

TESIS DE LA CARRERA DE
DOCTORADO EN INGENIERÍA NUCLEAR

**Transporte y difusión de neutrones en núcleos de reactores
de agua pesada sobre mallas no estructuradas**

Mg. Ing. Germán Theler
Doctorando

Dr. Fabián J. Bonetto
Co-director

Dr. Alejandro Clausse
Co-director

San Carlos de Bariloche
Agosto 2015

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

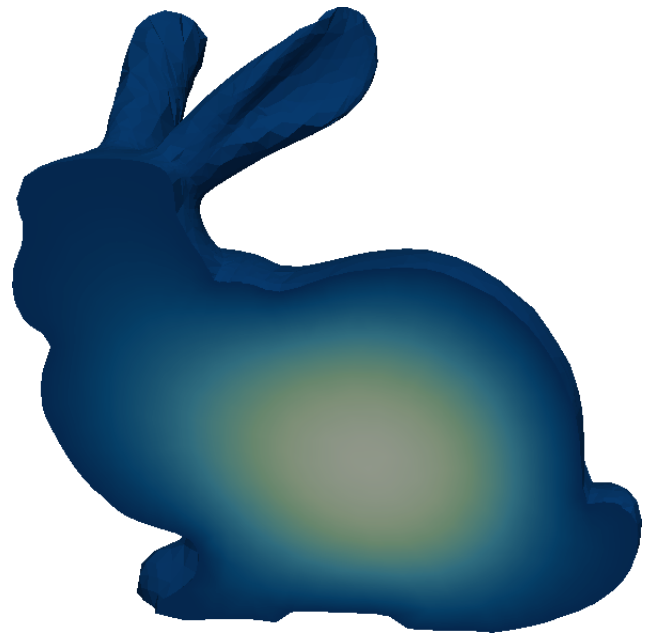
Contenidos

I Modelos, métodos y herramientas	1
1. Transporte y difusión de neutrones	2
1.1. Secciones eficaces	4
1.1.1. Dispersión de neutrones	6
1.1.2. Fisión de neutrones	12
1.2. Flujos y ritmos de reacción	13
1.3. Transporte de neutrones	16
1.3.1. Operador de transporte	16
1.3.2. Operador de producciones	17
1.3.3. La ecuación de transporte	19
1.3.4. Evaluación del término de scattering	20
1.3.5. Condiciones de contorno	25
1.4. Aproximación de difusión	26
1.4.1. Conservación de neutrones	26
1.4.2. Producciones	27
1.4.3. Ley de Fick	29
1.4.4. La ecuación de difusión	33
1.4.5. Condiciones de contorno	33
1.4.6. Validez de las suposiciones y aproximaciones	36
1.5. Problemas de estado estacionario	36
1.5.1. Medio no multiplicativo con fuentes independientes	36
1.5.2. Medio multiplicativo con fuentes independientes	37
1.5.3. Medio multiplicativo sin fuentes independientes	38
1.6. Esquema de solución multiescala	40
1.6.1. Evaluación y procesamiento de secciones eficaces	40
1.6.2. Cálculo a nivel celda	40
1.6.3. Cálculo a nivel núcleo	40
2. Esquemas de discretización numérica	42
2.1. Discretización en energía	42
2.2. Discretización en ángulo	45
2.2.1. Conjuntos de cuadraturas	48
2.2.2. Dos dimensiones	51
2.2.3. Una dimensión	53
2.3. Formulaciones fuertes, integrales y débiles	56

2.3.1.	Formulaciones fuertes	56
2.3.2.	Formulaciones integrales	58
2.3.3.	Formulaciones débiles	60
2.4.	Discretización espacial	60
2.4.1.	Mallas estructuradas y no estructuradas	63
2.5.	Volúmenes finitos	63
2.5.1.	Difusión en volúmenes	64
2.5.2.	Ordenadas discretas en volúmenes	65
2.6.	Elementos finitos	66
2.6.1.	Difusión en elementos	66
2.6.2.	Ordenadas discretas en elementos	66
II	Metodología para la resolución de problemas	68
III	Comparaciones, conclusiones y trabajos futuros	69
A.	Publicaciones	70
A.1.	Internacionales con referato	70
A.2.	Nacionales con referato	70
A.3.	Actas de Congresos	71
A.4.	Informes Técnicos	72
A.5.	Tesis y Monografías	72
Agradecimientos		78

Parte I

Modelos matemáticos, métodos numéricos y herramientas computacionales



Transporte y difusión de neutrones

In an enterprise such as the development nuclear physics the difference between ideas, hopes, suggestions and theoretical calculations, and solid numbers based on measurement, is paramount. All the committees, the politicking and the plans would have come to naught if a few unpredictable nuclear cross sections had been different from what they are by a factor of two.

Emilio Segré

En este capítulo introducimos las ecuaciones que modelan el transporte de neutrones en el núcleo de un reactor nuclear con los siguientes objetivos:

- fijar las ideas sobre las que se basa el código neutrónico desarrollado
- declarar las suposiciones, aproximaciones y limitaciones de los modelos matemáticos utilizados
- definir una nomenclatura consistente para el resto de la tesis.

No buscamos explicar los fundamentos físicos de los modelos matemáticos ni realizar una introducción para el lector lego. Para estos casos referimos al artículo [10] y a la monografía [32]—ambos trabajos escritos por el autor de esta tesis—y a la literatura clásica de física de reactores [38, 40, 33, 37, 41, 43]. Si bien gran parte del material aquí expuesto ha sido tomado de estas referencias, hay algunos desarrollos matemáticos propios que ayudan a homogeneizar los diferentes enfoques y nomenclaturas para poder sentar las bases de los esquemas numéricos implementados en el código computacional descrito en el capítulo ?? de manera consistente. Para eso desarrollamos lógica y matemáticamente algunas ideas partiendo de definiciones básicas para arribar a expresiones algebraicas que describen el problema de ingeniería que queremos resolver. Por supuesto que las principales ecuaciones, resultados y conclusiones del capítulo son conocidos desde los albores de la física de reactores allá por mediados del siglo XX. Sin embargo, hemos vuelto a realizar algunos desarrollos con ciertos pasos matemáticos intermedios de forma tal que un profesional con conocimientos promedios de física de neutrones pueda seguir el hilo y entender las ideas que forman la base de esta tesis. Consideramos que la construcción de la figura 1.7 que ilustra la utilización de armónicos esféricos para expandir el flujo angular o la derivación de la ley de Fick en la

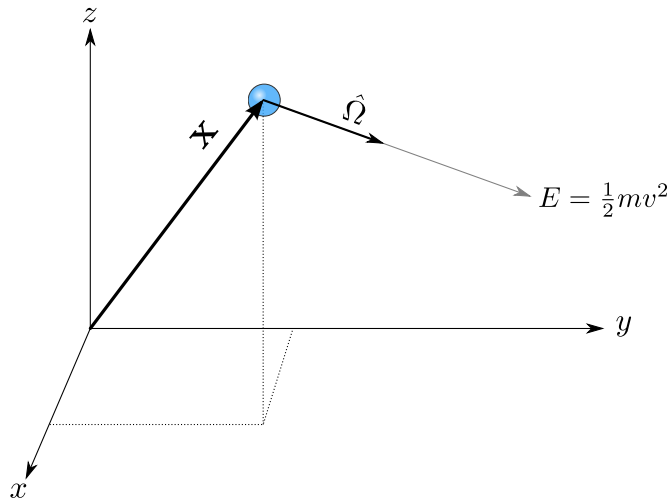


Figura 1.1: Un neutrón individual (bola celeste), en un cierto tiempo $t \in \mathbb{R}$ está caracterizado por la posición $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ que ocupa en el espacio, por la dirección $\hat{\Omega} \in \mathbb{R}^2$ en la que viaja y por su energía cinética $E \in \mathbb{R}$.

sección 1.4.3 son ya de por sí resultados parciales de este trabajo que podrían llegar a tener algún tipo de interés para la comunidad académica.

Partiendo de ciertas suposiciones físicas, operamos matemáticamente utilizando lógica deductiva, álgebra y cálculo para obtener las ecuaciones que vamos a resolver numéricamente en la segunda parte del trabajo. En algunas ocasiones deberemos realizar ciertas aproximaciones matemáticas para obtener ecuaciones manejables. Dejamos el análisis de las implicaciones físicas de las aproximaciones realizadas para el final del capítulo.

Para modelar matemáticamente el comportamiento de reactores nucleares de fisión debemos primero poder caracterizar campos de neutrones arbitrarios a través de distribuciones matemáticas sobre un dominio espacial U de tres dimensiones. Más adelante veremos cómo reducir el problema para casos particulares de dominios de una y dos dimensiones. Para ello, vamos a suponer que [41]

1. podemos considerar a los neutrones como puntos geométricos
2. los neutrones viajan en línea recta entre colisiones
3. las interacciones neutrón-neutrón pueden ser despreciadas
4. podemos considerar a las colisiones entre neutrones y núcleos como instantáneas
5. las propiedades de los materiales son isotrópicas
6. conocemos las propiedades de los núcleos y la composición de los materiales y éstas no dependen del tiempo
7. es suficiente que consideremos sólo el valor medio de la distribución de densidad espacial de neutrones y no sus fluctuaciones estadísticas

En la figura 1.1 ilustramos un neutrón puntual que a un cierto tiempo t está ubicado en una posición espacial \mathbf{x} y se mueve en línea recta en una dirección $\hat{\Omega}$ con una energía $E = 1/2 \cdot mv^2$.

1.1. Secciones eficaces

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Definición 1.1. La sección eficaz macroscópica total Σ_t de un medio es tal que

$$\Sigma_t \cdot dx$$

es la probabilidad de que un neutrón tenga una colisión con el núcleo de algún átomo del material por el que viaja una distancia dx en línea recta. Es decir, la sección eficaz macroscópica es el número de colisiones esperadas por neutrón y por unidad de longitud lineal. Sus unidades son inversa de longitud, i.e. m^{-1} ó cm^{-1} . \square

Además de referirnos a la sección eficaz (ó XS por su terminología en inglés) total, podemos particularizar el concepto al tipo de reacción k , es decir, $\Sigma_k \cdot dx$ es la probabilidad de que un neutrón tenga una reacción de tipo k en el intervalo dx . En nuestro caso particular, la reacción genérica k puede ser particularizada a

- t total
- c captura radiativa
- f fisión
- a absorción ($\Sigma_c + \Sigma_f$)
- s dispersión (scattering)

Las secciones eficaces macroscópicas dependen de la energía del neutrón incidente y de las propiedades del medio que provee los núcleos blanco. Como éstas dependen del espacio (usualmente a través de otras propiedades intermedias como por ejemplo temperaturas, densidades o concentraciones de impurezas), en general las secciones eficaces macroscópicas son funciones tanto del espacio \mathbf{x} como de la energía E , es decir $\Sigma_k = \Sigma_k(\mathbf{x}, E)$.

Una forma de incorporar el concepto de sección eficaz macroscópica es pensar que ésta proviene del producto de una sección eficaz microscópica σ_k y una densidad atómica n del medio

$$\Sigma_k = \sigma_k \cdot n$$

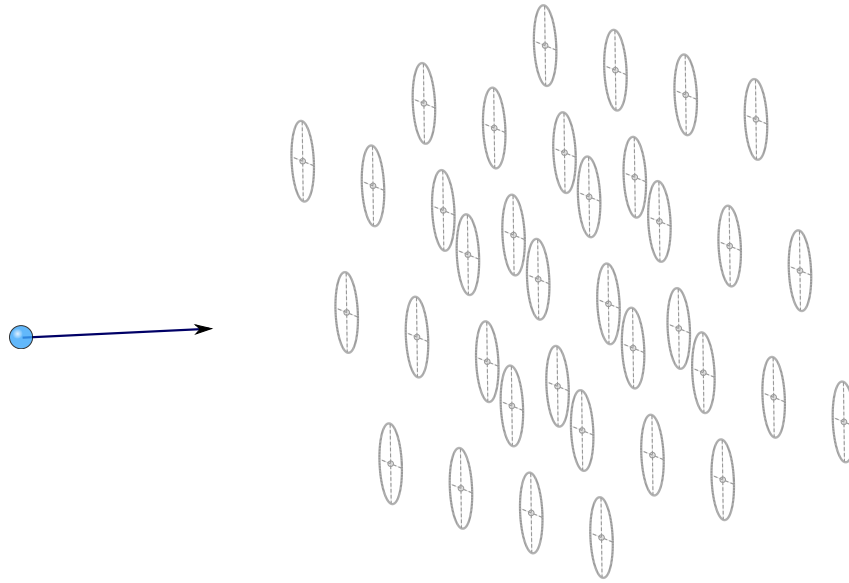


Figura 1.2: Interpretación de la sección eficaz microscópica como el área asociada a un núcleo transversal a la dirección de viaje del neutrón incidente.

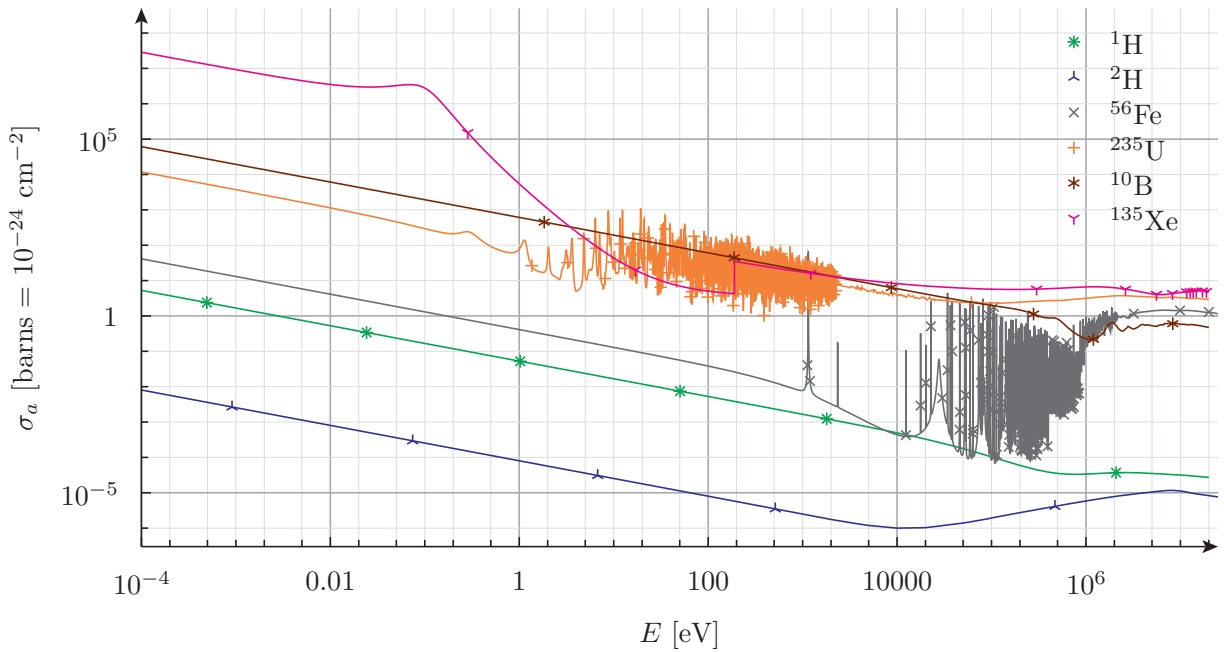


Figura 1.3: Dependencia de la sección eficaz microscópica de absorción σ_a con respecto a la energía E del neutrón incidente para diferentes isótopos blanco.

La magnitud σ_k tiene unidades de área (típicamente del orden de 10^{-24} cm², unidad que llamamos *barn*¹) y se interpreta como el área asociada a un núcleo transversal a la dirección de viaje de un neutrón tal que si este neutrón pasara a través de dicha área, se llevaría a cabo una reacción de tipo k (figura 1.2). Las secciones eficaces microscópicas dependen no solamente de las propiedades nucleares de los núcleo blanco sino que también dependen fuertemente de la energía E del neutrón incidente, llegando a cambiar varios órdenes de magnitud debido a efectos de resonancias como podemos observar en la figura 1.3. Además, σ_k depende de la temperatura T del medio que define la forma en la cual los átomos se mueven por agitación térmica alrededor de su posición de equilibrio ya que se produce un efecto tipo Doppler entre el neutrón y el núcleo blanco que modifica la sección eficaz microscópica [35, 36]. Por lo tanto, para un cierto isótopo, $\sigma_k = \sigma_k(E, T)$.

Por otro lado, la densidad atómica n del medio depende de la densidad termodinámica ρ , que a su vez depende de su estado termodinámico usualmente definido por la presión p y la temperatura T . Como estas variables pueden depender de forma arbitraria del espacio \mathbf{x} , podemos escribir efectivamente

$$\Sigma_k = n \cdot \sigma_k = n(p(\mathbf{x}), T(\mathbf{x})) \cdot \sigma_k(E, T(\mathbf{x})) = \Sigma_k(\mathbf{x}, E)$$

Las ideas presentadas son válidas para un único isótopo libre de cualquier influencia externa. En los reactores nucleares reales, por un lado existen efectos no lineales como por ejemplo el hecho de los átomos de hidrógeno o deuterio y los de oxígeno no están libres en la molécula de agua, que hacen que las secciones eficaces de el todo (i.e. de un conjunto de átomos enlazados covalentemente) no sean iguales a la suma algebraica de las partes y debemos calcular las secciones eficaces macroscópicas con una metodología más apropiada (ver sección 1.6.1 y referencia ??). Por otro lado, justamente en los reactores nucleares las reacciones que interesan son las que dan como resultado la transmutación de materiales por lo que continuamente la densidad atómica n de todos los isótopos varía con el tiempo. En este trabajo, no vamos a tratar con la dependencia de las secciones eficaces con el tiempo explícitamente sino que llegado el caso, como discutimos en la sección 1.6, daremos la dependencia implícitamente a través de otras propiedades intermedias tales como la evolución del quemado del combustible y/o la concentración de xenón 135 en la matriz de dióxido de uranio.

A partir de este momento suponemos que conocemos las secciones eficaces macroscópicas en función del vector posición \mathbf{x} para todos los problemas que planteamos.

1.1.1. Dispersión de neutrones

Cuando un neutrón que viaja en una cierta dirección $\hat{\Omega}$ con una energía E colisiona con un núcleo blanco en una reacción de dispersión o *scattering*, tanto el neutrón como el núcleo blanco intercambian energía. En este caso podemos pensar que luego de la colisión, el neutrón incidente se ha transformado en otro neutrón emitido en una nueva

¹Se dice que durante las primeras mediciones experimentales de secciones eficaces los físicos americanos esperaban encontrar resultados del orden de las áreas transversales asociadas a los tamaños geométricos de los núcleos. Pero encontraron valores mucho más grandes, por lo que decían a modo de broma "this cross section is as big as a barn."

dirección $\hat{\Omega}'$ con una nueva energía E' . Para tener este efecto en cuenta, utilizamos el concepto que sigue.

Definición 1.2. La sección eficaz de scattering diferencial Σ_s tal que

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' dE'$$

es la probabilidad por unidad de longitud lineal que un neutrón de energía E viajando en la dirección $\hat{\Omega}$ sea dispersado hacia un intervalo de energía entre E' y $E' + dE'$ y a un cono $d\hat{\Omega}'$ alrededor de la dirección $\hat{\Omega}'$. \square

Utilizando argumentos de simetría, podemos demostrar que la sección eficaz diferencial de scattering Σ_s sólo depende del producto interno $\mu = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$ y no separadamente de $\hat{\Omega}$ y de $\hat{\Omega}'$ (figura 1.4). Entonces podemos escribir la dependencia como $\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E')$ ó como $\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E')$, siempre y cuando tengamos en cuenta que

$$\int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' = \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') d\mu$$

lo que implica que

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') = 2\pi \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E')$$

Este abuso de notación es histórico y susceptible de provocar confusiones. Al escribir la probabilidad de scattering de $\hat{\Omega}$ hacia $\hat{\Omega}'$ sólo en función del producto interno μ estamos teniendo en cuenta todas las posibles direcciones de salida tales que $\mu = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$. Como podemos observar en la figura 1.4, esto es 2π veces la probabilidad de que el neutrón sea dispersado en la dirección $\hat{\Omega}'$ solamente. En los párrafos siguiente explícitamente diferenciamos uno de otro caso.

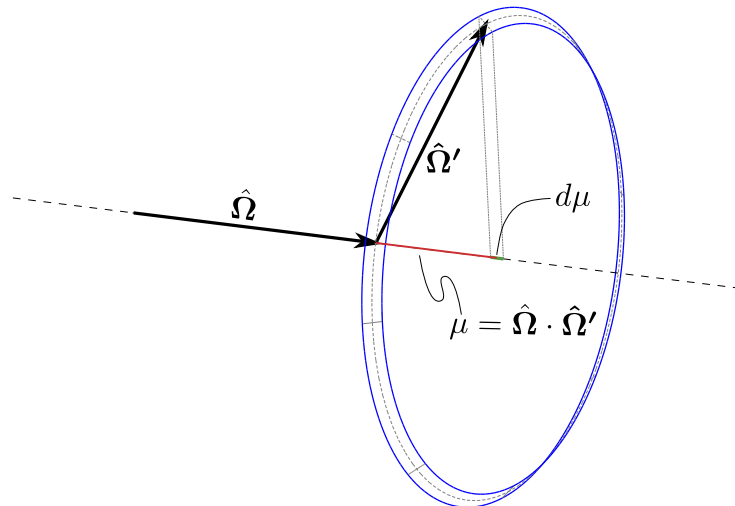


Figura 1.4: Debido a la simetría azimutal, el scattering no depende de las direcciones $\hat{\Omega}$ y de $\hat{\Omega}'$ en forma separada sino que depende del coseno del ángulo entre ellas $\mu = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$.

