas para medios VTI [1] partiendo de que al observar la propagación de las ondas sísmicas cerca del eje de simetría, el frente de onda presenta un comportamiento con geometría elíptica. Michelena (1994) parte de la expresión para velocidades de fase obtenida a partir de resolver la ecuación de Christoffel Eq (2.12) para las ondas P y SV en un medio VTI [1]:

$$2W_{P,SV}(\theta) = (W_{33} + W_{44}) \cos^2\theta + (W_{11} + W_{44}) \sin^2\theta$$

$$\pm \sqrt{[(W_{33} - W_{44}) \cos^2\theta - (W_{11} - W_{44}) \sin^2\theta]^2 + 4(W_{13} + W_{44})^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}, \quad (3.5)$$

donde $W(\theta)$ es el cuadrado de la velocidad de fase, W_{ij} son los módulos de las constantes elásticas divididas entre la densidad y θ es el ángulo de fase. De igual forma la expresión para la onda SH es:

$$W_{SH}(\theta) = W_{44}\cos^2\theta + W_{66}\sin^2\theta. \quad (3.6)$$

Haciendo una expansión en series de Taylor para $\theta = 0$ en la ecuación 3.5 y despreciando términos mayores a $\sin^4\theta$ se tiene:

$$2W_{P,SV}(\theta) = (W_{33} + W_{44}) \cos^2\theta + (W_{11} + W_{44}) \sin^2\theta$$

$$\pm (W_{33} - W_{44}) \cos^2\theta - (W_{11} - W_{44}) \sin^2\theta + \frac{2(W_{13} + W_{44})^2}{W_{33} - W_{44}} \sin^2\theta. \quad (3.7)$$

Esta última expresión representan las velocidades elípticas para la onda P y SV cerca de los ejes de simetría para un medio VTI. Luego, desarrollando expresiones para cada modo de propagación se obtiene [1]:

- Onda P

$$W_P(\theta) = W_{33}\cos^2\theta + \left(W_{44} + \frac{(W_{13} + W_{44})^2}{W_{11} - W_{44}} \right) \sin^2\theta. \quad (3.8)$$

- Onda SV

$$W_{SV}(\theta) = W_{44}\cos^2\theta + \left(W_{11} - \frac{(W_{13} + W_{44})^2}{W_{33} - W_{44}} \right) \sin^2\theta. \quad (3.9)$$

- Onda SH

$$W_{SH}(\theta) = W_{44}\cos^2\theta + W_{66}\sin^2\theta. \quad (3.10)$$

Por simplicidad se define la velocidad de fase como:

$$\rho V_f^2(\theta) = W(\theta), \quad (3.11)$$

con ρ la densidad del medio considerada constante.

Las expresiones encontradas por Michelena (1994) constituyen a las primeras aproximaciones elípticas para velocidades de fase en medios VTI; esto permite estimar velocidades de fase en términos de constantes elásticas para medios muchos más complicado como es el caso del ortorrómbico, donde debido a su complejidad no existen expresiones analíticas para velocidades de fase.

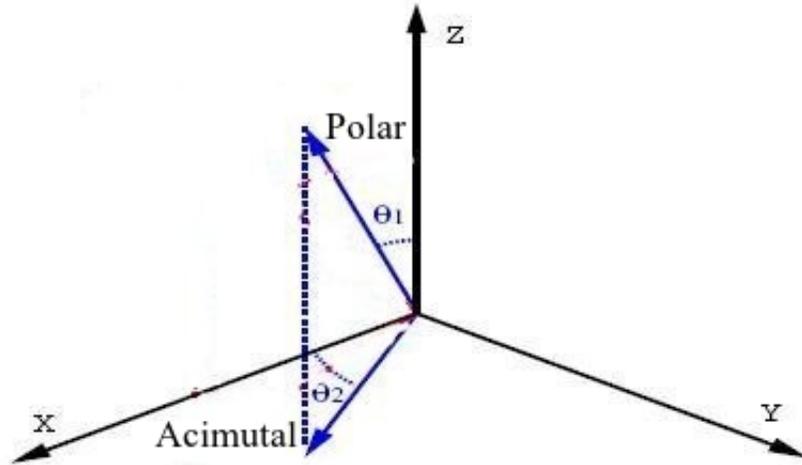


Figura 3.8: Ángulo polar y acimutal.

Contreras et al (1998) estiman velocidades de fase para medios ortorrómbicos. En particular se considera la ecuación de Christoffel Eq (2.12) donde se plantea una expansión en series de Taylor para ángulos pequeños cerca del eje de simetría vertical [2], es decir, para pequeños valores del ángulo polar de fase θ_1 (véase figura 3.8). Este desarrollo permite generalizar la aproximación elíptica para medios doblemente fracturados, donde se obtiene que la velocidad de fase es:

$$W_i(\theta_1, \theta_2) = W_i(0, \theta_2 = cte) + \frac{\partial W_i}{\partial \sin^2 \theta_1}(\theta_1 = 0, \theta_2 = cte) \sin^2 \theta_1, \quad (3.12)$$

con $i = P, S_1$ y S_2 . El primer término de la ecuación 3.12 y su derivadas son obtenidas a partir del polinomio característico que resulta al resolver la ecuación de Christoffel. De igual forma se obtuvo expresiones para el cuadrado de la velocidad de fase para las ondas P, S_1 y S_2 como sigue:

$$W_i(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = W_{z,i} \cos^2 \theta_{1,i} + \sin^2 \theta_1 (W_{NMO[XZ],i} \cos^2 \theta_{2,i} + W_{NMO[YZ],i} \sin^2 \theta_{2,i}), \quad (3.13)$$

con $i = P, S_1, S_2$. W_z es la velocidad de fase en la vertical que será característica de cada onda. Las velocidades NMO de fase tienen la forma:

$$W_{NMO[XZ],P} = C_{55} + \frac{(C_{13} + C_{55})^2}{C_{33} - C_{55}}, \quad (3.14)$$

$$W_{NMO[YZ],P} = C_{44} + \frac{(C_{23} + C_{44})^2}{C_{33} - C_{44}}, \quad (3.15)$$

$$W_{NMO[YZ],S_1} = C_{22} + \frac{(C_{23} + C_{44})^2}{C_{44} - C_{33}}, \quad (3.16)$$

$$W_{NMO[XZ],S_2} = C_{11} + \frac{(C_{13} + C_{55})^2}{C_{55} - C_{33}}, \quad (3.17)$$

$$W_{NMO[XZ],S_1} = W_{NMO[YZ],S_2} = C_{66}. \quad (3.18)$$

Los subíndices [XZ] y [YZ] van referidos a los planos de simetría presentes en los medios ortorrómbicos, recordando que éste es un medio característico de fracturas ortogonales, de hecho un medio ortorrómbico es muy similar a un medio HTI con la diferencia de que este último sólo posee un sistema de fracturas [3].

Por último es importante mencionar que otro de los tipos de anisotropía estudiados es la anisotropía débil, la cual está relacionada con la presencia de anisotropía en

rocas sedimentarias.

Thomsen (1986) encontró velocidades exactas de fase para medios VTI introduciendo ciertos parámetros elásticos de la forma:

$$v_P(\theta) = \alpha_0 (1 + \delta \text{sen}^2\theta \text{cos}^2\theta + \varepsilon \text{sen}^4\theta), \quad (3.19)$$

$$v_{SV}(\theta) = \beta_0 \left[1 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} (\varepsilon - \delta) \text{sen}^2\theta \text{cos}^2\theta \right], \quad (3.20)$$

y

$$v_{SH}(\theta) = \beta_0 (1 + \gamma \text{sen}^2\theta), \quad (3.21)$$

con:

$$\delta \equiv \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \frac{\delta^*}{\left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2}\right)} \right] = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}, \quad (3.22)$$

donde α_0 y β_0 controlan velocidad vertical de las ondas P y S, γ y ε son parámetros en término de constantes elásticas. Los parámetros de Thomsen contribuyen (en su mayoría) a describir los efectos anisotrópicos presentes en el subsuelo. Estos parámetros de Thomsen son medidos en el laboratorio donde las muestras observadas son rocas sedimentarias. Por otro lado, al establecer que $\varepsilon = \delta$, se está considerando la anisotropía elíptica, puesto que la propagación de las ondas es cerca del eje de simetría (véase figura 3.9) [3].

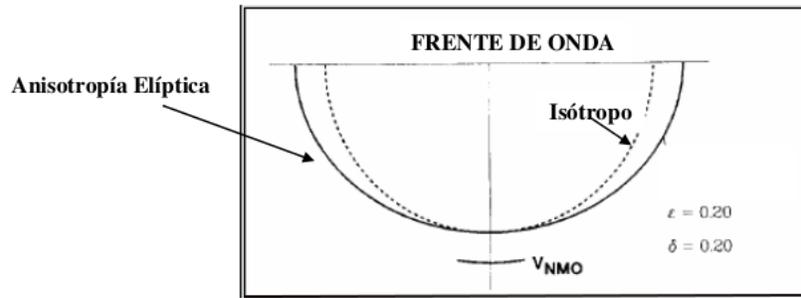


Figura 3.9: Anisotropía elíptica donde el frente de onda representa una elipse.

La aplicación directa para la aproximación elíptica en sismica de exploración, está relacionada con la geometría de adquisición utilizada en la construcción de un perfil sísmico vertical (VSP), en la cual se simula la incidencia de velocidades en la vertical. Las secciones sísmicas para el VSP son utilizadas en zonas donde existe las complicaciones estructurales; múltiples fracturas (veáse figura 3.11). Es importante mencionar que actualmente se utiliza la tecnología de sismica multicomponente que permite grabar el campo de onda completo, logrando así obtener mejores datos sísmicos y/o secciones sísmicas.

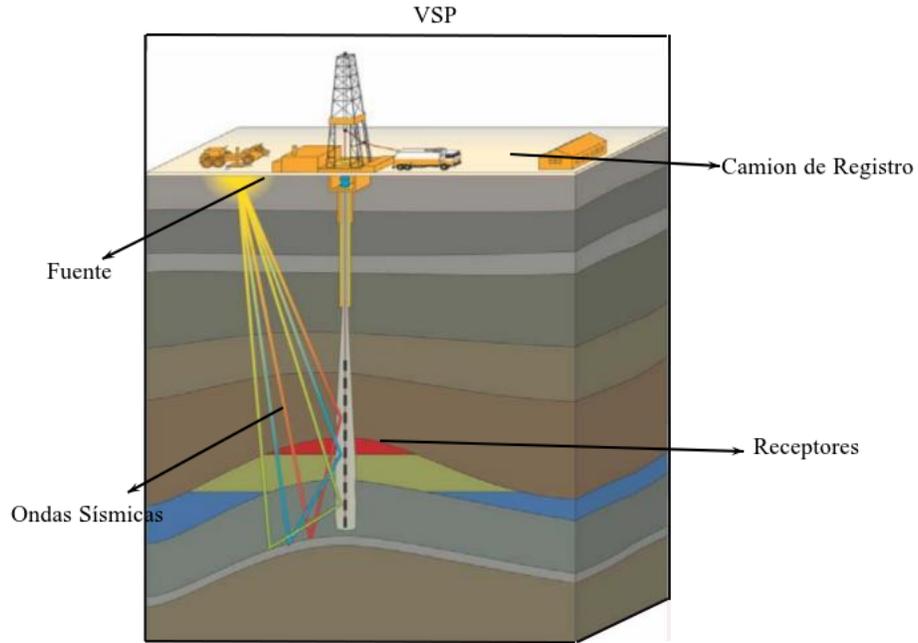


Figura 3.10: Geometría de adquisición para un VSP donde la fuente está localizada en la cercanía de la boca del pozo para simular incidencia vertical. Los receptores usados son de tecnología multicomponente lo que permite el grabado de onda completo. Tomado de VSFusion, op. cit.

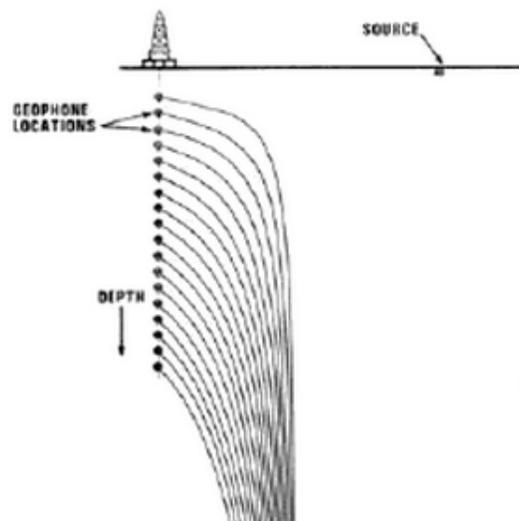


Figura 3.11: Sección sísmica para un VSP, se muestra el arribo de las ondas a los geófonos ubicados debajo del pozo exploratorio.

