

# Level Set 法

Seiya Kumada

## 1 Level Set 法とは

2次元空間内に存在するオブジェクトの境界面を、3次元空間内で定義される曲面を時間発展させることにより検出する手法である。手順の概要は以下の通りである (図1 参照)。

- 抽出したいオブジェクトの存在する平面を  $xy$  平面とし、そのオブジェクトの内部か外部に閉曲線  $\gamma_0$  を与える。図1では外部に与えている。
- この閉曲線から曲面  $\psi_0(\vec{x})$  を作る。ここで、 $\vec{x}$  は  $xy$  平面内の点である。
- この曲面を時間発展させる。図1の場合、曲面  $\psi_0$  を内側に収縮させていく。
- 時間発展の速度が0、あるいはあらかじめ決めておいた閾値以下となれば終了する。
- 終了した時点での曲面と平面  $z = 0$  との交差部分が求めるべきオブジェクトの境界線である。

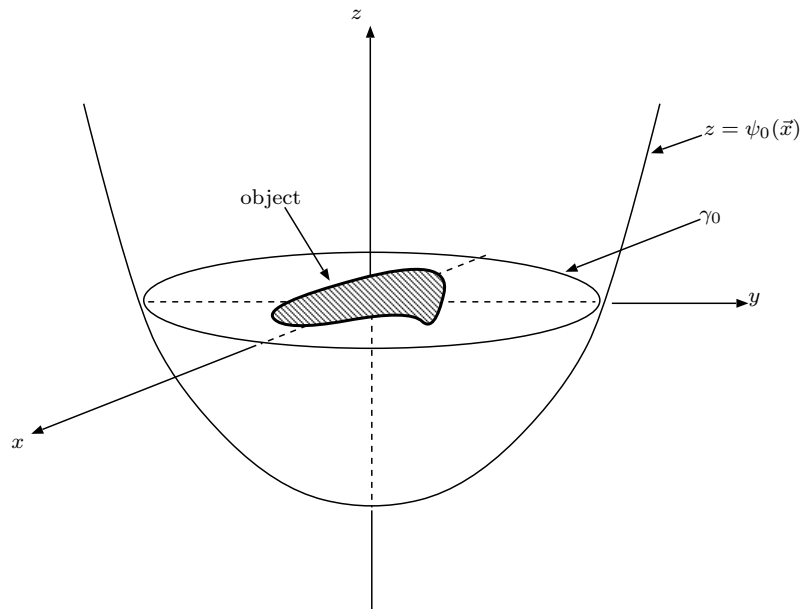
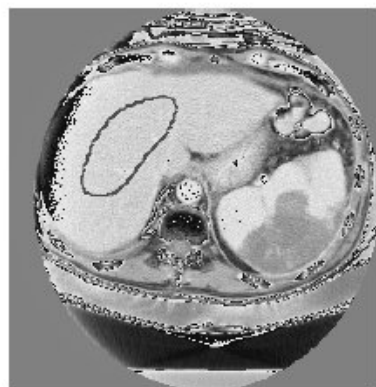
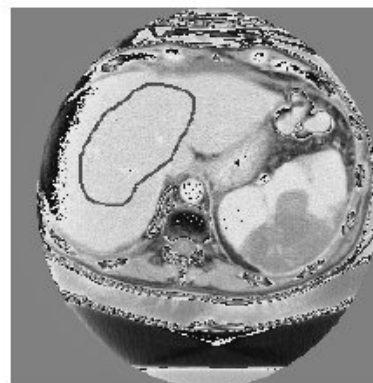


図1: level set 法の概略

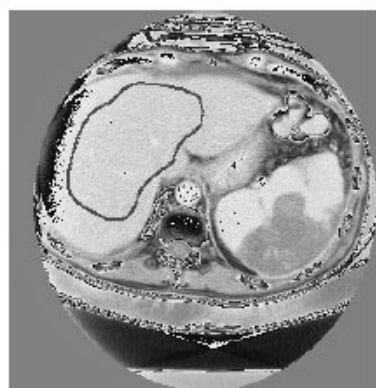
図2~5に実際の適用例を示す [1]。図3では、複雑な分岐に沿って境界線が成長していく様子を観察できる。また、図4,5では、時間発展に伴いトポロジーが変化していることが分かる。level set 法は、対象とする空間より1次元高い空間を扱うことにより、特異的な形状 (窪みや尖りなど) やトポロジーの変化に自然に対応できる。また、最終結果は初期閉曲線に依存しにくいのも利点である。さらに、アルゴリズムの本質は次元  $n$  に依存しない。つまり、 $n = 3$  のオブジェクトを抽出したいのなら、4次元空間内の超曲面 (hypersurface) を時間発展させれば良い。次節以降で level set 法の定式化についてまとめる。文献 [1, 2, 3] を参考にした。