En general podemos separar a la sección eficaz diferencial en una sección eficaz total Σ_{st} y en una probabilidad de distribución angular y energética f_s tal que

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \Sigma_{st}(\mathbf{x}, E) \cdot f_s(\hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \quad (1.1)$$

ó bien

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') = \Sigma_{st}(\mathbf{x}, E) \cdot f_s(\mu, E \rightarrow E') \quad (1.2)$$

En ambos casos, Σ_{st} es la sección eficaz macroscópica *total* de scattering, que da la probabilidad por unidad de longitud de que un neutrón de energía E inicie un proceso de scattering. La función f_s describe la distribución de neutrones emergentes. Podemos integrar ambos miembros de las ecuaciones (1.1) y (1.2) con respecto a E' , y a $\hat{\Omega}'$ y a μ respectivamente, y despejar Σ_{st} para obtener su definición

$$\Sigma_{st}(\mathbf{x}, E) = \frac{\int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' dE'}{\int_0^\infty \int_{4\pi} f_s(\hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' dE'} = \frac{\int_0^\infty \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') d\mu dE'}{\int_0^\infty \int_{-1}^1 f_s(\mu, E \rightarrow E') d\mu dE'}$$

El denominador es igual a la cantidad de partículas emitidas luego de la reacción, que para el caso del scattering es igual a uno. Luego

$$\Sigma_{st}(\mathbf{x}, E) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' dE' = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') d\mu dE' \quad (1.3)$$

Para tener en cuenta la dependencia de Σ_s con μ (en realidad de f_s con μ) podemos recurrir a una expansión en polinomios de Legendre (figura 1.5). En efecto, para dos energías E y E' fijas, Σ_s depende de un único escalar $-1 \leq \mu \leq 1$ sin presentar singularidades (i.e. es una función de cuadrado integrable) por lo que podemos escribir en una base ortogonal de polinomios²

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\mu) \quad (1.4)$$

donde los coeficientes resultan ser

$$\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') = \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\mu) d\mu \quad (1.5)$$

²La definición particular de la expansión en polinomios de Legendre de la ecuación (1.4) es tal que sea consistente con los usos y costumbres históricos de la evaluación de secciones eficaces (sección 1.6.1) y de códigos de celda (sección 1.6.2). Es posible dar otra definición y desarrollar consistentemente la matemática para llegar a las mismas ecuaciones finales, pero ello modificaría la definición de los coeficientes de la expansión dados por la ecuación (1.7) y haría que las secciones eficaces calculadas a nivel de celda no puedan ser introducidas directamente en la entrada del código de núcleo que describimos en el capítulo ???. En particular, arribar a la ecuación (1.9) es de interés para la consistencia de las secciones eficaces entre códigos de diferente nivel. Por ejemplo, la referencia [41] utiliza otra forma de expandir el kernel de scattering que resulta en un factor dos de diferencia con respecto a la ecuación (1.7).

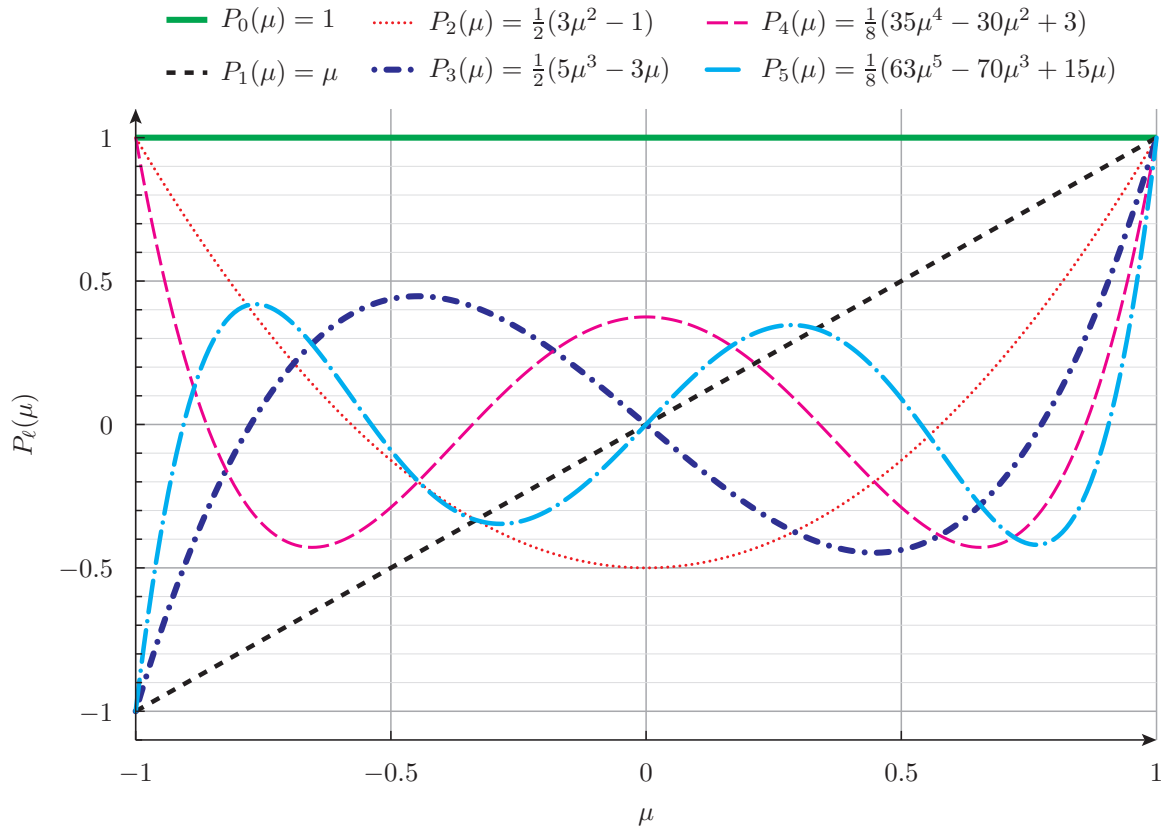


Figura 1.5: Primeros seis polinomios de Legendre $P_\ell(\mu)$, $\ell = 1, \dots, 6$. En el apéndice ?? damos la definición matemática y otras propiedades interesantes de estos polinomios.

dada la propiedad de ortogonalidad de la base de Legendre según la cual

$$\int_{-1}^1 P_\ell(\mu) \cdot P_{\ell'}(\mu) d\mu = \frac{2}{2\ell + 1} \cdot \delta_{\ell\ell'}$$

siendo $\delta_{\ell\ell'}$ la Delta de Kronecker

$$\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell' \\ 0 & \text{si } \ell \neq \ell' \end{cases}$$

Para la dependencia con $\hat{\Omega}$ y $\hat{\Omega}'$, la expansión y los coeficientes son respectivamente

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \quad (1.6)$$

$$\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') = 2\pi \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \quad (1.7)$$

Es interesante notar que Σ_{s_ℓ} sólo depende de Σ_{s_0} . En efecto, reemplazando la expansión dada por la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3) tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E) &= \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\mu) d\mu dE' \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot \int_{-1}^1 P_\ell(\mu) d\mu \right] dE'\end{aligned}$$

Como todos los polinomios de Legendre son impares con respecto al argumento μ excepto $P_0(\mu) = 1$, la integral sobre μ es cero para todo $\ell > 0$. Luego

$$\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E) = \int_0^\infty \left[\frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \cdot \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot 2 \right] dE' = \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') dE' \quad (1.8)$$

Para fijar ideas, supongamos que tenemos scattering isotrópico en el marco de referencia del laboratorio.³ Entonces Σ_s no depende de μ y el único término diferente de cero en la ecuación (1.6) es Σ_{s_0} que contiene información sólo sobre el cambio de energía del neutrón con respecto a las condiciones de incidencia:

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot P_\ell(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \quad (1.9)$$

Si en cambio el scattering resulta ser completamente elástico e isotrópico en el marco de referencia del centro de masa del sistema compuesto por el neutrón incidente y el núcleo blanco (condición que se da si el blanco está fijo en el marco de referencia del reactor sin posibilidad de moverse por efectos térmicos), entonces a cada energía de salida E' le corresponde un único ángulo de scattering μ a través de las leyes clásicas de conservación de energía y momento lineal. Para la dependencia en ángulos de entrada y salida [43] es

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') = \begin{cases} \Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E) \cdot \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{(1 - \alpha)E} & \text{para } \alpha E < E' < E \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

mientras que para la dependencia del coseno del ángulo de scattering [41] es

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \begin{cases} \Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E) \cdot \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi(1 - \alpha)E} & \text{para } \alpha E < E' < E \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

donde ahora $\delta(x)$ es la distribución Delta de Dirac (no confundir con Kronecker) y

³Una expresión más apropiada según la potencial aplicación industrial de los conceptos desarrollados en esta tesis sería "marco de referencia de la central nuclear."

$$\alpha(A) = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

$$\mu_0(A, E, E') = \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E'}{E}} - (A-1) \sqrt{\frac{E}{E'}} \right]$$

siendo A es el número de masa del núcleo blanco. Llamamos a la magnitud μ_0 coseno medio de la dispersión. Esta nomenclatura μ_0 es general pero la expresión matemática es particular para el caso de scattering elástico e isotrópico en el marco de referencia del centro de masa. En la ecuación (1.11) generalizamos la definición para cualquier tipo de scattering.

La expresión para el ℓ -ésimo coeficiente de la expansión en polinomios de Legendre para $\alpha E < E' < E$ según la ecuación (1.5) es

$$\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') = \frac{\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E)}{(1-\alpha)E} \int_{-1}^1 \delta(\mu - \mu_0) \cdot P_\ell(\mu) d\mu = \frac{\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E)}{(1-\alpha)E} \cdot P_\ell(\mu_0)$$

por lo que

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') = \frac{\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E)}{(1-\alpha)E} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \cdot P_\ell(\mu_0) \cdot P_\ell(\mu)$$

Tomando los dos primeros términos, podemos aproximar

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') \approx \frac{\Sigma_{s_t}(\mathbf{x}, E)}{(1-\alpha)E} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot \mu_0 \cdot \mu}{2} \right)$$

para $\alpha E < E' < E$, y cero para $E' < \alpha E$ ó $E' > E$. Estas dos ideas nos permiten introducir los siguientes conceptos.

Definición 1.3. Decimos que hay *scattering isotrópico* (a partir de ahora siempre nos vamos a referir al marco de referencia del reactor) cuando los coeficientes de la expansión de la sección eficaz diferencial de scattering $\Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E')$ en polinomios de Legendre son todos nulos excepto el correspondiente a $\ell = 0$. En este caso, la sección eficaz diferencial no depende del ángulo y vale la ecuación (1.9):

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \frac{1}{4\pi} \cdot \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \quad (1.9)$$

Si además de Σ_{s_0} resulta también $\Sigma_{s_1} \neq 0$ entonces decimos que el scattering es *linealmente anisotrópico*, y la sección eficaz diferencial es la suma de la sección eficaz total más un coeficiente por el coseno del ángulo de scattering:

$$\Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') + 3 \cdot \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot (\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \right] \quad (1.10)$$

Definimos además el *coseno medio de la dispersión* μ_0 para una ley de dispersión general como

$$\mu_0(\mathbf{x}, E) = \frac{\int_0^\infty \int_{-1}^1 \mu \cdot \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') d\mu dE'}{\int_0^\infty \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mathbf{x}, \mu, E \rightarrow E') d\mu dE'} = \frac{\int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') dE'}{\int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') dE'} \quad (1.11)$$

□

En el caso de scattering general, i.e. no necesariamente isotrópico en algún marco de referencia y no necesariamente elástico, debemos conocer o bien la dependencia explícita de Σ_s con $\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$ (que puede ser aproximada mediante evaluaciones discretas) o bien una cierta cantidad de coeficientes Σ_{s_ℓ} de su desarrollo en polinomios de Legendre sobre μ . En esta tesis trabajamos a lo más con scattering linealmente anisotrópico, es decir, la sección eficaz diferencial de scattering está dada por la ecuación (1.10) y suponemos que conocemos tanto Σ_{s_0} como Σ_{s_1} en función del espacio y de las energías antes de resolver la ecuación de transporte a nivel de núcleo (ver sección 1.6).

1.1.2. Fisión de neutrones

Cuando un núcleo pesado se fisiona en dos núcleos más pequeños, ya sea debido a una fisión espontánea o a una fisión inducida por la absorción de un neutrón, se liberan además de los productos de fisión propiamente dichos y radiación γ debida al acomodamiento de los niveles energéticos de los nucleones que intervienen en la reacción, entre dos y tres neutrones. Llamamos $\nu(\mathbf{x}, E)$ a la cantidad promedio de neutrones liberados por cada fisión, $2 < \nu < 3$, que depende de la energía E del neutrón incidente y de la composición del material combustible el punto \mathbf{x} .

Como ahora se emite más de un neutrón, utilizamos la nomenclatura $\nu\Sigma_f$ para indicar, en el sentido de la ecuación (1.1) sección anterior, la sección eficaz diferencial como un producto de una sección eficaz total y una distribución angular

$$\nu\Sigma_f(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \nu\Sigma_{f_t}(\mathbf{x}, E) \cdot f_f(\hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E')$$

La distribución en energía de los neutrones nacidos por fisión está dada por el espectro de fisión χ , que definimos a continuación.

Definición 1.4. El *espectro de fisión* $\chi(E)$ es tal que

$$\chi(E) dE$$

es la probabilidad de que un neutrón nacido en una fisión tenga una energía en el intervalo $[E, E + dE]$. El espectro de fisión está normalizado de forma tal que

$$\int_0^\infty \chi(E) dE = 1 \quad (1.12)$$

□

Los neutrones de fisión nacen isotrópicamente en el marco de referencia del reactor independientemente de la energía E del neutrón incidente que la provocó (decimos que

los neutrones de fisión no tienen *memoria*) y además la energía E' con la que emergen tampoco depende de la energía del E neutrón incidente. Luego f_f no depende ni de $\hat{\Omega}$ ni de $\hat{\Omega}'$ y podemos separar la función f_f en una cierta dependencia de E multiplicada por $\chi(E')$

$$f_f(\hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = A(E) \cdot \chi(E')$$

Como la integral de f_f sobre todas las posibles energías E' y ángulos $\hat{\Omega}'$ debe ser igual a la cantidad ν de neutrones emitidos

$$\nu(E) = \int_0^\infty \int_{4\pi} f_f(\hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') d\hat{\Omega}' dE' = A(E) \cdot \int_0^\infty \int_{4\pi} \chi(E') d\hat{\Omega}' dE'$$

Teniendo en cuenta la normalización de χ dada por la ecuación (1.12), resulta

$$A(E) = \frac{\nu(E)}{4\pi}$$

por lo que

$$\nu \Sigma_f(\mathbf{x}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') = \frac{\chi(E')}{4\pi} \cdot \nu \Sigma_{f_i}(\mathbf{x}, E) \quad (1.13)$$

Durante la operación de un reactor, no todos los neutrones provenientes de la fisión aparecen en el mismo instante en el que se produce. Una cierta fracción β de todos los neutrones son producto del decaimiento radioactivo o bien de productos de fisión generados instantáneamente o bien de hijos de éstos. En cualquier caso, en cálculos transitorios es necesario distinguir entre la fracción $1 - \beta$ de neutrones instantáneos (*prompt*) que aparecen en el mismo momento de la fisión y la fracción β de neutrones retardados que aparecen más adelante. Para ello dividimos a los neutrones retardados en I grupos, les asignamos una fracción β_i y una constante de tiempo λ_i , para $i = 1, \dots, N$ y definimos un mecanismo de aparición exponencial para cada uno de ellos.

En cálculos estacionarios no es necesario realizar esta división entre neutrones instantáneos y retardados ya que eventualmente todos los neutrones estarán contribuyendo a la reactividad neta del reactor. En el caso particular en el que no hay una fuente externa de neutrones sino que todas las fuentes se deban a fisiones la probabilidad de que el reactor esté exactamente crítico es cero como discutimos en la sección 1.5. Para poder realizar cálculos estacionarios y además tener una idea de la distancia a la criticidad debemos recurrir a un reactor crítico asociado, cuya forma más usual es el *reactor crítico asociado en k* . En este caso, dividimos las fuentes de fisión se artificialmente por un número real $k_{\text{eff}} \sim 1$ que pasa a ser una incógnita del problema y cuya diferencia con la unidad da una idea de la distancia a la criticidad del reactor original (ver sección 1.5).

1.2. Flujos y ritmos de reacción

El problema central del cálculo de reactores es la determinación de la distribución espacial y temporal de los neutrones dentro del núcleo de un reactor nuclear. En esta sección

desarrollamos la matemática para el caso de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. En casos particulares aclaramos cómo debemos proceder para problemas en una y en dos dimensiones.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 1.5. La *distribución de densidad de neutrones* N en un espacio de las fases de siete dimensiones $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\hat{\Omega} \in \mathbb{R}^2$ ⁽⁴⁾, $E \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE$$

es el número de neutrones (en el sentido de la media estadística dada la naturaleza estocástica del comportamiento de los neutrones) en un elemento volumétrico $d^3\mathbf{x}$ ubicado alrededor del punto \mathbf{x} del espacio viajando en el cono de direcciones de magnitud $d\hat{\Omega}$ alrededor de la dirección $\hat{\Omega}$ con energías entre E y $E + dE$ en el tiempo t . \square

Definición 1.6. El *flujo angular* ψ es el producto entre la velocidad y la distribución de densidad de los neutrones

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) &= v(E) \cdot N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \\ &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \end{aligned}$$

donde $v(E)$ es la velocidad clásica correspondiente a un neutrón de masa m cuya energía cinética es E . \square

Esta magnitud es más útil para evaluar ritmos de colisiones y reacciones que la densidad de neutrones N . En efecto, como $v \cdot dt$ es la distancia que viaja un neutrón de velocidad v , entonces

$$\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE dt = v(E) \cdot N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) dt d^3\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE$$

es el número total de longitudes lineales que los neutrones han viajado en la dirección $\hat{\Omega}$ con energía E que estaban en el tiempo t en la posición \mathbf{x} . Como además $\Sigma_k \cdot dx$ es la probabilidad de que un neutrón tenga una reacción de tipo k en el intervalo dx (definición 1.1, página 4), entonces la expresión

$$\Sigma_k(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE$$

⁴Si bien la dirección $\hat{\Omega} = [\Omega_x \Omega_y \Omega_z]^T$ tiene tres componentes, sólo dos son independientes (por ejemplo las coordenadas angulares cenital θ y azimutal φ) ya que debe cumplirse que $\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 = 1$.

es el número de reacciones de tipo k en el diferencial de volumen de fases $d^3\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE$ debido a neutrones de energía E viajando en la dirección $\hat{\Omega}$ en el punto \mathbf{x} del espacio en el instante t . Para obtener el número total de reacciones de todos los neutrones independientemente de la dirección $\hat{\Omega}$ del neutrón incidente debemos integrar esta cantidad sobre todos los posibles ángulos de incidencia. Para ello utilizamos el siguiente concepto.

Definición 1.7. El *flujo escalar* ϕ es la integral del flujo angular sobre todas las posibles direcciones de viaje de los neutrones:

$$\phi(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega}$$

□

Con esta nomenclatura, el ritmo R_k de reacciones de tipo k en $d^3\mathbf{x} dE$ es

$$R_k(\mathbf{x}, E, t) d^3\mathbf{x} dE = \Sigma_k(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t) d^3\mathbf{x} dE$$

con lo que el producto $R_t = \Sigma_t \phi$ da una expresión simple para la distribución del ritmo de reacciones totales por unidad de volumen y de energía, que es lo que buscábamos al introducir las ideas de flujo escalar y flujo angular.

Definición 1.8. El *vector corriente* \mathbf{J} es la integral del producto entre el flujo angular y el versor de dirección de viaje de los neutrones $\hat{\Omega}$ sobre todas las direcciones de viaje:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} [\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega}] d\hat{\Omega}$$

□

Debemos notar que esta magnitud es vectorial ya el integrando es un vector cuya magnitud es igual al flujo angular y cuya dirección es la del versor $\hat{\Omega}$ sobre el cual estamos integrando. El producto escalar entre el vector corriente \mathbf{J} y un cierto versor espacial $\hat{\mathbf{n}}$

$$J_n(\mathbf{x}, E, t) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \quad (1.14)$$

da el número neto de neutrones que cruzan un área unitaria perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección positiva. Este número neto es la resta de dos contribuciones

$$J_n(\mathbf{x}, E, t) = J_n^+(\mathbf{x}, E, t) - J_n^-(\mathbf{x}, E, t)$$

donde

$$\begin{aligned} J_n^+(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \\ J_n^-(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (1.15)$$

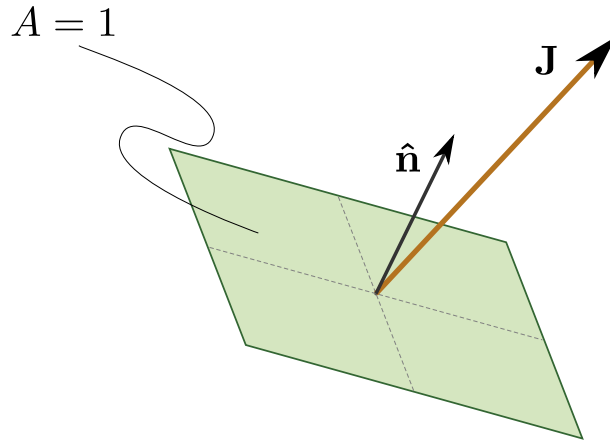


Figura 1.6: Interpretación del producto del vector corriente con el vector normal a una superficie como el número neto de neutrones que cruzan un área unitaria.

