Matematica C3, Geometria razionale: triangoli

Release 0.01

www.matematicamente.it

July 22, 2013

CONTENTS

2. CONGRUENZA NEI TRIANGOLI

Triangle Shapes Photo by: maxtodorov

Taken from: http://www.flickr.com/photos/maxtodorov/3066505212/

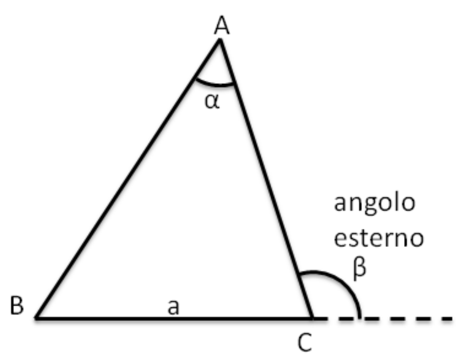
CHAPTER

ONE

DEFINIZIONI RELATIVE AI TRIANGOLI

Definiamo gli elementi principali di un triangolo

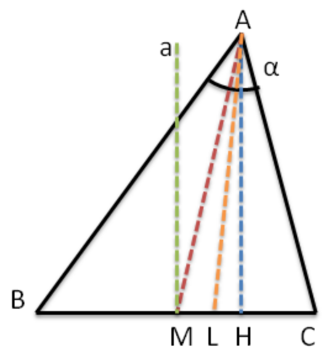
- Un **triangolo** è un poligono di tre lati.
- Si chiamano **vertici** gli estremi dei lati.
- Un vertice si dice **opposto a un lato** se non appartiene a quel lato.
- Si chiamano **angoli interni** del triangolo i tre angoli formati dai lati.
- Un angolo interno si dice **angolo compreso** tra due lati quando i lati dell'angolo contengono dei lati del triangolo.
- Un angolo interno si dice **angolo adiacente a un lato** del triangolo quando uno dei suoi lati contiene quel lato del triangolo.
- Un angolo si dice **angolo esterno** al triangolo se è un angolo adiacente a un angolo interno.



Nella figura a lato, A , B e C sono i vertici del triangolo. Il vertice A è opposto al lato a . L'angolo α è angolo interno al triangolo. L'angolo γ è esterno. L'angolo α è compreso tra i lati AB e AC .

- Si dice **bisettrice** relativa a un vertice, il segmento di bisettrice dell'angolo al vertice che ha per estremi il vertice stesso e il punto in cui essa incontra il lato opposto.
- Si dice **mediana** relativa a un lato il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.
- Si dice **altezza** di un triangolo relativa a un suo lato il segmento di perpendicolare che ha per estremi il vertice opposto al lato e il punto di intersezione della perpendicolare con la retta contenente il lato.

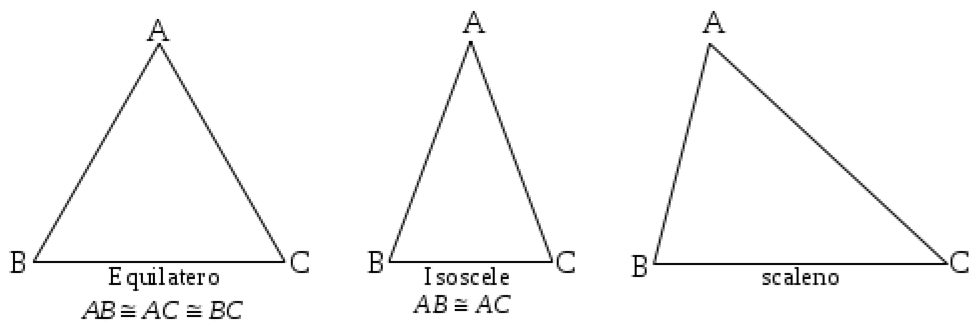
Si dice **asse** di un triangolo, relativo a un suo lato, la perpendicolare al lato condotta nel suo punto medio.



Nel triangolo della figura, AL è la bisettrice dell'angolo nel vertice A ; AH è altezza relativa alla base BC ; AM è mediana relativa al lato BC , la retta a è l'asse di BC .

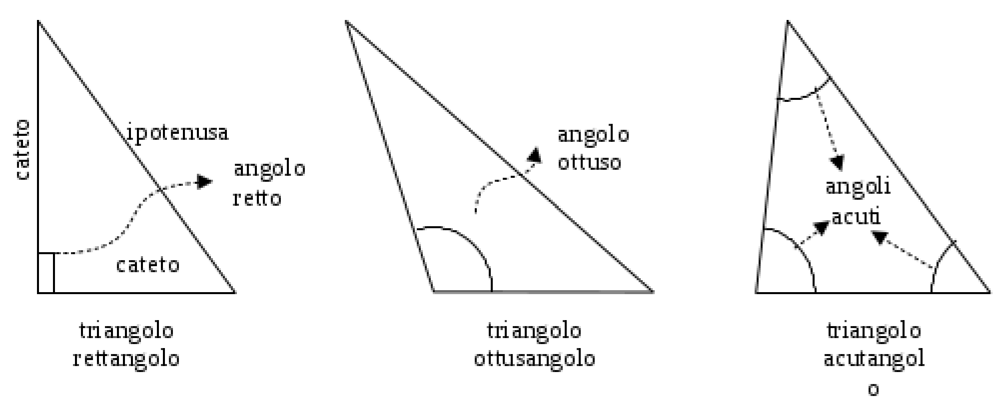
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati:

- un triangolo si definisce **equilatero** se ha i tre lati congruenti;
- un triangolo si definisce **isoscele** se ha (almeno) due lati congruenti;
- un triangolo si definisce **scaleno** se ha i tre lati a due a due non congruenti;



Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli:

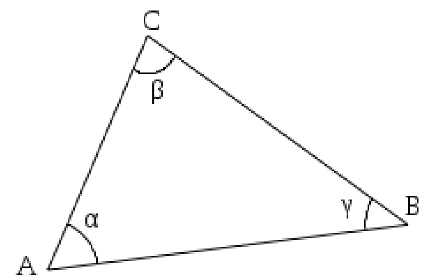
- un triangolo si dice **rettangolo** se ha un angolo interno retto;
- in un triangolo rettangolo si dice **ipotenusa** il lato che si oppone all'angolo retto, si dicono **cateti** i lati adiacenti all'angolo retto;
- un triangolo si dice **ottusangolo** se ha un angolo interno ottuso;



- un triangolo si dice **acutangolo** se ha tutti gli angoli interni acuti.

1.1 Esercizi

1. In base alla figura rispondi alle seguenti domande



   (a) Il lato AB si oppone all'angolo … … …

   (b) L'angolo α si oppone al lato … …

   (c) L'angolo di vertice C si chiama …

   (d) L'angolo γ è adiacente ai lati … … e … …

   (e) I lati AB e BC sono adiacenti all'angolo …

   (f) I lati AC e AB formano l'angolo …

   (g) Traccia l'angolo esterno al triangolo nel vertice A

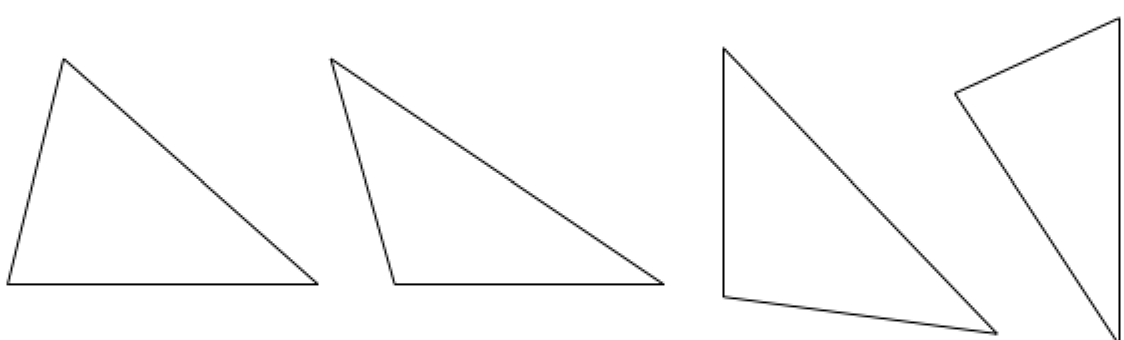
   (h) Traccia la bisettrice dell'angolo β

   (i) Traccia l'altezza relativa alla base AB

   (j) La mediana relativa al lato BC

2. Disegna un segmento AB e poi disegna i triangoli ABC e ABD che hanno la base AB in comune.

3. Disegna le tre altezze di ciascuno dei seguenti triangoli.



CHAPTER

TWO

PRIMO E SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

Ricordiamo che due figure piane sono congruenti se sono sovrapponibili, cioè se è possibile spostare una sull'altra, senza deformarle, in modo che coincidano perfettamente.