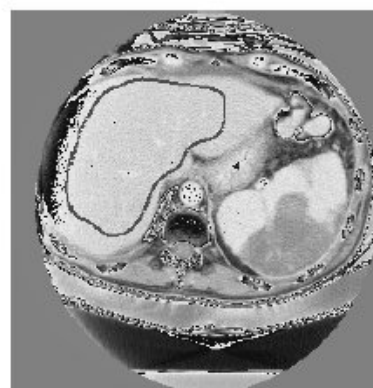
(a)  $t = 0.0000$



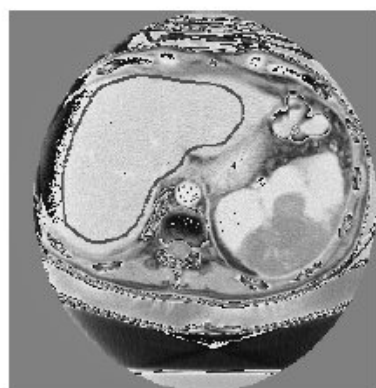
(b)  $t = 0.0500$



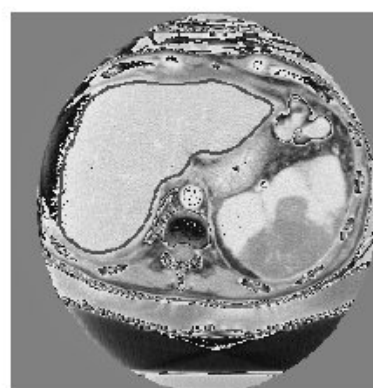
(c)  $t = 0.0875$



(d)  $t = 0.1500$



(e)  $t = 0.2250$



(f)  $t = 0.2875$

図 2: 肝臓抽出 (文献 [1] から抜粋): 初期閉曲線を与え (a)、これを時間発展させる。

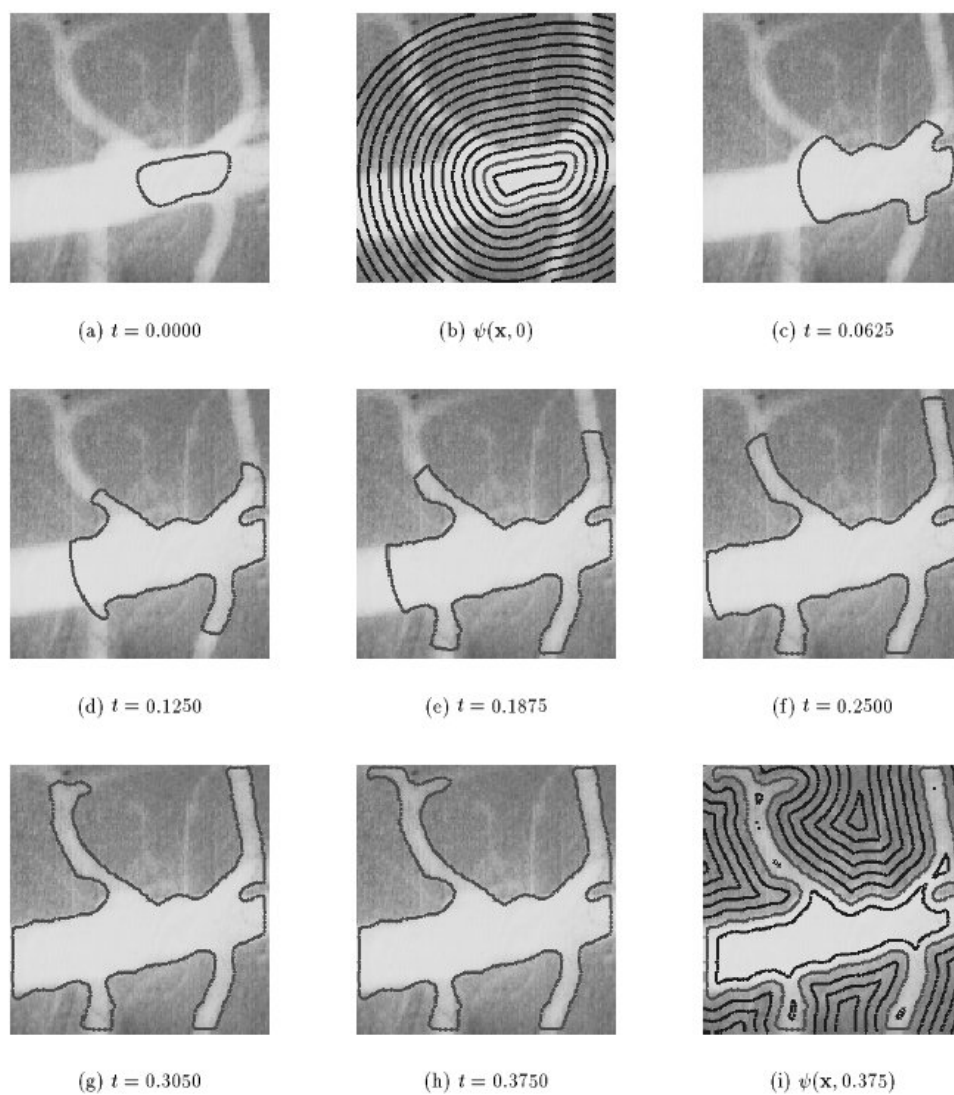


図 3: 動脈樹 (文献 [1] から抜粋) : (a) は初期閉曲線である。(b) と (i) には曲面の等高線が描かれている。

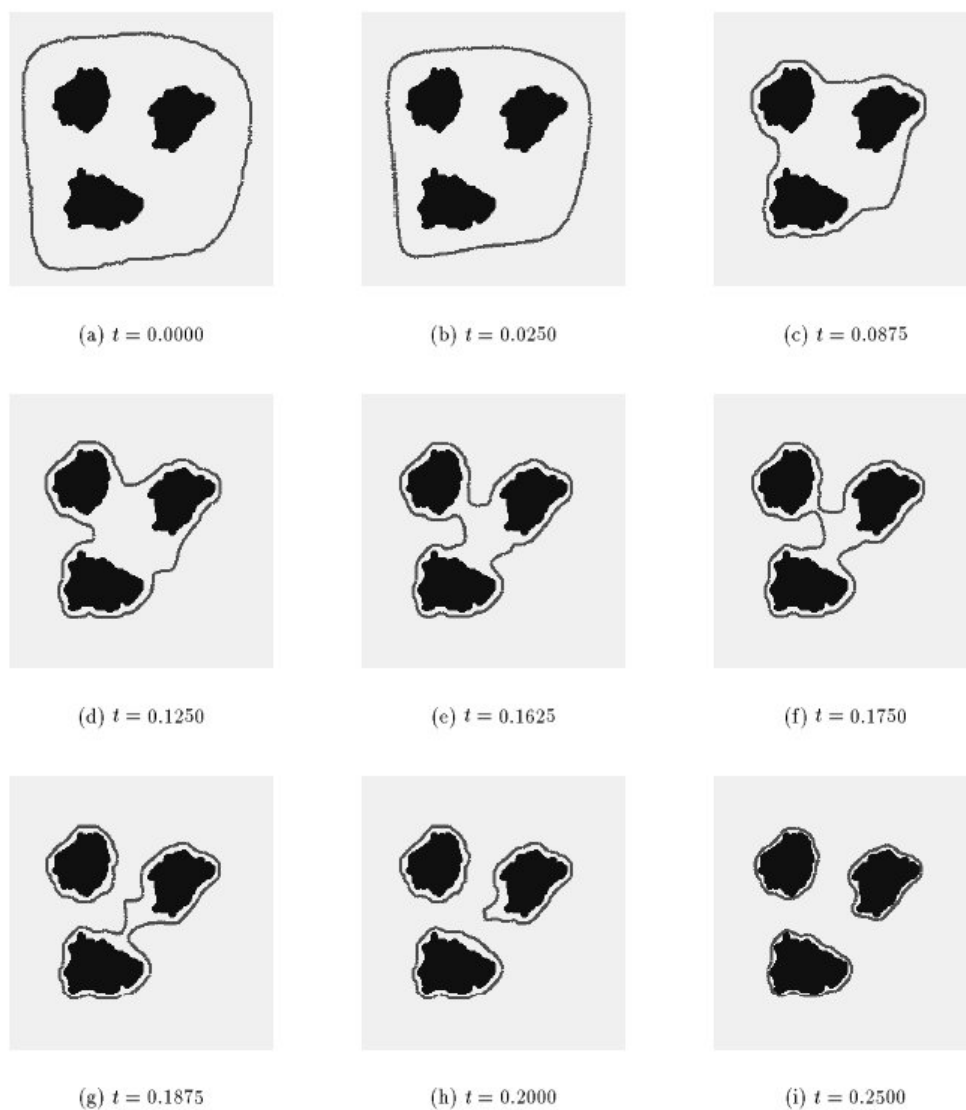


図 4: 閉曲線のトポロジーの変化 (文献 [1] から抜粋): 3つのオブジェクトを囲む大きな閉曲線 (a) が、時間発展に伴い 3つの閉曲線へ分裂している (i)。



図 5: 閉曲線のトポロジーの変化 (文献 [1] から抜粋): 2つのオブジェクトを囲む大きな閉曲線 (a) は、(f) で2つのオブジェクトの外側の境界に沿った2つの閉曲線に分裂している (この図では判別できないが)。この2つの閉曲線はオブジェクト内部に入り込み、3つの白抜きの円を囲む3つの閉曲線に分裂する (i)。