1.3. Transporte de neutrones

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

1.3.1. Operador de transporte

Consideremos un volumen finito $V \in \mathbb{R}^3$ arbitrario fijo en el espacio y consideremos ahora otro volumen $V'(t) \in \mathbb{R}^3$ que se mueve en una dirección $\hat{\Omega}$ con una velocidad $v(E)$ correspondiente a una energía E , de tal manera que en el instante t ambos volúmenes coinciden. En ese momento, la cantidad de neutrones con dirección $\hat{\Omega}$ en torno al cono definido por $d\hat{\Omega}$ y con energías entre E y $E + dE$ en el volumen $V \equiv V'(t)$ es

$$N_V(\hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE = \left[\int_{V \equiv V'(t)} N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} \right] d\hat{\Omega} dE \quad (1.16)$$

Dado que la posición del dominio de integración cambia con el tiempo, la derivada total de esta magnitud con respecto al tiempo es la suma de una derivada parcial y una derivada material:

$$\frac{dN_V}{dt} = \frac{\partial N_V}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V'(t+\Delta t)} N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} - \int_{V'(t)} N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} \right] \quad (1.17)$$

Ahora necesitamos que el dominio de integración de la segunda integral sea igual al de la primera. Para ello, notamos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V'(t + \Delta t) = V'(t) + v(E) \hat{\Omega} \cdot \Delta t$$

para cada punto $\mathbf{x} \in V'(t)$. Además, como ni $v(E)$ ni $\hat{\Omega}_i$ para $i = x, y, z$ dependen de \mathbf{x} , entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [x_i + v(E) \hat{\Omega}_i \cdot \Delta t] = 1$$

y podemos hacer un cambio de coordenadas unitario en la ecuación (1.17) para que el dominio de integración de la primera integral coincida entonces con el de la segunda y obtener así

$$\frac{dN_V}{dt} = \frac{\partial N_V}{\partial t} + \int_{V'(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [N(\mathbf{x} + v(E) \hat{\Omega} \cdot \Delta t, \hat{\Omega}, E, t) - N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)] d^3 \mathbf{x}$$

Como el término entre corchetes es igual a $v(E)$ veces la derivada espacial de la función $N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)$ en la dirección $\hat{\Omega}$ resulta

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [N(\mathbf{x} + v(E) \hat{\Omega} \cdot \Delta t, \hat{\Omega}, E) - N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E)] d^3 \mathbf{x} = v(E) \left\{ \hat{\Omega} \cdot \text{grad} [N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E)] \right\}$$

y $V'(t) \equiv V$ entonces podemos escribir la derivada total de la cantidad de neutrones en V con respecto al tiempo como

$$\frac{dN_V}{dt} = \frac{\partial N_V}{\partial t} + v(E) \left\{ \int_V \hat{\Omega} \cdot \text{grad} [N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)] d^3 \mathbf{x} \right\}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.16) y la definición 1.6 de flujo angular ψ

$$\frac{d}{dt} \int_V N(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3 \mathbf{x} = \int_V \left\{ \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \text{grad} [\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)] \right\} d^3 \mathbf{x}$$

donde notamos que el gradiente opera sólo sobre las componentes espaciales, es decir

$$\text{grad} [\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

poner la derivación alternativa de lewis?

1.3.2. Operador de producciones

Habiendo estudiado la expresión matemática que describe el transporte de neutrones, pasamos ahora a estudiar la forma en la que se producen. Los neutrones pueden aparecer en un diferencial de espacio de las fases $d\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE dt$ debido a uno de los siguiente tres mecanismos, que analizamos a continuación: scattering, fisión y fuentes externas.

Fuente por scattering

Un neutrón que viajando con una energía E' y una dirección $\hat{\Omega}'$ sufre una colisión de scattering en el punto \mathbf{x} y emerge con una energía E y una dirección $\hat{\Omega}$ es efectivamente una fuente de neutrones en $d\mathbf{x} d\hat{\Omega} dE dt$ debido a scattering. Esta fuente q_s debe ser entonces igual al producto de la probabilidad por unidad de longitud de recorrido de neutrones que viajando en con una energía E' en una dirección $\hat{\Omega}'$ colisionen con un núcleo blanco en el punto \mathbf{x} y como resultado adquieren una dirección de viaje $\hat{\Omega}$ y una energía E (ver sección 1.1.1) por la cantidad de longitudes lineales viajadas, teniendo en cuenta todos los posibles valores de $\hat{\Omega}'$ y de E' . Es decir

$$\int_V q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} = \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d^3\mathbf{x} \quad (1.18)$$

Debemos notar que en esta ecuación hemos invertido el índice de las variables primadas con respecto a la sección 1.1.1, inversión que mantendremos a lo largo de esta sección.

Fuente por fisión

Los neutrones que nacen por fisiones de núcleos de materiales combustibles en el punto \mathbf{x} lo hacen isotrópicamente y con una cierta distribución energética $\chi(E)$ (ver sección 1.1.2). Como también discutimos en la página 12, debemos calcular la fuente de fisión ligeramente diferente si se trata de un problema transitorio, estacionario con fuente o estacionario sin fuente. Sin pérdida de generalidad, para fijar ideas supongamos que desde el punto de vista de la fisión el problema es estacionario con fuente. La tasa de generación de neutrones debidas a fisión es el producto del número probable de nacimientos en \mathbf{x} con energías entre E y $E + dE$ por unidad de longitud de recorrido de neutrones que viajando con dirección $\hat{\Omega}$ y energía E generan la fisión del núcleo pesado en el punto \mathbf{x} debido a neutrones incidentes con dirección de viaje $\hat{\Omega}'$ y energía incidente E' (ver sección 1.1.2) por la cantidad de longitudes lineales viajadas, teniendo en cuenta todos los posibles valores de $\hat{\Omega}'$ y de E' :

$$\begin{aligned} \int_V q_f(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} &= \int_V \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d^3\mathbf{x} \\ &= \int_V \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' d^3\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Fuente independiente

Por último, para no perder generalidad tenemos que tener en cuenta las fuentes externas de neutrones, i.e. aquellas que no provienen de la fisión de materiales presentes en el núcleo sino de otras fuentes totalmente independientes como puede ser una fuente de americio-berilio. Matemáticamente, las modelamos como la integral sobre el volumen V de una función conocida $s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)$ del espacio, la dirección, la energía y el

tiempo que representa la cantidad de neutrones emitidos con energía E en el punto \mathbf{x} con dirección $\hat{\Omega}$ en el instante t .

1.3.3. La ecuación de transporte

La conservación de neutrones implica que la derivada temporal total de cualquier magnitud relacionada a la distribución espacial de neutrones debe ser igual a la diferencia entre la tasa de producciones y la tasa de desapariciones. El ritmo de aparición de neutrones en el volumen V con energías entre E y $E + dE$ en un cono $d\hat{\Omega}$ alrededor de la dirección $\hat{\Omega}$ es

$$\int_V q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) dE d\hat{\Omega} d^3\mathbf{x} = \int_V \left[q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) + q_f(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) + s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] dE d\hat{\Omega} d^3\mathbf{x}$$

El ritmo con el que desaparecen los neutrones de energía E viajando en la dirección $\hat{\Omega}$ en el volumen V es

$$\int_V R_t(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) dE d\hat{\Omega} d^3\mathbf{x} = \int_V \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) dE d\hat{\Omega} d^3\mathbf{x}$$

por lo que

$$\left(\int_V \left\{ \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] \right\} d^3\mathbf{x} \right) dE d\hat{\Omega} = \left(\int_V q(\mathbf{x}, E, \hat{\Omega}, t) d^3\mathbf{x} \right) dE d\hat{\Omega} - \left(\int_V \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d^3\mathbf{x} \right) dE d\hat{\Omega} \quad (1.20)$$

Como el dominio de integración V es arbitrario, la igualdad debe cumplirse punto a punto

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \quad (1.21)$$

Desarrollando el término de fuente en sus tres términos y teniendo en cuenta que la relación entre velocidad y energía es la clásica $E = mv^2/2$, llegamos a la *ecuación de transporte de neutrones*

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' \\ + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' + s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

que es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden en el espacio (debemos recordar que el operador gradiente opera sólo sobre las coordenadas espaciales) y de primer orden en el tiempo para la incógnita ψ sobre el espacio \mathbf{x} , la dirección $\hat{\Omega}$,

la energía E y el tiempo t . Las secciones eficaces Σ_t y $\nu\Sigma_f$ son distribuciones conocidas del espacio y de la energía, como también lo es la fuente s con una dependencia adicional sobre la dirección. La sección eficaz diferencial de scattering Σ_s debe ser conocida en su dependencia tanto en la energía incidente E' como en la energía saliente E y en el coseno del ángulo de scattering $\mu = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$, usualmente dada como coeficientes Σ_{s_ℓ} de expansión en polinomios de Legendre sobre el escalar μ . El parámetro m es la masa en reposo del neutrón.

1.3.4. Evaluación del término de scattering

Prestemos atención al término de fuente por scattering dado por la ecuación (1.18). Dado que hemos supuesto que la sección eficaz diferencial de scattering esté definida por los coeficientes del desarrollo en polinomios de Legendre Σ_{s_ℓ} introducidos en la ecuación (1.6) (recordar que seguimos invirtiendo las variables primadas), entonces podemos escribir el término de scattering como

$$q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \int_0^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \int_{4\pi} P_\ell(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' \right] dE' \quad (1.23)$$

Si bien esta expresión ya es suficiente para evaluar el término de scattering cuando tenemos su desarrollo de Legendre, podemos ahondar un poco más en la estructura de la ecuación de transporte desarrollando en una base apropiada el flujo angular, de la misma manera en la que desarrollamos Σ_s en una serie de polinomios de Legendre sobre el parámetro $\mu = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$. Para ello, notamos que ψ depende angularmente de un versor dirección $\hat{\Omega} = [\hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_z]^T$ (u $\hat{\Omega}'$ en el caso de la ecuación (1.23)). Esta vez, la base de expansión apropiada es la dada por los armónicos esféricos reales (figura 1.7). En efecto, podemos escribir cualquier función $f(\hat{\Omega}_x, \hat{\Omega}_y, \hat{\Omega}_z)$ de cuadrado integrable, con $\hat{\Omega}_x^2 + \hat{\Omega}_y^2 + \hat{\Omega}_z^2 = 1$, como

$$f(\hat{\Omega}_x, \hat{\Omega}_y, \hat{\Omega}_z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}_x, \hat{\Omega}_y, \hat{\Omega}_z)$$

donde $Y_\ell^m(\hat{\Omega})$ es el armónico esférico normalizado real de grado $\ell \geq 0$ y orden m , con $-\ell \leq m \leq \ell$ (figura 1.7). En particular, expandimos el flujo angular como

$$\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \quad (1.24)$$

donde calculamos los coeficientes Ψ_ℓ^m a partir de la propiedad de ortonormalidad de los armónicos esféricos reales

$$\int_{4\pi} Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \cdot Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (1.25)$$

como

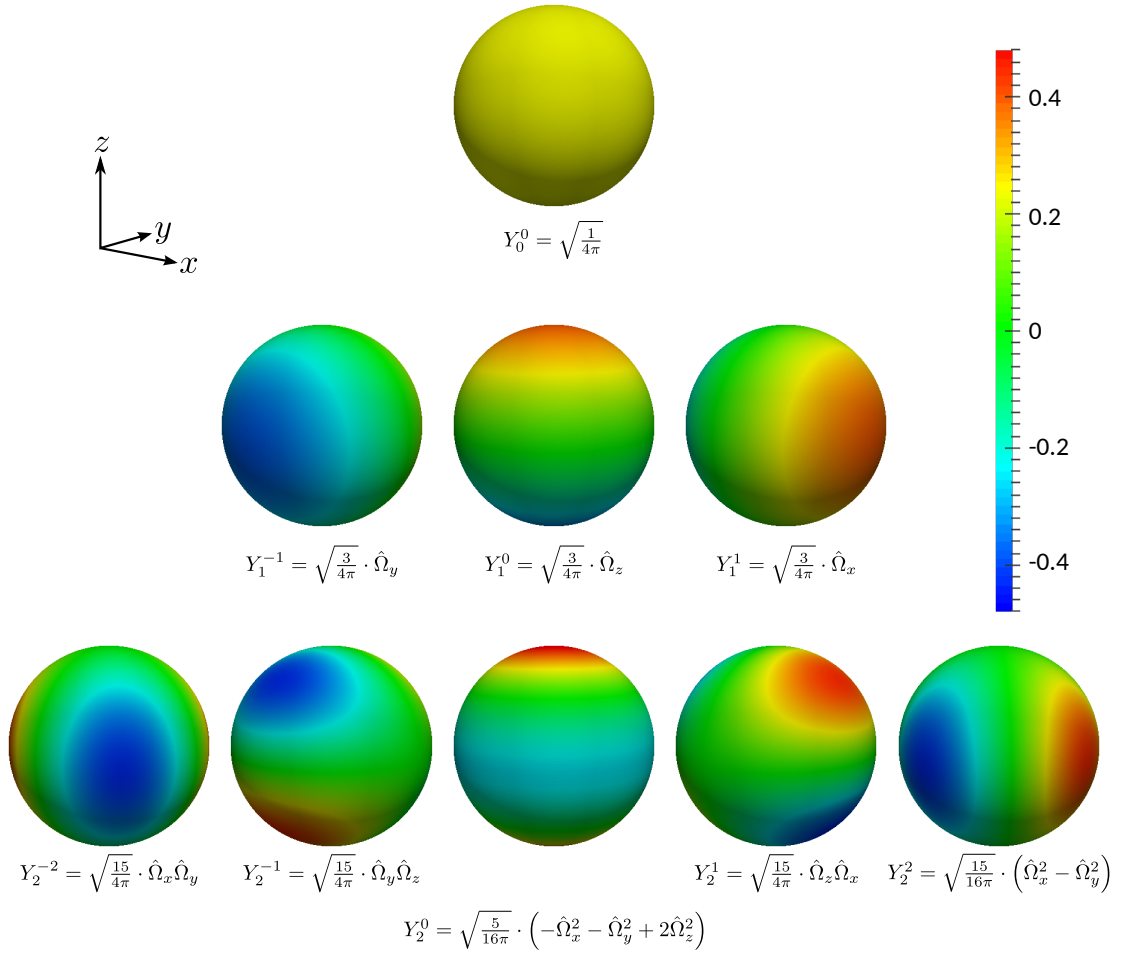


Figura 1.7: Los primeros nueve armónicos esféricos reales. Ver apéndice ?? para una lista completa y la figura ?? para una representación visual alternativa.

$$\Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (1.26)$$

Los armónicos esféricos se relacionan con los polinomios de Legendre a través del teorema de adición (apéndice ??) según el cual

$$P_\ell(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}')$$

Reemplazando en el término de scattering q_s dado por la ecuación (1.23) tenemos

$$q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \int_{4\pi} Y_\ell^m(\hat{\Omega}') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' \right] dE'$$

La última integral sobre $d\hat{\Omega}'$ es justamente el coeficiente Ψ_ℓ^m de la expansión en armónicos esféricos del flujo angular ψ definido por la ecuación (1.26). Luego

$$q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \quad (1.27)$$

Esta ecuación (1.27) refleja la forma en la que incide la fuente de scattering en el balance global de neutrones: el modo ℓ de la expansión en polinomios de Legendre de la sección diferencial de scattering contribuye sólo a través de los modos de grado ℓ de la expansión en armónicos esféricos del flujo angular. En particular, para scattering isotrópico sólo el término para $\ell = 0$ y $m = 0$ contribuye a la fuente de scattering q_s . De la misma manera, para scattering linealmente anisotrópico además sólo contribuyen los términos con $\ell = 1$ y $m = -1, 0, 1$.

En efecto, vemos que el coeficiente Ψ_0^0 es

$$\Psi_0^0(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot Y_0^0(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t)$$

ya que $Y_0^0 = \sqrt{1/4\pi}$ (figura 1.7), por lo que la expansión del flujo angular dada por la ecuación (1.24) queda

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) &= \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t) \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}} + \sum_{\ell=1}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \\ &= \frac{\phi(\mathbf{x}, E, t)}{4\pi} + \sum_{\ell=1}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \end{aligned}$$

Más aún, los coeficientes de grado $\ell = 1$ son

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1}(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \hat{\Omega}_y d\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot J_y(\mathbf{x}, E, t) \\ \Psi_1^0(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \hat{\Omega}_z d\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot J_z(\mathbf{x}, E, t) \\ \Psi_1^1(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \hat{\Omega}_x d\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot J_x(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned}$$

recordando la definición 1.8 del vector corriente $\mathbf{J} = [J_x J_y J_z]^T$ y la ecuación (1.14). Luego

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) &= \frac{\phi(\mathbf{x}, E, t)}{4\pi} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_{\ell}^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\phi(\mathbf{x}, E, t) + 3 \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right] + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_{\ell}^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Efectivamente, a partir de esta expresión podemos recuperar el flujo escalar

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \left[\phi(\mathbf{x}, E, t) + \left(3 \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_{\ell}^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \right] d\hat{\Omega} \\
&= \phi(\mathbf{x}, E, t)
\end{aligned}$$

ya que a partir del segundo término todas las integrales se anulan dado que los integrandos son simétricos con respecto a la variable de integración $\hat{\Omega}$. Más aún, se cumple que (apéndice ??)

$$\int_{4\pi} \hat{\Omega}_x^m \cdot \hat{\Omega}_y^n \cdot \hat{\Omega}_z^p d\hat{\Omega} = 0 \quad \text{si alguno de } m, n, \text{ ó } p \text{ es impar} \quad (??)$$

Recuperamos además el vector corriente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} d\hat{\Omega} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \left\{ \phi(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} + 3 \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) \cdot \hat{\Omega} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_{\ell}^m(\mathbf{x}, E, t) \cdot \begin{bmatrix} Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \cdot \hat{\Omega}_x \\ Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \cdot \hat{\Omega}_y \\ Y_{\ell}^m(\hat{\Omega}) \cdot \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} \right\} d\hat{\Omega}
\end{aligned}$$

El primer término se anula por ser impar. Pero además los términos de la sumatoria doble también se anulan por la ortogonalidad de los armónicos esféricos (ecuación (1.25)) con respecto a $\hat{\Omega}$, que es proporcional a $Y_0^m(\hat{\Omega})$:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_x \\ \hat{\Omega}_y \\ \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \begin{bmatrix} Y_1^1(\hat{\Omega}) \\ Y_1^{-1}(\hat{\Omega}) \\ Y_1^0(\hat{\Omega}) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) &= \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \left(J_x \hat{\Omega}_x + J_y \hat{\Omega}_y + J_z \hat{\Omega}_z \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_x \\ \hat{\Omega}_y \\ \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} d\hat{\Omega} \\
&= \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \begin{bmatrix} J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_x + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_x + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_x \\ J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_y + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_y \\ J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_z + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_z + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} d\hat{\Omega}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que (apéndice ??)

$$\int_{4\pi} \hat{\Omega}_i \cdot \hat{\Omega}_j d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \cdot \delta_{ij} \quad (??)$$

para $i = x, y, z$ y $j = x, y, z$, finalmente obtenemos en efecto

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) &= \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{4\pi}{3} J_x \\ \frac{4\pi}{3} J_y \\ \frac{4\pi}{3} J_z \end{bmatrix} d\hat{\Omega} \\
&= \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t)
\end{aligned} \quad (1.30)$$

Volviendo a la evaluación del término de scattering, aprovechando en cuenta la ecuación (??) que nos da una forma particular para el flujo angular en función de los dos modos $\ell = 0$ y $\ell = 1$, podemos calcular la fuente de scattering q_s dada por la ecuación (1.27) como

$$\begin{aligned}
q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \\
&\quad + \frac{3}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} \right) dE' \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^\infty \int_0^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \quad (1.31)
\end{aligned}$$

que es una expresión mucho más útil que la ecuación (1.18), que da un expresión demasiado general, especialmente si podemos despreciar los términos para $\ell > 1$ y quedarnos con scattering linealmente anisotrópico

$$\begin{aligned}
q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \right. \\
&\quad \left. + 3 \cdot \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} \right) dE' \right] \quad (1.32)
\end{aligned}$$

1.3.5. Condiciones de contorno

La ecuación (1.22) es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden sobre las coordenadas espaciales en un cierto dominio espacial U y una derivada temporal de primer orden sobre la variable espacial. Esto hace que debamos dar condiciones iniciales sobre el dominio U para todas las energías y direcciones, y condiciones de contorno también para todas las energías y direcciones pero no sobre toda la frontera dominio espacial ∂U sino sólo sobre un cierto subconjunto $\Gamma \subset \partial U$ tal que la ecuación hiperbólica resultante esté bien definida. Matemáticamente las condiciones de contorno de una ecuación diferencial en derivadas parciales pueden ser

- de Dirichlet, donde fijamos el valor de la incógnita ψ ;
- de Neumann, donde fijamos el valor de la derivada normal exterior $\partial\psi/\partial n$ de la incógnita; ó bien
- de Robin, donde fijamos una combinación lineal de ambas.