3.7. Presencia de Anisotropía en Rocas sedimentarias.

Ciertas rocas sedimentarias estudiadas en sismica de exploración, poseen cierto porcentaje de anisotropía debido en gran parte a los minerales que las constituyen. El porcentaje de anisotropía va referido a los parámetros de Thomsen medidos directamente en laboratorios para rocas sedimentarias, donde las más estudiadas son:

Lutitas: son rocas porosas poco permeables, debido a que sus poros son muy pequeños y no están bien comunicados entre sí. Pueden ser rocas madre de petróleo y de gas natural; representan un 20 % de anisotropía.

Carbonatos: Son rocas sedimentarias porosas, sensibles a fracturas y representan un 7 % de anisotropía.

Areniscas: Al igual que los carbonatos son pocos permeables y representan un 2 % de anisotropía.

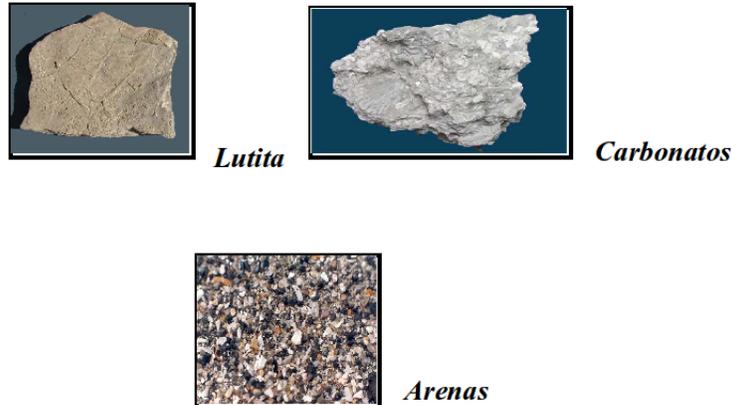


Figura 3.12: Rocas sedimentarias

Capítulo 4

Aproximación Elipsoidal en Medio Monoclínicos

En este capítulo se trata la ecuación de Christoffel Eq (2.12) en términos de las lentitudes de fase (inverso de la velocidad de fase), lo que permite encontrar expresiones para velocidades de fase en términos de constantes elásticas características para un medio monoclinico. Es importante mencionar que los medios de simetría monoclinica son los más generales dentro del contexto de la sismica de exploración, debido a que presentan múltiples fracturas no ortogonales entre sí [4].

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, no existen expresiones analítica exactas para velocidades de fase en medios de simetría monoclinica; por consiguiente, se deberán efectuar aproximaciones alrededor de la vertical para estimar dichas velocidades; en particular, se utiliza el programa de algebra simbólica Maple para tal motivo.

4.1. Tratamiento especial de la ecuación de Christoffel

Se define el vector de lentitudes como el inverso de la velocidad de fase de la

forma:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = V_{ph}^{-1}(\theta_1, \theta_2)\vec{n}, \quad (4.1)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos polar y acimutal de fase (véase figura 4.1), \vec{n} es el vector unitario de fase, el cual es siempre perpendicular al frente de onda y se denota como:

$$\vec{n} = (\sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \cos\theta_1). \quad (4.2)$$

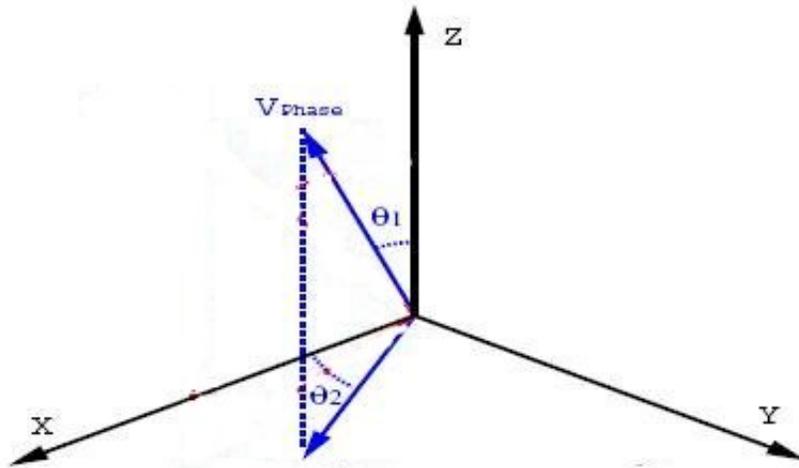


Figura 4.1: Velocidad de fase en función del ángulo polar θ_1 y azimutal θ_2 .

Considérese la solución de la ecuación de Christoffel como una función de las lentitudes tal que:

$$F = | C_{ijkl} p_j p_k - \delta_{ik} | = 0, \quad (4.3)$$

p_j y p_k son las lentitudes de fase con $j = k = 1,2,3$ correspondiente a los modos de propagación P, S_1 y S_2 ; δ_{ik} es el símbolo de Kronecker y C_{ijkl} son las constantes elásticas del medio que, en particular para el medio monoclinico, es de 12 constantes elásticas.

Las ondas son propagadas alrededor de la vertical tal que simulen un VSP, la solución de la ecuación de Christoffel se plantea como un desarrollo en series de Taylor para la lentitud vertical. En tal sentido es conveniente representar la componente vertical del vector de lentitud como:

$$p_3 = q(p_1, p_2). \quad (4.4)$$

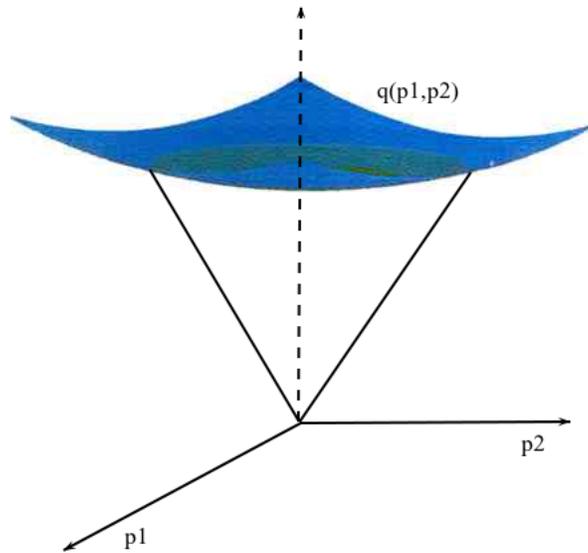


Figura 4.2: Expansión en series de Taylor alrededor de la vertical.

De manera que el desarrollo para los primeros cuatro términos es:

$$q(p_1, p_2) = q^0 + q_i^0 p_i + \frac{1}{2} q_{ij}^0 p_i p_j + \frac{1}{6} q_{ijk}^0 p_i p_j p_k + \frac{1}{24} q_{ijkl}^0 p_i p_j p_k p_l. \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) representa la lentitud vertical q en función de las lentitudes horizontales p_i , el supraíndice "0" en las expresiones q_i^0 , q_{ij}^0 , q_{ijk}^0 y q_{ijkl}^0 indica que se encuentran evaluadas en la vertical. Para determinar estos coeficientes (q_i^0 , q_{ij}^0 , q_{ijk}^0 y q_{ijkl}^0) es necesario considerar a F como una función implícita de las tres componentes del vector de lentitudes de la forma:

$$F(p_1, p_2, p_3 = q(p_1, p_2)) = |C_{ijkl} p_j p_k - \delta_{ik}| = 0, \quad (4.6)$$

con $p_3 = q(p_1, p_2)$ es función de las componentes horizontales del vector de lentitudes. Es del conocimiento general por teoría de funciones de varias variables que las derivadas de q con respecto a p_1 y p_2 pueden ser escritas como [9]:

$$q_i = \frac{\partial q}{\partial p_i} = -\frac{F_{p_i}}{F_q}, \quad (4.7)$$

donde $i = 1, 2$ y las q_i representan las derivadas de q con respecto a las componentes horizontales de las lentitudes de fase p_1 y p_2 . F_q es la derivada implícita de F con respecto a q y F_{p_i} es la derivada de F con respecto de p_1 y p_2 . De igual forma se definen las q_{ij} como las segundas derivadas de la tercera componente con respecto a sus componentes horizontales de la forma:

$$q_{ij} = \frac{\partial^2 q}{\partial p_i \partial p_j} = -\frac{F_{p_i p_j} + F_{p_i q} q_j + F_{p_j q} q_i + F_{qq} q_i q_j}{F_q}, \quad (4.8)$$

con

$$F_{p_i p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j},$$

$$F_{p_i q} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial q},$$

y

$$F_{p_i p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 q}.$$

Es importante destacar dos hechos importantes que permiten simplificar la ecuación (4.5); el primero está relacionado con las propiedades de simetría vinculadas al hecho de existir planos de simetría en los sistemas *VTI*, *ORT* y *MNC*, esto lleva a que las derivadas impares de primer y tercer orden son siempre iguales a cero al ser evaluadas en la vertical ($p_i = 0$). El otro hecho está relacionado con los parámetros que pueden ser "sísmicamente" cuantificables, siendo algunas veces las velocidades directas y las velocidades del *normal moveout*, en otros casos, es necesario conocer información sobre el *moveout* no-hiperbólico que se obtienen para offset lejanos. De lo anterior, la ecuación (4.5) se reduce de la siguiente forma¹:

$$q(p_1, p_2) = q^0 + \frac{1}{2} q_{ij}^0 p_i p_j + \frac{1}{24} q_{ijkl}^0 p_i p_j p_k p_l. \quad (4.9)$$

La variable q_{ij}^0 da la información del *moveout* hiperbólico y q_{ijkl}^0 el *moveout* no-

¹ El *moveout* hiperbólico se refiere al efecto hiperbólico que se observa en las curvas de reflexión en la llegada de las ondas en presencia de anisotropía cuando la distancia entre fuente y receptor es pequeña. Caso contrario se observa cuando el offset es grande donde se observa el efecto *moveout* no-hiperbólico en el arribo de las ondas en los receptores.

hiperbólico. En particular q^0 corresponde a la lentitud vertical. Este trabajo está referido al efecto del *moveout* hiperbólico debido al tipo de geometría de adquisición utilizada (VSP para offset pequeños), por lo que el 4to término no será objeto de estudio. Es importante acotar que la ecuación (4.9) es válida para cualquier grado de anisotropía ya sea VTI, ORT o monoclinica dentro del contexto de las aproximaciones para ángulos pequeños.

Desarrollando términos para la ecuación (4.8) utilizando Maple se tiene:

$$q_{11}^0 = -\frac{F_{11} + 2 F_{13} q_1 + F_{33} q_1^2}{F_q}, \quad (4.10)$$

$$q_{12}^0 = q_{21}^0 = -\frac{F_{12} + F_{13} q_2 + F_{23} q_1 + F_{33} q_1 q_2}{F_q}, \quad (4.11)$$

$$q_{22}^0 = -\frac{F_{22} + 2 F_{23} q_2 + F_{33} q_2^2}{F_q}. \quad (4.12)$$

4.2. Velocidades de Fase Elipsoidales en Medios Monoclinicos.

El desarrollo que a continuación se realiza, involucra la definición del vector de lentitudes Eq. (4.1); esto permite determinar expresiones analíticas para velocidades de fase en la aproximación elipsoidal. La lentitud vertical (para medios monoclinicos) hasta el término hiperbólico viene dado por:

$$q(p_1, p_2) = q_i^0 + \frac{1}{2!} (q_{11,i}^0 p_1^2 + 2q_{12,i}^0 p_1 p_2 + q_{22,i}^0 p_2^2), \quad (4.13)$$

donde q_i^0 es la lentitud alrededor de la vertical, $q_{11,i}^0$, $q_{12,i}^0$ y $q_{22,i}^0$ corresponden a las segundas derivadas determinadas por las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12) para cada modo de propagación (con $i = P, S_1, S_2$). Luego, transformando magnitudes de lentitudes a magnitudes de fase se tiene²:

$$V_{ph,i}^{-1} \cos \theta_{1,i} = q_i^0 + \frac{1}{2!} \sin^2 \theta_{1,i} V_{ph,i}^{-2} (q_{11,i}^0 \cos^2 \theta_{2,i} + 2q_{12,i}^0 \sin \theta_{2,i} \cos \theta_{2,i} + q_{22,i}^0 \sin^2 \theta_{2,i}), \quad (4.14)$$

con $i = P, S_1$ y S_2 . Nótese el término cruzado posee un término 2 el cual indica que $q_{12,i}^0 = q_{21,i}^0$. Elevando al cuadrado la ecuación (4.14) y despreciando términos mayores que el cuadrado del seno por el coseno, se obtiene:

$$V_{ph,i}^{-2} \cos^2 \theta_{1,i} = (q_i^0)^2 + q_i^0 \sin^2 \theta_{1,i} V_{ph,i}^{-2} (q_{11,i}^0 \cos^2 \theta_{2,i} + 2q_{12,i}^0 \sin \theta_{2,i} \cos \theta_{2,i} + q_{22,i}^0 \sin^2 \theta_{2,i}). \quad (4.15)$$