## 2 定式化

画像の存在する平面を  $xy$  平面とする。画像内に初期閉曲線  $\gamma_0$  を与える。この曲線から以下の手続きに従って、3次元空間内の曲面  $z = \psi_0(\vec{x})$  を作成する (図6)。ここで、 $\vec{x} = (x, y)$  とした。

- $xy$  平面内の任意の点  $p$  と閉曲線  $\gamma_0$  との距離  $d$  を計算する。
- 点  $p$  が曲線の外側にあれば  $z = d$ 、内側にあれば  $z = -d$  とする。
- 以上の手順を  $xy$  平面内の全ての点について実行する。

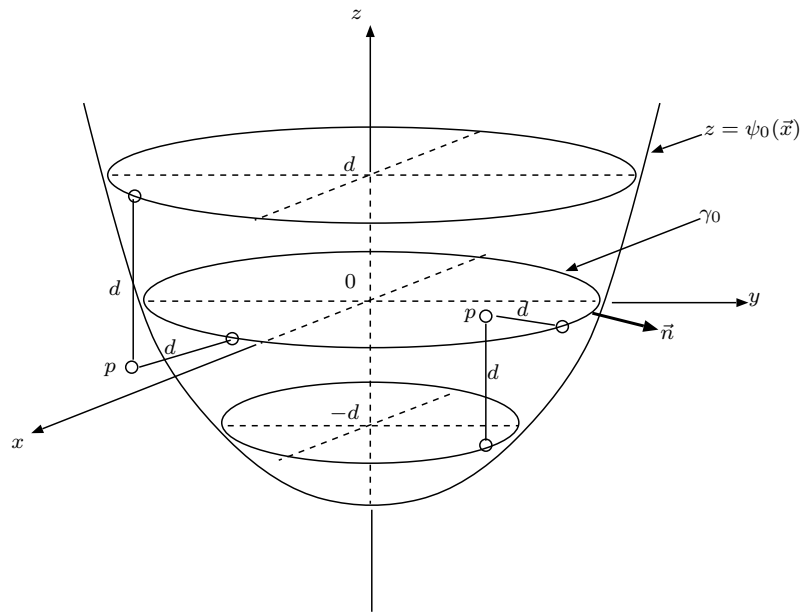


図 6: 初期平曲面の設定と法線ベクトル  $\vec{n}$

閉曲線  $\gamma_0$  から  $d$  だけ外側に離れた閉曲線は  $d = \psi_0(\vec{x})$  を満たす  $\vec{x}$  に相当し、 $d$  だけ内側に離れた閉曲線は  $-d = \psi_0(\vec{x})$  を満たす  $\vec{x}$  で表現される。一般に、 $d = \psi_0(\vec{x})$  を満たす  $\vec{x}$  を  $\psi_0$  の  $d$  level set と呼ぶ。

さて、曲面  $z = \psi_0(\vec{x})$  を時間発展させることを考える。時刻  $t$  を導入して、曲面を

$$z = \psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

で表し、 $\psi_0(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, t = 0)$ ,  $\gamma_0 = \gamma(t = 0)$  であると考え。時刻  $t$  での閉曲線  $\gamma(t)$  は  $\psi(\vec{x}, t)$  の 0-level set であり、次式で定義される。

$$\gamma(t) = \{\vec{x} \mid \psi(\vec{x}, t) = 0\} \quad (2)$$

$\psi(\vec{x}, t)$  の時間発展方程式を導出するため、 $\psi(\vec{x}, t) = 0$  の両辺を  $t$  で偏微分する。

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ 、 $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  とした。  $\psi$  は顕に  $t$  に依存する部分と  $\vec{x}$  を通して  $t$  に依存する部分とを持つ。第2項は以下のように変形できる。