Físicamente, requerimos conocer el flujo de neutrones en todas las direcciones entrantes al dominio U . Es decir, para todo punto $\mathbf{x} \in \partial U$, necesitamos conocer y tomar como condición de contorno el valor de $\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)$ para aquellas direcciones $\hat{\Omega}$ tales que $\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0$ siendo $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ el vector normal externo a U en el punto $\mathbf{x} \in \partial U$.

Definición 1.9. Llamamos *condición de contorno de vacío* a la situación en la cual todos los flujos angulares entrantes a U son nulos:

$$\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_V \wedge \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0$$

y para cada dirección entrante $\hat{\Omega}$ definimos el conjunto $\Gamma_V \in \partial U$ como el lugar geométrico de todos los puntos \mathbf{x} donde imponemos esta condición de contorno. \square

Definición 1.10. Llamamos *condición de contorno de reflexión o de simetría* cuando el flujo angular entrante en el punto $\mathbf{x} \in \partial U$ es igual al flujo angular saliente en la dirección

$$\hat{\Omega}' = \hat{\Omega} - 2(\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}$$

reflejada con respecto a la normal exterior $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ (figura 1.8):

$$\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \psi \left[\mathbf{x}, \hat{\Omega} - 2(\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}, E, t \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_M \wedge \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0$$

y para cada dirección entrante $\hat{\Omega}$ definimos el conjunto $\Gamma_M \in \partial U$ como el lugar geométrico de todos los puntos \mathbf{x} donde imponemos esta condición de contorno. \square

En general, podemos fijar la corriente entrante al dominio a un cierto valor diferente de cero sólo si

1. el término de fisión es nulo; ó
2. el término de fisión es no nulo y el término de fuentes es también no nulo

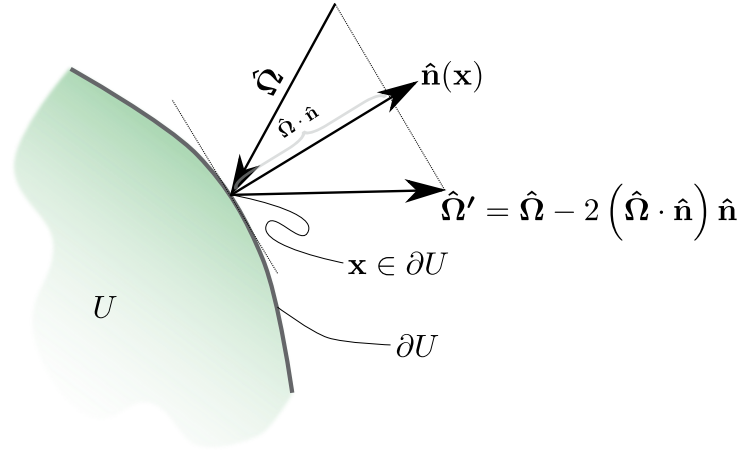


Figura 1.8: La dirección reflejada $\hat{\Omega}'$ de la dirección incidente con respecto a la normal exterior \hat{n} al dominio U en el punto $\mathbf{x} \in \partial U$. Se cumple que $\hat{\Omega}' \cdot \hat{n} = -\hat{\Omega} \cdot \hat{n}$.

En estos casos, podemos tener una condición de contorno general:

$$\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_V \cup \Gamma_M \wedge \hat{\Omega} \cdot \hat{n}(\mathbf{x}) < 0$$

Notamos que en todos los casos las condiciones de contorno de la ecuación de transporte son de tipo Dirichlet.

1.4. Aproximación de difusión

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

1.4.1. Conservación de neutrones

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Comenzamos integrando la ecuación (1.21) de transporte de neutrones sobre todos los ángulos $\hat{\Omega}$ para obtener

$$\int_{4\pi} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] d\hat{\Omega} + \int_{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] d\hat{\Omega} \\ + \int_{4\pi} \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} = \int_{4\pi} q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega}$$

Utilizando la identidad de cálculo vectorial

$$\text{div}(\hat{\Omega} \cdot \psi) = \hat{\Omega} \cdot \text{grad}(\psi) + \psi \cdot \text{div}(\hat{\Omega})$$

y notando que $\text{div}(\hat{\Omega}) = 0$ porque las operaciones diferenciales actúan sólo sobre las coordenadas espaciales del vector \mathbf{x} y $\hat{\Omega} = [\hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_z]^T$, podemos evaluar el segundo término como la divergencia de la integral sobre $\hat{\Omega}$ del producto escalar de la dirección por el flujo angular

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \right] + \text{div} \left[\int \left(\hat{\Omega} \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right) d\hat{\Omega} \right] \\ + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \left[\int \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \right] = \int q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega}$$

Recordando las definiciones 1.7 de flujo escalar ϕ y 1.8 del vector corriente \mathbf{J} ,

$$\phi(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} \left(\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega}$$

y definiendo una fuente escalar

$$Q(\mathbf{x}, E, t) = \int q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \quad (1.33)$$

obtenemos

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi(\mathbf{x}, E, t) \right] + \text{div} \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t) = Q(\mathbf{x}, E, t) \quad (1.34)$$

Esta ecuación refleja la conservación del momento de orden cero del flujo angular de neutrones.

1.4.2. Producciones

El miembro derecho de la ecuación (1.34) representa las producciones de neutrones, que como definimos en la ecuación (1.33), es igual a la integral de las tres contribuciones individuales debidas a scattering, fisión y fuentes independientes:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}, E, t) &= \int q(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \\
&= \int q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} + \int q_f(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} + \int s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \\
&= Q_s(\mathbf{x}, E, t) + Q_f(\mathbf{x}, E, t) + S(\mathbf{x}, E, t)
\end{aligned}$$

Fuente por scattering

Para evaluar la contribución debida al scattering de neutrones integramos la ecuación (1.31) sobre todas las direcciones emergentes $\hat{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
Q_s(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \right. \\
&\quad + \frac{3}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} \right) dE' \\
&\quad \left. + \sum_{\ell=2}^\infty \int_0^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \right\} d\hat{\Omega}
\end{aligned}$$

Todos los términos para $\ell > 1$ se anulan por ser integrales de funciones simétricas con respecto a $\hat{\Omega}$. Luego

$$Q_s(\mathbf{x}, E, t) = \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \quad (1.35)$$

Fuente por fisión

El término que representa la fuente por fisión es la integral sobre todas las posibles direcciones del término de fuentes de fisión q_f . Para el caso de la ecuación (1.19), que corresponde a un problema estacionario con fisión y fuente independiente (ver sección 1.5), tenemos

$$\begin{aligned}
Q_f(\mathbf{x}, E, t) &= \int_{4\pi} \left[\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \right] d\hat{\Omega} \\
&= \chi(E) \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE'
\end{aligned} \quad (1.36)$$

Fuente independiente

La fuente independiente es directamente la integral sobre $\hat{\Omega}$ de la fuente independiente $s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)$:

$$S(\mathbf{x}, E, t) = \int_{4\pi} s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} = s_0(\mathbf{x}, E, t) \quad (1.37)$$

es decir, el momento de orden cero de la expansión en armónicos esféricos de la fuente.

1.4.3. Ley de Fick

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Como ya hemos mencionado, nuestro enfoque será primero que nada esencialmente matemático. Dejamos para el final del capítulo el análisis de las implicaciones físicas que tienen las aproximaciones matemáticas que introducimos en esta sección para arribar a los resultados y conclusiones expuestos. Comencemos recordando la ecuación (1.21), explicitando los términos de fuentes por scattering (1.27), fisión estacionaria (1.19) y fuentes independientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ \int_0^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \\ + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' + s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \quad (1.38) \end{aligned}$$

Multipliquemos esta ecuación escalar por el versor $\hat{\Omega}$ e integremos sobre todas las posibles direcciones para obtener una ecuación vectorial de dimensión tres:

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} + \int_{4\pi} \left(\hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \\ + \int_{4\pi} \left(\Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} = \\ \int_{4\pi} \left(\int_0^\infty \sum_{\ell=0}^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \\ + \int_{4\pi} \left(\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} + \int_{4\pi} \left(s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \quad (1.39) \end{aligned}$$

Analicemos término a término esta expresión, teniendo en cuenta los desarrollos matemáticos que hemos realizado a lo largo de todo el capítulo. El primero corresponde a la derivada temporal de la corriente. En efecto

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \right] \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} &= \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{4\pi} \left(\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dejemos para después el segundo término. El siguiente es el término de absorción total escrito en forma vectorial con respecto a la corriente

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \left(\Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} &= \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \int_{4\pi} \left(\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \\ &= \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned} \quad (1.41)$$

El término de scattering parece complicado, pero en realidad ya lo hemos resuelto al derivar la ecuación (1.30). En primer lugar, partamos de la ecuación (1.31) multiplicada por $\hat{\Omega}$ e integrada en 4π :

$$\begin{aligned} &\int_{4\pi} \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} dE' \right] d\hat{\Omega} \\ &\quad + \int_{4\pi} \left[\frac{3}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} \right) \cdot \hat{\Omega} dE' \right] d\hat{\Omega} \\ &\quad + \int_{4\pi} \left\{ \sum_{\ell=2}^\infty \int_0^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \cdot \hat{\Omega} \right] dE' \right\} d\hat{\Omega} \end{aligned}$$

En forma similar al argumento planteado en la página 1.3.4, el primer término se anula por ser impar, y los términos de la sumatoria también se anulan por la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos (ecuación (1.25)) y la ecuación (1.29), que indica que $\hat{\Omega}$ es proporcional a $Y_1^m(\hat{\Omega})$:

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \left\{ \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(J_x \hat{\Omega}_x + J_y \hat{\Omega}_y + J_z \hat{\Omega}_z \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_x \\ \hat{\Omega}_y \\ \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} dE' \right\} d\hat{\Omega} \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \left\{ \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \begin{bmatrix} J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_x + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_x + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_x \\ J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_y + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_y \\ J_x \hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_z + J_y \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_z + J_z \hat{\Omega}_z \hat{\Omega}_z \end{bmatrix} dE' \right\} d\hat{\Omega} \end{aligned}$$

Teniendo además en cuenta la ecuación (??) (apéndice ??)

$$\int_{4\pi} \hat{\Omega}_i \cdot \hat{\Omega}_j d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \cdot \delta_{ij} \quad (??)$$

el término de scattering toma la inocua forma de

$$\int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) dE' \quad (1.42)$$

El siguiente es el término de fisiones, cuya integral se anula. En efecto,

$$\int_{4\pi} \left(\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} = 0 \quad (1.43)$$

ya que el integrando es una función impar de $\hat{\Omega}$. En forma equivalente, en distribuciones angulares isotrópicas el único momento diferente de cero es el de orden $\ell = 0$.

El término de fuentes independientes es igual a un vector cuyas componentes son los tres coeficientes de la expansión de la fuente en armónicos esféricos sobre el ángulo $\hat{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{\Omega} d\hat{\Omega} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \begin{bmatrix} s_1^1(\mathbf{x}, E, t) \\ s_1^{-1}(\mathbf{x}, E, t) \\ s_1^0(\mathbf{x}, E, t) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned} \quad (1.44)$$

a menos que las fuentes independientes sean isotrópicas, en cuyo caso estos momentos son nulos.

El término que involucra el gradiente parece sencillo pero es el más complicado de la ecuación (1.39). En efecto,

Hacer bien las cuentas, hay que suponer que $\psi = \phi + 3J$ + términos superiores.

$$\int_{4\pi} \left(\hat{\Omega} \cdot \text{grad} [\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t)] \cdot \hat{\Omega} \right) d\hat{\Omega} \simeq \frac{1}{3} \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)] \quad (1.45)$$

Estamos entonces en condiciones de reunir todos estos términos (ecuaciones (1.40), (1.41), (1.42), (1.43), (1.44) y (1.45)) y concluir que al multiplicar la ecuación (1.38) por $\hat{\Omega}$ e integrar en todas las posibles direcciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t)] + \frac{1}{3} \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) = \\ \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) dE' + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned} \quad (1.46)$$

A continuación vamos a hacer las siguientes tres suposiciones:

1. que la fuente independiente es isotrópica por lo que el primer momento $\mathbf{s}_1(\mathbf{x}, E, t)$ es idénticamente nulo.

2. que

$$\frac{3}{v} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t)] \ll \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)]$$

lo que de hecho es cierto en el caso estacionario ya que $\partial \mathbf{J} / \partial t = 0$.

3. que

$$\int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) dE' \simeq \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) dE' \quad (1.47)$$

El miembro izquierdo representa el in-scattering de neutrones de todas las energías mientras que el miembro derecho es el out-scattering de neutrones de energía E hacia todas las otras energías E' . Si la absorción es pequeña, estas dos expresiones se deberían balancear aproximadamente por lo que esta suposición es razonable.

Volviendo a la ecuación (1.46), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) &= \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) dE' \\ &= \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') dE' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \\ &= \mu_0(\mathbf{x}, E) \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E \rightarrow E') dE' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \\ &= \mu_0(\mathbf{x}, E) \cdot \Sigma_s(\mathbf{x}, E) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned}$$

donde en los últimos dos pasos hemos utilizado la ecuación (1.11) y la sección eficaz *total* de scattering $\Sigma_s(\mathbf{x}, E)$. Con esta expresión podemos relacionar la corriente \mathbf{J} con el gradiente del flujo escalar ϕ como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) = -\frac{1}{3 [\Sigma_t(\mathbf{x}, E) - \mu_0(\mathbf{x}, E) \cdot \Sigma_s(\mathbf{x}, E)]} \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)]$$

Definición 1.11. El *coeficiente de difusión* D definido como

$$D(\mathbf{x}, E) = \frac{1}{3 [\Sigma_t(\mathbf{x}, E) - \mu_0(\mathbf{x}, E) \cdot \Sigma_s(\mathbf{x}, E)]}$$

es tal que, si

1. la fuente independiente es isotrópica, $\mathbf{s}_1(\mathbf{x}, E, t) = 0$;
2. la variación temporal de la corriente es despreciable frente al gradiente del flujo escalar, $3/v \cdot \partial \mathbf{J} / \partial t \ll \nabla \phi$;
3. el in-scattering es similar al out-scattering, $\int \Sigma_{s_1}(E' \rightarrow E) \cdot \mathbf{J}(E') dE' \simeq \int \Sigma_{s_1}(E \rightarrow E') \cdot \mathbf{J}(E) dE'$; y

4. el flujo angular se puede ser aproximado como linealmente anisotrópico, $\psi \approx (\phi + 3\mathbf{J})/4\pi$

entonces se cumple la *Ley de Fick*

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \simeq -D(\mathbf{x}, E) \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)] \quad (1.48)$$

según la cual el vector corriente \mathbf{J} es proporcional a menos el gradiente del flujo escalar ϕ a través de un coeficiente de difusión D . \square

La ley de Fick refleja la conservación del momento de orden uno del flujo angular de neutrones en forma aproximada.

1.4.4. La ecuación de difusión

Podemos combinar los dos resultados de las secciones anteriores (conservación de momentos de orden cero y uno) teniendo en cuenta las ecuaciones (1.34), (1.35), (1.36), (1.37) y (1.48) para obtener finalmente la celebrada ecuación de difusión de neutrones

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\mathbf{x}, E, t)] - \text{div} [D(\mathbf{x}, E) \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E, t)]] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t) = \\ & \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' + \chi(E) \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' + s_0(\mathbf{x}, E, t) \end{aligned} \quad (1.49)$$

que es una ecuación de segundo orden sobre el espacio (los operadores divergencia y gradiente operan sólo sobre las coordenadas espaciales) y de primer orden sobre el tiempo para la incógnita $\phi(\mathbf{x}, E, t)$. Las secciones eficaces Σ_t , y $\nu \Sigma_f$ son funciones conocidas del espacio \mathbf{x} y la energía E , al igual que el coeficiente de difusión $D(\mathbf{x}, E)$. La sección eficaz diferencial de scattering Σ_{s_0} es el momento de orden cero de la expansión en polinomios de Legendre de la sección eficaz de scattering diferencial Σ_s para dispersión desde la energía E' a la energía E , también conocida para todo \mathbf{x} . La distribución $\chi(E)$ es el espectro de fisión en función de la energía E , s_0 es el momento de orden cero en la expansión de la fuente independiente en armónicos esféricos y m es la masa en reposo del neutrón, todos parámetros que asumimos son conocidos.

1.4.5. Condiciones de contorno

La ecuación de difusión es elíptica sobre las coordenadas espaciales por lo que debemos especificar, además de las condiciones iniciales apropiadas en el caso transitorio, condiciones de contorno en toda la frontera ∂U del dominio espacial. Tal como discutimos en la sección 1.3.5, éstas pueden ser

1. de Dirichlet donde especificamos el valor del flujo escalar ϕ en $\Gamma_D \subset \partial U$;
2. de Neumann donde fijamos el valor de la derivada normal $\partial\phi/\partial n$ en $\Gamma_N \subset \partial U$; ó bien

3. de Robin donde damos una combinación lineal del flujo y de la derivada normal en $\Gamma_R \subset \partial U$.

Debe cumplirse que $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$ y que $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R = \partial U$.

Dada una superficie diferencial cuya normal exterior es $\hat{\mathbf{n}}$, tasa de neutrones entrante por unidad de área a través de dicha superficie está dada por la ecuación (1.15) de la definición 1.8:

$$J_n^-(\mathbf{x}, E, t) = \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \quad (1.15)$$

Despreciando los términos para $\ell \geq 2$ en la ecuación (1.28), podemos estimar esta corriente como

$$\begin{aligned} J_n^-(\mathbf{x}, E, t) &\approx \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0} \frac{1}{4\pi} \left[\phi(\mathbf{x}, E, t) + 3 \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right] (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{x}, E, t) \int_0^{-1} \mu' \cdot 2\pi d\mu' + \frac{3}{4\pi} \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0} \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\Omega} \right] \cdot (\hat{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\hat{\Omega} \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{x}, E, t) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4\pi} \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \\ &\approx \frac{1}{4} \phi(\mathbf{x}, E, t) - \frac{1}{2} \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, E, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación (??) sobre una semi-esfera unitaria para resolver la segunda integral del miembro derecho. A la luz de la ley de Fick dada por la ecuación (1.48), podemos escribir

$$\begin{aligned} J_n^-(\mathbf{x}, E, t) &\approx \frac{1}{4} \phi(\mathbf{x}, E, t) + \frac{1}{2} D(\mathbf{x}, E) \cdot \left[\text{grad}[\phi(\mathbf{x}, E, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \\ &\approx \frac{\phi(\mathbf{x}, E, t)}{4} + \frac{D(\mathbf{x}, E)}{2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{aligned}$$

lo que nos da una expresión para definir las condiciones de contorno de la ecuación de difusión.

Definición 1.12. En forma análoga a la definición 1.9, llamamos *condición de contorno de vacío* a la situación en la cual la corriente entrante a través de una porción de la frontera ∂U es cero, con lo que se debe cumplir:

$$\phi(\mathbf{x}, E, t) + 2 \cdot D(\mathbf{x}, E) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (1.50)$$

Definimos el conjunto $\Gamma_V \in \partial U$ como el lugar geométrico de todos los puntos $\mathbf{x} \in \partial U$ donde imponemos esta condición de contorno. Esta condición es de tipo Robin ya que se da el valor de una combinación lineal de la incógnita ϕ y de su derivada normal $\partial\phi/\partial n$. \square

Definición 1.13. En forma análoga a la definición 1.10, llamamos *condición de contorno de reflexión o de simetría* cuando la corriente neta entrante en el punto $\mathbf{x} \in \partial U$ es igual a

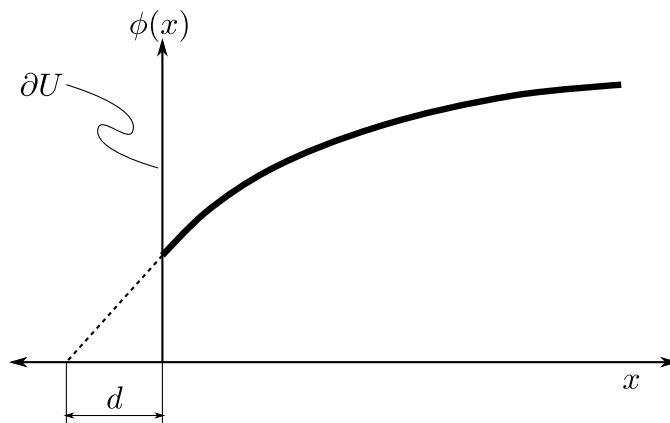


Figura 1.9: El flujo escalar $\phi(\mathbf{x}, E, t)$ extrapolado linealmente se anula a una distancia $d(\mathbf{x}, E) = 2D(\mathbf{x}, E)$ en una condición de contorno tipo vacío de la ecuación de difusión.

cero. En este caso, por la ley de Fick (1.48), debe anularse la derivada normal del flujo escalar evaluada en \mathbf{x} :

$$\text{grad}[\phi(\mathbf{x}, E, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Esta es una condición de tipo Neumann. Definimos el conjunto $\Gamma_M \in \partial U$ como el lugar geométrico de todos los puntos $\mathbf{x} \in \partial U$ donde imponemos esta condición de contorno. \square

Para el problema de difusión, a veces se suele utilizar una tercera condición de contorno basada en la idea que sigue. Si extrapolamos linealmente el flujo escalar ϕ una distancia d en la dirección de la normal externa $\hat{\mathbf{n}}$ en la frontera ∂U mediante una expansión de Taylor a primer orden, tenemos

$$\phi(\mathbf{x} + d(\mathbf{x}, E) \cdot \hat{\mathbf{n}}, E, t) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial U} \approx \phi(\mathbf{x}, E, t) + \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot d(\mathbf{x}, E)$$

Si se cumple la condición de contorno (1.50), entonces el flujo escalar extrapolado se anula en $\mathbf{x} + 2 \cdot D(\mathbf{x}, E) \cdot \hat{\mathbf{n}}$, como ilustramos en la figura 1.9. Si $D(\mathbf{x}, E)$ es mucho menor que el tamaño característico del dominio U entonces podemos aproximar $d \approx 0$.