In particolare, due triangoli sono sovrapponibili se hanno "ordinatamente" congruenti i tre lati ed i tre angoli. Con il termine ordinatamente intendiamo che, a partire da una coppia di vertici e procedendo lungo il contorno in senso orario oppure antiorario, incontriamo lati congruenti e vertici di angoli congruenti. Nel caso dei triangoli, questo succede esattamente quando angoli congruenti nei due triangoli sono compresi tra coppie di lati congruenti o, in maniera equivalente, quando sono opposti a lati congruenti.

I criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che basta conoscere la congruenza di solo alcuni elementi dei due triangoli, generalmente tre elementi di un triangolo congruenti a tre elementi dell'altro triangolo, per poter affermare la congruenza di due triangoli, e quindi dedurne la congruenza degli altri elementi.

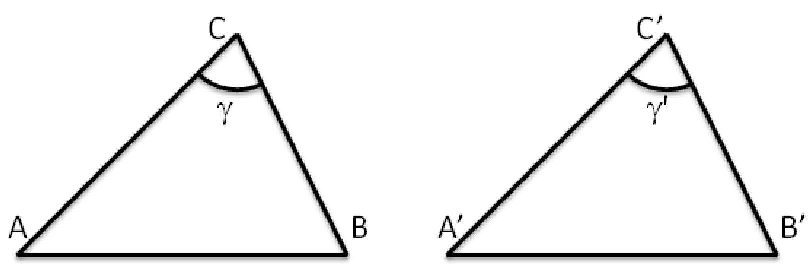
Un modo tradizionale di presentare l'argomento, dovuto allo stesso Euclide, è quello di "dimostrare" i primi due criteri di congruenza dei triangoli facendo uso della definizione di congruenza come "uguaglianza per sovrapposizione", e di utilizzarli successivamente per la verifica di altre proprietà.

Secondo il matematico tedesco D. Hilbert (1862-1943), il primo criterio di congruenza è un assioma, il secondo criterio può essere dimostrato per assurdo attraverso il primo.

Presenteremo questi argomenti basilari alla maniera di Euclide.

2.1 Primo criterio di congruenza dei triangoli

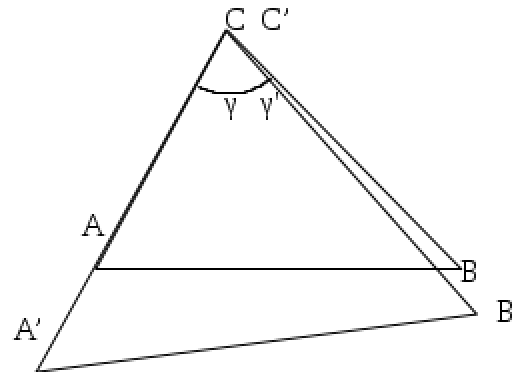
Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.



Ipotesi:

$AC \cong A'C'$ $BC \cong B'C'$ $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C}'B'$

breakTesi: $ABC \cong A'B'C'$



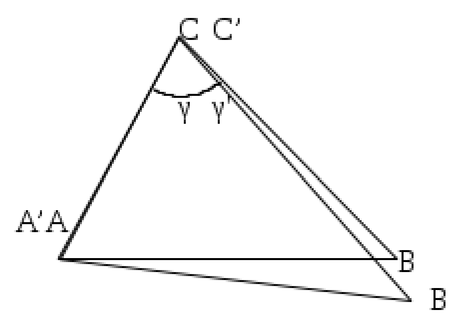
Dimostrazione. Vogliamo provare che il triangolo $A'B'C'$ può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo ABC .

A tal proposito, portiamo il punto C' sul punto C in modo tale che la semiretta $C'A'$ sia sovrapposta alla semiretta CA ed i punti B e B' siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AC .

Dopo questo movimento, i triangoli potrebbero trovarsi nella posizione della figura a lato?

Vediamo perché questa situazione non è possibile. Abbiamo supposto per ipotesi che i segmenti AC e $A'C'$ siano congruenti, pertanto se C coincide con C' anche A deve coincidere necessariamente con A' , mentre nella figura $A'C'$ è maggiore di AC .

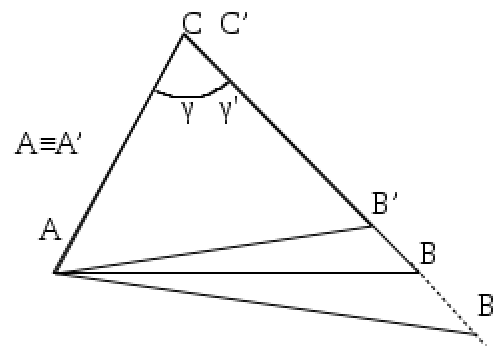
Allora i triangoli potrebbero trovarsi almeno nella seguente posizione, nella quale A e A' coincidono?



Tuttavia nemmeno questa posizione è possibile poiché abbiamo supposto per ipotesi che gli angoli γ e γ' siano congruenti, mentre dalla figura risulta che γ è maggiore di γ' . Di conseguenza la semiretta per CB e la semiretta per $C'B'$ devono sovrapporsi, in quanto devono formare lo stesso angolo con la semiretta per CA .

A questo punto, rimane da fissare la posizione di B' rispetto a B , cioè rimane da decidere se B' cade internamente al segmento CB , come nella figura che segue, se B' cade esternamente al segmento CB o se B' e B coincidono.

Poiché per ipotesi $BC \cong B'C'$, il punto B' deve necessariamente coincidere con B . Pertanto i vertici del triangolo ABC si sovrappongono ai vertici del triangolo $A'B'C'$ e di conseguenza i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti.Q.e.d.



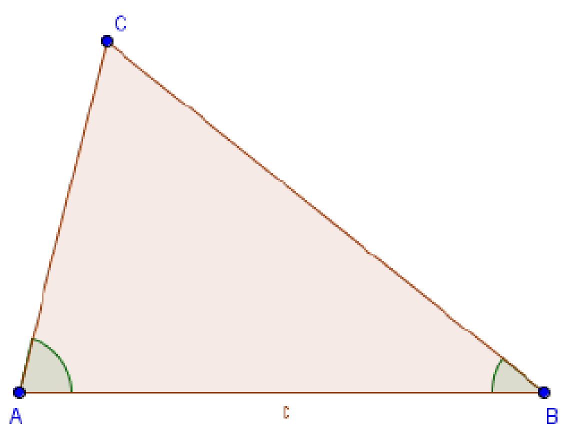
2.2 Primo criterio di congruenza dei triangoli

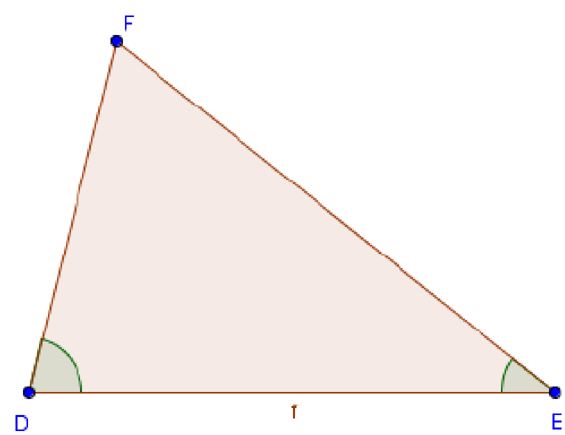
Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato tra essi compreso.