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} = \|\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)\| \vec{n} \cdot \vec{v} \quad (4)$$

ただし、

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)}{\|\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)\|} \quad (5)$$

とした。これは閉曲線  $\gamma(t)$  の法線ベクトルに相当する (図6参照)。いま、 $\gamma(t)$  は法線  $\vec{n}$  の方向に時間発展すると仮定する。

$$\vec{v} = F(K) \vec{n} \quad (6)$$

ここで、 $F(K)$  は速度関数と呼ばれ曲率  $K$  で表現される。これを使うと式 (3) は

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + F(K) \|\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)\| = 0 \quad (7)$$

となる。上式が  $\psi$  の時間発展を記述する偏微分方程式である<sup>1</sup>。時間発展が終了した時点での  $\psi(\vec{x}, t)$  の 0-level set が求めるべき閉曲線、すなわちオブジェクトの境界線となる。

曲率  $K$  とは曲線の局所的性質を表わす量であり、次式で定義される (図7参照)。

$$K = -\vec{n}^t \cdot \vec{t}(s) \quad (8)$$

$$\vec{t}(s) = \frac{1}{g(s)} \frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{x}_s(s)}{g(s)} \right) \quad (9)$$

ただし、 $g(s) = \|\vec{x}_s(s)\|$ 、 $\vec{x}_s(s) = d\vec{x}(s)/ds$  とした。  $t$  は転置を表す。ここで、 $\vec{x}(s)$  は閉曲線  $\gamma$  を

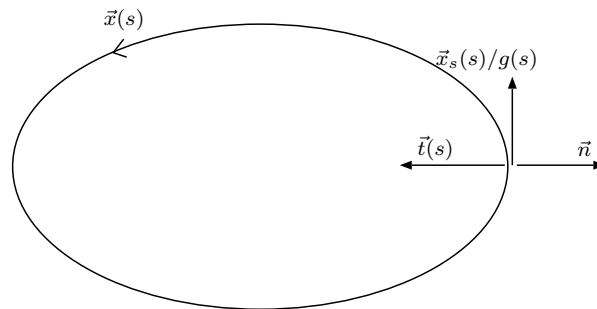


図7: 接線ベクトル  $\vec{x}_s(s)/g(s)$  と法線ベクトル  $\vec{n}$  は単位ベクトル、 $\vec{n} // \vec{t}$  である。  $\vec{x}$  は反時計周りに動くとする。

パラメータ表示したときの座標である。  $a \leq s \leq b$  のとき  $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$  を満たす。例えば、曲線  $x^2 + y^2 = 1$  は円であり、これをパラメータ表示すると  $\vec{x}(s) = (\cos s, \sin s)$ 、 $0 \leq s \leq 2\pi$  となる。このとき、 $g(s) = 1$ 、 $K = 1$  と計算できる。

さて、 $\psi(\vec{x}(s)) = 0$  の両辺を  $s$  で微分すると、

$$\vec{\nabla} \psi(\vec{x}(s)) \cdot \vec{x}_s(s) = 0 \quad (10)$$

<sup>1</sup>初期値  $\psi(\vec{x}, 0) = \psi_0(\vec{x})$  の与えられた初期値問題である。



これをさらに  $s$  で微分して得られる式を使うと、 $K$  は  $\psi$  を使って書き下ろすことができる。

$$K = \frac{\psi_{xx} \psi_y^2 - 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + \psi_{yy} \psi_x^2}{(\psi_x^2 + \psi_y^2)^{3/2}} \quad (11)$$

ここで、 $\psi_x$  は  $\psi$  を  $x$  で 1 階偏微分したもの、 $\psi_{xy}$  は  $\psi$  を  $x$  と  $y$  でそれぞれ 1 階偏微分したものを表す。

### 3 速度の設定

一般に速度関数は

- 曲線の形状に依存しない量 (曲率  $K$  に依存しない量)
- 曲線の局所的性質に依存する量 (曲率  $K$  に依存する量)
- 曲線の大域的性質に依存する量