Ahora multiplicando por $(q_i^0)^2 V_{ph,i}^2$ en la ecuación (4.15) y reagrupando:

$$V_{ph,i}^2 (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = \frac{\cos^2 \theta_{1,i}}{(q_i^0)^2} + \sin^2 \theta_{1,i} (W_{11,i} \cos^2 \theta_{2,i} + W_{12,i} \sin \theta_{2,i} \cos \theta_{2,i} + W_{22,i} \sin^2 \theta_{2,i}), \quad (4.16)$$

se ha considerado que:

$$W_{11,i} = -\frac{q_{11,i}^0}{q_i^0}, \quad (4.17)$$

²Se ha considerado la definición de vector de lentitudes a través de la ecuación (4.1)

$$W_{12,i} = W_{21,i} = -\frac{q_{12,i}^0}{q_i^0}, \quad (4.18)$$

y

$$W_{22,i} = -\frac{q_{22,i}^0}{q_i^0}. \quad (4.19)$$

Empleando notaciones matriciales, la ecuación (4.16) queda escrita de manera más compacta como sigue:

$$W_{ph,i}(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = W_{z,i} \cos^2 \theta_{1,i} + \sin^2 \theta_{1,i} \tilde{S} \tilde{W}_{mnc,i} \tilde{S}^T, \quad (4.20)$$

con:

$$\tilde{W}_{mnc,i} = \begin{pmatrix} W_{11,i} & W_{12,i} \\ W_{12,i} & W_{22,i} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\tilde{S} = [\sin \theta_2 \quad \cos \theta_2],$$

y

$$\tilde{S}^T = \begin{bmatrix} \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación (4.20) es válida para medios de simetría monoclinica. En general la expresión (4.21) controla la velocidad NMO elíptica que estará determinada por constantes elásticas características del medio, así como también, de los reflectores horizontales. Es importante destacar que la presencia del término cruzado está rela-

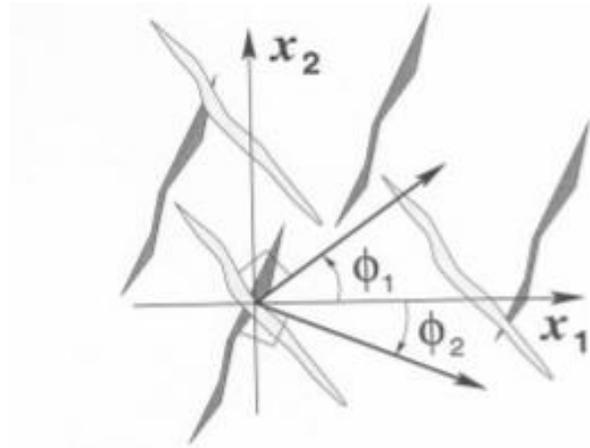


Figura 4.3: Sistema de fracturas no ortogonales característica de un medio monoclinico.

cionado con el hecho de que las derivadas cruzadas no coinciden con el eje de simetría debido a que el medio posee solo un eje de simetría horizontal, por lo tanto, en la aproximación elipsoidal estas derivadas son distintas de cero.

4.3. Velocidades NMO en Medios Monoclinicos.

Como bien se mencionó en medios de simetría monoclinica, las expresiones para velocidades de fase son complejas, es por eso que se utiliza el programa de algebra simbólica Maple para estimar estas velocidades en términos de constantes elásticas (ver apéndice). Cabe destacar que la ecuación (4.21) es la encargada de controlar la velocidad del NMO, de manera que las expresiones desarrolladas a continuación se plantean en función de los elementos matriciales definidos por las ecuaciones: (4.17), (4.18) y (4.19). De igual forma, las lentitudes verticales para cada modo de propagación vienen dadas por:

Onda P:

$$q_P^0 = \frac{1}{\sqrt{c_{33}}}. \quad (4.22)$$

Onda S_1 :

$$q_{S_1}^0 = \frac{1}{\sqrt{c_{55}}}. \quad (4.23)$$

Onda S_2 :

$$q_{S_2}^0 = \frac{1}{\sqrt{c_{44}}}. \quad (4.24)$$

Es importante mencionar que como la onda S_1 viaja más rápido que la onda S_2 , esto implica que $q_{S_1} > q_{S_2}$, de manera que la constante $c_{55} > c_{44}$.

La velocidad NMO para la onda P tiene la forma:

$$W_{NMO,11}^P = \frac{(c_{33} - c_{44})(c_{13}^2 + 2c_{13}c_{55} + c_{33}c_{55}) + c_{36}^2(c_{33} - c_{55})}{(c_{33} - c_{44})(c_{33} - c_{55})}, \quad (4.25)$$

$$W_{NMO,12}^P = \frac{c_{36}[c_{44}(2c_{55} + c_{13}) - c_{33}(c_{13} + c_{23} + c_{44} + c_{55})]}{(c_{33} - c_{44})(c_{33} - c_{55})}, \quad (4.26)$$

y

$$W_{NMO,22}^P = \frac{(c_{33} - c_{55})(c_{23}^2 + 2c_{23}c_{44} + c_{33}c_{44}) + c_{36}^2(c_{44} - c_{33})}{(c_{33} - c_{44})(c_{33} - c_{55})}. \quad (4.27)$$

Las expresiones para la onda S_1 vienen dadas por:

$$W_{NMO,11}^{S_1} = \frac{(c_{13} + c_{55})^2 + c_{11}(c_{55} - c_{33})}{(c_{55} - c_{33})}, \quad (4.28)$$

$$W_{NMO,12}^{S_1} = \frac{c_{36}(c_{13} + c_{55})}{c_{55} - c_{33}} + c_{16}, \quad (4.29)$$

$$W_{NMO,22}^{S_1} = \frac{c_{36}^2}{(c_{55} - c_{33})} + c_{66}. \quad (4.30)$$

Las expresiones para la onda S_2 vienen dadas por:

$$W_{NMO,11}^{S_1} = \frac{c_{36}^2}{(c_{44} - c_{33})} + c_{66}, \quad (4.31)$$

$$W_{NMO,12}^{S_1} = \frac{c_{36}(c_{23} + c_{44})}{c_{44} - c_{33}} + c_{26}, \quad (4.32)$$

$$W_{NMO,22}^{S_1} = \frac{(c_{23} + c_{44})^2}{(c_{44} - c_{33})} + c_{22}. \quad (4.33)$$

Cada una de estas expresiones corresponden al NMO fase para medios monoclinicos, donde intervienen constantes elásticas definidas en la ecuación 3.3. Para validar estas expresiones, deben funcionar en el límite para medios ortorrómbicos, esto es, las constantes c_{16} , c_{26} y c_{36} deben ser iguales a cero debido a, que en presencia de un medio ortorrómbico, estas constantes se anulan por la simetría del mismo (ver matriz ortorrómbica Eq 3.2). De lo anterior es fácil ver que las ecuaciones (4.25) - (4.33) se reducen a las expresiones mostradas en (3.13) - (3.17) para medios ortorrómbicos.

Ahora bien para conocer el grado de validez de estas expresiones y entrar en con-

cordancia con la teoría desarrollada (aproximación elíptica), es necesario considerar un modelo numérico que describa las características físicas de un medio monoclinico. Para ello se crea una matriz numérica a partir de la teoría Muir - Schoenberg [25] cuyas constantes elásticas tienen la forma:

$$c_{mn} = \begin{pmatrix} 336,6 & 117,3 & 103,3 & 0 & 0 & 30 \\ 117,3 & 310,0 & 92,3 & 0 & 0 & 30 \\ 103,3 & 92,3 & 223,9 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 49,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54,0 & 0 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 0 & 96,4 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

Considerando ahora, las ecuaciones para el NMO fase en medios monoclinicos y utilizando la herramienta "*polarplot*" para graficar en Maple, se obtienen las siguientes figuras:

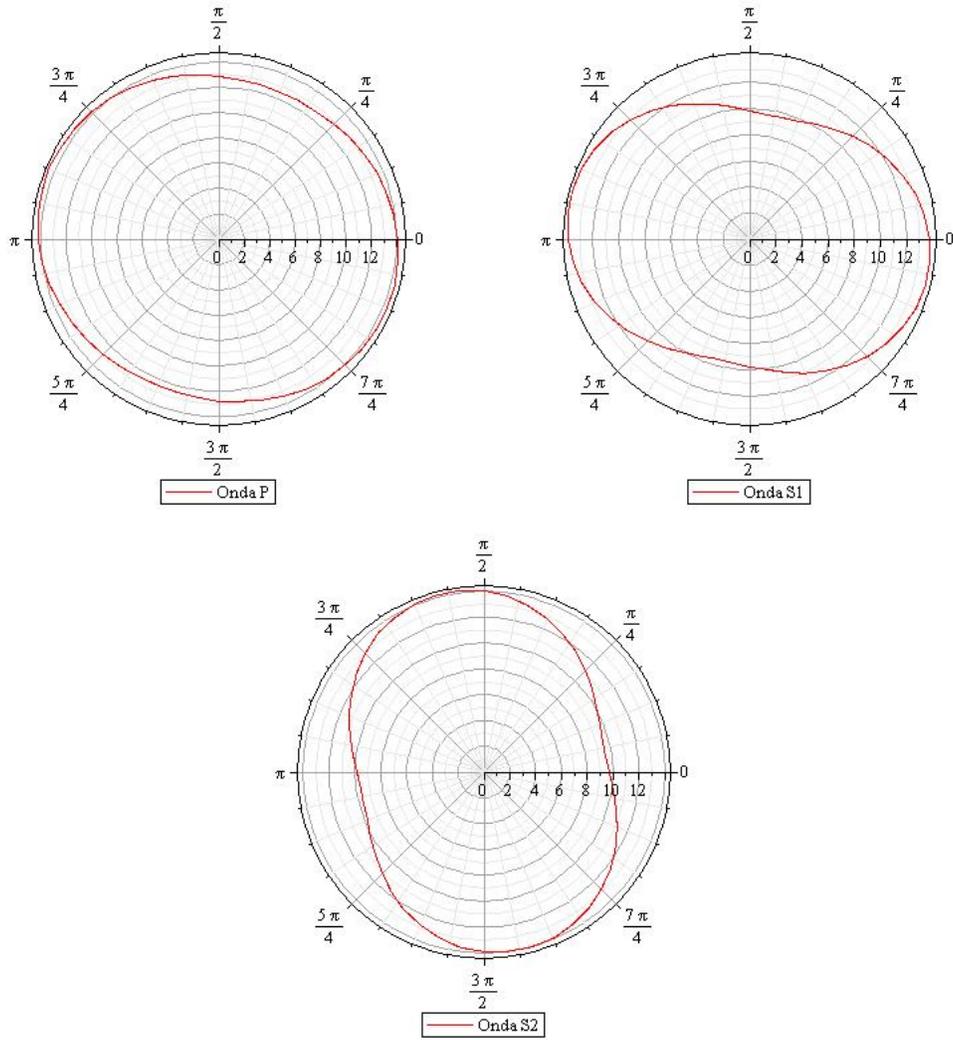


Figura 4.4: NMO elipses obtenidos a partir de las ecuaciones (4.25) - (4.33) para las onda P, S_1 y S_2 en medios monoclinicos considerando el modelo de la ecuación (4.34).

Como es de esperarse, los elipses mostrados en la figura 4.4 están rotados con respecto a los ejes debido a la presencia del término cruzado $W_{NMO,12}^i$ (con $i = P, S_1$ y S_2) para cada modo de propagación. En el siguiente capítulo se muestra la herramienta de visualización que permite obtener los frentes de ondas en 3D; esto

da mayor validez al trabajo ya que se comparan las ecuaciones desarrolladas en la aproximación elipsoidal con la solución numérica exacta planteada a través de algoritmos.

Capítulo 5

Visualización de los Frentes de Onda Sísmicos

En este capítulo se considera el modelo de visualización en 3D para los frentes de ondas sísmicos en medios de simetría monoclinica, en particular se crea una rutina de programación matemática que involucra el desarrollo para los autovalores y autovectores de la ecuación de Christoffel Eq. (2.12); esta rutina de programación encuentra la solución numérica exacta para dicha ecuación. El desarrollo parte de una matriz numérica que caracteriza al medio de simetría monoclinica, lo que permite generar una serie de datos que se almacenaron en un archivo (matriz de datos), que a su vez contiene la información necesaria para emplear herramientas de programación gráficas permitiendo obtener una visualización en 3D.