Definición 1.14. Llamamos *condición de contorno de flujo nulo* cuando el flujo escalar ϕ se anula un punto $\mathbf{x} \in \partial U$:

$$\phi(\mathbf{x}, E, t) = 0$$

Definimos el conjunto $\Gamma_N \in \partial U$ como el lugar geométrico de todos los puntos $\mathbf{x} \in \partial U$ donde imponemos esta condición de contorno. Matemáticamente esta condición es de tipo Dirichlet. \square

La condición de contorno más general que podemos dar es una combinación lineal del flujo más su derivada normal en la frontera del dominio:

$$a(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}, E, t) + b(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} = c(\mathbf{x})$$

Debemos notar que $c(\mathbf{x})$ sólo puede ser diferente de cero si el término de fisión es nulo o si tanto el término de fisión como la fuente independiente no son nulos. Para dar una condición de reflectividad de un albedo $\beta(\mathbf{x}, E)$ debemos dar como condición de contorno

$$\begin{cases} a(\mathbf{x}) &= 1 \\ b(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2 \cdot D(\mathbf{x}, E)} \cdot \frac{1 - \beta(\mathbf{x}, E)}{1 + \beta(\mathbf{x}, E)} \\ c(\mathbf{x}) &= 0 \end{cases}$$

1.4.6. Validez de las suposiciones y aproximaciones

Analicemos en esta sección qué implicaciones físicas tienen las suposiciones y aproximaciones matemáticas que hemos utilizado para arribar a la ecuación de difusión (1.49).

aún cuando no se cumplan todas, todavía se puede obtener una relación entre el gradiente del flujo y la corriente

1.5. Problemas de estado estacionario

Si bien hasta el momento hemos mantenido por completitud la dependencia temporal explícitamente en los flujos y corrientes, en este tesis estamos interesado principalmente en problemas de estado estacionario. Para ello, tenemos que anular los términos que involucren derivadas parciales con respecto al tiempo en las ecuaciones tanto de transporte como de difusión de neutrones. Esto cambia las propiedades matemáticas de las ecuaciones y por lo tanto la forma en la cual debemos resolverlas. Vamos a particularizar la ecuación de transporte (1.22) y la de difusión (1.49) para tres casos:

- Medio no multiplicativo con fuentes independientes;
- Medio multiplicativo con fuentes independientes; y
- Medio multiplicativo sin fuentes independientes.

Debemos anular todos los términos de las derivadas temporales y eliminar todas las dependencias con respecto a la variable t . En cada caso discutimos las posibles condiciones de contorno necesarias para completar la formulación matemática.

1.5.1. Medio no multiplicativo con fuentes independientes

Un medio no multiplicativo es aquel que no contiene núcleos capaces de fisión. Cada neutrón que encontremos en el medio debe entonces provenir de una fuente externa s . Además de eliminar la derivada temporal y la dependencia con el tiempo, no tenemos en cuenta el término de fisión. Luego la ecuación de transporte (1.22) queda

$$\hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' + s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) \quad (1.51)$$

y la de difusión (1.49)

$$- \text{div} \left[D(\mathbf{x}, E) \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E)] \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E) = \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E') dE' + s_0(\mathbf{x}, E) \quad (1.52)$$

Para obtener soluciones de flujo no nula o bien la fuente no se debe anular idénticamente en el dominio o bien las condiciones de contorno deben ser no homogéneas. Si las secciones eficaces (incluyendo el coeficiente de difusión) dependen explícitamente de la posición \mathbf{x} y no dependen del flujo ψ o ϕ , entonces ambas ecuaciones (1.51) y (1.52) son lineales. Al reordenar términos y discretizar el problema (capítulo 2) obtendremos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que puede ser escrito en forma matricial como

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada que contiene información sobre la discretización de los operadores diferenciales e integrales de la ecuación, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es un vector que contiene la versión discretizada de la fuente independiente s . La información sobre las condiciones de contorno pueden estar incluidas bien en A o bien en \mathbf{b} , dependiendo del tipo de condición. Incluso las condiciones de tipo Robin tienen información tanto en A como en \mathbf{b} . El vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la incógnita, que luego de resolver el sistema permitirá estimar la función ψ ó ϕ en función de \mathbf{x} , E y eventualmente $\hat{\Omega}$.

ejemplo problema de la sección XXX
caso no lineal (manual de milonga)

1.5.2. Medio multiplicativo con fuentes independientes

Si además de contar con fuentes independientes de fisión el medio contiene material multiplicativo, entonces los neutrones pueden provenir tanto de las fuentes como de las fisiones. En este caso, tenemos que tener en cuenta la fuente de fisión, cuyo valor en la posición \mathbf{x} es proporcional al flujo escalar en \mathbf{x} . En la sección 1.1.2 indicamos que debemos utilizar expresiones diferentes para la fuente de fisión dependiendo de si estamos resolviendo un problema transitorio o estacionario. Si bien sólo una fracción β de todos los neutrones nacidos por fisión se generan en forma instantánea, en estado estacionario debemos también sumar el resto de los $(1 - \beta)$ como fuente de fisión ya que suponemos el estado encontrado es un equilibrio instante a instante dado por los β neutrones prompt y $(1 - \beta)$ neutrones retardados que provienen de fisiones operando desde $t = -\infty$. La fuente de fisión para un medio multiplicativo con fuente independiente por unidad de ángulo sólido, recordando que la fisión es isotrópica, es

$$q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) = \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' \quad (1.53)$$

La expresión matemática de la ecuación de transporte (1.22) para este caso es

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) = \\ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' \\ + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' + s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) \end{aligned} \quad (1.54)$$

y de la ecuación de difusión (1.49) es

$$\begin{aligned} - \text{div} \left[D(\mathbf{x}, E) \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E)] \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E) = \\ \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E') dE' + \chi(E) \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E') dE' + s_0(\mathbf{x}, E) \end{aligned} \quad (1.55)$$

El tipo de problema discretizado es esencialmente similar a medio no multiplicativo con fuentes de la sección anterior, sólo que ahora la matriz A tiene información sobre las fuentes de fisión. Estos casos se encuentran al estudiar sistemas subcríticos como por ejemplo piletas de almacenamiento de combustibles gastados o procedimientos de puesta a crítico de reactores.

1.5.3. Medio multiplicativo sin fuentes independientes

En el caso en que todos los neutrones provengan de fisiones y no existan fuentes independientes, en principio deberíamos anular las fuentes s y s_0 de las ecuaciones (1.54) y (1.55), respectivamente. Sin embargo esta operación dejaría un problema matemático mal condicionado. En efecto, sin fuentes externas la ecuación a resolver (sea transporte o difusión) es homogénea. La probabilidad de que dada una geometría y un conjunto de secciones eficaces macroscópicas (i.e. un modelo matemático de un reactor) la ecuación arroje un flujo no trivial balanceando exactamente todos los términos de la ecuación (i.e. que el reactor esté exactamente crítico) es cero. Para tener una solución matemática (y físicamente) razonable, debemos agregar al menos un parámetro real que permita ajustar uno o más términos en forma continua. Por ejemplo podríamos escribir las secciones eficaces en función de un parámetro geométrico (la posición de una barra de control) y/o físico (la concentración media de boro en el moderador).

Hay un parámetro real que además de permitir encontrar una solución no trivial para cualquier conjunto físicamente razonable de geometrías y secciones eficaces, nos da una idea de qué tan lejos se encuentra el modelo de la criticidad. El procedimiento consiste en dividir el término de fisiones por un número real k_{eff} , para obtener

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \text{grad} \left[\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) = \\ \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' \\ + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \cdot \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' \quad (1.56) \end{aligned}$$

y la de difusión (1.49) como

$$\begin{aligned} - \text{div} \left[D(\mathbf{x}, E) \cdot \text{grad} [\phi(\mathbf{x}, E)] \right] + \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E) = \\ \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E') dE' + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \cdot \chi(E) \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \phi(\mathbf{x}, E') dE' \quad (1.57) \end{aligned}$$

La utilidad del factor k_{eff} queda reflejada en la siguiente definición.

Definición 1.15. Llamamos *factor de multiplicación efectivo* al número real k_{eff} por el cual dividimos la fuente de fisiones de las ecuaciones que modelan un medio multiplicativo sin fuentes externas. Al nuevo medio al cual se le han dividido sus fuentes de fisión por k_{eff} lo denominamos *reactor crítico asociado en k* . Si $k_{\text{eff}} > 1$ entonces el reactor original estaba supercrítico ya que hubo que disminuir sus fisiones para encontrar una solución no trivial, y viceversa. El flujo solución de las ecuaciones es el flujo del reactor crítico asociado en k y no del original, ya que si el original no estaba crítico entonces éste no tiene solución estacionaria. \square

En este caso, al no haber fuentes independientes sólo quedan términos homogéneos. Sin embargo, ahora habrá algunos términos multiplicados por el coeficiente $1/k_{\text{eff}}$ y otros no. Si las secciones eficaces dependen sólo de la posición \mathbf{x} en forma explícita y no a través del flujo, entonces el problema es lineal y al separar en ambos miembros estos dos tipos de términos obtendremos una formulación discretizada de la forma

$$A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u} \quad (1.58)$$

conformando un problema de autovalores generalizado, donde el autovalor λ dará una idea de la criticidad del reactor y el autovector \mathbf{u} la distribución de flujo del reactor crítico asociado en k . Si B contiene los términos de fisión entonces $\lambda = 1/k_{\text{eff}}$ y si A es la que contiene los términos de fisión, entonces $\lambda = k_{\text{eff}}$. En general, para matrices de $n \times n$ habrá n pares autovalor-autovector. Más aún, tanto el autovalor como los elementos del autovector son en general complejos. Sin embargo se puede probar [38] **había una demostración del caso discretizado? chaboncito?** que, para el caso $\lambda = 1/k_{\text{eff}}$ ($\lambda = k_{\text{eff}}$),

1. hay un único autovalor positivo real que es mayor (menor) en magnitud que el resto de los autovalores,
2. todos los elementos del autovector correspondiente a dicho autovalor son reales y tienen el mismo signo, y

3. todos los otros autovectores o bien tienen al menos un elemento igual a cero o tienen elementos que difieren en su signo

Debemos notar que éste un problema matemáticamente homogéneo. Esta característica define dos propiedades importantes. La primera es que el autovector (es decir el flujo) está definido a menos de una constante multiplicativa y es independiente del factor de multiplicación k_{eff} . Para poder comparar soluciones debemos normalizar el flujo de alguna manera. Usualmente se define la potencia térmica total P del reactor y normalizamos el flujo de forma tal que

$$P = \int_V \int_0^\infty e\Sigma_f(\mathbf{x}, E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E) dE d^3\mathbf{x}$$

donde $e\Sigma_f$ es el producto de la energía liberada en una fisión individual por la sección eficaz de fisión. Debemos remarcar que si P es la potencia térmica instantánea, entonces $e\Sigma_f$ debe incluir sólo las contribuciones energéticas de los productos de fisión instantáneos. Si P es la potencia térmica total, entonces $e\Sigma_f$ debe tener en cuenta todas las contribuciones, incluyendo aquellas debidas a efectos retardados de los productos de fisión.

La segunda propiedad es que las condiciones de contorno también deben ser homogéneas. Es decir, no es posible fijar valores de flujo o corrientes diferentes de cero. De todas formas, las condiciones de contorno definidas con nombre y apellido en las secciones 1.3.5 1.4.5 son homogéneas por lo que aplican perfectamente para los medios multiplicativos sin fuentes externas.

no linealidades, ya no es cierto que el flujo es cualquier cosa

1.6. Esquema de solución multiescala

Si bien la ecuación de transporte (1.22) describe completamente la interacción de neutrones con la materia, los cambios en las secciones eficaces con la energía de los neutrones (figura ??) Los coeficientes de la ecuación de transporte son esencialmente las secciones eficaces macroscópicas.

1.6.1. Evaluación y procesamiento de secciones eficaces

1.6.2. Cálculo a nivel celda

1.6.3. Cálculo a nivel núcleo

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis.

Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

$$R \cdot \phi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F \cdot \phi \quad (1.59)$$

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

Esquemas de discretización numérica

CITA DE PIAGET - RUBBER DUCK DEBUGGING

Las formulaciones de los modelos matemáticos del transporte y difusión de neutrones en estado estacionario desarrollados en el capítulo anterior arrojan expresiones integro-diferenciales sobre seis escalares independientes: tres para el espacio \mathbf{x} , dos para la dirección $\hat{\Omega}$ y uno para la energía E . En este capítulo vamos a ir transformando estas dependencias y operadores continuos a versiones discretas para poder ser resueltas con computadoras digitales. Comenzamos primero por la energía aplicando la idea de grupos discretos de energías y continuamos por la dependencia angular con el método de ordenadas discretas S_N , que sólo aplica a la formulación de transporte. Finalmente prestamos atención a la discretización espacial, que es el aporte principal de esta tesis al problema del análisis de reactores nucleares de potencia moderados por agua pesada. En este trabajo desarrollamos dos esquemas: uno basado en volúmenes finitos y otro basado en elementos finitos. Dejamos fuera de toda discusión a los esquemas basados en diferencias finitas porque si bien son los más sencillos de todos, estos esquemas no pueden manejar discontinuidades en las propiedades materiales ni mallas no estructuradas, que es el tema central de esta tesis.

2.1. Discretización en energía

Vamos a discretizar el dominio de la energía E utilizando el concepto clásico de física de reactores de *grupos de energías*, que llevado a conceptos más generales de matemática discreta es equivalente a aplicar el método de volúmenes finitos, sólo que esta vez los volúmenes son volúmenes de energía. En efecto, tomemos el intervalo de energías $[0, E_0]$ donde E_0 es la mayor energía esperada de un neutrón individual. Como ilustramos en la figura 2.1, dividamos dicho intervalo en G grupos (volúmenes) no necesariamente iguales cada uno definido por energías de corte $0 = E_G < E_{G-1} < \dots < E_2 < E_1 < E_0$, de forma tal que el grupo g es el intervalo $[E_g, E_{g-1}]$. Notamos que con esta notación, el grupo número uno siempre es el de mayor energía. A medida que un neutrón va perdiendo energía, va aumentando el número de su grupo de energía.

El objetivo de discretizar la energía en G grupos es transformar la dependencia continua del flujo $\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E)$ por G funciones $\psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega})$. De la misma manera, pasar de $\phi(\mathbf{x}, E)$ a G funciones $\phi_g(\mathbf{x})$.



Figura 2.1: Discretización del dominio energético en grupos (volúmenes) de energía. Tomamos la mayor energía esperada E_0 y dividimos el intervalo $[0, E_0]$ en G grupos, no necesariamente iguales. El esquema matemático es equivalente a una discretización por volúmenes finitos. El grupo uno es el de mayor energía.

Definición 2.1. El flujo angular del grupo g es

$$\psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE \quad (2.1)$$

y el flujo escalar del grupo g es

$$\phi_g(\mathbf{x}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{x}, E) dE \quad (2.2)$$

Notamos que $\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E$ y $\psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega})$ no tienen las mismas unidades. La primera magnitud tiene unidades de inversa de área por inversa de ángulo sólido por inversa de energía por inversa de tiempo (i.e. $\text{cm}^{-2} \cdot \text{eV}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, mientras que la segunda es un flujo integrado por lo que sus unidades son inversa de área por inversa de ángulo sólido por inversa de tiempo (i.e. $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$). La misma idea aplica a $\phi(\mathbf{x}, E)$ y a $\phi_g(\mathbf{x})$. \square

La idea de la discretización es re-escribir las ecuaciones de transporte y/o difusión en función de los flujos de grupo. Para fijar ideas, prestemos atención al término de absorción total de la ecuación de transporte $\Sigma_t \cdot \psi$, e integrémoslo entre E_g y E_{g-1} . Quiéramos que esta integral sea igual al producto entre el flujo ψ_g y el valor medio de la sección eficaz total en dicho grupo:

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE = \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega})$$

Está claro que para que esto sea posible, la sección eficaz total Σ_{tg} media en el grupo g debe ser

$$\Sigma_{tg}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE} \quad (2.3)$$

con lo que no hemos ganado nada ya que llegamos a una condición tautológica donde el parámetro que necesitamos para no necesitar la dependencia explícita del flujo con la energía depende justamente de dicha dependencia. Sin embargo, y es ésta una de las ideas centrales del cálculo y análisis de reactores, podemos suponer que el cálculo de celda es capaz de proveernos las secciones eficaz macroscópicas multigrupo para el reactor que estamos modelando de forma tal que, desde el punto de vista del cálculo

de núcleo, Σ_{tg} y todas las demás secciones eficaces son distribuciones conocidas del espacio \mathbf{x} .

Procediendo en forma análoga con la sección eficaz de fisión, tenemos que

$$\nu\Sigma_{fg}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \nu\Sigma_f(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE} \quad (2.4)$$

Para el caso del término de scattering, la sección eficaz de scattering desde el ángulo $\hat{\Omega}'$ hacia el ángulo $\hat{\Omega}$ y desde el grupo de energía g' hacia el grupo g es

$$\Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E'_{g'}}^{E'_{g'-1}} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') dE' dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E'_{g'}}^{E'_{g'-1}} \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') dE' dE} \quad (2.5)$$

Tomemos entonces el caso de medio multiplicativo con fuente de la sección 1.5.2 e integremos la ecuación de transporte (1.54) sobre la energía E en el grupo g , es decir en el intervalo $E_g < E < E_{g-1}$:

$$\begin{aligned} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \hat{\Omega} \cdot \text{grad} [\psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E)] dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{x}, E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE = \\ \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' dE \\ + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu\Sigma_f(\mathbf{x}, E') \cdot \psi(\mathbf{x}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE \end{aligned}$$

Utilizando la definición 2.1 y reemplazando las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5), obtenemos a las G ecuaciones de transporte multigrupo

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \text{grad} [\psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) = \\ \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \cdot \psi_{g'}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \\ + \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \nu\Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{g'}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' + s_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) \quad (2.6) \end{aligned}$$

donde hemos definido implícitamente

$$\chi_g = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) dE$$

$$s_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E) dE$$

Podemos generalizar la expansión en polinomios de Legendre del kernel de scattering multigrupo basándonos en la expansión doble diferencial introducida en la ecuación (1.6) como

$$\Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \Sigma_{s_{\ell g' \rightarrow g}}(\mathbf{x}) \cdot P_{\ell}(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \quad (2.7)$$

donde los coeficientes son

$$\Sigma_{s_{\ell g' \rightarrow g}}(\mathbf{x}) = 2\pi \int_{4\pi} \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \cdot P_{\ell}(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \quad (2.8)$$

Análogamente a la obtención de la ecuación de transporte multigrupo (2.6), podemos integrar la ecuación de difusión (1.55) sobre la energía en el intervalo $E_g < E < E_{g-1}$ para obtener la ecuación de difusión multigrupo:

$$-\text{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) =$$

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{0g' \rightarrow g}}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + s_{0g}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Matemáticamente, la aproximación multigrupo es equivalente a discretizar el dominio de la energía con un esquema de volúmenes finitos con la salvedad de que no hay operadores diferenciales con respecto a la variable E .

comentarios sobre el coeficiente de difusión

2.2. Discretización en ángulo

Para discretizar la dependencia espacial de la ecuación de transporte multigrupo (2.6) aplicamos el método de ordenadas discretas o S_N que también podemos ver como una mezcla de dos métodos tradicionales. Por un lado, un esquema de volúmenes finitos con la particularidad que los volúmenes de control pertenecen a la esfera unitaria y tienen ubicaciones y áreas particulares según sea el orden N de la aproximación. Y por otro lado un método de colocación con deltas de Dirac como pesos.

Comenzamos notando que la integral de cierta función escalar f que depende de la variable angular $\hat{\Omega}$ sobre todas las direcciones puede ser aproximada como 4π veces la suma de un conjunto de M pesos w_m normalizados tal que $\sum w_m = 1$ multiplicados por la función f evaluada en M direcciones $\hat{\Omega}_m$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{4\pi} f(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} &= \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} f(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \sum_{m=1}^M \frac{\int_{\Omega_m} f(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega}}{\int_{\Omega_m} d\hat{\Omega}} \cdot \int_{\Omega_m} d\hat{\Omega} \\
&= \sum_{m=1}^M \langle f(\hat{\Omega}) \rangle_m \cdot \Delta\Omega_m = 4\pi \sum_{m=1}^M w_m \cdot \langle f(\hat{\Omega}) \rangle_m \\
&\simeq 4\pi \sum_{m=1}^M w_m \cdot f(\hat{\Omega}_m) = 4\pi \sum_{m=1}^M w_m \cdot f_m
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde hemos notado que $\sum \Delta\Omega_m = 4\pi$ y denotamos con un subíndice m (;otro más!) la evaluación de la función f en $\hat{\Omega}_m$.