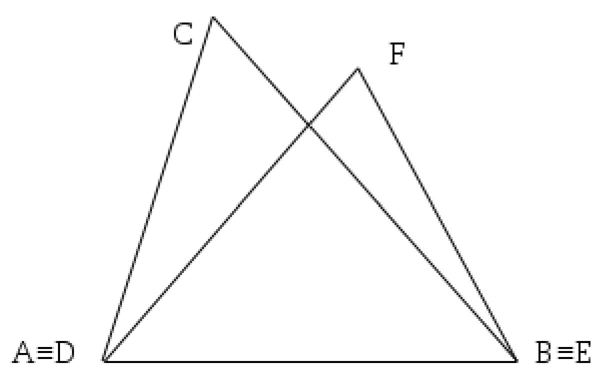
Ipotesi: $AB \cong DE$, $C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$, $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$.

Tesi: $ABC \cong DEF$.

Dimostrazione. Vogliamo provare che il triangolo DEF può essere portato a sovrapporsi perfettamente al triangolo ABC .







A tal proposito, in virtù della congruenza dei lati AB e DE, portiamo a sovrapporre il segmento DE al segmento AB in maniera tale che D coincida con A, E coincida con B, e i punti C ed F siano nello stesso semipiano individuato dalla retta AB.

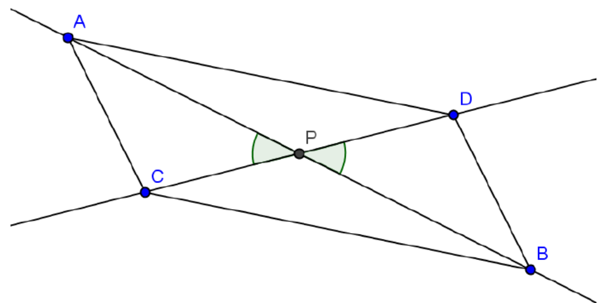
I due triangoli potrebbero trovarsi nella seguente posizione?

Dalla congruenza degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, segue che la semiretta DF sarà sovrapposta alla semiretta AC; analogamente, dalla congruenza degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{E}$, segue che la semiretta EF sarà sovrapposta alla semiretta BC. Dunque C ed F devono necessariamente coincidere, perché sono l'unica intersezione di due rette incidenti. Poiché i tre vertici si sono sovrapposti, i due triangoli sono completamente sovrapposti e quindi sono congruenti. Q.e.d.

Esempio

Si considerino due rette incidenti, r ed s , ed il loro punto in comune P . Sulle semirette opposte di origine P si prendano punti equidistanti da P , come in figura, in maniera tale che $AP \cong PB$, $CP \cong PD$. Dimostra che, unendo i quattro punti in modo da costruire un quadrilatero, i quattro triangoli che si vengono a formare sono a due a due congruenti: $ACP \cong BDP$, $ADP \cong BPC$.

Realizziamo il disegno ed esplicitiamo ipotesi e tesi



Ipotesi

$r \cap s = P$

$AP \cong PB$

$CP \cong PD$

Tesi

$ACP \cong BDP$
$ADP \cong BPC$

Dimostrazione. I triangoli ACP e BPD hanno: $AP \cong PB$ per ipotesi, $CP \cong PD$ per ipotesi, $A\widehat{P}C \cong B\widehat{P}D$ perché opposti al vertice. Pertanto sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.

Analogamente, i triangoli ADP e BPC hanno: … … … … … … … …

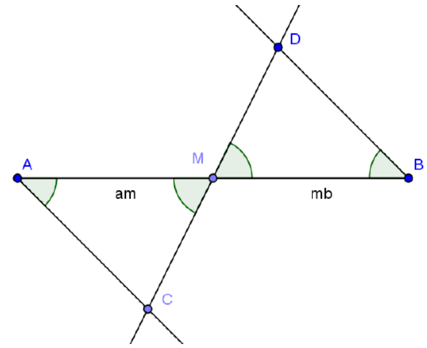
Esempio

- Si considerino un segmento AB ed il suo punto medio M. Si tracci una generica retta r passante per M e distinta dalla retta per AB. Si traccino inoltre due semirette di origine rispettivamente A e B, situate nei due semipiani opposti rispetto alla retta per AB, che intersechino la retta r rispettivamente in C e in D e che formino con la retta per AB due angoli congruenti (vedi figura). Detti C e D i rispettivi punti d'intersezione delle due semirette con la retta r, dimostra che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.

Ipotesi:

$AM \cong MB$

$M\widehat{A}C \cong M\widehat{B}D$



Tesi:

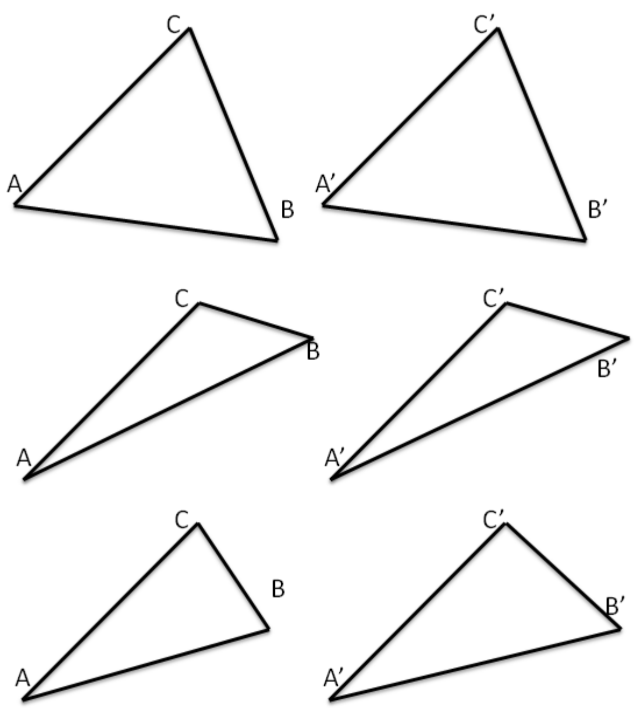
$AMC \cong BMD$

Dimostrazione. I segmenti AM e MB sono congruenti in quanto M è il punto medio di AB , gli angoli di vertice M sono congruenti perché opposti al vertice, gli angoli di vertice A e B sono congruenti per costruzione. Allora i triangoli AMC e BMD sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Esercizi sul 1° e 2° criterio di congruenza dei triangoli

2.3 Esercizi

1. Per ciascuna delle seguenti coppie di triangoli indica se sono congruenti ed eventualmente per quale criterio.



Si sa che sono congruenti i lati AB con $A\,'B\,'$ e AC con $A\,'C\,'$, l'angolo in A con l'angolo $A\,'$.

(a) I triangoli sono congruenti? .. tabSI NO

Se sì, per il … … … … … … … …

Si sa che sono congruenti i lati AB con A ’B ’ e gli angoli in A con B ’ e B con A ’ .