5.1. Solución Numérica Exacta a la Ecuación de Christoffel.

Como se ha discutido en capítulos anteriores, los medios con múltiples fracturas en sismica de exploración son muy complejos debido a que se requieren 9 constantes elásticas para medios ortorrómbicos y 12 constantes elásticas para medios monoclinicos ¹, es por eso que es necesario plantear la solución numérica a la ecuación de Christoffel para obtener los frentes de onda (velocidades de fase) que caracterizan a este medio.

Se consideró la matriz numérica desarrollada por Carcione (2009) que posee las características físicas de un medio monoclinico:

$$C_{mmc} = \begin{pmatrix} 10 & 2,68 & 3,1 & 0 & 0 & 0 \\ 2,68 & 8 & -3,46 & 0 & 0 & 0 \\ 3,1 & -3,46 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,55 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [GPa] \quad (5.1)$$

con unidades de GPa. Luego, tomando en cuenta la matriz G_{ik} de Christoffel se tiene que:

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

¹Ortorrómbicos sistema de 2 fracturas ortogonales y monoclinicos sistema de 2 fracturas no ortogonales

donde cada elemento matricial de G_{ik} viene dado por:

$$G_{11} = c_{11}n_x^2 + c_{66}n_y^2 + c_{55}n_z^2 + 2(c_{56}n_y n_z + c_{15}n_z n_x + c_{16}n_x n_y) \quad (5.3)$$

$$G_{22} = c_{66}n_x^2 + c_{22}n_y^2 + c_{44}n_z^2 + 2(c_{24}n_y n_z + c_{46}n_z n_x + c_{26}n_x n_y) \quad (5.4)$$

$$G_{33} = c_{56}n_x^2 + c_{24}n_y^2 + c_{34}n_z^2 + 2(c_{34}n_y n_z + c_{35}n_z n_x + c_{45}n_x n_y) \quad (5.5)$$

$$G_{11} = c_{11}n_x^2 + c_{66}n_y^2 + c_{55}n_z^2 + 2(c_{56}n_y n_z + c_{15}n_z n_x + c_{16}n_x n_y) \quad (5.6)$$

$$G_{23} = c_{56}n_x^2 + c_{24}n_y^2 + c_{34}n_z^2 + (c_{23} + c_{44})n_y n_z + (c_{36} + c_{45})n_z n_x + (c_{25} + c_{46})n_x n_y \quad (5.7)$$

$$G_{32} = G_{23} \quad (5.8)$$

$$G_{13} = c_{15}n_x^2 + c_{46}n_y^2 + c_{35}n_z^2 + (c_{36} + c_{45})n_y n_z + (c_{13} + c_{55})n_z n_x + (c_{14} + c_{56})n_x n_y \quad (5.9)$$

$$G_{31} = G_{13} \quad (5.10)$$

$$G_{12} = c_{16}n_x^2 + c_{26}n_y^2 + c_{45}n_z^2 + (c_{25} + c_{46})n_y n_z + (c_{14} + c_{56})n_z n_x + (c_{12} + c_{66})n_x n_y \quad (5.11)$$

La variable n fue definida en el capítulo 4 como un vector en la dirección normal al frente de onda que, en particular, se relaciona con los ángulos polar y acimutal (véase figura 3.8). Nótese que estas expresiones están en función de las constantes elásticas c_{mn} del medio.

Ahora bien, para generar los datos que contiene la información, es necesario tener en cuenta dos aspectos:

1. El programa que genere los autovalores y autovectores.
2. El programa que realice las interacciones entre los ángulos polar y acimutal.

Para el primer aspecto se toma en cuenta las expresiones que constituyen a la matriz G_{ik} y se utiliza el comando "eig" del programa GNU Octave para hallar los autovalores y autovectores (véase figura 5.1).

Nótese que a cada autovalor le corresponde 3 autovectores, lo que físicamente significa que a cada velocidad de fase le corresponden las 3 componentes de un vector, que en este caso es definido como el vector de polarización. Los autovalores y autovectores generados en el programa *dchristoffel* son almacenados en vectores columnas correspondiente a las velocidades de fase para la onda P, SV y SH con su respectivo vector de polarización. Para obtener las velocidades de fase es necesario aplicar la raíz cuadrada a los valores que arroja el comando *eig* , así como también

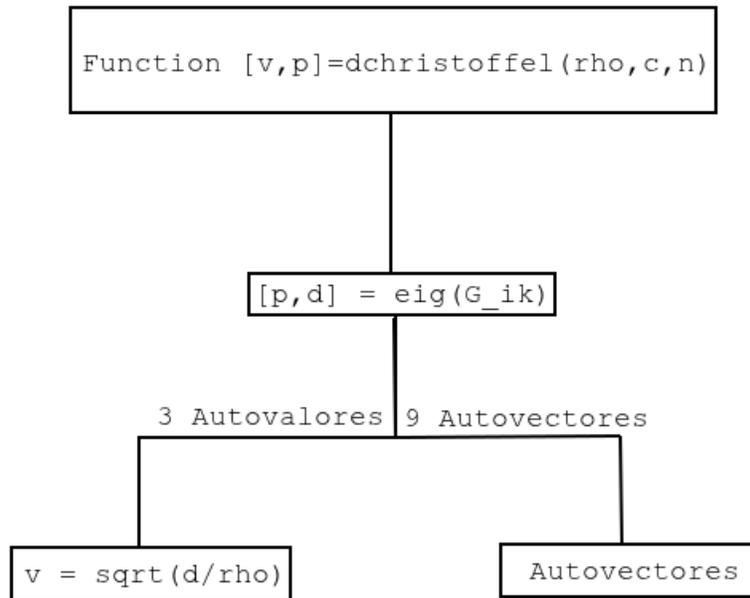


Figura 5.1: Diagrama del programa *dchristoffel* que se encarga de generar los autovalores y autovectores de la matriz de Christoffel (G_{ik}) por medio del comando "eig" en GNU Octave.

dividirla entre la densidad del medio (ρ) como se muestra en la figura 5.1. La estructura para calcular la solución numérica exacta de la ecuación de Christoffel (*dchristoffel*), es decir los autovalores y autovectores, es mostrada en el apéndice 2.

Ahora para tener en cuenta el aspecto 2, se considera la función principal (o programa principal) que itera los ángulos. Como bien se definió anteriormente, la variable n es la que contiene la información de los ángulos polar y acimutal, por consiguiente es necesario considerar un nuevo programa que se encargue de almacenar los datos para estos ángulos. De hecho como se observa en la figura 5.1, la función *dchristoffel* retorna valores de n , de manera que esta nueva función principal debe llamar a la función *dchristoffel*.

La variable n viene dada por la ecuación (4.2) que está escrita en coordenadas esféricas, en particular θ_1 y θ_2 corresponden a los ángulos polar y acimutal respecti-

vamente. Por simplicidad el ángulo θ_1 será renombrado como el ángulo de elevación (EL) y θ_2 el ángulo acimutal (AZ). La iteración para estos ángulos va a ser de la siguiente forma:

- Se fija un valor para el ángulo de elevación (EL) y se barre desde 0 hasta 2π para el ángulo acimutal.
- Se repite lo anterior para otro valor fijo de elevación de manera que se haga un barrido desde 0 a π para el ángulo EL.

Los puntos que generarán estos ángulos será efectivamente una esfera de radio 1 como se muestra en la figura 5.3.

La función principal está organizada de manera que, una vez hecha todas las iteraciones, los valores generados son almacenados en una matriz de datos cuya información contiene

- Valores de ángulos de elevación y acimutal.
- Tres autovalores correspondiente a las velocidades de fase para cada modo de propagación (P, SV y SH).
- Nueve autovectores que son divididos en tres autovectores, lo que forma un vector de polarización con sus tres componentes para cada modo de propagación.

<i>Resultado = EL AZ V₁ V₂ V₃ P₁₁ P₁₂ P₁₃ P₂₁ P₂₂ P₂₃ P₃₁ P₃₂ P₃₃</i>													
<i>EL_n</i>	<i>AZ_n</i>	<i>V_{1,n}</i>	<i>V_{2,n}</i>	<i>V_{3,n}</i>	<i>P_{11,n}</i>	<i>P_{12,n}</i>	<i>P_{13,n}</i>	<i>P_{21,n}</i>	<i>P_{22,n}</i>	<i>P_{23,n}</i>	<i>P_{31,n}</i>	<i>P_{32,n}</i>	<i>P_{33,n}</i>

Figura 5.2: Matriz de datos que contiene la información de los ángulos de elevación y acimutal, velocidades de fase y polarización para cada modo de propagación.

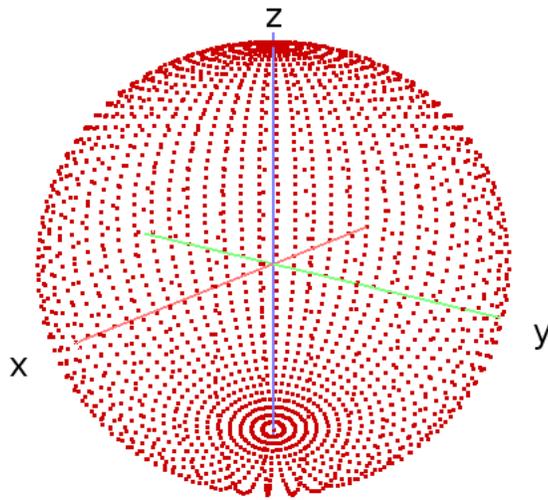


Figura 5.3: Nube de puntos obtenido por medio de las iteraciones entre los ángulos de EL y AZ que geoméricamente forman una esfera de radio 1.

Entre los datos que se deben manejar, son las ecuaciones desarrolladas en la sección

4.3 del capítulo 4 donde ahora la rutina ya desarrollada es válida con la excepción del programa *dchristoffel*, el cual se sustituye por el programa *aproxelipsoidal* que posee la información de las ecuaciones ya mencionadas. Esto permite comparar tanto la solución numérica exacta como la aproximada. Los algoritmos son mostrados en el apéndice 3.

5.2. Visualización 3D Utilizando Java.

La matriz de datos generada por el programa principal y *dchristoffel* para la solución numérica exacta y el programa *aproxelipsoidal* para la solución aproximada, es ahora utilizada para obtener los frentes de ondas 3D. Para ello se utiliza el lenguaje de programación Java que es una herramienta orientada a la manipulación de objetos gráficos, que a su vez está organizado por medio de una arquitectura donde los objetos son manipulados a través de paquetes o librerías. Estos paquetes están organizados en forma de *clases* que conforman la arquitectura en general.². Por otro lado, Java utiliza una interfaz gráfica que genera las figuras (ya sean en 2D o 3D) llamada *JOGL* que es una biblioteca que permite acceder a *OpenGL* (librería 3D gráfica) por medio de la programación en Java.

Para la lectura de la matriz de datos y, a la vez, realizar los cálculos geométricos con el fin de obtener figuras en 3D, se crea un proyecto denominado "Aproximación Elipsoidal" donde se encuentran una serie de clases (o programas) que cumplen una función particular. En la figura 5.4 se muestra el diagrama de programación utilizado

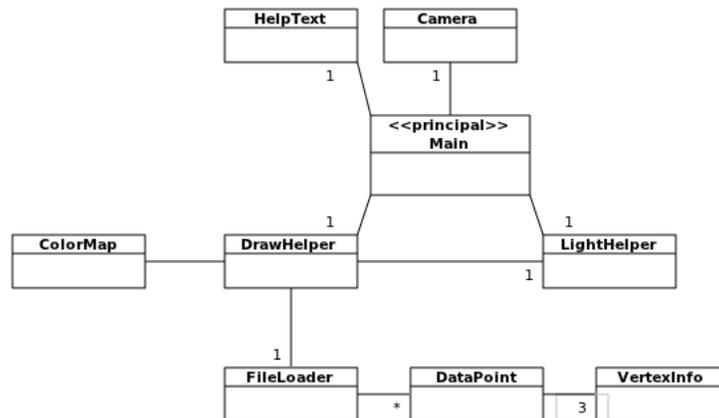


Figura 5.4: Diagrama de programación que constituye a una serie de clases que manipulan a la matriz de datos para luego generar las figuras en 3D. Todas las clases están relacionadas entre sí por medio de la clase principal "main".

en el proyecto mencionado.