Definición 2.2. El flujo angular ψ_{mg} del grupo g en la ordenada discreta m es igual al flujo angular ψ_g del grupo g (definido en 2.1) evaluado en la dirección $\hat{\Omega}_m$:

$$\psi_{mg}(\mathbf{x}) = \psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}_m)$$

Esta vez ψ_{mg} sí tiene la mismas unidades que ψ_g . Notamos que que el flujo escalar ϕ_g del grupo g es aproximadamente igual a

$$\phi_g(\mathbf{x}) = \int_{4\pi} \psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \simeq 4\pi \sum_{m=1}^M w_m \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) \tag{2.11}$$

□

Tomemos primero la integral de la segunda sumatoria del miembro derecho de la ecuación (2.6), i.e. el término de fisión, por ser más sencilla de aproximar. En efecto, reemplacemos la integral por una sumatoria sobre M flujos discretos $\psi_{m'g'}$ evaluados en $\hat{\Omega}'$ y pesados con un cierto peso $w_{m'}$ asociado a cada una M direcciones, en principio arbitrarias:

$$\int_{4\pi} \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{g'}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \simeq 4\pi \cdot \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x})$$

Para evaluar el término de scattering hacemos lo mismo que para el término de fisión, teniendo en cuenta que la variable a discretizar es $\hat{\Omega}'$, que es sobre la cual integramos. Dejamos sin discretizar—por ahora—la variable $\hat{\Omega}$ para obtener esta vez

$$\int_{4\pi} \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \cdot \psi_{g'}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \simeq 4\pi \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}, \hat{\Omega}'_{m'} \rightarrow \hat{\Omega}) \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x})$$

Expandiendo la sección eficaz de scattering multigrupo en polinomios de Legendre utilizando la ecuación (2.7), tenemos una aproximación de la ecuación de transporte

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} \cdot \text{grad} [\psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) = \\
\sum_{g'=1}^G 4\pi \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \Sigma_{s_{\ell} g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_{\ell}(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\
+ \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_{g'=1}^G 4\pi \cdot \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) + s_g(\mathbf{x}, \hat{\Omega}) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Esta ecuación está discretizada en $\hat{\Omega}'$ con un esquema basado en volúmenes finitos sin operadores diferenciales sobre la variable discretizada, pero aun es continua en $\hat{\Omega}$. Para discretizar esta variable, requerimos que la ecuación (2.12) se cumpla para las M direcciones—aún arbitrarias. Es decir, la ecuación de transporte multigrupo discretizada en ángulo según el método de ordenadas discretas S_N es el sistema de $M \times G$ ecuaciones

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \\
\sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot \Sigma_{s_{\ell} g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_{\ell}(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\
+ \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) + s_{mg}(\mathbf{x}) \quad (2.13)
\end{aligned}$$

para $g = 1, \dots, G$ y $m = 1, \dots, M$. El hecho de requerir que la ecuación continua (2.12) se satisfaga en un número finito de puntos discretos es equivalente a aplicar un esquema de diferencias finitas. Tal como en el caso de la aproximación multigrupo, y la discretización sobre $\hat{\Omega}'$, no hay operadores diferenciales actuando sobre la variable $\hat{\Omega}$.

Si el scattering es isotrópico, podemos simplificar el término de scattering en la ecuación (2.13) para obtener

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \Sigma_{s_0 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\
+ \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) + s_{mg}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Si el scattering es linealmente anisotrópico, debemos agregar el término correspondiente a $\ell = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \\
\sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\Sigma_{s_0 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) + 3 \cdot \Sigma_{s_1 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \left(\hat{\Omega}'_{m'} \cdot \hat{\Omega}_m \right) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\
+ \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{\Sigma_{fg'}}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) + s_{mg}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Recordando la ecuación (1.31)

$$\begin{aligned}
q_s(\mathbf{x}, \hat{\Omega}, E, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_0}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \phi(\mathbf{x}, E', t) dE' \\
+ \frac{3}{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_{s_1}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}, E', t) \cdot \hat{\Omega} \right) dE' \\
+ \sum_{\ell=2}^\infty \int_0^\infty \left[\Sigma_{s_\ell}(\mathbf{x}, E' \rightarrow E) \sum_{m=-\ell}^\ell \Psi_\ell^m(\mathbf{x}, E', t) \cdot Y_\ell^m(\hat{\Omega}) \right] dE' \quad (1.31)
\end{aligned}$$

y en virtud de la ecuación (2.11) también podemos escribir el término de scattering $q_s mg$ en función del flujo escalar ϕ y de la corriente \mathbf{J} como

$$q_s mg = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_0 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + 3 \cdot \Sigma_{s_1 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{J}_{g'}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\Omega}_m \right) \right]$$

ya la ecuación de transporte multigrupo en ordenadas discretas para scattering linealmente anisotrópico en función de ambos flujos ϕ y ψ y de la corriente \mathbf{J} como

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \\
\sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M \Sigma_{s_0 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + 3 \cdot \Sigma_{s_1 g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{J}_{g'}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\Omega}_m \right) \\
+ \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \nu_{\Sigma_{fg'}}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + s_{mg}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

2.2.1. Conjuntos de cuadraturas

Para completar el método de las ordenadas discretas debemos especificar M pares de direcciones y pesos $(\hat{\Omega}_m, w_m)$ para $m = 1, \dots, M$. Las direcciones $\hat{\Omega}_m = [\hat{\Omega}_{mx} \hat{\Omega}_{my} \hat{\Omega}_{mz}]^T$ deben ser versores unitarios tales que

$$\hat{\Omega}_{mx}^2 + \hat{\Omega}_{my}^2 + \hat{\Omega}_{mz}^2 = 1 \quad (2.14)$$

y los pesos w_m deben estar normalizados a uno, es decir

$$\sum_{m=1}^M w_m = 1 \quad (2.15)$$

Existen varias maneras de elegir los M pares de forma tal de cumplir estas dos condiciones. En este trabajo utilizamos la cuadratura de nivel simétrico [41] o de simetría completa [43] en la que las direcciones son simétricas por octante. En un espacio de tres dimensiones, el orden N de la aproximación S_N se relaciona con la cantidad de direcciones M como

$$M = N \cdot (N + 2)$$

En este caso, en cada octante tomamos los cosenos directores $\hat{\Omega}_{mx}$, $\hat{\Omega}_{my}$ y $\hat{\Omega}_{mz}$ de un conjunto de $N/2$ valores positivos y los permutamos de todas las maneras posibles para obtener $N(N + 2)/8$ combinaciones en el primer octante para luego reflejar estas direcciones hasta completar los ocho octantes. De esta forma las M direcciones son simétricas con respecto a rotaciones de noventa y ciento ochenta grados sobre cualesquiera de los ejes x , y ó z .

Debido a estas restricciones de simetría, no todos los $N/2$ posibles cosenos directores son independientes. De hecho, en el caso general sólo podemos elegir un único valor. En efecto, sean $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{N/2}$ los posibles cosenos directores del conjunto. Supongamos que $\hat{\Omega}_{mx} = \mu_i$, $\hat{\Omega}_{my} = \mu_j$ y $\hat{\Omega}_{mz} = \mu_k$. Entonces

$$\mu_i^2 + \mu_j^2 + \mu_k^2 = 1 \quad (2.16)$$

Tomemos ahora otra dirección diferente m' pero manteniendo el primer componente $\hat{\Omega}_{m'x} = \mu_i$ y haciendo $\hat{\Omega}_{m'y} = \mu_{j+1}$. Para poder satisfacer la condición de magnitud unitaria y debido a que $\mu_{j+1} > \mu_j$ entonces $\hat{\Omega}_{m'z} = \mu_{k-1}$ ya que $\mu_{k-1} < \mu_k$. Entonces

$$\mu_i^2 + \mu_{j+1}^2 + \mu_{k-1}^2 = 1 \quad (2.17)$$

De (2.16) y (2.17) obtenemos

$$\mu_{j+1}^2 - \mu_j^2 = \mu_k^2 - \mu_{k-1}^2$$

Como esta ecuación debe cumplirse para todo j y para todo k , entonces debe ser

$$\mu_i^2 = \mu_{i-1} + C$$

para todo $1 < i \leq N/2$, con C una constante a determinar. Luego

$$\mu_i^2 = \mu_1 + C(i - 1)$$

Si tomamos $\hat{\Omega}_{mx} = \hat{\Omega}_{my} = \mu_1$ y $\hat{\Omega}_{mz} = \mu_{N/2}$, por la condición de magnitud unitaria debe ser $2\mu_1^2 + \mu_{N/2}^2 = 1$ por lo que podemos determinar la constante C como

$$C = \frac{2(1 - 3\mu_1^2)}{N - 2}$$

Finalmente, una vez seleccionado el coseno director μ_1 , podemos calcular el resto de los $N/2 - 1$ valores como

	μ_1	m	$8 \cdot w_i$
S_4	0.3500212	1	1/3
S_6	0.2666355	1	0.1761263
		2	0.1572071
S_8	0.2182179	1	0.1209877
		2	0.0907407
		3	0.0925926

Tabla 2.1: Set de cuadraturas para S_N de nivel simétrico. Para cada N mostramos el primer coseno director (el resto se calcula con la ecuación (2.18)) y ocho veces el peso asociado a cada permutación, de forma tal que se puedan utilizar los mismos valores para dos dimensiones dividiendo por cuatro en lugar de por ocho (ver sección 2.2.2). Datos tomados de la referencia [41, Tabla 4-1 pág. 162].

	m	$\hat{\Omega}_{mx}$	$\hat{\Omega}_{my}$	$\hat{\Omega}_{mz}$	i
S_4	1	μ_1	μ_1	μ_2	1
	2	μ_1	μ_2	μ_1	1
	3	μ_2	μ_1	μ_1	1
S_6	1	μ_1	μ_1	μ_3	1
	2	μ_1	μ_2	μ_2	2
	3	μ_2	μ_1	μ_2	2
	4	μ_2	μ_2	μ_1	2
	5	μ_3	μ_1	μ_1	1
	6	μ_1	μ_3	μ_1	1

Tabla 2.2: Combinaciones de cosenos directores positivos que forman las direcciones en el primer cuadrante ($m = 1, \dots, N(N+2)/8$) para S_4 y S_2 . El índice i indica el peso w_i de la tabla 2.1 aplicable a la dirección m .

$$\mu_i = \sqrt{\mu_1^2 + (2 - 6\mu_1^2) \cdot \frac{(i-1)}{N-2}} \quad (2.18)$$

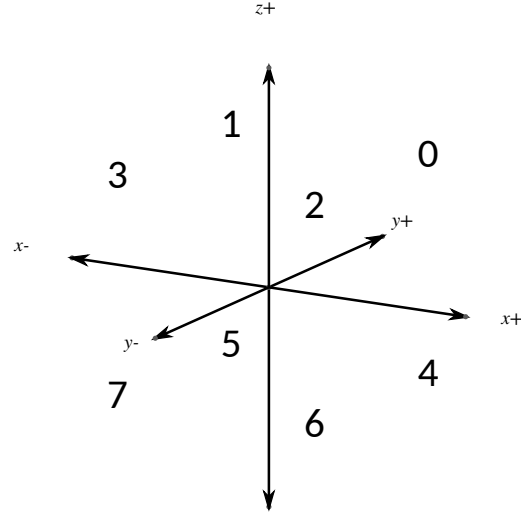
para $i = 2, \dots, N/2$.

Las condiciones de simetría requieren que los pesos w_m y $w_{m'}$ asociados a dos direcciones $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_{m'}$ cuyos cosenos directores son permutaciones entre sí deben ser iguales. Además es deseable que los pesos w_m sean tales que la cuadratura ilustrada en la ecuación (2.10) sea lo más aproximada posible. El cálculo detallado de los pesos está fuera del alcance de este trabajo y nos limitamos a reportar los valores utilizados por el código computacional desarrollado para esta tesis y descrito en el capítulo ??.

Para obtener entonces un conjunto de cuadraturas aplicable a S_N de nivel simétrico, para cada N primero seleccionamos un valor apropiado de $\mu_1 > 0$. Para S_2 el único valor posible es $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$. Para otros valores de N hay varias opciones. En la tabla 2.1 mostramos los valores de μ_1 para S_4 , S_6 y S_8 para la cuadratura de nivel simétrico y en la tabla 2.2 indicamos las combinaciones que dan las $N(N+2)/8$ direcciones en el primer octante. Para extender estas direcciones a los demás cuadrantes, notamos que si

asignamos un índice n a cada octantes de la siguiente manera:

0. $x > 0, y > 0, z > 0$
1. $x < 0, y > 0, z > 0$
2. $x > 0, y < 0, z > 0$
3. $x < 0, y < 0, z > 0$
4. $x > 0, y > 0, z < 0$
5. $x < 0, y > 0, z < 0$
6. $x > 0, y < 0, z < 0$
7. $x < 0, y < 0, z < 0$



Notamos que el desarrollo binario del índice n tiene tres bits y éstos indican si hubo un cambio de signo o no en cada uno de los tres ejes con respecto al primer cuadrante, que corresponde a $n = 0$. De esta manera, podemos generar las direcciones $\hat{\Omega}_m$ para $m = N(N + 2)/8 + 1, N(N + 2)$ a partir de las direcciones del primer cuadrante $\hat{\Omega}_j$ para $j = 1, N(N + 2)/8$ con el algoritmo de la figura 2.2, donde el símbolo ampersand & indica el operador binario AND y el signo de pregunta ? el operador ternario de decisión. La figura 2.3 muestra el detalle de las latitudes y longitudes en la esfera unitaria del primer cuadrante y el conjunto resultante de las $N(N + 2)$ direcciones para S_2, S_4 y S_6 que resultan de aplicar este desarrollo.

```

for  $n = 1, \dots, 7$  do
  for  $j = 1, \dots, N(N + 2)/8$  do
     $\Omega_{n \cdot N(N+2)/8+j, x} = ((n \& 1) ? (-1) : (+1)) \cdot \Omega_{j, x}$ 
     $\Omega_{n \cdot N(N+2)/8+j, y} = ((n \& 2) ? (-1) : (+1)) \cdot \Omega_{j, y}$ 
     $\Omega_{n \cdot N(N+2)/8+j, z} = ((n \& 4) ? (-1) : (+1)) \cdot \Omega_{j, z}$ 
     $w_{n \cdot N(N+2)/8+j} = w_j$ 

```

Figura 2.2: Extensión del primer octante a los otros siete

2.2.2. Dos dimensiones

El caso bidimensional en realidad es un problema en tres dimensiones pero sin dependencia de los parámetros del problema en una de las variables espaciales, digamos z . De esta manera, el dominio U de la geometría está definido sólo sobre el plano x - y y las direcciones de vuelo $\hat{\Omega}$ de los neutrones son simétricas con respecto a este plano ya que por cada dirección $\hat{\Omega} = [\hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y \hat{\Omega}_z]$ con $\hat{\Omega}_z > 0$ hay una dirección simétrica $\hat{\Omega}' = [\hat{\Omega}_x \hat{\Omega}_y - \hat{\Omega}_z]$ (figura 2.4). Luego, las posibles direcciones se reducen a la mitad, es decir $N(N + 2)/2$.

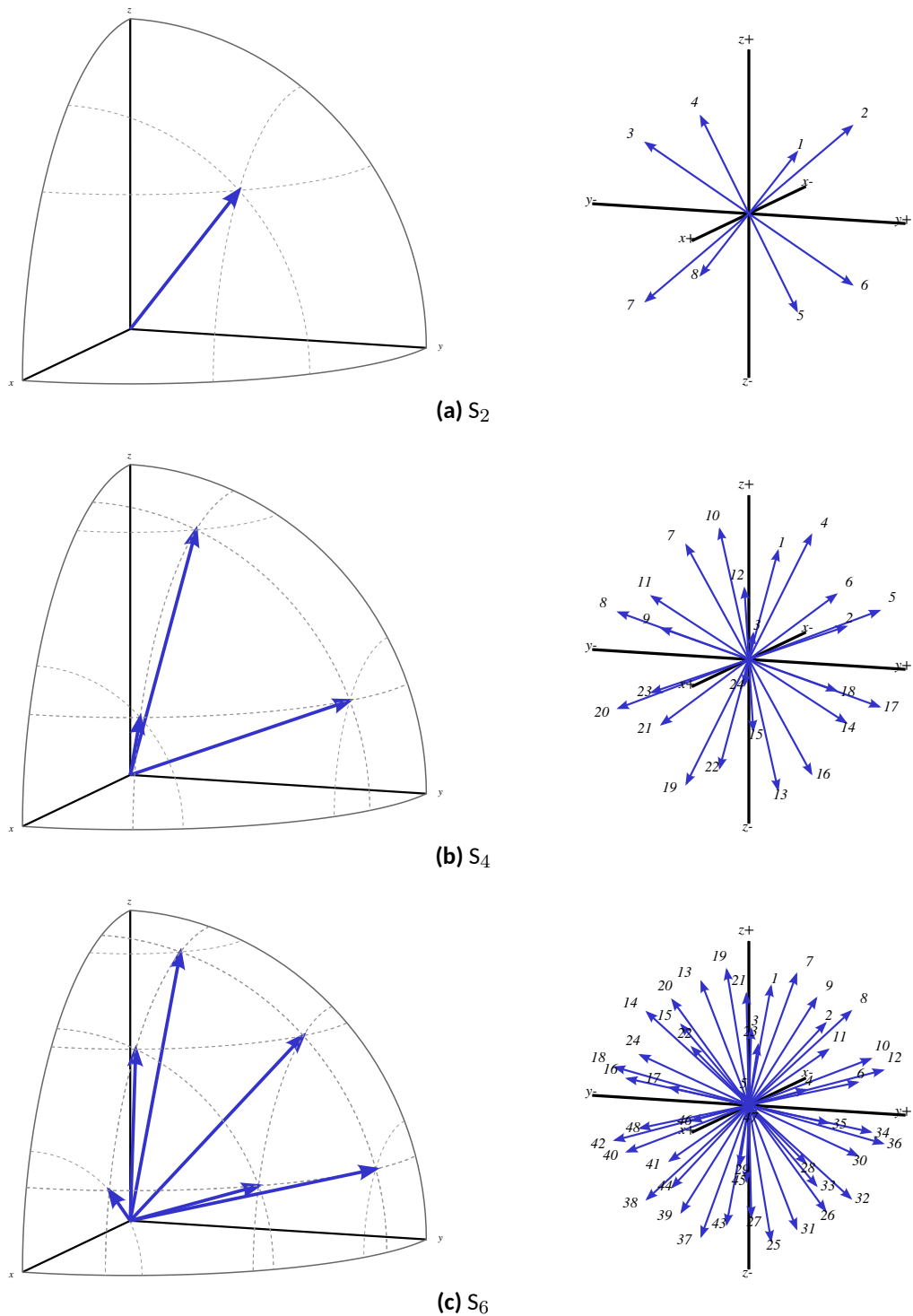


Figura 2.3: Latitudes y longitudes en el primer cuadrante (izquierda) y conjunto de las $N(N + 2)$ direcciones de la cuadratura de nivel simétrico para S_2 , S_4 y S_6 generadas a partir de un único coseno director positivo μ_1 de la tabla 2.1, aplicando con la ecuación (2.18) para obtener el resto de los cosenos positivos, permutándolos según la tabla 2.2 y extendiéndolos al resto de los octantes con el algoritmo 2.2. Las figuras son reproducciones tridimensionales realizadas con la herramienta Gmsh a partir de la información calculada y que realmente utiliza milonga (capítulo ??) para realizar cálculos de transporte con el método de las ordenadas discretas.

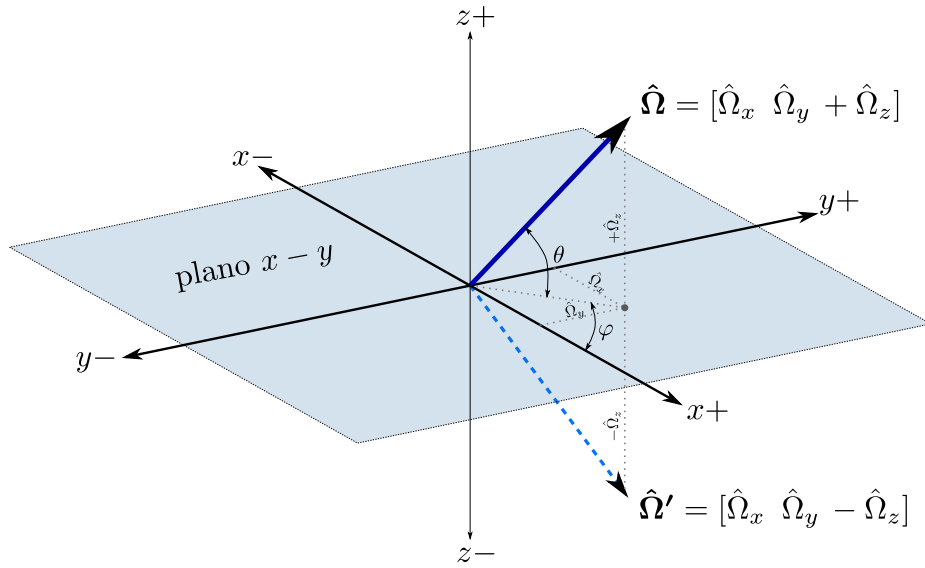


Figura 2.4: Simetría con respecto al plano $x-y$ en un problema bi-dimensional. Por cada dirección $\hat{\Omega}$ con componente z positiva (línea llena) hay una dirección $\hat{\Omega}'$ simétrica e igualmente posible con $\hat{\Omega}_z < 0$ (línea de trazos).