I triangoli sono congruenti? .. tabSINO

Se sì, per il … … … … … … … …

(a) Si sa che sono congruenti ilati AB con A ’B ’ e BC con A ’C ’ , l’angolo in A con A ’

I due triangoli sono congruenti? .. tabSINO

Se sì, per il … … … … … … … …

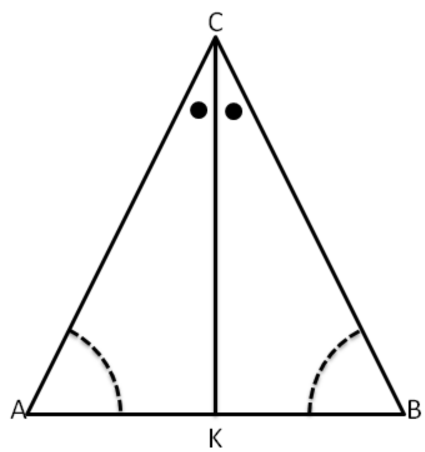
2. In un triangolo ABC prolunga la mediana AM di un segmento MD congruente a MA . Dimostra che il triangolo AMC è congruente al triangolo BMD e che il triangolo ABM è congruente al triangolo CMD .
3. Due triangoli ABC e DEF hanno il lati AB e DE congruenti, hanno inoltre gli angoli esterni ai vertici A e B rispettivamente congruenti agli angoli esterni ai vertici D e E . Dimostra che i due triangoli sono congruenti.
4. Si consideri il segmento AB e per il suo punto medio M si tracci una retta r qualsiasi. Su tale semiretta, da parti opposte rispetto a AB , si prendano due punti S e T tali che $SM \cong MT$. Dimostrare che i triangoli AMS e TMB sono congruenti.
5. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.
6. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l’angolo acuto adiacente ad esso.
7. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti l’angolo al vertice e i due lati obliqui.
8. Nel triangolo isoscele ABC , di base BC , prolunga la bisettrice AD di un segmento DE . Dimostra che AE è bisettrice dell’angolo $B\widehat{E}C$ .. Warning, unrecognized: {urn:oasis:names:tc:opendocument:xmlns:text:1.0}bookmark
9. Dati due triangoli congruenti ABC e $A'B'C'$, si considerino sui lati AC e $A'C'$ due punti D e D' tali che $DC \cong D'C'$. Dimostrare che $DB \cong D'B'$.
10. Siano ABC e DEF due triangolo congruenti. Sui lati congruenti AB e DE prendi il punto G su AB e H su DE, in modo che $AG \cong DH$. Dimostra che anche GC è congruente ad HF.
11. In un triangolo ABC, sul prolungamento del lato AB, dalla parte di B, prendi un punto D tale che $BD \cong AB$, analogamente sul prolungamento del lato CB, dalla parte di B, prendi un punto E tale che $EB \cong BC$. Dimostra che la mediana BM del triangolo ABC è allineata con la mediana BN del triangolo DBE , ossia che l’angolo formato dalle due mediane è un angolo piatto.
12. Del triangolo ABC prolunga il lato AB di un segmento BD congruente a BC , analogamente prolunga il lato CB di un segmento BE congruente ad AB . Traccia la bisettrice BF del triangolo ABC e la bisettrice BG del triangolo DBE . Dimostra che $BF \cong BG$.
13. Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell’angolo in A . Con origine in D traccia due semirette che incontrano rispettivamente AC in E e AB in F , in modo che $A\widehat{D}F \cong A\widehat{D}E$. Dimostra che il triangolo AFE è un triangolo isoscele.
14. Nel triangolo ABC con $AC < AB$ traccia la bisettrice AD dell’angolo in A . Per il punto D traccia la perpendicolare alla bisettrice AD . Detti E ed F i punti in cui la perpendicolare incontra rispettivamente i lati AC e AB , dimostra che $AF \cong AE$.
15. Sui prolungamenti oltre A del lato AC , oltre B del lato AB e oltre C del lato BC di un triangolo equilatero ABC si considerino i segmenti congruenti AA' , BB' , CC' . Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è ancora equilatero.
16. Dato l’angolo convesso $b\widehat{A}c$ si considerino su b i due punti B e B' , su c si considerino i punti C e C' , tali che AB e AB' siano rispettivamente congruenti con AC e con AC' . Dimostrare che BB' e BC' sono rispettivamente congruenti con CC' e $B'C$.

17. Dato un segmento AB , condurre per il suo punto medio M una qualsiasi retta r e considerare su di essa, da parti opposte rispetto ad AB , due segmenti congruenti MC e MD . Dimostrare che i triangoli AMC e BMD sono congruenti.
18. Sui lati dell'angolo $X\widehat{O}Y$ si considerino i punto A e B tali che $OA \cong OB$. Sia H un punto della bisettrice dell'angolo tale che $OH < OA$. Siano T il punto di intersezione di AH con OY e S il punto di intersezione di BH con OX . Dimostrare che $AH \cong HB$ e $SH \cong HT$.
19. Si consideri un punto O interno al triangolo ABC e si congiunga tale punto con i vertici A e B del triangolo. Si prolunghino i segmenti AO e BO oltre O di due segmenti OA' e OB' rispettivamente congruenti ai suddetti segmenti. Dimostrare che i segmenti AB e A'B' sono congruenti.
20. Si considerino i triangoli congruenti ABC e A'B'C' e si prolunghino i lati AB e A'B' di due segmenti BP e $B'P'$ tra loro congruenti. Si prolunghino inoltre i lati AC e $A'C'$ di due segmenti CQ e $C'Q'$ tra loro congruenti. Si dimostri che sono congruenti i triangoli APQ e $A'P'Q'$; $CP \cong C'P'$, $QB \cong Q'B'$.
21. Sui lati a e b di un angolo di vertice O prendi i punti A e B sulla semiretta a e i punti C e D sulla semiretta b, in modo che $OA \cong OC$ e $AB \cong CD$. Sia E il punto di intersezione di AD con BC . Dimostra che sono congruenti i triangoli ABE e CDE .
22. Sui lati di un angolo convesso $a\widehat{O}b$ si prendano i due punti A e B tali che $OA \cong OB$. Sia C un punto della bisettrice. Dimostra che i triangoli BCO e ACO sono congruenti.

CHAPTER

THREE

TEOREMI DEL TRIANGOLO ISOSCELE



Il triangolo isoscele ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama base, i due lati congruenti si dicono lati obliqui.

Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base.

3.1 Teorema diretto del triangoli isoscele

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Ipotesi: $AC \cong BC$

Tesi: $B\hat{A}C \cong A\hat{C}B$

Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C .

I triangolo ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

$AC \cong CB$ per ipotesi

CK lato in comune

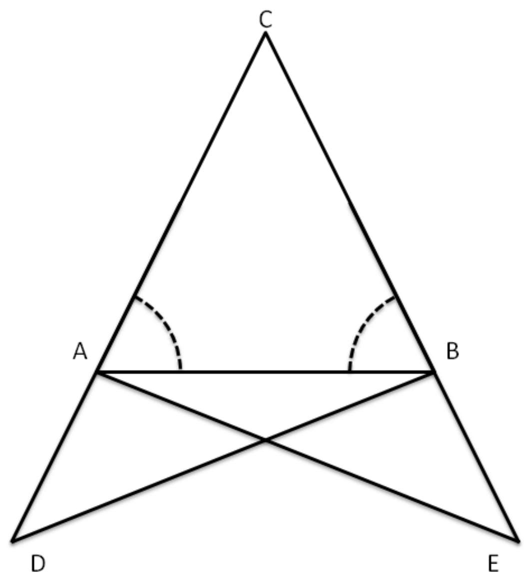
$A\widehat{C}K \cong B\widehat{C}K$ perché CK è la bisettrice dell'angoloin C .

Pertanto, essendo congruenti hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo in A è congruente all'angolo in B . Q.e.d.

Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando ipotesi e tesi.

3.2 Teorema inverso del triangoli isoscele

Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (rispetto al lato compreso tra gli angoli congruenti preso come base).



Ipotesi: $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$

Tesi: $AC \cong BC$

Dimostrazione: Procediamo per passi, realizzando una costruzione che ci permetta di confrontare coppie di triangoli congruenti. Prolunghiamo i lati AC e BC dalla parte di A e di B rispettivamente, e sui prolungamenti prendiamo due punti D ed E in maniera tale che risulti $AD \cong BE$.

Osserviamo che i triangoli ADB e BAE risultano congruenti per il 1° criterio, avendo in comune il lato AB ed essendo $AD \cong BE$ per costruzione e $D\hat{A}B \cong A\hat{B}E$ perché adiacenti agli angoli $C\hat{A}B$ e $C\widehat{B}A$ congruenti per ipotesi.Pertanto, tutti gli elementi dei due triangoli ADB e AEB sono ordinatamente congruenti, in particolare $DB \cong AE$, $A\widehat{D}B \cong B\widehat{E}A$ $A\widehat{B}D \cong B\widehat{A}E$.

Confrontiamo ora i triangoli CDB e CAE ,risultano congruenti per il 2° criterio poiché hanno $DB \cong AE, C\hat{D}B \cong C\hat{B}A$ per quanto appena dimostrato e $C\hat{B}D \cong C\hat{A}E$ perché somma di angoli rispettivamente congruenti: $C\hat{B}D \cong C\hat{B}A + A\hat{B}D$ e $C\hat{A}E \cong C\hat{A}B + B\hat{A}E$.

Pertanto, i restanti elementi dei due triangoli risultano ordinatamente congruenti:

In particolare $CB \cong CA$, che è la tesi che volevamo dimostrare. Q.e.d.

Dai due teoremi precedenti seguono importanti proprietà, che qui riportiamo come corollari.

3.3 Corollari

Un triangolo equilatero è anche equiangolo.

Viceversa, se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.

Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.

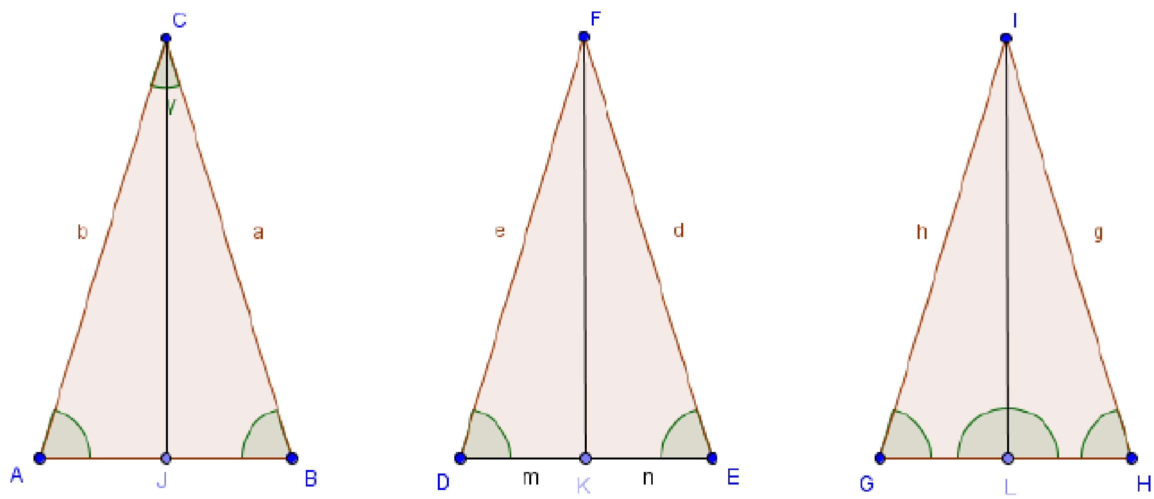
Viceversa, se un triangolo non ha angoli congruenti, allora è scaleno.

Dimostrazioni

1. Poiché un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base, la tesi segue dal teorema diretto del triangolo isoscele.
2. Possiamo confrontare gli angoli a due a due; risulteranno i lati congruenti a due a due in base al teorema inverso del triangolo isoscele.
3. Se per assurdo un triangolo scaleno avesse due angoli congruenti, allora risulterebbe isoscele, in base al teorema inverso del triangolo isoscele.
4. Se per assurdo un triangolo che non ha angoli congruenti non fosse scaleno, il che vuol dire che sarebbe isoscele, allora avrebbe angoli congruenti in contrasto con l'ipotesi di assurdo. Q.e.d.

3.4 Proprietà del triangolo isoscele

In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.



In figura, CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo ABC , FK è la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF , IL è l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI .

Dividiamo l'enunciato in tre parti:

a) In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana relativa alla base.

b) In un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza relativa alla base.

c) In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.

Dimostriamo le prime due parti della proposizione.

Per ciascuna delle tre parti precedenti, scriviamo ipotesi e tesi; utilizziamo i tre triangoli della figura, segnaliamo che CJ è per ipotesi la bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo ABC , FK la mediana relativa alla base DE del triangolo DEF , IL l'altezza relativa alla base GH del triangolo GHI .

In ABC :

Ipotesi: $AC \cong CB$, $C\widehat{A}B \cong C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}J \cong B\widehat{C}J$

Tesi: $CJ \perp AB$, $AJ \perp JB$.

In DEF :

Ipotesi: $DF \cong FE$, $F\widehat{D}E \cong F\widehat{E}D$, $DK \cong KE$ .. tab

Tesi: $FK \perp DE$, $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$.

1. In GHI:

Ipotesi: $IG \cong IH$, $I\widehat{G}H \cong I\widehat{H}G$, $IL \perp GH$

Tesi: $G\widehat{I}L \cong H\widehat{I}L$, $GL \perp LH$.

Avviamo la dimostrazione delle prime due parti, che lasciamo completare al lettore, rimandando al prossimo capitolo la dimostrazione della terza parte. Utilizziamo i primi due criteri di congruenza, i teoremi del triangolo isoscele e le nozioni comuni della geometria euclidea.

Dimostrazione a): I triangoli AJC e CJB sono congruenti per il secondo criterio. Infatti… Dunque $AJ \cong JB$ e $A\widehat{J}C \cong C\widehat{J}B$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti.

Dimostrazione b): I triangoli DKF e FKE sono congruenti per il primo criterio. Infatti… Dunque $D\widehat{F}K \cong E\widehat{F}K$ e $F\widehat{K}D \cong F\widehat{K}E$ che risultano pertanto retti in quanto adiacenti. Q.e.d.

3.5 Esercizi

1. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti.
2. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti.
3. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'angolo al vertice e uno dei lati obliqui.
4. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.
5. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e la bisettrice dell'angolo al vertice.
6. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti gli angoli al vertice e due lati corrispondenti qualsiasi.
7. Due triangoli, che hanno congruenti due lati e la mediana relativa ad uno dei due, sono congruenti.
8. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C , prendi su AC un punto M e su BC un punto N in modo che $CM \cong CN$, quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti? Dimostralo.

   $ACN \cong ANB$ $ACN \cong BCM$ $ABN \cong ABM$ $ABC \cong MNC$
9. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C , indica con M il punto medio di AC , con N il punto medio di CB e con H il punto medio di AB . Quali delle seguenti coppie di triangoli sono congruenti?