Cada una de las clases posee una función cuya descripción es la siguiente:

1. **Camera:** Clase que se encarga de mostrar la figura desde distintos ángulos según donde se ubique el usuario.
2. **HelpText:** Muestra el texto de ayuda en la pantalla de visualización.
3. **LightHelper:** Se encarga de implementar la iluminación que afecta a la figura visualizada.
4. **DrawHelper:** Procesa los datos de entrada y hace los cálculos geométricos necesarios para generar y dibujar la figura visualizada.
5. **ColorMap:** Carga, maneja y dibuja el mapa de colores para los autovectores.
6. **FileLoader:** Carga el archivo de entrada (matriz de datos).

²En Java las clases se refiere a los programas que controlan un objeto en particular.

7. **DataPoint**: Representa una línea del archivo de entrada; cada línea contiene la información sobre las 3 ondas (P, S1 y S2).
8. **VertexInfo**: Representa un sólo vértice de la figura visualizada para una sola onda en particular.
9. **Main**: Es la clase que se encarga de conectar y hacer funcionar a las otras clases para obtener las figuras.

Como se ve en la figura 5.3, por medio del barrido en los ángulos de elevación y acimutal se genera una nube de datos que geoméricamente forman una esfera de radio 1. Ahora bien, a cada punto mostrado en la figura 5.3 le corresponde una coordenada específica dentro del espacio donde son generadas las figuras. La clase *FileLoader* y *DataPoint* son las encargadas de cargar el archivo de entrada (matriz de datos) y leer una línea del archivo, luego siguiendo el formato mostrado en la figura 5.2 y con la clase *VertexInfo*, se le da a entender al programa en cual línea está la información de cada onda. Posterior a la lectura de las líneas, a cada autovalor se le asocia una coordenada que es representada en la nube de datos proporcionada por los ángulos de elevación y acimutal. Esto genera una figura que, en particular, deja de ser simétricamente esférica, como se muestra en la figura 5.5.

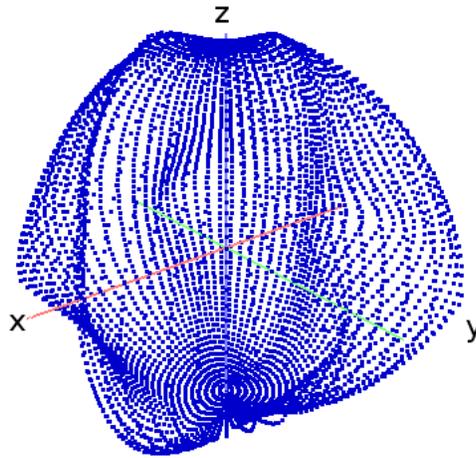


Figura 5.5: Autovalores representados en la nube de datos.

Las figura 5.5 representa la data de tres autovalores asociados a cada punto generado dentro de la nube de datos, que son proporcionados por el archivo de entrada. La polarización se representa por medio de líneas que emergen en cada punto correspondiente a su autovalor; en particular, el vector de polarización se construye por medio de sus tres componentes (3 autovectores por cada autovalor).

El *VertexInfo* no sólo posee la información de cada onda dentro del archivo de entrada, sino que también genera un mallado en las figuras, esto es, agrupa cuatro puntos adyacentes (4 autovalores) de la nube de datos y genera unos *quad* (vértices) o rectángulos, de manera que, con la ayuda de la clase *DrawHelper*, se obtiene el mallado. Por otro lado esta clase (*DrawHelper*) crea una superficie compacta y lisa donde se considera un vector normal a la superficie formada, que cumple la función de formar un ángulo entre los autovectores, permitiendo generar una escala de colores

visualizada por el *ColorMap*. En las siguientes figuras se ilustran el funcionamiento del programa de visualización.

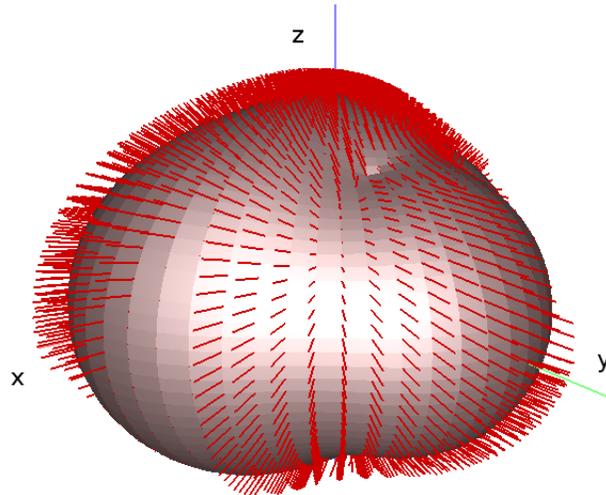


Figura 5.6: Mallado y vector de polarización para la onda P en medios monoclinicos.

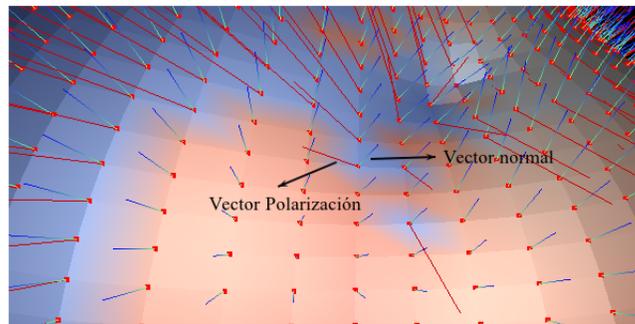


Figura 5.7: Ángulo entre el vector normal y vector de polarización para una coordenada correspondiente a un autovalor.

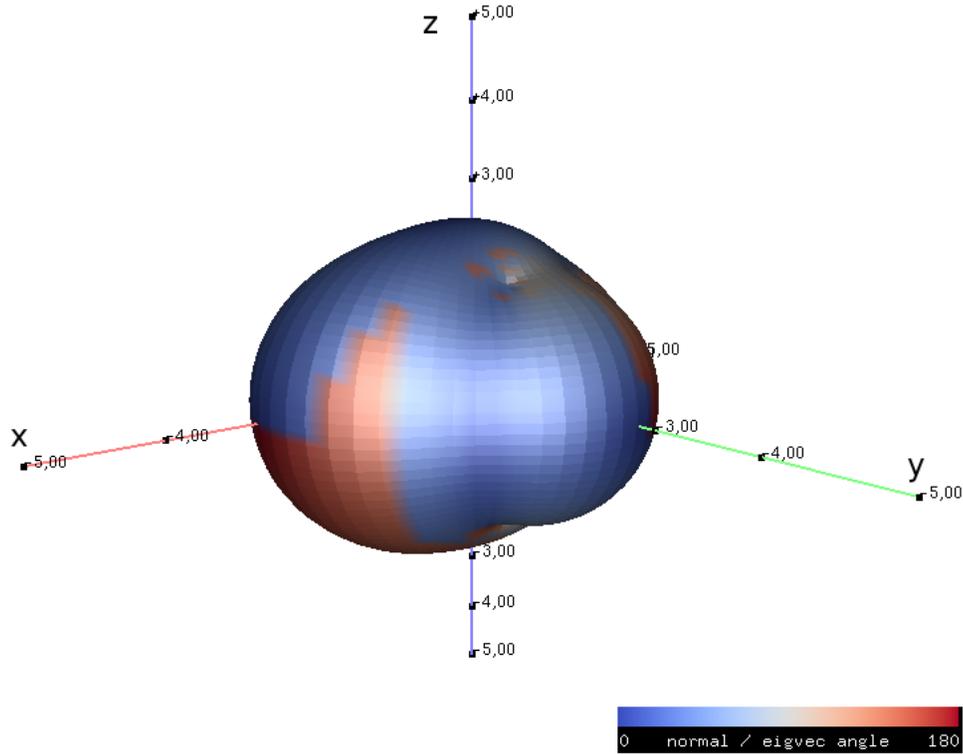


Figura 5.8: Mapa de colores para las normales y autovectores donde los colores vienen representados por la escala en la parte inferior derecha.

5.3. Validación de la herramienta de Visualización.

En esta sección se muestra un modelo de visualización de frentes de onda (velocidades de fase), el cual permite dar validez a las figuras mostradas a partir de modelos ya existentes. Se utiliza una matriz numérica de constantes elásticas que caracteriza a un medio VTI. Es importante mencionar que en sismica de exploración resulta difícil encontrar modelos para velocidades de fase, debido a que no son tan utilizados en comparación con las velocidades de grupo (respuesta de impulso), ya

que estas últimas son las velocidades medidas directamente en los geófonos. Por ello se toman modelos numéricos de cristales cuyas simetrías son similares a las ya estudiadas (VTI, ORT).

A continuación se muestra una matriz característica de un medio VTI tomada de [11].

$$C_{HEX} = \begin{pmatrix} 55,70 & 51,20 & 21,80 & 0 & 0 & 0 \\ 51,20 & 55,70 & 21,80 & 0 & 0 & 0 \\ 21,80 & 21,80 & 106,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26,50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65,90 \end{pmatrix} [MPa] \quad (5.12)$$

Esta matriz representa la simetría tetragonal del cristal "Óxido de Telurio" cuyas velocidades son obtenidas por medio de la solución a la ecuación de Christoffel, obteniendo velocidades de fase que se observan en el cristal como sigue:

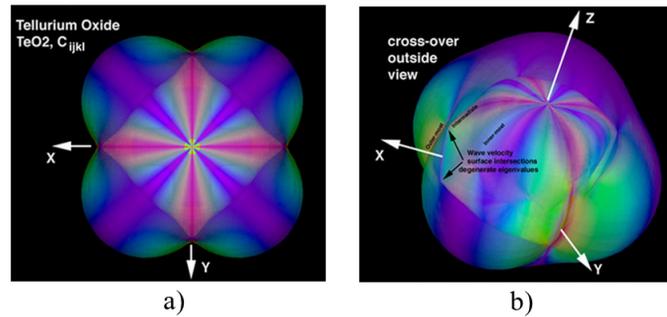


Figura 5.9: Velocidades de fase en el cristal de óxido de telurio. a) Vista desde el plano XY y b) vista en 3D del modelo. Tomado de *Laboratory for Scientific Visual Analysis*.

Ahora utilizando la herramienta de visualización desarrollada en Java y además considerando la matriz numérica (5.12) se obtiene:

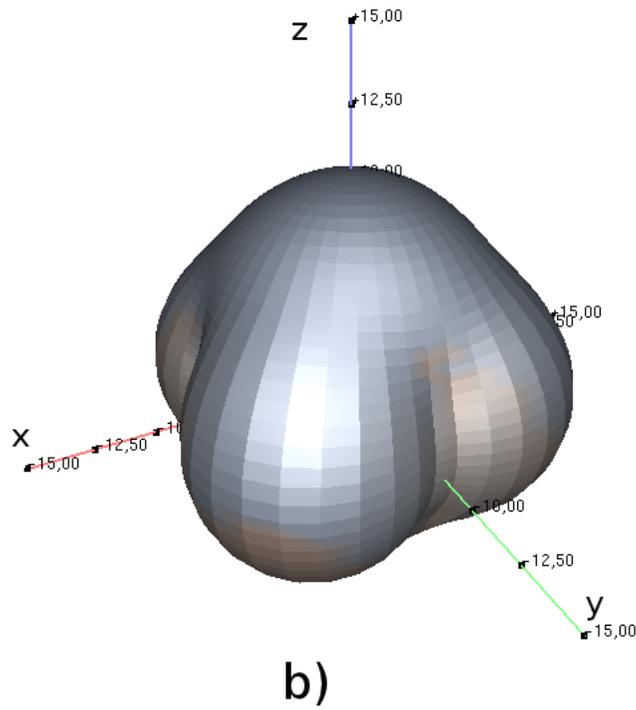
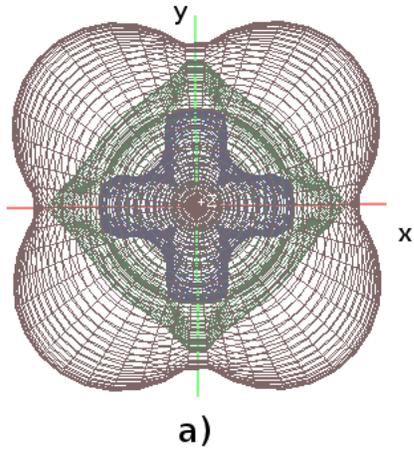


Figura 5.10: Modelo desarrollado por la herramienta de visualización en Java. Se muestra en a) Vista al plano XY donde se observa las 3 ondas P (rojo), SV (verde) y SH (azul). b) La figura ahora en 3D donde se muestra la onda P y SV. Nótese la similitud con la figura 5.12.

Ahora bien, de acuerdo a estas figuras se puede apreciar que el desarrollo para la solución exacta a la ecuación de Christoffel está correcta por lo que la herramienta de visualización es válida para cualquier medio. Por otro lado nótese que esta herramienta de visualización puede ser utilizada en varios campos donde exista la presencia de constantes elásticas en cualquier medio ya sea isotrópico o anisótropo.