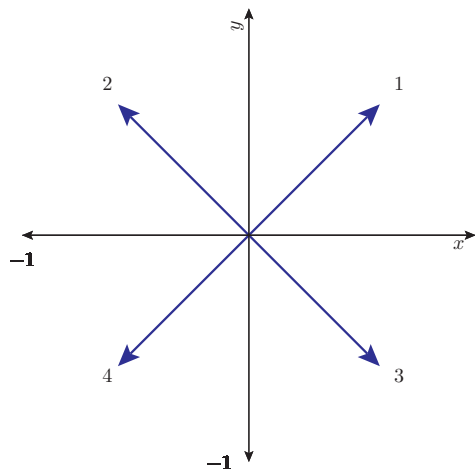
Como la derivada espacial del flujo angular con respecto a z es cero entonces por un lado podemos escribir el término de transporte en la ecuación (2.13) como

$$\hat{\Omega}_{mx} \cdot \frac{\partial \psi_{mg}(x, y)}{\partial x} + \hat{\Omega}_{my} \cdot \frac{\partial \psi_{mg}(x, y)}{\partial y}$$

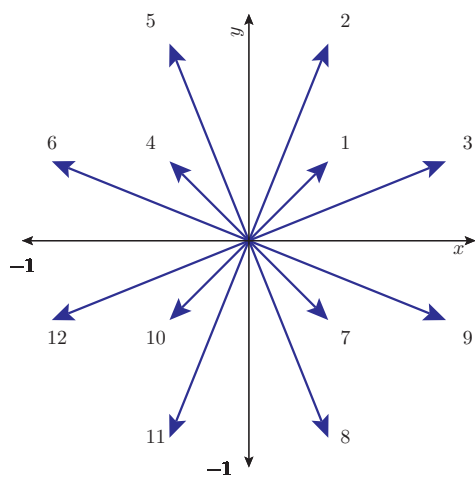
donde ahora $m = 1, \dots, M = N(N + 2)/2$. La componente Ω_{mz} no aparece explícitamente en las ecuaciones pero sí lo hace implícitamente en la elección de las direcciones, ya que siguen siendo válidas las ecuaciones (2.14) y (2.15). Esto implica que en cada cuadrante tenemos nuevamente $N(N + 2)/8$ direcciones posibles, que luego debemos rotar para obtener las M direcciones en los cuatro cuadrantes. Dado que por un lado los pesos deben estar normalizados a uno y por otro para cada dirección con $\hat{\Omega}_z > 0$ hay otra dirección simétrica con $\hat{\Omega}_z < 0$, entonces el conjunto de cuadraturas de nivel simétrico para el primer cuadrante de un dominio de dos dimensiones consiste en las mismas $N(N + 2)/8$ direcciones correspondientes a tres dimensiones definidas en las tablas 2.1 y 2.2, cada una con el doble de peso. En forma equivalente, podemos concluir que las tablas 2.1 y 2.2 valen para dos dimensiones con la salvedad de que el título de la tercera columna de la tabla 2.1 debe ser $4 \cdot w_i$ en lugar de $8 \cdot w_i$ y debemos reemplazar la palabra “octante” por “cuadrante.” En la figura 2.5 mostramos las direcciones para la cuadratura de nivel simétrico utilizado en este trabajo para problemas de dos dimensiones espaciales.

2.2.3. Una dimensión

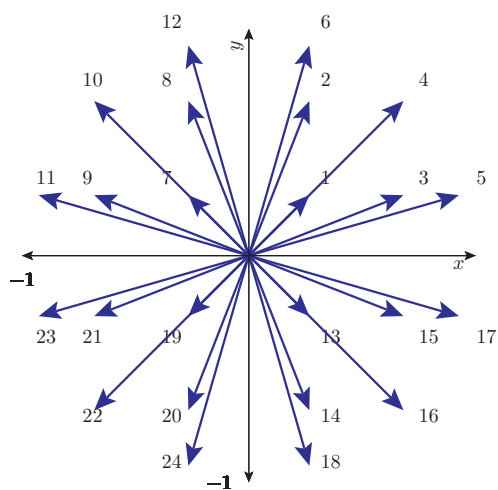
El caso unidimensional es radicalmente diferente a los otros dos. Si tomamos al eje x como la dirección de dependencia espacial, las posibles direcciones de viaje pueden depender sólo del ángulo cenital θ ya que la simetría implica que todas las posibles



(a) S_2



(b) S_4



(c) S_6

Figura 2.5: Direcciones para el conjunto de cuadraturas de nivel simétrico en dos dimensiones.

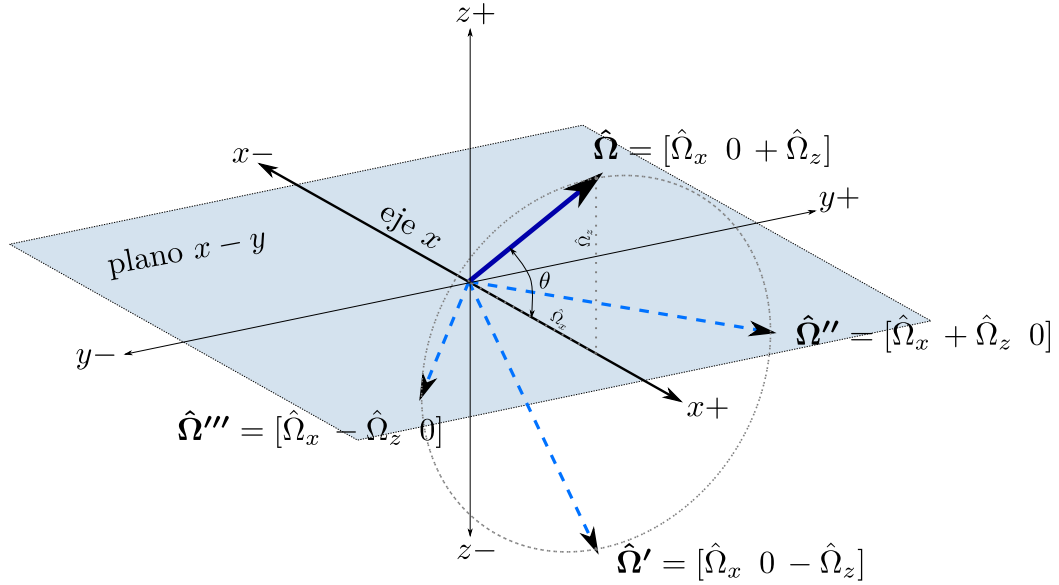


Figura 2.6: Simetría con respecto al eje x en un problema unidimensional. Por cada dirección $\hat{\Omega}$ (línea llena) hay infinitas direcciones simétricas e igualmente posibles apuntando en la dirección del círculo subtendido por el ángulo $\theta = \arctan(\hat{\Omega}_z/\hat{\Omega}_x)$, representadas por las tres direcciones primadas (líneas de trazos).

direcciones azimutales con respecto al eje x son igualmente posibles.

El término de transporte de la ecuación (2.13) es entonces

$$\hat{\Omega}_{mx} \cdot \frac{\partial \psi_{mg}(x)}{\partial x}$$

El hecho de que no una sino dos componentes de $\hat{\Omega}$ no aparezcan explícitamente relaja mucho más las condiciones para la elección de las $M = N$ direcciones. En efecto, la única condición es simetría completa entre el semieje $x > 0$ y el semieje $x < 0$, lo que nos deja con $N/2$ direcciones en cada semieje, todas ellas libres e independientes.

Para seleccionar las $N/2$ direcciones y sus pesos asociados, notamos que en una dimensión

$$\int_{4\pi} f(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = 2\pi \int_{-1}^1 f(\hat{\Omega}_x) d\hat{\Omega}_x \simeq 2\pi \sum_{m=1}^N \omega_m \cdot f_m = 4\pi \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2} \cdot f_m = 4\pi \sum_{m=1}^N w_m \cdot f_m \quad (2.19)$$

Si los puntos $\hat{\Omega}_{xm}$ y los pesos $\omega_m = 2 \cdot w_m$ son los asociados a la integración de Gauss y $f(\hat{\Omega}_x)$ es un polinomio de orden $2N - 1$ o menos, entonces la integración es exacta (ver apéndice ??) y la ecuación (2.19) deja de ser una aproximación para transformarse en una igualdad. En la tabla 2.3 mostramos el conjunto de cuadraturas utilizadas para una dimensión, que contiene esencialmente las abscisas y los pesos de la cuadratura de Gauss.

	m	$\hat{\Omega}_{mx}$	$\omega_m = 2 \cdot w_m$
S ₂	1	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
S ₄	1	$\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	0.6521451549
	2	$\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	0.3478548451
S ₆	1	0.2386191860	0.4679139346
	2	0.6612093864	0.3607615730
	3	0.9324695142	0.1713244924
S ₈	1	0.1834346424	0.3626837834
	2	0.5255324099	0.5255324099
	3	0.7966664774	0.2223810344
	4	0.9602898564	0.1012285363

Tabla 2.3: Conjuntos de cuadratura para problemas unidimensionales. Las direcciones $\hat{\Omega}_{mx}$ coinciden con las abscisas de la cuadratura de Gauss. Los pesos w_m de ordenadas discretas son la mitad de los pesos ω_m de la cuadratura de Gauss. Las direcciones $m = N/2 + 1, \dots, N$ no se muestran pero se obtienen como $\hat{\Omega}_{N/2+m,x} = -\hat{\Omega}_{m,x}$ y $w_{N/2+m} = w_m$.

2.3. Formulaciones fuertes, integrales y débiles

Antes de comenzar a discutir las discretizaciones espaciales tanto de la ecuación de transporte multigrupo con ordenadas discretas como de la ecuación de difusión multigrupo, introducimos las ideas de formulaciones fuertes, integrales y débiles sobre las que se basan los esquemas de discretización numérica basados en diferencias finitas, en volúmenes finitos y en elementos finitos respectivamente. De esta forma, además, resumimos las ecuaciones en derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales que debemos resolver para obtener la distribución de flujo neutrónico de estado estacionario en un reactor nuclear.

2.3.1. Formulaciones fuertes

La formulación fuerte de un problema de derivadas parciales consiste en escribir directamente las ecuaciones diferenciales y sus condiciones de contorno. Más específicamente:

Definición 2.3. Decimos que un problema en derivadas parciales está escrito en su formulación fuerte cuando en el sistema de ecuaciones diferenciales y sus condiciones de contorno el orden de las derivadas es igual al orden del problema. Es decir, en la formulación fuerte no hay operadores integrales que no son esenciales para la definición del problema. \square

Hasta este momento, en esta tesis hemos escrito ecuaciones diferenciales que son la formulación fuerte tanto del problema de transporte como del problema de difusión de neutrones. Si bien matemáticamente el desarrollo fue lógico y correcto, hay salvedades

que tenemos que notar. Por ejemplo, el término de fugas de la ecuación de difusión de neutrones multigrupo (2.9) es

$$-\text{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right]$$

Si el coeficiente de difusión D_g presenta una discontinuidad en \mathbf{x} , por ejemplo debido a que hay una interfaz entre dos materiales diferentes, entonces este término no está definido y no puede ser evaluado. Este es uno de los varios inconvenientes que tiene esta formulación a la hora de utilizarla para resolver numéricamente los problemas planteados en esta tesis.

Ordenadas discretas

La formulación fuerte del problema de transporte de neutrones discretizado en energía mediante el método multigrupo y en ángulo mediante ordenadas discretas es la ecuación diferencial (2.13)

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \\ \sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \cdot \Sigma_{s\ell g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_\ell(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\ + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) + s_{mg}(\mathbf{x}) \quad (2.13) \end{aligned}$$

sobre el dominio espacial $U \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) para el grupo de energía $g = 1, \dots, G$ y para la dirección $m = 1, \dots, M$ con las condiciones de contorno de Dirichlet discutidas en la sección 1.3.5:

$$\begin{cases} \psi_{mg}(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_V \wedge \hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0 \\ \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \psi_{mg'} & / \quad \hat{\Omega}_{g'} = \hat{\Omega}_m - 2 \left(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \hat{\mathbf{n}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_M \wedge \hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0 \\ \psi_{mg}(\mathbf{x}) = f_{mg}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_V \cup \Gamma_M \wedge \hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Si el término de fuentes independientes s_{mg} en la ecuación (2.13) es nulo, entonces las condiciones de contorno deben ser homogéneas, es decir $\Gamma_V \cup \Gamma_M = \partial U$ (recordar las deficiones 1.9 y 1.10). Además debemos incluir el factor de multiplicación efectivo k_{eff} dividiendo al término de fisiones de la ecuación (2.13):

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) = \\ \sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \cdot \Sigma_{s\ell g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_\ell(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \\ + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) \quad (2.21) \end{aligned}$$

Difusión

La formulación fuerte del problema de difusión de neutrones discretizado en energía mediante el método multigrupo es la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}\left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad}[\phi_g(\mathbf{x})]\right] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) = \\
 \sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{0g'} \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + s_{0g}(\mathbf{x}) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

sobre el dominio espacial $U \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) para el grupo de energía $g = 1, \dots, G$ con las condiciones de contorno discutidas en la sección 1.4.5:

$$\begin{cases}
 \phi_g(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\
 \frac{\partial \phi_g}{\partial n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_M \\
 \phi_g(\mathbf{x}) + 2 \cdot D_g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \phi_g}{\partial n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_V \\
 a_g(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) + b_g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \phi_g}{\partial n} = c_g(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_V
 \end{cases} \quad (2.22)$$

Nuevamente, si el término de fuentes independientes s_{0g} es nulo entonces las condiciones de contorno deben ser homogéneas, i.e. $\Gamma_N \cup \Gamma_M \cup \Gamma_V = \partial U$ (definiciones 1.12, 1.13 y 1.14). Además debemos dividir el término de fuentes por el factor de multiplicación efectivo k_{eff} :

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}\left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad}[\phi_g(\mathbf{x})]\right] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) = \\
 \sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{0g'} \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

2.3.2. Formulaciones integrales

Dado que las ecuaciones de la sección anterior se cumplen punto a punto, podemos operar lógicamente y matemáticamente sobre ellas para obtener otras formulaciones más adecuadas para ser atacadas por esquemas de discretización espacial. Las formulaciones integrales son la base de los métodos basados en volúmenes finitos y consisten en integrar las ecuaciones sobre volúmenes de control.

Ordenadas discretas

Tomemos la ecuación (2.13) e integrémosla en un cierto volumen $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
& \int_V \hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x} + \int_V \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \\
& \int_V \sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \cdot \Sigma_{s_\ell g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_\ell(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\
& \quad + \int_V \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{\Sigma_{fg'}}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \int_V s_{mg}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}
\end{aligned}$$

Dado que $\hat{\Omega}_m$ no depende de \mathbf{x} , podemos evaluar el primer término como

$$\begin{aligned}
\int_V \hat{\Omega}_m \cdot \text{grad} [\psi_{mg}(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x} &= \int_V \text{div} [\hat{\Omega}_m \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x} \\
&= \int_S [\hat{\Omega}_m \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x})] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d^{n-1} \mathbf{x} \\
&= \int_S \psi_{mg}(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})] d^{n-1} \mathbf{x}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de la divergencia, S es la superficie del volumen V y $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie S en el punto \mathbf{x} orientado hacia la dirección exterior al volumen V . Es justamente esta operación, que reduce en uno el orden del operador diferencia, la que hace que la formulación integral sea de utilidad para la discretización espacial. De hecho en el caso de la ecuación de transporte, este operador diferencial se transforma en algebraico. En cualquier caso, la formulación integral de la ecuación de transporte con ordenadas discretas es

$$\begin{aligned}
& \int_S \psi_{mg}(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})] d^{n-1} \mathbf{x} + \int_V \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{mg}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \\
& \sum_{g'=1}^G \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \int_V \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \cdot \Sigma_{s_\ell g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot P_\ell(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}'_{m'}) \right] \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\
& \quad + \chi_g \sum_{g'=1}^G \int_V \nu_{\Sigma_{fg'}}(\mathbf{x}) \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot \psi_{m'g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \int_V s_{mg}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

sobre el dominio espacial $U \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) para el grupo de energía $g = 1, \dots, G$ con las mismas condiciones de contorno de la formulación fuerte de la ecuación (2.20). Debemos notar que un conjunto de funciones solución ψ_{mg} que satisfaga la formulación débil entonces también va a satisfacer la formulación integral. Sin embargo, podemos encontrar otro conjunto de funciones solución ψ'_{mg} que satisfaga la formulación integral pero que no satisfaga la formulación débil. De hecho, justamente las soluciones encontradas con el método de volúmenes finitos satisfacen la formulación integral pero no la formulación débil para volúmenes de control V de tamaño finito.

Difusión

Procediendo en forma análoga, integramos la formulación fuerte (2.9) sobre un volumen de control $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$:

$$- \int_V \operatorname{div} [D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})]] d^n \mathbf{x} + \int_V \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \\ \int_V \sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_0g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \int_V \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \int_V s_{0g}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

sobre el dominio espacial $U \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) para el grupo de energía $g = 1, \dots, G$. Aplicando nuevamente el teorema de la divergencia al primer término, tenemos

$$\int_V \operatorname{div} [D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})]] d^n \mathbf{x} = \int_S D_g(\mathbf{x}) \cdot [\operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})] d^{n-1} \mathbf{x}$$

donde nuevamente S es la superficie del volumen V y $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal exterior a la superficie S . De esta manera hemos reducido el orden de la ecuación de dos a uno para obtener la formulación integral como

$$- \int_S D_g(\mathbf{x}) \cdot [\operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})] d^{n-1} \mathbf{x} + \int_V \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \\ \sum_{g'=1}^G \int_V \Sigma_{s_0g' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \chi_g \sum_{g'=1}^G \int_V \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} + \int_V s_{0g}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.25)$$

con las condiciones de contorno descritas en la ecuación (2.22).

2.3.3. Formulaciones débiles

Ordenadas discretas

Difusión

2.4. Discretización espacial

El objetivo de la discretización espacial es obtener a partir de ecuaciones que sólo dependen de la coordenada espacial \mathbf{x} un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas sean los valores que toma el flujo (ψ angular para transporte y escalar ϕ para difusión) en ciertos puntos del espacio.

Al discretizar el dominio espacial utilizando algún esquema numérico, en esencia lo que hacemos es representar la dependencia espacial de cada uno de los flujos $\phi_g(\mathbf{x})$ mediante un conjunto finito de pares de valores $[\mathbf{x}_i, \phi_g^i]$ para $i = 1, \dots, I$ sobre una malla de tamaño I . El problema central de la discretización de la ecuación de difusión de neutrones multigrupo—y por cierto de este trabajo—es entonces encontrar entonces dos matrices R y F de tamaño $IG \times IG$ tales que

$$R \cdot \hat{\phi} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \cdot F \cdot \hat{\phi} \quad (2.26)$$

donde el vector de incógnitas discretas es

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^1 \\ \hat{\phi}_2^1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_G^1 \\ \hat{\phi}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_G^2 \\ \hat{\phi}_1^3 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_G^I \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

A lo largo del trabajo denotamos con el sombrero $\hat{}$ los valores asociados a una celda en volúmenes finitos y a un nodo elementos finitos. El subíndice indica el grupo de energía $g = 1, \dots, G$ y el supraíndice el número global de incógnita ($i = 1, \dots, I$ para volúmenes finitos y $k = 1, \dots, K$ para elementos finitos).

Es de esperar¹ que esquemas numéricos consistentes, convergentes y estables las tres propiedades del problema de autovalores continuo discutidas en la sección ?? se trasladen al problema discreto. Para tamaños de problema IG de interés—del orden de centenas de miles de incógnitas—es prohibitivo trabajar con el problema de autovalores estándar dado por la ecuación (??) ya que no sólo involucra el cálculo de la inversa de una matriz sino que tanto R como F son ralas, mientras que ni R^{-1} ni $R^{-1}F$ lo son. Por lo tanto, la resolución del problema estacionario de difusión de neutrones implica el cálculo del autovalor—y su correspondiente autovector—de menor valor absoluto utilizando la ecuación (2.26), o bien el autovalor—y su correspondiente autovector—de mayor valor absoluto de la ecuación

$$F \cdot \hat{\phi} = k_{\text{eff}} \cdot R \cdot \hat{\phi} \quad (2.28)$$

En el capítulo ?? utilizamos un esquema basado en volúmenes finitos para encontrar R y F a partir de \mathcal{R} y \mathcal{F} , mientras en que el capítulo ?? hacemos lo propio aplicando el método de elementos finitos. Dependiendo de las características de las matrices involucradas y del método numérico utilizado para obtener la solución, en ciertos casos es conveniente utilizar la formulación dada por la ecuación (2.26) y en otros la dada por la ecuación (2.28). La discusión y análisis de la forma de calcular k_{eff} y ϕ una vez obtenidas las matrices R y F están fuera del alcance de este trabajo y se da como referencia [41, 39, 42]. Sin embargo, es propicio notar lo que sigue.

Según la documentación de la biblioteca SLEPc—que es la utilizada por el código milonga para resolver el problema de autovalores generalizados—todos los eigensolvers provistos son de naturaleza iterativa, lo que quiere decir que (usualmente) las

¹Me falta una demostración rigurosa de esta afirmación.

soluciones mejoran en cada paso hasta que son lo suficientemente exactas como para considerarse convergidas. Esta condición de convergencia se define a través de una tolerancia sobre la norma de algún residuo.