   AMH e HNB

   MNH e MNC

   AMH e MCN

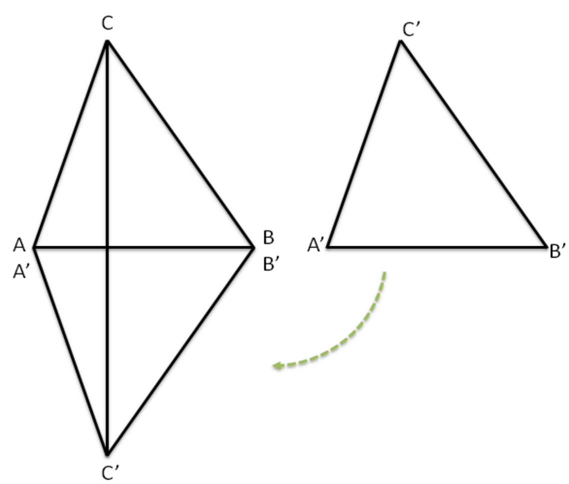
10. Sui lati AC e CB del triangolo isoscele ABC di base AB considera rispettivamente due punti D ed E tali che $CD \cong CE$. Dimostra che i triangoli ADB e AEB son congruenti. Detto P il punto di intersezione tra AE e DB , dimostrare che ABP e DPE sono triangoli isosceli.
11. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga la base AB , dalla parte di A di un segmento AD e dalla parte di B di un segmento BE congruente ad AD . Dimostra che anche il triangolo DEC è isoscele.
12. Nel triangolo isoscele ABC di base BC , prendi sul prolungamento di BC due segmenti congruenti $BQ \cong AP$, dimostra che APQ è isoscele.
13. Due triangoli isosceli ABC e ABD hanno in comune la base AB , i vertici C e D sono situati da parti opposte rispetto alla base AB . Dimostra che la retta per CD è bisettrice dell'angolo in C .
14. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C traccia le bisettrici BD all'angolo in B e AE all'angolo in A . Dimostra che $BD \cong AE$. Detto O il punto di intersezione delle bisettrici dimostra che AOB è isoscele. Dimostra che il triangolo ADO è congruente al triangolo BEO .
15. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prolunga, dalla parte di C la bisettrice CD dell'angolo in C di un segmento CE . Dimostra che ED è bisettrice dell'angolo $A\hat{E}D$.
16. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C prendi su AC un punto D e su BC il punto E tali che $AD \cong BE$. Detto O il punto di intersezione di AE con BD , dimostra che AOB è isoscele.
17. In un triangolo ABC sia M il punto medio di AB . Traccia la mediana CM e prolungala dalla parte di M di un segmento MD congruente a CM . Dopo aver dimostrato che il triangolo AMC è congruente a BMD , dimostra che se CM è bisettrice dell'angolo in C allora ABC è isoscele.
18. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C , prendi su AC un punto D e su CB un punto E in modo che $CD \cong CE$. Dimostra che il triangolo DME , dove M è il punto medio della base AB , è isoscele.
19. Due triangoli isoscele hanno in comune la base,dimostra che la retta che unisce i vertici dei due triangoli divide la base a metà.
20. In un triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C , si ha che $AC \cong CB \cong 2AB$. Indica con M il punto medio di AC e N il punto medio di BC , P il punto di intersezione di BM con AN . Individua tutti i triangoli isosceli che si vengono a formare. Dimostra che ACN è congruente a BCM , che ABP è isoscele, che P appartiene all'altezza CH del triangolo.
21. Sia dato il triangolo ABC e sia M il punto medio del lato AB . Si prolunghi CM di un segmento $MD \cong CM$. Dimostrare che $A\hat{C}B \cong A\hat{D}B$.
22. Si prolunghino i lati AC e CB del triangolo isoscele ABC rispettivamente di due segmenti CP e CQ tra loro congruenti. Dimostrare che .. Warning, unrecognized: {urn:oasis:names:tc:opendocument:xmlns:text:1.0}bookmarke che $A\widehat{Q}B \cong A\widehat{P}B$ e che $A\widehat{B}P \cong Q\widehat{A}B$.
23. Sulla base AB di un triangolo isoscele ABC prendi i punti M e N tali che $AM < AN$ e $AM \cong NB$. Dimostra che CMN è isoscele.
24. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di vertice A . Dimostra che BDC è isoscele.
25. Nel triangolo isoscele ABC di base BC prolunga AB di un segmento BD e AC di un segmento CE in modo che $DE \cong CE$. Dimostra che $BE \cong DC$.

CHAPTER

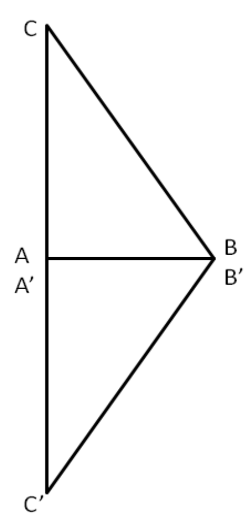
FOUR

TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti le tre coppie di lati.



Ipotesi: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$ ... tab.. tabTesi: $ABC \cong A'B'C'$.



Dimostrazione: Abbiamo due triangoli, ABC e $A'B'C'$, dei quali sappiamo che i lati dell'uno sono congruenti ai lati dell'altro. Ribaltiamo il triangolo $A'B'C'$ e portiamo il segmento $A'B'$ sul segmento AB in modo che il punto A' coincida con A, il punto B' coincida con B (ciò è possibile in quanto $AB \cong A'B'$) ed in modo che il punto C' cada nel semipiano individuato dalla retta AB opposto a quello in cui si trova C. Uniamo C con C'. Viene fuori un disegno diverso a seconda che il punto d'intersezione, che chiamiamo D, tra il segmento CC' e la retta per AB sia interna al segmento AB oppure coincide con uno degli estremi (A o B) oppure sia esterno al segmento AB. Il punto D esiste in ogni caso in quanto C e C' sono nei due semipiani opposti individuati dalla retta AB, pertanto il segmento CC' deve necessariamente tagliare la retta per AB.

Primo caso: D è interno ad AB.

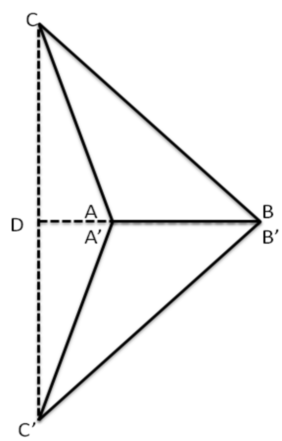
Essendo $AC\tilde{} = A'C'$ e $CB\tilde{} = C'B'$, i triangoli ACC' e $CC'B$ sono isosceli, entrambi sulla base CC'. Dunque, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti. Precisamente risulta: $\widehat{ACC}' \cong \widehat{AC'C}$" e $C'\widehat{CB} \cong \widehat{CC'}B$. Inoltre, $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'}B$ in quanto somme di angoli congruenti:

$\widehat{ACB} \cong \widehat{ACD} + \widehat{DCB} \cong \widehat{AC'}D + \widehat{DC'}B \cong \widehat{AC'}B$.

In conclusione ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio perché hanno: $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$, $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'}B$.

Infine, poiché $ABC \cong ABC'$ e $ABC' \cong A'B'C'$ se ne deduce che $ABC \cong A'B'C'$.

Secondo caso: Il punto D coincide con uno dei due estremi A e A'.



Poiché per ipotesi $CB \cong C'B'$ il triangolo CBC' è isoscele sulla base CC', pertanto $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'}B$ in quanto angoli alla base di un triangolo isoscele. I triangoli ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio perché hanno $AC \cong AC'$, $BC \cong BC'$, $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'B}$. Infine, come per il caso precedente, poiché ABC è congruente a ABC' e quest'ultimo è congruente a $A'B'C'$ anche ABC è congruente a $A'B'C'$.

Terzo caso: Il punto D cade esternamente al segmento AB.