5.4. Frente de onda exacto y aproximado.

En esta última sección se corrobora que las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 4 para velocidades de fase, coinciden con la solución numérica exacta de la ecuación de Christoffel cerca del eje de simetría vertical en medios monoclinicos. Estas expresiones matemáticas poseen geometría elíptica por lo que se espera que tanto la onda P, S1 y S2 tengan esta forma al desarrollarlas en la herramienta de visualización 3D. Partiendo de la ecuación (4.20) y considerando la velocidad vertical para cada modo propagación y sus respectiva velocidad NMO se tiene³:

- Velocidad de fase para la onda P en la aproximación elipsoidal.

³Se ha utilizado además el modelo numérico de la matriz (5.1).

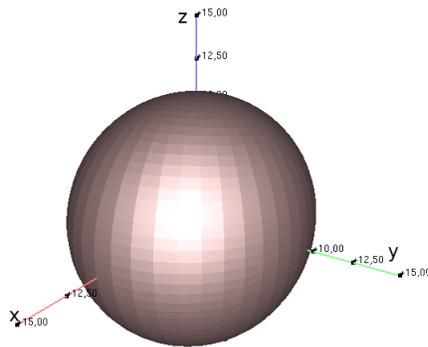


Figura 5.11: Onda P aproximada para medios monoclinicos.

- Velocidad de fase para onda S1 en la aproximación elipsoidal.

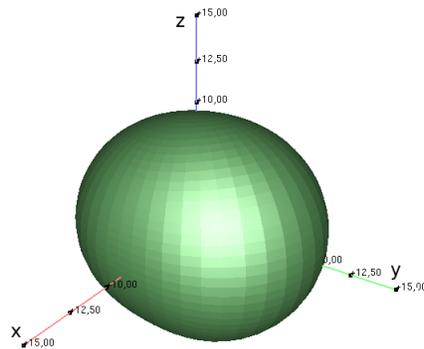


Figura 5.12: Onda S1 aproximada para medios monoclinicos.

- Velocidad de fase para onda S2 en la aproximación elipsoidal.

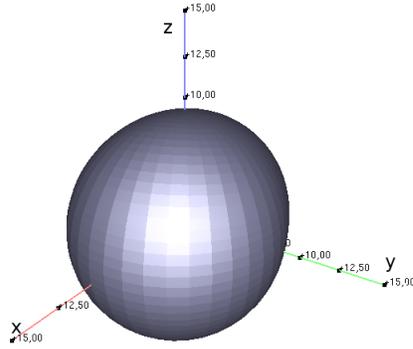


Figura 5.13: Onda S2 aproximada para medios monoclinicos.

Los términos cruzados en las ecuaciones para velocidades de fase, muestra una complicación en los elipsoides para cada onda. Esto se debe a que en las ecuaciones aproximadas, las derivadas cruzadas no coincide con los ejes de simetría. Como se ha mencionado en este tipo de medios (monoclinicos), las fracturas no están alineadas ortogonalmente por lo que dicho término es distinto de cero.

Este trabajo toma importancia ya que la solución aproximada se une con la solución numérica exacta cerca del eje vertical. La forma de observar esto es considerando ambos modelos en una misma ventana de visualización, como sigue:

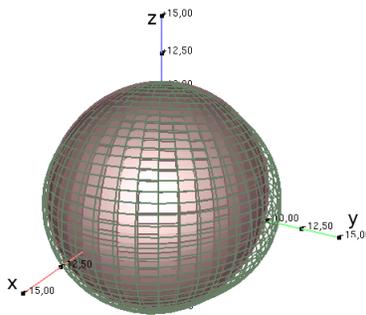


Figura 5.14: Onda P exacta (verde-mallado), onda P aproximada (rojo).

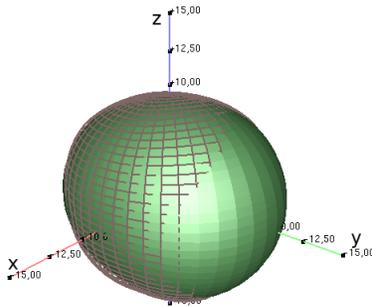


Figura 5.15: Onda S1 exacta (rojo-mallado), onda S1 aproximada (verde).

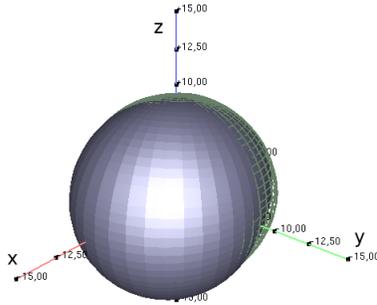


Figura 5.16: Onda S2 exacta (verde-mallado), onda S2 aproximada (azul).

Nótese en cada una de estas figuras (5.14, 5.15 y 5.16) tanto la solución numérica exacta como la aproximada tiende a unirse cerca del eje vertical (eje z). Este hecho da como resultado que la aproximación para ángulos pequeños en medios monoclinicos funciona bien cerca de la vertical; ahora bien, es importante conocer hasta que grado funciona dicha aproximación. Para ello se consideran cortes horizontales tanto para la solución exacta como para la aproximada, esto es, se hace un barrido para un sólo ángulo de elevación y un barrido de 0 a 2π para el ángulo azimutal.

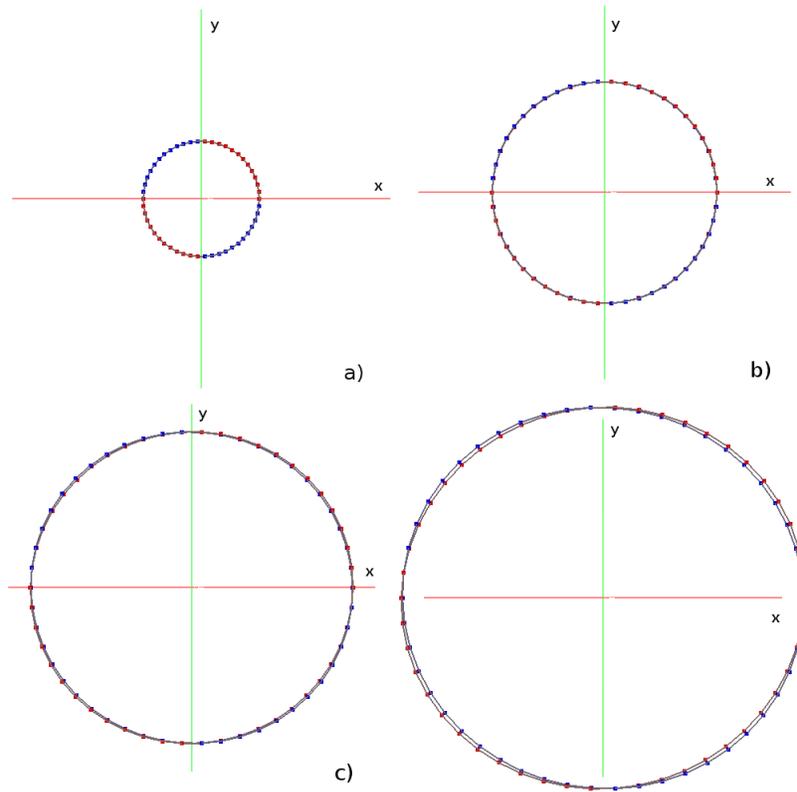


Figura 5.17: Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (rojo) y aproximada (azul) de la onda P en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 10° y d) 20° cerca del eje vertical.

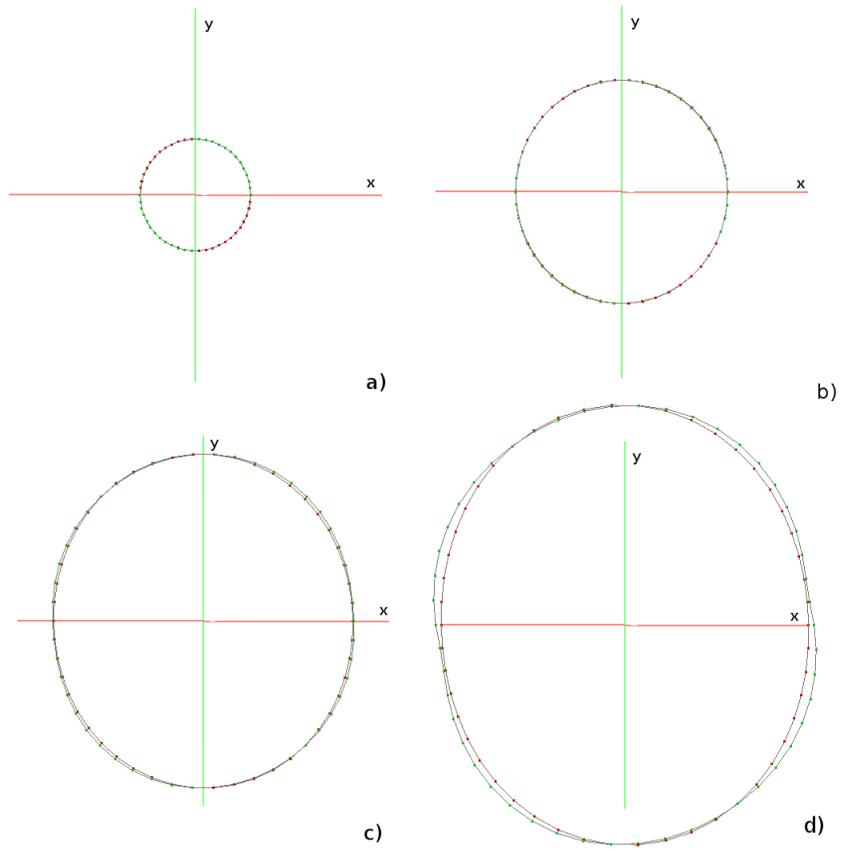


Figura 5.18: Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (verde) y aproximada (rojo) de la onda S1 en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 15° y d) 20° cerca del eje vertical. Nótese que ya para 20° ambas soluciones comienzan a separarse.

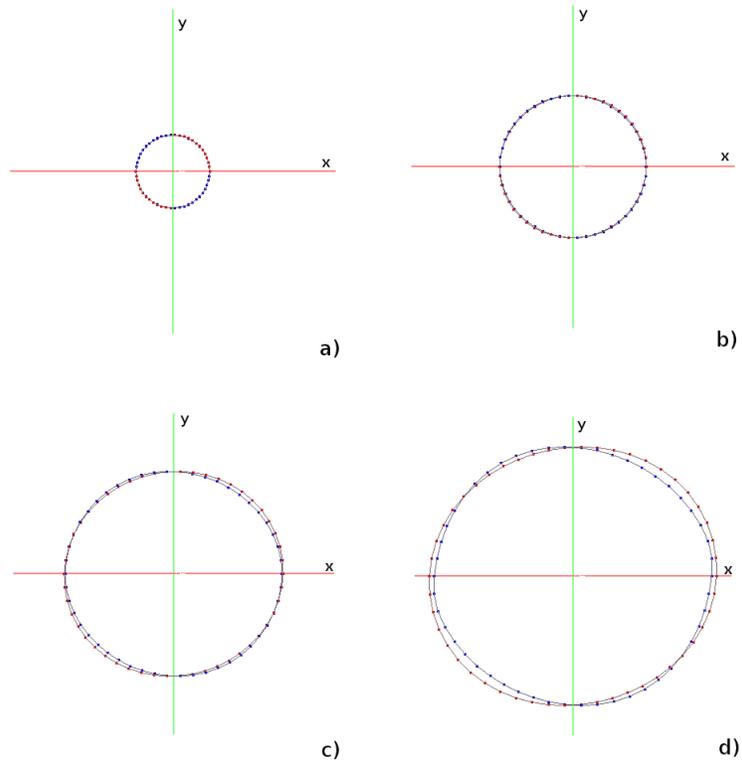


Figura 5.19: Cortes horizontales donde se observa la proyección sobre el plano XY para la solución numérica exacta (verde) y aproximada (rojo) de la onda S2 en medios monoclinicos, con una apertura de a) 5° b) 10° c) 15° y d) 20° cerca del eje vertical. Nótese como ambas soluciones comienzan a separarse para la apertura de 20°.

De igual forma se considera las figuras 3D para el modelo numérico mostrado en el capítulo 4 desarrollado a partir de la teoría Muir - Schoenberg.