の 3 つから構成される。ここでは簡単のため 3 つ目の項目を無視し、速度関数  $F(K)$  を以下の 2 つに分ける。

$$F(K) = F_A + F_G(K) \quad (12)$$

抽出したいオブジェクトの境界近傍で時間発展が停止するよう速度を設定する必要がある。どのような速度関数が最適なのかは個々の問題に依存するので、本節では一例を示す。また、画像の情報は  $F(K)$  の設定を通してのみ問題に取り込まれることに注意しなければならない。

#### 3.1 $F_G(K) = 0$ の場合

閉曲線は一定の速度で膨張 ( $F_A > 0$ )、あるいは収縮 ( $F_A < 0$ ) する。オブジェクト境界線近傍で速度が 0 になるように  $F_I(\vec{x})$  を付加する (図 8 参照)。

$$\begin{aligned} F &= F_A + F_I(\vec{x}) \\ F_I(\vec{x}) &= \frac{-F_A}{M_1 - M_2} \left\{ \|\vec{\nabla} G_\sigma * I(\vec{x})\| - M_2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $I(\vec{x})$  は画像、 $G_\sigma$  は標準偏差  $\sigma$  を持つガウス関数、 $*$  はコンボリューション、 $\|\vec{\nabla} G_\sigma * I(\vec{x})\| (= f(\vec{x}))$  はぼかした画像の勾配強度である。 $f(\vec{x})$  は境界近傍に近づくにつれて大きくなる量と考えることができる。 $M_2 \leq f(\vec{x}) \leq M_1$  とし境界上で  $f(\vec{x}) = M_1$  となるなら、速度関数  $F$  は図 8 に示すように振る舞う。

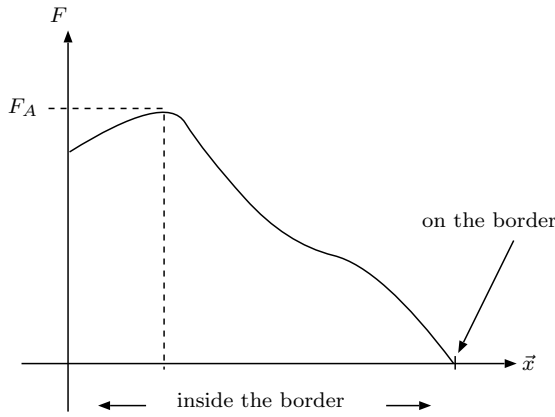
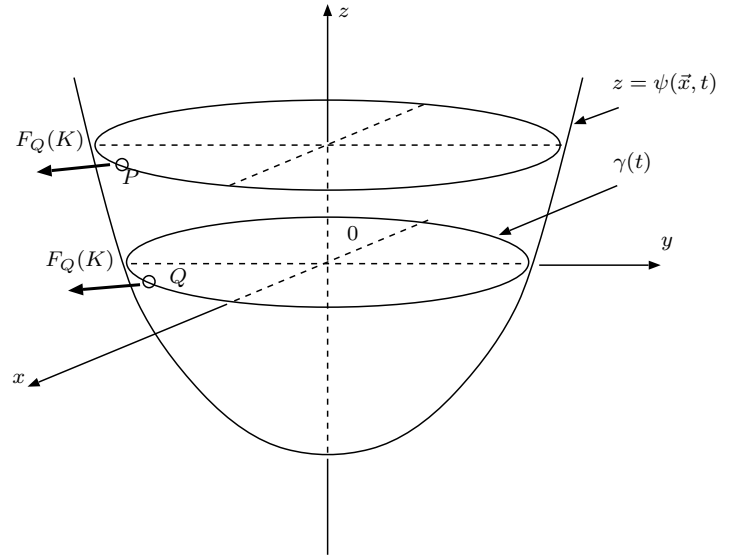
#### 3.2 $F_G(K) \neq 0$ の場合

因子  $k_I(\vec{x})$

$$k_I(\vec{x}) = \frac{1}{1 + \|\vec{\nabla} G_\sigma * I(\vec{x})\|} \quad (14)$$

を導入して

$$F(K) = k_I(\vec{x}) (F_A + F_G(K)) \quad (15)$$

図 8:  $F_G(K) = 0$  の場合の速度の振舞い図 9: 速度  $F(K)$  が意味をもつのは  $\gamma(t)$  上のみである。

とすれば、境界近傍で 0 に近い速度にすることができる。閾値速度を決めておいてそれよりも小さくなったら計算を打ち切れば良い。もっと速く 0 に近付いてほしければ、

$$k_I(\vec{x}) = \exp\left(-\|\vec{\nabla} G_\sigma * I(\vec{x})\|\right) \quad (16)$$