Come nel primo caso, i triangoli CAC' è CBC' sono isosceli sulla base CC', pertanto $\widehat{ACC}' \cong \widehat{AC'}C$ .. Warning, unrecognized: {urn:oasis:names:tc:opendocument:xmlns:text:1.0}bookmarke $\widehat{BCC}' \cong \widehat{BC'}C$. Per differenza di angoli congruenti si ottiene che $\widehat{ACB} \cong \widehat{AC'}B$

Infatti $\widehat{ACB} \cong \widehat{DCB} - \widehat{DCA} \cong \widehat{DC'}B - \widehat{DC'}A \cong \widehat{AC'}B$. Da ciò segue che i triangoli ABC e ABC' sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso. Come per i casi precedenti, se ABC è congruente a ABC' è congruente anche a $A'B'C'$

4.1 Esercizi

1. Due triangoli sono congruenti se hanno
   (a) tre lati congruenti.. tabV F
   (b) tre angoli congruenti.. tabV F
   (c) due lati e l'angolo compreso congruenti.. tabV F
   (d) due angoli e il lato in comune congruenti.. tabV F
   (e) un lato e l'angolo opposto congruenti .. tabV F
2. Due triangoli equilateri sono congruenti se hanno lo stesso perimetro.
3. Dimostra che due triangoli equilateri che hanno in comune la base sono congruenti.
4. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la mediana relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.
5. Se in due triangoli sono congruenti due coppie di lati e la bisettrice relativa ad uno di essi, allora i due triangoli sono congruenti.
6. Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti la base e un altro lato.
7. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A prendi un punto D sul lato AB e un punto E sul lato AC , in modo che $BD \cong EC$, unisci C con D e B con E , sia $\{F\} = BE \cap DC$, dimostra che i triangoli BFA e CFA sono congruenti.
8. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A , prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$, prolunga la base BC di un segmento BG , dalla parte di B , e di un segmento CF dalla parte di C , in modo che $BG \cong CF$. Dimostra che sono congruenti i triangoli ADG e AEF .
9. In un triangolo scaleno ABC sia $AC > BC$. Prolunga BC , dalla parte di C , di un segmento CD congruente ad AC e prolunga AC , dalla parte di C , si un segmento CE congruente a BC . Detto H il punto di intersezione della retta per AB con la retta per DE , dimostra che $AH \cong DH$.
10. In un triangolo isoscele ABC di base BC e vertice A , prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE in modo che $BD \cong CE$. Unisci D con C e prolunga il segmento DC , dalla parte di C di un segmento CF . Unisci E con B e prolunga il segmento EB dalla parte di B di un segmento BG congruente a CF . Dimostra che i triangoli AGD e AFE sono congruenti.
11. Dato l'angolo convesso non piatto $a\hat{O}b$ si prenda un punto A sul lato a e un punto B sul lato b , in modo che $OA \cong OB$. Sia M il punto medio di OA e N il punto medio di OB , congiungi A con N e B con M , indica con P in punto di intersezione. Dimostra che sono congruenti i triangoli OBC e OAD e i triangolo AOP OPB .
12. Nel triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C , prendi un punto D sulla bisettrice CH dell'angolo al vertice C , indica con E il punto di intersezione della retta AD con BC e F il punto di intersezione di BD con AC . Dimostra che i triangoli FDA e EDB sono congruenti.
13. Siano ABC e ABD due triangoli isosceli aventi la base AB in comune e i vertici C e D situati da parti opposte rispetto ad AB . Dimostrare che $A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$.
14. Sia P un punto interno al triangolo isoscele ABC di base AB e sia $AP \cong PB$. Si dimostri che CP appartiene alla bisettrice dell'angolo in C .
15. Due triangoli equilateri ABC e DBC hanno la base BC in comune e i vertici A e D situati da parti opposte rispetto alla base BC . Dimostra che i due triangoli sono congruenti.
16. Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli congruenti. Si fissino su AC un punto P e su $A'C'$ un punto P' tali che $AP \cong A'P'$. Si fissino su BC un punto Q e su $B'C'$ un punto Q' tali che $BQ \cong B'Q'$. Si dimostri che $PQ \cong P'Q'$.

17. Due triangoli, che hanno un lato congruente e hanno congruenti anche i due angoli esterni al triangolo aventi per vertici gli estremi del lato congruente, sono congruenti.
18. Dato il triangolo ABC e un punto O esterno al triangolo, si unisca O con A , con B e con C . Si prolunghi ciascun segmento, dalla parte di O , dei segmenti $OA' \cong OA$, $OB' \tilde{=} OB$, $OC' \cong OC$ Dimostra che $ABC \cong A'B'C'$.
19. Siano LMN i punti medi dei lati del triangolo isoscele ABC , dimostra che anche LMN è isoscele.
20. Siano MN i punti medi dei lati congruenti AB e AC del triangolo isoscele ABC , dimostra che le mediane AM e AN sono congruenti.
21. Siano $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ due angoli consecutivi congruenti, sia OM la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$. Sulle semirette OC , OB , OM e OA si prendano rispettivamente i segmenti tutti congruenti tra di loro OC' , OB' , OM' , OA' . Dimostrare che $A'M' \cong M'B'$, $A'B' \cong B'C'$.
22. Sia OM la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$, sui lato dell'angolo $A\hat{O}B$ si prendano i punti P e Q tali che $OP \cong OQ$. Sia C un punto qualsiasi della bisettrice OM . Dimostra che $CP \cong CQ$.
23. Sia ABC un triangolo. Sulla bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ considera due punti D ed E tali che $AD \cong AB$ e $AE \cong AC$. Dimostra che $BE \cong DC$.
24. * Si disegnino due triangoli congruenti ABC e A'B'C'. Sui lati congruenti AB e A'B', si considerino i

punti D e D' in modo che $AD \cong A'D'$. Dimostrare che $C\widehat{D}B \cong C'\widehat{D'}B'$.

1. * Si disegni un angolo $A\hat{V}B$ e la sua bisettrice VC. Da un punto E della bisettrice si tracci una retta che formi con la bisettrice due angoli retti. Questa retta interseca i lati dell'angolo nei punti A e B. Dimostrare che

$AO \cong BO$.

1. * Disegna il triangolo ABC, con AB>AC. Traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Dal punto D traccia una semiretta che formi con la bisettrice stessa un angolo congruente all'angolo $A\hat{D}C$. Tale semiretta incontra AB nel punto E. Dimostra che CD e DE sono congruenti.
2. * Si disegnino i triangoli congruenti ABC e A'B'C'. Dimostrare che le bisettrici di due angoli congruenti sono congruenti.
3. * Sia ABC un triangolo, e sia AK la bisettrice dell'angolo in A. Da K si conduca una retta che formi due angoli retti con AK e che incontri la retta AB in D e la retta AC in E. Dimostrare che il triangolo ADE è isoscele.
4. * Si consideri il triangolo ABC. Si prolunghi il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE\tilde{} = AB$ e il lato BC, dalla parte di B, di un segmento $BF\tilde{} = BC$; si congiunga E con F. Considerati il punto medio M di AC e il punto medio N di EF, dimostrare che B è sul segmento MN.
5. * Siano AB un segmento ed M il suo punto medio. Si disegni la retta r tale che M sia su r, e su di essa si individuino i segmenti congruenti MC ed MD, in semipiani opposti rispetto alla retta AB. Congiunti A con D e B con C, si dimostri che i triangoli AMD e MBC sono congruenti.
6. * Si disegnino due angoli consecutivi e congruenti $a\hat{V}b$ e $b\hat{V}c$ e le rispettive bisettrici d ed e. Sulle semirette a e b si scelgano rispettivamente i punti A e B tali che $VA\tilde{} = VB$. Sulle bisettrici d e e si scelgano rispettivamente i punti C e D tali che $VC\tilde{} = VD$. Si congiungano A con C e B con D. Dimostrare che $V\hat{A}C\tilde{} = V\hat{B}C\tilde{} = V\hat{B}D$.
7. * Si disegni il triangolo ABC, con AB > AC, e si conduca la bisettrice AD dell'angolo in A. Da D si conduca la semiretta a che forma con la bisettrice b un angolo congruente a $A\hat{D}C$, e la semiretta a interseca il lato AB in E. Si dimostri che $CD\tilde{} = DE$.
8. * Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prolunghino i lati AC e BC, dalla parte della base AB, di due segmenti AD e BE tali che $AD = BE$. Si dimostri che il punto $\{F\} = AE \cap BD$ appartiene alla bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.
9. * Due triangoli isosceli ABC e CED e rettangoli in C sono tali che $\{C\} = ABC \cap CED$. Sapendo che l'angolo $B\hat{C}D$ è acuto, si dimostri che $AD = BE$.