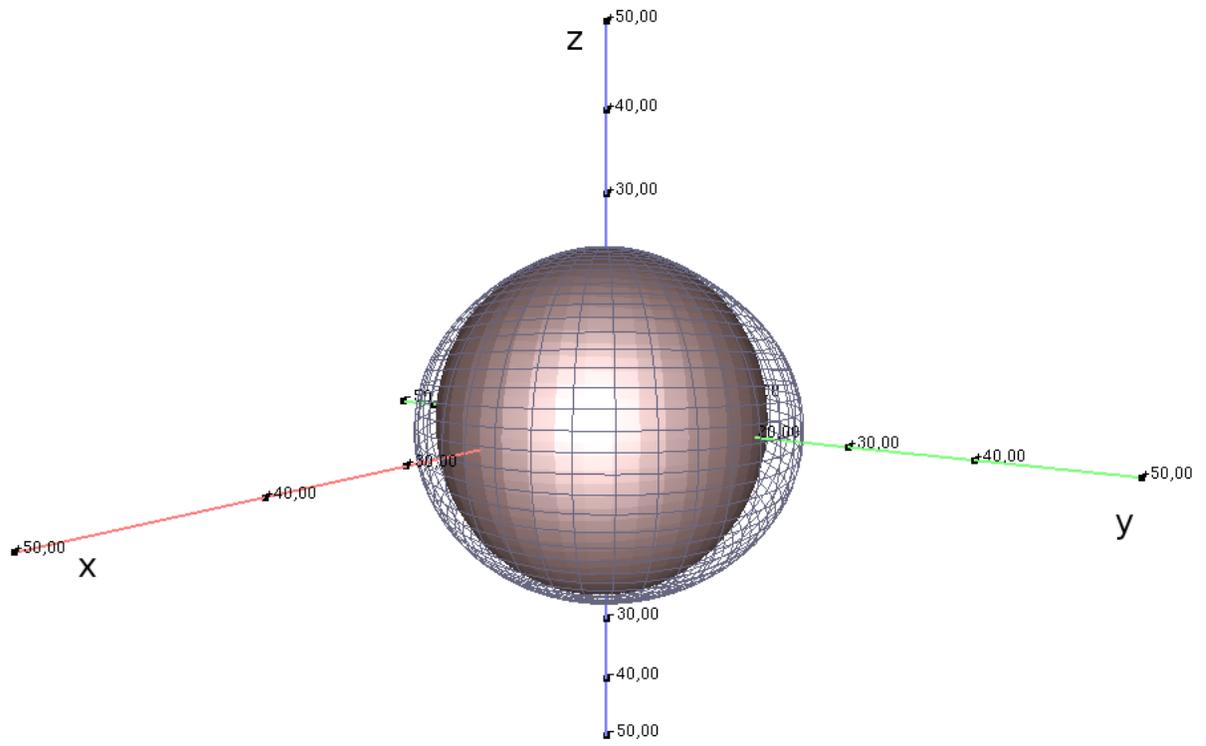


Figura 5.20: Onda P exacta (azul-mallado) y aproximada (rojo) desarrollado a partir del modelo mostrado en Eq. (4.34).

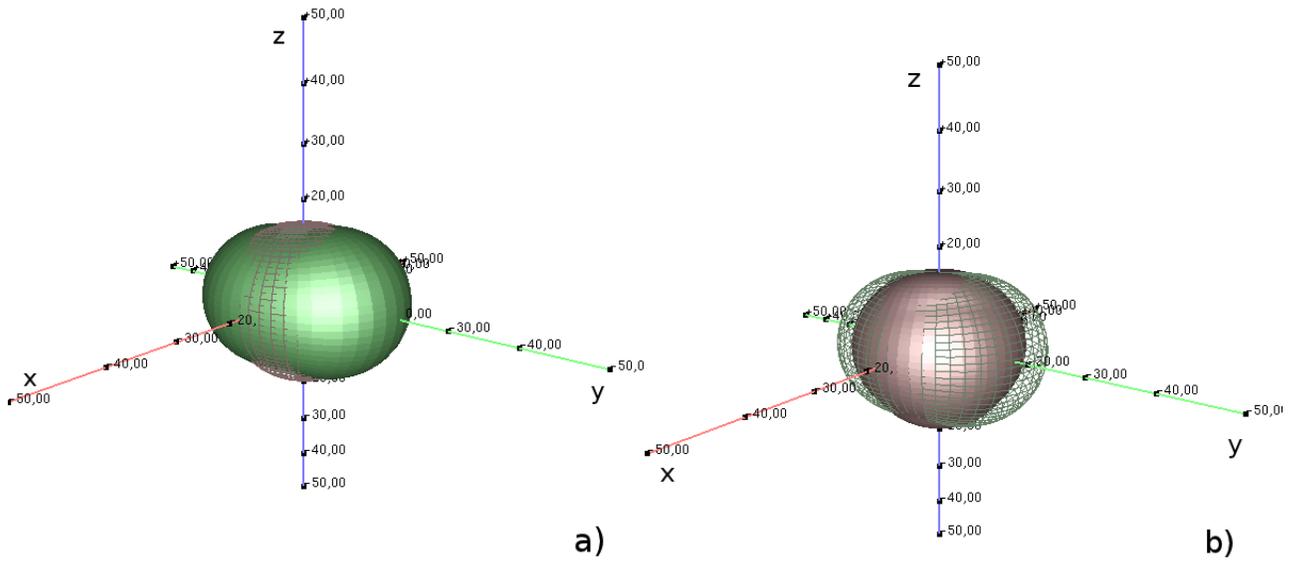


Figura 5.21: a) Onda S1 exacta (rojo mallado) y aproximada (verde) y b) Muestra el comportamiento interno de la solución exacta.

Como se observa en estas últimas figuras, la aproximación de ángulos pequeños hecha en este trabajo para medios monoclinicos, a partir del tratamiento especial a la ecuación de Christoffel, funciona hasta una apertura de 20° con respecto al eje vertical. Como bien es conocido los medios doblemente fracturados son poco utilizados en los métodos de sismica multicomponente debido a su complejidad y de la incorporación de muchos parámetros elásticos, pero este tipo de aproximación elíptica resulta ser efectiva a la hora de construir un VSP para cero offset (ver capítulo 3), así como también de estudiar el campo de onda invertido, es decir, estimar parámetros elásticos en función de velocidades.

De los resultados obtenidos, se puede corroborar la importancia de proponer este tipo de aproximaciones dentro de la teoría de geofísica de exploración; ya que, cuando se presentan medios complicados, resulta difícil determinar con exactitud el compor-

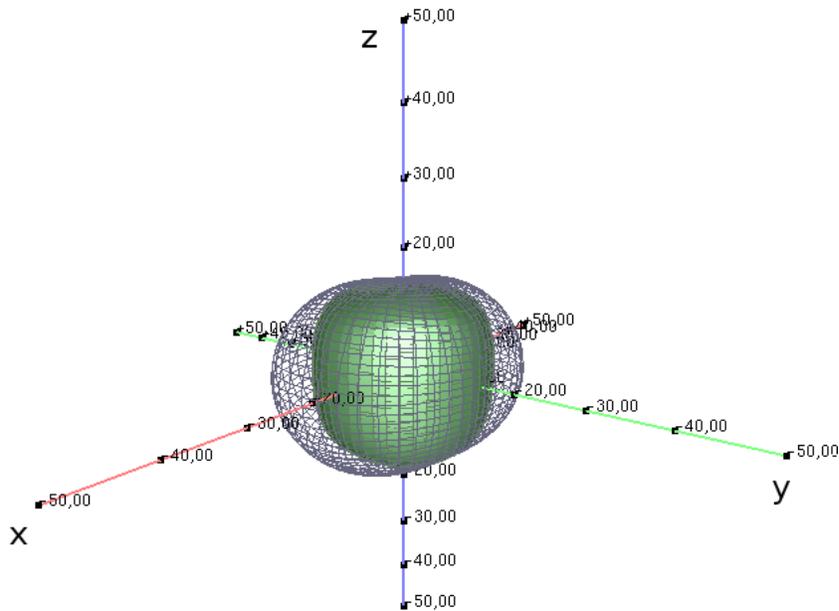


Figura 5.22: Onda S2 exacta (verde) aproximada (azul-mallado).

tamiento de los parámetros sísmicamente cuantificables. Por otro lado, la incorporación de algoritmos que reproduzca una rutina matemática resulta ser eficiente a la hora de observar un fenómeno físico, tal como lo es la anisotropía sísmica. Las herramientas visuales desarrolladas en este trabajo, permitieron observar un medio monoclinico en 3D desde distintas perspectivas o ángulos, lo cual resulta satisfactorio y un avance en el estudio de este tipo de medios poco estudiados.

En particular, cuando se observan velocidades de fase, existen ciertas anomalías o singularidades que suelen estar asociadas a la polarización de las ondas; esto se debe a la presencia de fracturas en el medio. Realizar un estudio completo de estas anomalías sería de gran importancia, pues se podría estudiar las densidades de estas fracturas, pero sería necesario incorporar las velocidades de grupo en la cual se observaría las

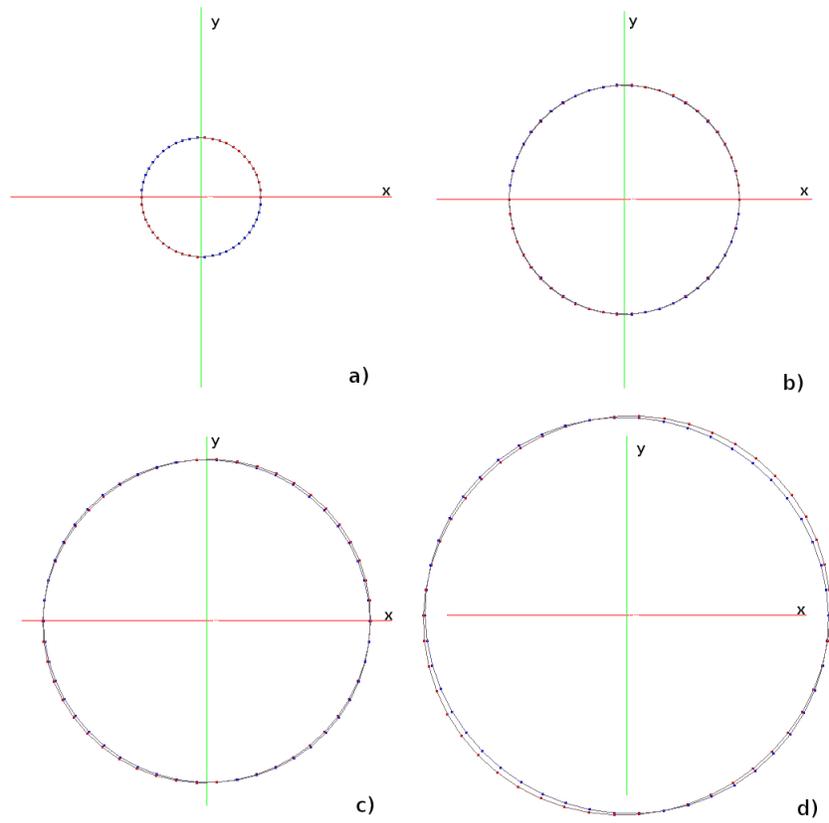


Figura 5.23: Cortes horizontales para la onda P considerando la matriz Muir-Schoenberg para una apertura de a) 5° , b) 10° , c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.

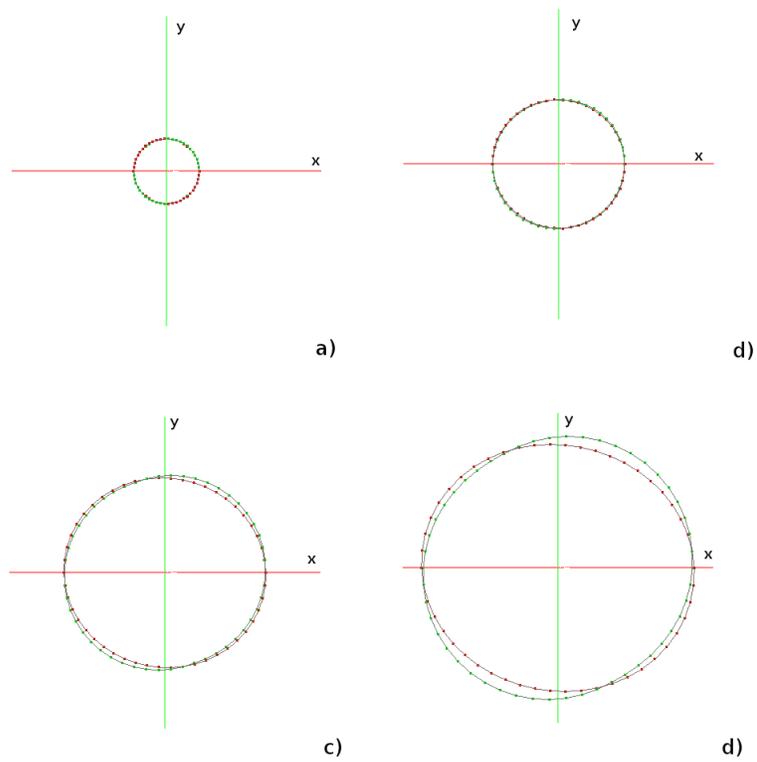


Figura 5.24: Cortes horizontales para la onda S1 considerando la matriz Muir-Schoenberg para una apertura de a) 5° , b) 10° , c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.