を使う。

さて、解くべき偏微分方程式は

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + F(K) \|\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)\| = 0 \quad (17)$$

であった。ここで、 $\psi(\vec{x}, t)$  は  $xy$  平面内の全点で定義された量である。一方、速度関数  $F(K)$  は、先に見たように  $\psi$  の 0-level set 上でのみ定義される。この不整合を取り除くため、 $F(K)$  の定義域を  $xy$  平面内全点に拡張する必要がある。1つの解決法として、次のような方法がある。いま、non-0-level set 上にある点  $P$  を考える (図 9 参照)。これに最も近い 0-level set 上の点  $Q$  を見つける。 $Q$  での速度  $F_Q(K)$  をそのまま  $P$  での速度とする。

## 4 差分化

式 (17) を数値計算で解くため空間・時間について離散化する。空間・時間の刻幅をそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta t$  と置けば、 $(\vec{x}, t)$  を  $(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$  のように整数値  $(i, j, n)$  で指定することができる。 $\psi(\vec{x}, t)$  を  $\psi_{ij}^n$  と書くことにすれば次式を得る。

$$\psi_{ij}^{n+1} = \psi_{ij}^n - \Delta t \left[ F_A \|\vec{\nabla}_{ij} \psi_{ij}^n\| + F_{Gij}(K) \|\vec{\nabla}_{ij} \psi_{ij}^n\| \right] \quad (18)$$

を得る。ここで、時間微分に前方差分を使用した。右辺から左辺を求めることにより、 $\psi$  の時間発展を追跡することができる。上式のような方程式を差分方程式と呼ぶ。右辺第 2 項は曲面を速度一定 ( $F_A$ ) で膨張あるいは収縮させ、第 3 項は曲面を滑らかにする効果を持つ。

右辺の空間微分を差分化すると [2]

$$F_A \|\vec{\nabla}_{ij} \psi_{ij}^n\| = \max(F_A, 0) \nabla^+ + \min(F_A, 0) \nabla^- \quad (19)$$

$$F_{Gij}(K) \|\vec{\nabla}_{ij} \psi_{ij}^n\| = F_{Gij}(K) \left[ (D_{ij}^{0x})^2 + (D_{ij}^{0y})^2 \right]^{1/2} \quad (20)$$

となる。ただし、

$$\nabla^+ = \left\{ [\max(D_{ij}^{-x}, 0)]^2 + [\min(D_{ij}^{+x}, 0)]^2 + [\max(D_{ij}^{-y}, 0)]^2 + [\min(D_{ij}^{+y}, 0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (21)$$

$$\nabla^- = \left\{ [\max(D_{ij}^{+x}, 0)]^2 + [\min(D_{ij}^{-x}, 0)]^2 + [\max(D_{ij}^{+y}, 0)]^2 + [\min(D_{ij}^{-y}, 0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (22)$$

$$D_{ij}^{+x} = D^{+x} \psi_{ij} = \frac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{ij}^n}{\Delta x} \quad (23)$$

$$D_{ij}^{-x} = D^{-x} \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij}^n - \psi_{i-1j}^n}{\Delta x} \quad (24)$$

$$D_{ij}^{0x} = D^{0x} \psi_{ij} = \frac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n}{2\Delta x} \quad (25)$$

$$D_{ij}^{+y} = D^{+y} \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij+1}^n - \psi_{ij}^n}{\Delta y} \quad (26)$$

$$D_{ij}^{-y} = D^{-y} \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij}^n - \psi_{ij-1}^n}{\Delta y} \quad (27)$$

$$D_{ij}^{0y} = D^{0y} \psi_{ij} = \frac{\psi_{ij+1}^n - \psi_{ij-1}^n}{2\Delta y} \quad (28)$$

とした。偏微分方程式を微分を必要としない積分方程式に拡張し、さらに物理的に正しい解を選択するためにエントロピー条件を課すことにより、上の差分式が得られる。積分方程式とすることにより  $\psi$  の微分可能性を要求する必要がなくなり、閉曲線上に鋭い尖りや窪みが成長しても時間発展が可能となる。また、エントロピー条件を考慮することにより  $\psi$  が多価関数のような物理的に不自然な形状になることを防ぐことができる。