10. * Disegnare due segmenti congruenti AB e DE. Costruire su essi due triangoli equilateri ABC e DEF. Si dimostri che i triangoli sono congruenti. Si può dimostrare ancora la congruenza se si costruiscono sui due segmenti due triangoli isosceli?
11. * Nel triangolo isoscele ABC, di base AB, prolunga i lati CA e CB dalla parte della base. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\hat{A}$ incontra il prolungamento del lato BC nel punto E. La bisettrice dell'angolo supplementare di $\hat{B}$ incontra il prolungamento del lato AC nel punto F. Dimostra che $ABF = ABE$.
12. * Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia minore del lato obliquo. Prolunga il lato CA, dalla parte di A, di un segmento AE congruente alla differenza fra il lato obliquo e la base. Prolunga poi la base AB, dalla parte di B, di un segmento $BF\tilde{} = AE$. Congiungi F con C ed E. Dimostra che $CF\tilde{} = EF$.
13. * Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C; si prendano sui prolungamenti di AB due punti D ed E tali che $AD\tilde{} = BE$. Si dimostri che $ADC = BEC$ e $AEC\tilde{} = BDC$.
14. * Sui lati congruenti del triangolo isoscele ABC, di vertice C, disegna due segmenti congruenti CE e CF. Congiungi E con B, poi A con F; indica con D il loro punto d'intersezione. Dimostra che anche il triangolo ABD è isoscele.
15. * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Si conducano le bisettrici degli angoli alla base e sia E il loro punto d'incontro. Dimostrare che il triangolo ABE è isoscele.
16. * Sui due lati obliqui del triangolo isoscele ABC, di base AB, disegna, esternamente al triangolo, i triangoli equilateri BCD e ACE. Congiungi A con D e B con E, poi indica con F il punto intersezione dei segmenti ottenuti. Dimostra che $AD = BE$ e che CF è bisettrice di $A\hat{C}B$.
17. * Disegna un triangolo isoscele ABC, di base BC e l'angolo acuto in A. Traccia le altezze BH e CK relative, rispettivamente, ai lati AC e AB e prolunga tali altezze, dalla parte di H e K, dei segmenti $HB'\tilde{} = BH$ e $KC'\tilde{} = CK$. Sia A' il punto d'intersezione della retta BC' con la retta B'C. Dimostra che $ABC\tilde{} = AC'B\tilde{} = AB'C$ e che il triangolo A'B'C' è isoscele.
18. * Siano dati due triangoli isosceli aventi ordinatamente congruenti un lato e la base. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.
19. * Si consideri un angolo $a\hat{O}b$; siano A, B due punti del lato a e siano C, D due punti del lato b tali che $OA\tilde{} = OC$ e $OB\tilde{} = OD$. Si congiungano A con D e B con C e sia E il punto di intersezione tra AD e BC. Si dimostri che il punto E appartiene alla bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 118, 119, 124, 125; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da

http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

CHAPTER

FIVE

CONGRUENZA DEI POLIGONI

Ricordiamo che due poligoni sono congruenti se hanno lo stesso numero di lati ed hanno “ordinatamente” congruenti tutti i lati e tutti gli angoli corrispondenti.

Il seguente criterio di congruenza dei quadrilateri è una semplice applicazione del primo criterio di congruenza dei triangoli.

Criterio di congruenza dei quadrilateri

Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti tre lati ed i due angoli tra essi compresi, sono congruenti. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente lato ed i rimanenti due angoli.

Conseguenza diretta del primo e del secondo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.

Criterio di congruenza dei quadrilateri

Due quadrilateri, aventi ordinatamente congruenti due lati consecutivi e tre angoli (adiacenti ai due lati congruenti), sono congruenti. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche il rimanente angolo ed i rimanenti due lati.

Conseguenza del primo e del terzo criterio di congruenza dei triangoli è il seguente criterio.

Criterio di congruenza dei quadrilateri.

Due quadrilateri sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i quattro lati ed un angolo corrispondente. Di conseguenza hanno ordinatamente congruenti anche i rimanenti tre angoli.

Criteri di congruenza dei poligoni

Due poligoni sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti tutti i lati e tutti gli angoli compresi, tranne tre elementi su cui non si fa alcuna ipotesi:

1. due angoli consecutivi ed il lato compreso;
2. due lati consecutivi e l’angolo compreso;
3. tre angoli consecutivi.

La dimostrazione di questi criteri è lasciata al lettore che potrà esercitarsi applicando i tre criteri di congruenza dei triangoli.

5.1 Esercizi

1. I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$. Sui lati AC e $A'C'$, esternamente ai triangoli costruisci i triangoli ADC e $A'D'C'$ in modo che $AD \cong A'D'$ e $DC \cong D'C'$. Dimostra che sono congruenti i quadrilateri $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

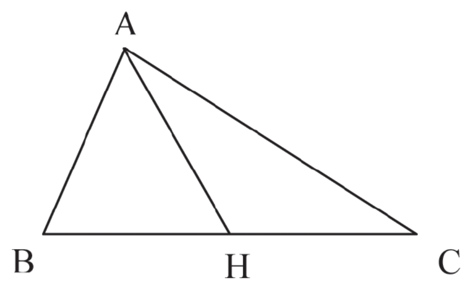
2. Dati i pentagoni congruenti $ABCDE$ e $FGHIL$ traccia le diagonali che uniscono le coppie di punti corrispondenti A , D , F e I . Dimostra che sono congruenti i quadrilateri $ABCD$ e $FGHI$.

CHAPTER

SIX

QUESITI DALLE PROVE INVALSI

1. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo?
   (a) 72°, 72°, 36°
   (b) 30°, 60°, 90°
   (c) 36°, 36°, 72°
   (d) 90°, 45°, 45°



(Prove invalsi 2005)

2. Osserva la figura. Se $AB \neq AC$ e $BH = HC$, che cosa rappresenta il segmento AH nel triangolo ABC?
   (a) Una altezza.
   (b) Una mediana.
   (c) Una bisettrice.
   (d) Un asse.

   (Prove invalsi 2006)

3. Da un triangolo equilatero MNO di lato 6 cm viene tagliato via un triangolo equilatero di vertice in O e lato 2 cm. Il perimetro del quadrilatero rimanente è…
   (a) 12 cm
   (b) 14 cm
   (c) 16 cm
   (d) 18 cm
   (e) 20 cm

(Prove invalsi 2003)

Autori

Angela D'Amato: teoria, esercizi

Antonio Bernardo: esercizi, integrazioni

Claudio Carboncini: editing OpenOffice

Cristina Mocchetti: teoria, integrazioni

Gemma Fiorito: integrazioni, correzioni

Erasmo Modica: esercizi

Luciano Sarra: correzioni

Eugenio Medaglia: correzioni

Laura Todisco: correzioni

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da

http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.8 del 10.03.2012

CHAPTER

SEVEN

INDICI E TAVOLE

- *genindex*
- *modindex*
- *search*