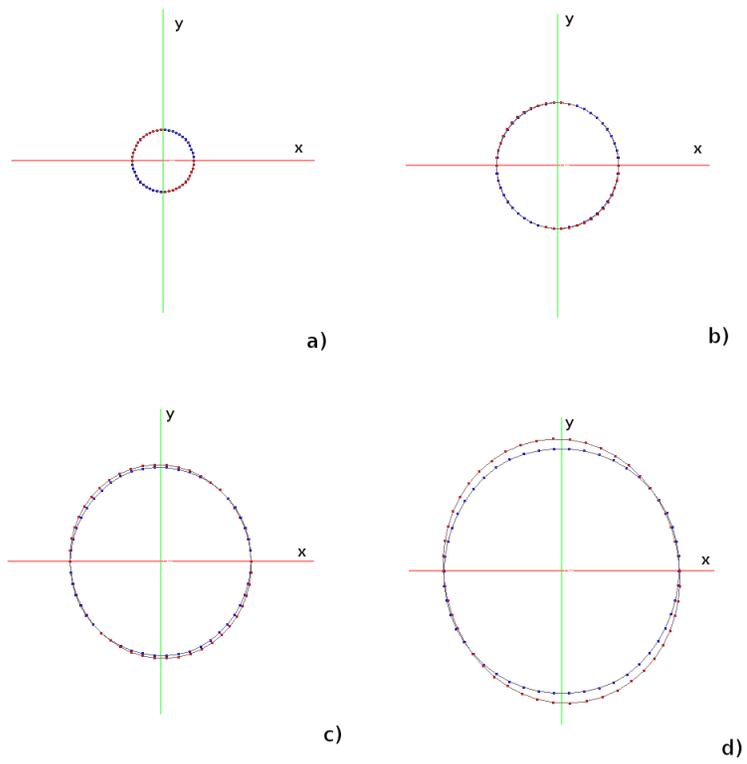


Figura 5.25: Cortes horizontales para la onda S2 considerando la matriz Muir-Schoenberg para una apertura de a) 5° , b) 10° , c) 15° y d) 20° con respecto al eje vertical.

triplicaciones de las ondas S1 y S2 tal como se estudió en [2] para medios ortorrómicos.

Capítulo 6

Conclusión

Reconociendo la importancia de considerar la anisotropía para estudiar las "imágenes" del subsuelo, se han desarrollado ecuaciones para velocidades de fase en la aproximación elipsoidal para medios con simetría monoclinica. El algoritmo hecho para encontrar las ecuaciones resultó muy útil pues se logró estimar a partir de constantes elásticas la velocidad NMO de fase, esto a su vez trajo como importancia obtener expresiones analíticas que describen a un medio de simetría monoclinica en la aproximación para ángulos pequeños. Estas expresiones resultaron muy importantes, ya que pueden ser empleadas para la construcción de un perfil sísmico vertical (VSP) para offset cercanos.

Al utilizar la herramienta de visualización en 3D desarrollada para este trabajo, se pudo observar el comportamiento geométrico de estas expresiones para cada onda, donde efectivamente se obtuvieron elipsoides rotados 3D respecto a los ejes principales de simetría.

Como bien es conocido, los medios fracturados no poseen expresiones analíticas

exactas para velocidades sísmicas, de manera que fue de gran importancia proponer un algoritmo que reproduzca la solución numérica exacta a la ecuación de Christoffel, lo que permitió dar validez a la aproximación elipsoidal realizada. Como se mostró en las últimas figuras, el desarrollo hecho para velocidades de fase funciona bien hasta una apertura de 20° con respecto al eje de simetría vertical, esto se evidencia al considerar ambas soluciones (numérica exacta y aproximada) donde se observó un solapamiento notable sobre el eje vertical.

Los horizontes sobre este tema de investigación son bastantes amplios, ya que este tipo de aproximación puede ser empleada en la inversión de parámetros y migración con el fin de obtener imágenes del subsuelo considerando anisotropía; pero, para ello es necesario encontrar las velocidades de grupo (respuesta de impulso) implementando un nuevo algoritmo que reproduzca dichas velocidades, como es mostrado en [2], donde se logró estudiar la respuesta de impulso en 3D para medios ortorrómbicos, así como también estimar constantes elásticas a partir de velocidades elípticas para el mismo medio.

Bibliografía

- [1] Michelena R. Elastic constants of transversely isotropic media from constrained aperture traveltimes. *Geophysics*, 59, 658-667, 1994.
- [2] Contreras P. Klie H. Michelena R. Estimation of elastic constants from ellipsoidal velocities in orthorhombic media. *Soc. Expl. Geophys.*, 1998.
- [3] Thomsen, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51, 1954-1966. 1986.
- [4] Grechka V. Contreras P. Tsvankin I. Inversion of normal moveout for monoclinic media. *Geophysical Prospecting* 48, 577-602, 2000.
- [5] Muir F. Various equations for TI media. Technical Report SEP-70. Stanford University, 1990.
- [6] Musgrave M.J.P. 1970. *Crystal Acoustics*. Holden-Day Inc.
- [7] Landau L. Lifshitz E. "Teoría de la Elasticidad, volumen 7", Reverté S.A, Barcelona, 1969.
- [8] Winterstein, D.F., 1990. Velocity Anisotropy terminology for geophysicists. *Geophysics* 55, 1070-1088.
- [9] Piskunov N. *Cálculo diferencial e integral*. Tomo I. Mir 1997.
- [10] Helbig K. Carcione J. Anomalous Polarization in anisotropic media. *European Journal of Mechanics A/solids* (2009).
- [11] Kriz R. Envisioning tensor and creating eigenvalues - eigenvectors. Technical Report. Visual Analysis Lab. Virginia Polytechnical Institute. 2010.
- [12] Alkhalifah, T. Larner, K. Migration error in transversely isotropic media. *Geophysics*, 59, 1405-1418, 1994.
- [13] Backus, G. E. Long - wave elastic anisotropy produced by horizontal layering, *Geophys Res.*, 67, 4427-4440. 1962.
- [14] Banik, N. C. Velocity anisotropy of shale and estimation in the North Sea basin, *Geophysics*, 49, 1411-1419, 1984.
- [15] Berryman, J. F. Long - waves elastic anisotropy in transversely isotropic media, *Geophysics*, 44, 896-917, 1982.

- [16] Bryun, B. S. Seismic parameters for media with elliptical velocities dependencies, *Geophysics*, 47, 1621-1626, 1982.
- [17] Crampin, S et al. Seismic anisotropy- the state of the art, *Geophys. J Roy. Astr. Soc.*, 76, 1-16, 1984.
- [18] Dellinger, J. A. Anisotropic Seismic Wave propagation, Ph. D. Thesis, Stanford University, 1991.
- [19] Gazdag, J. Wave equation migration with the phase shift method, *Geophysics*, 43, 1342-1351, 1978.
- [20] Grechka, V. Tsvankin, I. 3-D description of normal moveout in anisotropic media, 66th Ann. Internat., Mtg., SEG, Expanded Abstracts, 1487-1490, 1996.
- [21] Helbig, K. Foundation of anisotropy for exploration Geophysics, Pergamon Press, HGE, Vol 22, 1994.
- [22] Larner, K et al. Migration error in transversely isotropic media with linear velocity variation in depth, *Geophysics*, 58, 1454-1467, 1993.
- [23] Levin, F. K. The reflection, refraction and diffraction of waves in media with elliptical velocity dependence, *Geophysics*, 59, 658-667, 1994.
- [24] Rai, C. Hanson, K. Shear wave velocity anisotropy in sedimentary rocks: A laboratory study, *Geophysics*, 53, 800-810, 1988.
- [25] Schoenberg, M. Helbig K. Orthorhombic media: modeling elastic behaviour in a vertical fracture earth. *Geophysics*, 1995.
- [26] Tsvakin I (a). Effective parameters and P-wave velocity for orthorhombic anisotropy, 66th Ann. Internat., Mtg., SEG, Expanded Abstracts, 1996.
- [27] Tsvakin I (b). Analytic description of group and moveout velocity in azimuthally anisotropic media, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, Annual Report, 327-344, 1996.

Apéndice

Apéndice 1: Algoritmo Utilizado en Maple para Estimar Velocidades NMO Fase en Medios Monoclínicos

Sea $F(x,y,z)$ una función de varias variables. Si $F(x,y,z)=0$ entonces una de las variables es función de las otras dos tal que:

$$z = z(x, y),$$

$$y = y(x, z),$$

$$x = x(y, z).$$

Sea ahora F una función que depende de las lentitudes: $F(p_1, p_2, q(p_1, p_2)) = 0$.

>Carga matriz G_{ik}

>Se hacen cero las constantes elásticas nulas en medios monoclínicos.

>c(1,5):=0

>c(2,4):=0

>c(4,6):=0

>c(3,4):=0

>c(4,5):=0

>c(3,5):=0

>c(2,4):=0

>c(2,5):=0

>c(1,4):=0

>c(5,6):=0

>Se calculan las primeras derivadas para q_1 y q_2 a partir del comando *diff*

>para la función F . De igual forma las segundas derivadas definidas por las

>ecuaciones (4.10)-(4.12)

>Se evalúan las derivadas en la vertical

>x:=0

>y:=0

>Se obtienen los elementos matriciales para el NMO fase definido por la

>ecuación (4.21) considerando la velocidad en la vertical para cada modo

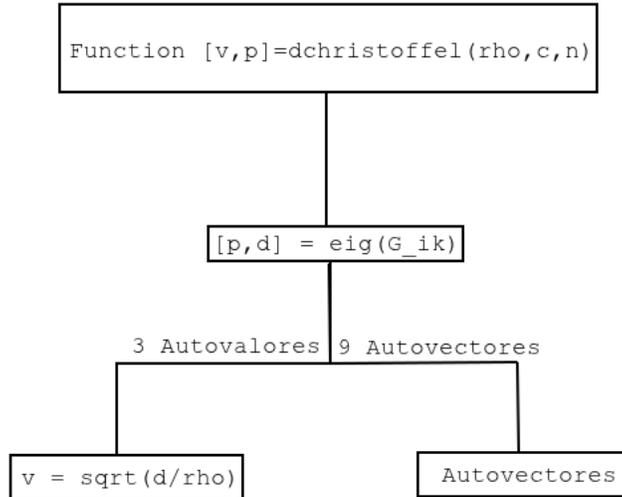
>de propagación definido por las (4.22)-(4.24).

>W(k)_nmo[ij]= $\frac{q_{ij}}{z}$ con k=P, S1 y S2. i=j=1,2.

Apéndice 2: Algoritmo para el programa *dchristoffel*

Carga matriz de constantes elásticas c y matriz Christoffel G_{ik} .

Algoritmo 6.1 Flujo de instrucciones (algoritmo) para el programa *dchristoffel*.

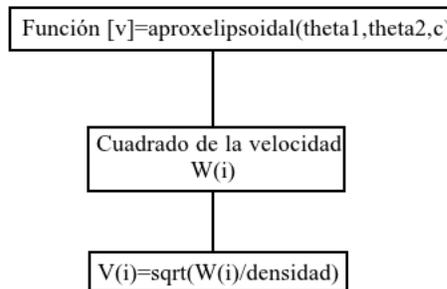


Almacena en vectores columnas la información para los 3 autovalores y 9 autovectores.

Apéndice 3: Algoritmo para el programa *aproxelipsoidal*.

Carga matriz de constantes elásticas c .

Algoritmo 6.2 Flujo de instrucciones para el programa *aproxelipsoidal*



Almacena en vectores columnas la información de las 3 ondas en la aproximación elipsoidal.

Apéndice 4: Algoritmo para el programa *principal*.

Itera el ángulo de elevación (EL) y acimutal (AZ) con incrementos delta:

```
delta1=pi/valor_incremento
delta2=2*pi/valor_incremento
#for EL=0:delta1:pi
  #for AZ=0:delta2:2*pi
```

Define cosenos directores en coordenadas esféricas.
[x y z] = sph2cart(EL,AZ,1);

Llama a programa dchristoffel.

Llama a programa aproxelipsoidal.

Almacena la data en una matriz de datos siguiendo el formato mostrado en la figura 5.2

```
    end
end
```