## 5 数値計算のためのアルゴリズム

数値計算の手順は以下のようになる。

1. 初期閉曲線  $\gamma(t=0)$  が与えられる。  $xy$  平面内の任意の点と  $\gamma(0)$  までの距離  $d$  を計算する。任意の点が  $\gamma(0)$  の外側なら  $z=d$ 、内側なら  $z=-d$  とする。この手順を繰り返すと、全  $(i, j)$  に対して  $\psi_{ij}^0$  の値を得ることができる。この処理を  $\psi$  の初期化と呼ぶ。  $n=0$  として 2 へ。
2.  $\psi^n$  の 0-level set を使って、全  $(i, j)$  での速度関数  $F(K)$  を求める。ここまでの手順で時刻  $n$  における量  $\{F(K), \psi_{ij}^n\}$  が全ての  $(i, j)$  で分ったことになる。
3. 式 (18) の右辺に代入して、左辺値  $\psi_{ij}^{n+1}$  を計算する。
4.  $\psi_{ij}^{n+1} = 0$  となる点  $(i, j)$  を求める。その手順は以下の通り。

- 4つの値の組  $C(i, j) = (\psi_{i,j}^{n+1}, \psi_{i+1,j}^{n+1}, \psi_{i+1,j+1}^{n+1}, \psi_{i,j+1}^{n+1})$  を考える。
- $\max(C(i, j)) < 0$  なら  $C(i, j)$  は  $d$ -level set ( $d < 0$ ) 上にある。
- $\min(C(i, j)) > 0$  なら  $C(i, j)$  は  $d$ -level set ( $d > 0$ ) 上にある。
- 上記2つ以外するとき  $C(i, j)$  は 0-level set 上にある。4点から補間を行い 0-level set 上の点を求める。

以上の手順により  $n + 1$  での 0-level set 上の閉曲線が求まる。 $n = n + 1$  として2に戻る。

上記手順において、曲面を閉曲線から直接作成する作業は最初の1回だけである。この作業をある決まった繰り返し数ごとに行うことにより、精度を上げることができる。

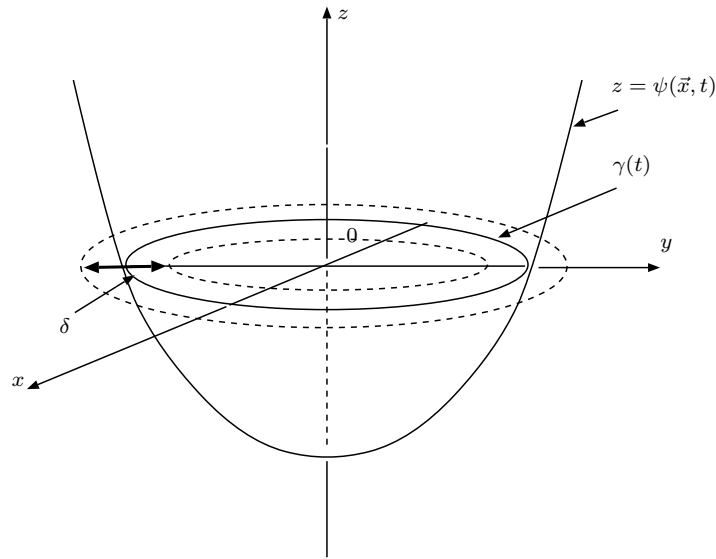


図 10: 計算領域を  $\gamma(t)$  近傍の幅  $\delta$  内だけに制限する。

## 6 高速化

本文書で解説したものは、level set 法の一番分かり易い実装方法である。しかし、各時刻  $n$  での曲面  $\psi_{ij}^n$  を  $xy$  平面内の全点で求めているので計算量が非常に多い。閉曲線  $\gamma(t)$  の時間発展を知ることが目的なので、 $\psi_{ij}^n$  の計算を、図 10 に示したような閉曲線近傍の狭い範囲に限定することにより高速化することが可能である [1, 2]。この方法は **Narrow Band Level Set Method** と呼ばれ、level set 法の実装法の中で最も高速で精度が良いとされる。

## 参考文献

- [1] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri, Shape modeling with front propagation: a level set approach, IEEE Trans, on PAMI, Vol. 17, No. 2, pp.158-175(1995).

- [2] J. A. Sethian, Level Set Methods and Fast Marching Methods, Cambridge University Press (1999).
- [3] D. Adalsteinsson and J. A. Sethian, A Fast Level Set Method For Propagating Interfaces, Journal of Computational Physics, 118(2) 269-277 (1995).