El residuo más sencillo es el absoluto, que obtenemos restando los dos miembros de la ecuación (2.26). Dado que en el paso n ni el autovalor $1/k_{\text{eff}}^{(n)}$ ni el autovector $\hat{\phi}^{(n)}$ son iguales a la solución exacta, esta diferencia no es cero sino que es igual a un vector $\mathbf{r}^{(n)}$ que llamamos residuo absoluto

$$\mathbf{r}^{(n)} = \left[R - \frac{1}{k_{\text{eff}}^{(n)}} \cdot F \right] \cdot \hat{\phi}^{(n)}$$

La norma de este vector depende del tamaño de las matrices R y F ya que mientras más grandes sean éstas, más elementos va a tener $\mathbf{r}^{(n)}$. Es decir, si bien al aumentar la nodalización es de esperar que cada elemento del residuo absoluto sea más pequeño, hay más elementos en el residuo y su norma puede aumentar. Es por ello que no es una buena idea definir el criterio de convergencia de la solución del problema de autovalores en función de $\|\mathbf{r}^{(n)}\|$. Una medida apropiada para definir el criterio de convergencia sería calcular la integral en el dominio del problema de la ecuación de difusión multi-grupo (??)

$$\int_U \left\{ \text{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} \left[\tilde{\phi}_g^{(n)}(\mathbf{x}) \right] \right] - \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\phi}_g^{(n)}(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\phi}_{g'}^{(n)}(\mathbf{x}) + \chi(g) \sum_{g'=1}^G \frac{\nu \Sigma_f(\mathbf{x}, g')}{k_{\text{eff}}} \cdot \tilde{\phi}_{g'}^{(n)}(\mathbf{x}) \right\} d^D \mathbf{x}$$

donde $\tilde{\phi}_g^{(n)}(\mathbf{x})$ es una función continua definida a partir de la solución numérica discreta calculada en el paso p . El valor absoluto de esta integral debería ser independiente del tamaño de la malla espacial. Sin embargo, el cálculo de esta integral es muy demandante, y la evaluación de la condición de convergencia sería computacionalmente muy cara. El código milonga entonces utiliza como medida para comparar contra la tolerancia de convergencia el residuo relativo a las normas de las matrices, definido como

$$\delta^{(n)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(n)}\|}{\|R\| + 1/k_{\text{eff}} \cdot \|F\|}$$

que es fácil de evaluar a partir de los estados internos de la biblioteca SLEPc y que además no es tan dependiente de la malla como la normal vector absoluto $\|\mathbf{r}^{(n)}\|$ ya que tanto numerador como denominador varían con la cantidad de incógnitas de una forma más o menos similar. De esta forma, consideramos la solución del problema de autovectores como convergido si para algún paso p se cumple que

$$\delta^{(n)} < \epsilon$$

para alguna tolerancia ϵ prefijada, del orden de 10^{-8} .

Quedan fuera del alcance de este trabajo otros temas computacionales de vital importancia, tales como la lectura e interpretación de la malla, la detección y resolución de volúmenes vecinos, la lectura de las distribuciones espaciales de secciones eficaces—que en general podrían ser dadas por expresiones algebraicas en función de x , y y z o interpoladas a partir de datos discretos, eventualmente provenientes de otros códigos de cálculo en esquemas acoplados—la forma de almacenar matrices ralas de tamaños de orden $10^6 \times 10^6$, los métodos de integración numérica espacial y la evaluación y presentación de los resultados. Todos estos aspectos son tenidos en cuenta por el código neutrónico milonga desarrollado por el autor de este trabajo en el marco de su tesis de doctorado, pero no son descriptos en esta monografía ya que no están directamente relacionado con la comparación entre esquemas basados en volúmenes y en elementos.

2.4.1. Mallas estructuradas y no estructuradas

cuatro figuras: un cuadrado uniforme, un cuadrado con deltas x e y no uniformes, un círculo con cosas radiales y un paralelogramo o algo curvo con elementos que se van curvando. El último es estructurado pero conviene tratarlo como no estructurado.

lo mismo no estructurado: es una generalización, el estructurado está contenido en el no estructurado.

ilustrar el efecto staircase, cuando realmente los elementos combustibles son cuadrados zafa, pero el reflector radial siempre es cilíndrico.

Definición de nodo: lo que tiene dimensión cero Definición de celda: lo que tiene dimensión igual a la del problema

Todo lo demás, incluyendo nodos y celdas son elementos.

figuras de dmplex?

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

2.5. Volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos se basa en integrar las ecuaciones diferenciales sobre el volumen de las celdas y luego aproximar los términos diferenciales en función de los valores medios de la incógnita en cada celda. Estos esquemas se basan más en un enfoque geométrico que en un formalismo matemático (al contrario que el método de elementos finitos que discutimos en la sección 2.6), aunque es posible estudiar su errores y sus propiedades de convergencia [34]. Si bien el esquema se puede aplicar tanto a la ecuación de transporte como a la de difusión, la primera es hiperbólica y la segunda elíptica. Sucede que las ecuaciones elípticas presentan características que las hacen más sencillas de atacar con esquemas de discretización espacial, por lo que comenzamos estudiando la ecuación de difusión y luego en la sección ?? discretizamos la ecuación de transporte con ordenadas discretas y volúmenes finitos.

2.5.1. Difusión en volúmenes

En el método de los volúmenes finitos las incógnitas del problema son los valores medios de los flujos en las I celdas, a diferencia de lo que sucede en diferencias o elementos finitos donde las incógnitas son los valores que toman los flujos sobre los K nodos. Definimos el flujo del grupo $g = 1, \dots, G$ en la celda i como

$$\hat{\phi}_g^i = \frac{\int_{V_i} \phi_g(\mathbf{x}) d^M \mathbf{x}}{\int_{V_i} d^M \mathbf{x}} \quad (2.29)$$

donde $V_i \in \mathbb{R}^M$ es el volumen de la celda i .

De esta manera, el problema consiste en encontrar los $I \cdot G$ valores $\hat{\phi}_{g'}^i$, que son los elementos del vector incógnita $\hat{\phi}$ definido en la ecuación (2.27). Para ello, comenzamos integrando la ecuación de difusión multigrupo diferencial (2.9)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] + \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) = \\ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{0g' \rightarrow g}}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) + s_{0g}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

sobre el dominio $U \in \mathbb{R}^M$ ($M = 1, 2, 3$) con condiciones de contorno en la frontera ∂U . Si $s_{0g} = 0$ entonces dichas condiciones de contorno deben ser homogéneas (ver sección 1.4.5). Supongamos que dividimos al dominio U en I celdas. Integramos la ecuación 2.9 sobre el volumen V_i de la celda i -ésima para obtener

$$\begin{aligned} -\int_{V_i} \operatorname{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] d\mathbf{x} + \int_{V_i} \Sigma_{tg}(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ \sum_{g'=1}^G \int_{V_i} \Sigma_{s_{0g' \rightarrow g}}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \chi_g \sum_{g'=1}^G \int_{V_i} \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{x}) \cdot \phi_{g'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{V_i} s_{0g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.30)$$

El segundo término del miembro izquierdo y los dos primeros del miembro derecho tienen la forma

$$\begin{aligned} \int_{V_i} f(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{V_i} f(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cdot \frac{\int_{V_i} d\mathbf{x}}{\int_{V_i} d\mathbf{x}} \cdot \frac{\int_{V_i} \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V_i} \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \\ &= \frac{\int_{V_i} f(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V_i} \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \cdot V_i \cdot \hat{\phi}_g^i \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde hemos multiplicado y dividido por $\int_{V_i} d\mathbf{x}$ y por $\int_{V_i} \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, hemos recordado la definición (2.29) de $\hat{\phi}_g^i$ y reemplazado directamente $\int_{V_i} d\mathbf{x}$ por el valor numérico V_i del volumen de la celda. Si $f(\mathbf{x}) = \hat{f}^i$ para todo $\mathbf{x} \in V_i$, entonces podemos escribir la ecuación (2.31) como

$$\int_{V_i} f(\mathbf{x}) \cdot \phi_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{f}^i \cdot V_i \cdot \hat{\phi}_g^i \quad (2.32)$$

Si $f(\mathbf{x})$ no es uniforme dentro de la celda i , entonces debemos reemplazar el signo de igualdad de la ecuación (2.32) por un signo aproximado \approx y utilizar nuestro juicio de ingeniería para evaluar qué tan válida es esta aproximación en función del tamaño V_i de la celda y de la magnitud del cambio de $f(\mathbf{x})$ dentro de la misma.

Reemplazando la ecuación (2.32) en la ecuación de difusión multigrupo integrada en el espacio (2.30)

$$-\int_{V_i} \text{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] d\mathbf{x} + \hat{\Sigma}_{tg}^i \cdot V_i \cdot \hat{\phi}_g^i = \sum_{g'=1}^G \hat{\Sigma}_{s_0g' \rightarrow g}^i \cdot V_i \cdot \hat{\phi}_{g'}^i + \chi_g \sum_{g'=1}^G \hat{\nu} \hat{\Sigma}_{fg'}^i \cdot V_i \cdot \hat{\phi}_{g'}^i + \int_{V_i} s_{0g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.33)$$

El primer término del miembro izquierdo de la ecuación (2.33) representa el ritmo neto de fugas de neutrones de energía g a través de la superficie que delimita el volumen V_i según la teoría de difusión de neutrones. Es en este término donde aparece el acople entre celdas espaciales y cobra importancia el método de volúmenes finitos. Utilizando el teorema de la divergencia, podemos escribir

$$\int_{V_i} \text{div} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] d\mathbf{x} = \int_{S_i} \left[D_g(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} [\phi_g(\mathbf{x})] \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde S_i representa la superficie que delimita el volumen V_i y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal al diferencial de superficie dS que apunta en sentido externo al volumen V_i , como ilustramos en la figura 2.7.

El esquema tiene que conservar flujos. Si D es continuo entonces todo manzana. Si D no es continuo entonces falla la formulación fuerte.

2.5.2. Ordenadas discretas en volúmenes

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

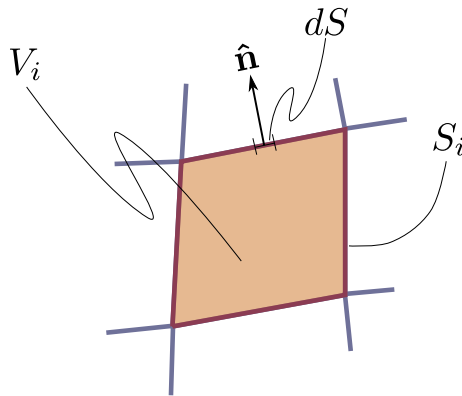


Figura 2.7: Detalle del volumen bidimensional V_i de la figura ???. La superficie S_i que lo delimita en este caso está compuesta por cuatro segmentos, cada uno con un vector normal \hat{n} diferente.

2.6. Elementos finitos

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

2.6.1. Difusión en elementos

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

2.6.2. Ordenadas discretas en elementos

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est.

Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

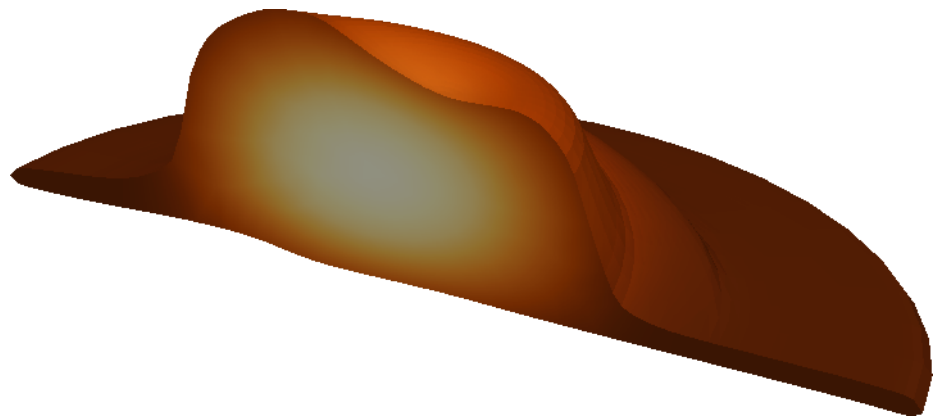
Parte II

Metodología para la resolución de problemas de ingeniería nuclear



Parte III

Otros enfoques, conclusiones, trabajos futuros y anexos



Publicaciones

Las referencias que siguen contienen aportes fundamentales realizados por el autor de esta tesis y se relacionan directamente o bien con los problemas estudiados en ella o bien con la situación que la enmarca desarrollada en la introducción.

A.1. Internacionales con referato

- [1] G. Theler. «Unstructured Grids and the Multigroup Neutron Diffusion Equation». Inglés. En: *Science and Technology of Nuclear Installations* 2014:641863 (2013).
- [2] G. Theler y F. J. Bonetto. «On the stability of the point reactor kinetics equations». Inglés. En: *Nuclear Engineering and Design* 240.6 (jun. de 2010), págs. 1443-1449.
- [3] G. Theler y col. «A coupled calculation suite for Atucha II operational transients analysis». Inglés. En: *Science and Technology of Nuclear Installations* 2011:785304 (2011).

A.2. Nacionales con referato

- [4] Theler G. «Simulación de Experimentos de Estabilidad en Flujo de Dos Fases Acoplado RELAP a un Código Externo de Control Inteligente Basado en Lógica Difusa». En: *Mecánica Computacional XXVIII*.Number 37, Heat Transfer (B) (2009), págs. 3169-3183.
- [5] Theler G. y Freis D. «Theoretical Critical Heat Flux Prediction Based on Non-Equilibrium Thermodynamics Considerations of the Subcooled Boiling Phenomenon». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXX*.Number 19, Heat Transfer (B) (2011), págs. 1713-1732.
- [6] Gomez Omil J. P. y col. «Implementation of an External Code for the Control and Protection System of Atucha I Nuclear Power Plant». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXIII*.Number 44, Computational Applications in Nuclear Technology (A) (2014), págs. 2819-2830.
- [7] G. Theler. «Geometric Optimization of Nuclear Reactor Cores». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXII*.Number 32 Optimization and Control (2013), págs. 2659-2709.
- [8] G. Theler. «On the design basis of a new core-level neutronic code written from scratch». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXIII*.Number 48, Numerical Methods in Reactor Physics (B) (2014), págs. 3169-3194.

- [9] G. Theler, J. P. Gómez Omil y O. Mazzantini. «A coupled scheme for the deterministic safety transient analysis of the Atucha I Nuclear Power Plant». Inglés. En: *Mecánica Computacional* Volume XXXIII.Number 45 Computational Applications in Nuclear Technology (B) (2014), págs. 2939-2955.
- [10] G. Theler, J. P. Gómez Omil y E. Pellegrino. «A shared-memory-based coupling scheme for modeling the behavior of a Nuclear Power Plant core». Inglés. En: *Mecánica Computacional* XXXII.Number 18 Multiphysics (2013), págs. 1501-1517 (vid. pág. 2).

A.3. Actas de Congresos

- [11] Tarazaga A., Theler G. y Roqueta D. «Desarrollo de la neutróica del segundo sistema de extinción de la Central Nuclear Atucha I para su implementación en un esquema de acople completo de control, termohidráulica y neutróica». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [12] Roqueta D., Tarazaga A. y Theler G. «Cálculo de Secciones Eficaces Condensadas a 2 Grupos, para Simulación de Transitorios con Inyección Rápida de Boro Enriquecido». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [13] Theler G. «Generalización del código neutróico PCE para su aplicación a Atucha I». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [14] Theler G. y Mazzatini O. «Desarrollo de capacidades locales para ingeniería de licenciamiento de centrales nucleares: evaluación de los efectos de la inyección de boro de emergencia». En: *Congreso Ingeniería 2014, Buenos Aires*. Buenos Aires, 2014.
- [15] Theler G. y col. «Desarrollo y acople de códigos de cálculo para simulación de transitorios de operación de la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXVI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2009.
- [16] Di Cesare J. y col. «Inclusión del simulador de Teleperm XS en la suite de calculo acoplada DyPRA para transitorios de operación de Atucha II». En: *Actas de la XXXVIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2011.
- [17] Gómez Omil J.P., Theler G. y Mazzantini O. «Esquema de acople entre RELAP y códigos de control para el cálculo de transitorios de seguridad en la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXIX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2012.
- [18] Rivero M. y Theler G. «Optimization of the numerical solution of the nuclear reactor neutron diffusion equation». Inglés. En: *Congreso Mundial y Exposición Ingeniería 2010, Buenos Aires*. Buenos Aires, 2010.

- [19] Rivero M. y col. «Desarrollo y acople de códigos de cálculo para simulación de transitorios de operación de la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXVII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2010.
- [20] Garbero R. y col. «Emulación del control de potencia y nivel de presurizador con la suite de cálculo acoplado DyPRA en transitorios de operación de Atucha II». En: *Actas de la XXXIX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2012.
- [21] G. Theler, F. J. Bonetto y A. Clause. «Optimización de parametros en reactores de potencia: base de diseño del código neutrónico milonga». En: *Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear XXXVII* (2010).
- [22] G. Theler, F. J. Bonetto y A. Clause. «Solution of the 2D IAEA PWR Benchmark with the neutronic code milonga». Inglés. En: *Actas de la Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear XXXVIII* (2011).

A.4. Informes Técnicos

- [23] M. Rivero. *Optimización computacional del código PCE*. Inf. téc. 10105-G-IT-007. TECNA S.A., 2010.
- [24] G. Theler. *Cálculo de condiciones de estado estacionario de la CNA2 con DyPRA*. Inf. téc. 10105-G-IT-019. TECNA S.A., 2012.
- [25] G. Theler. *On the design basis of a new core-level neutronic code written from scratch: the milonga free nuclear reactor core analysis code*. Inglés. Inf. téc. WA-MI-AR-14-11D3. 2014.
- [26] G. Theler. *On the implementation of reactor control and protection systems as Fortran routines and data exchange mechanisms between RELAP and other codes*. Inglés. Inf. téc. 10527-N-IT14-102. TECNA S.A., 2014.
- [27] G. Theler. *RELAP5CPL: Extensión del código RELAP para permitir la realización de simulaciones termofluidodinámicas acopladas con códigos de cálculo externos*. Inf. téc. 10105-G-IT-001. TECNA S.A., 2010.
- [28] G. Theler. *Verificación de la geometría discretizada de las barras de control de la CNA2 en el código neutrónico de núcleo PCE*. Inf. téc. 10105-G-IT-103. TECNA S.A., 2013.
- [29] G. Theler y M. Rivero. *PUMITACPL: Extensión del Programa Cinético Espacial de cálculo neutrónico 3D para permitir simulaciones con realimentación termohidráulica y señales de control externas*. Inf. téc. 10105-G-IT-004. TECNA S.A., 2010.

A.5. Tesis y Monografías

- [30] Germán Theler. *Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico*. Tesis de la Carrera de Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro. 2008.

- [31] Germán Theler. *Controladores basados en lógica difusa y loops de convección natural caóticos*. Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro. 2007.
- [32] Germán Theler. *Difusión de neutrones en mallas no estructuradas: comparación entre volúmenes y elementos finitos*. Monografía Final de la materia “Introducción al método de elementos finitos”, Universidad de Buenos Aires. 2013 (vid. pág. 2).

Referencias

- [11] Tarazaga A., Theler G. y Roqueta D. «Desarrollo de la neutrónica del segundo sistema de extinción de la Central Nuclear Atucha I para su implementación en un esquema de acople completo de control, termohidráulica y neutrónica». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [12] Roqueta D., Tarazaga A. y Theler G. «Cálculo de Secciones Eficaces Condensadas a 2 Grupos, para Simulación de Transitorios con Inyección Rápida de Boro Enriquecido». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [33] J. J. Duderstadt y L. J. Hamilton. *Nuclear reactor analysis*. Inglés. Wiley, New York, 1976 (vid. pág. 2).
- [34] R. Eymard, T. Gallouët y R. Herbin. «Handbook of Numerical Analysis». Inglés. En: 2000. Cap. The finite volume method (vid. pág. 63).
- [13] Theler G. «Generalización del código neutrónico PCE para su aplicación a Atucha I». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014.
- [4] Theler G. «Simulación de Experimentos de Estabilidad en Flujo de Dos Fases Acoplado RELAP a un Código Externo de Control Inteligente Basado en Lógica Difusa». En: *Mecánica Computacional XXVIII*. Number 37, Heat Transfer (B) (2009), págs. 3169-3183.
- [5] Theler G. y Freis D. «Theoretical Critical Heat Flux Prediction Based on Non-Equilibrium Thermodynamics Considerations of the Subcooled Boiling Phenomenon». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXX*. Number 19, Heat Transfer (B) (2011), págs. 1713-1732.
- [35] Theler G. y Schivo M. «Estimación del coeficiente de reactividad por temperatura del combustible en reactores tipo Atucha mediante ajuste de modelos matemáticos a mediciones experimentales». En: *Actas de la XL Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2013 (vid. pág. 6).
- [36] Theler G., Schivo M. y Salom G. «Estimación del coeficiente de reactividad por temperatura del combustible de la Central Nuclear Atucha II a partir de mediciones de flujo neutrónico». En: *Actas de la XLI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2014 (vid. pág. 6).

- [14] Theler G. y Mazzatini O. «Desarrollo de capacidades locales para ingeniería de licenciamiento de centrales nucleares: evaluación de los efectos de la inyección de boro de emergencia». En: *Congreso Ingeniería 2014, Buenos Aires*. Buenos Aires, 2014.
- [15] Theler G. y col. «Desarrollo y acople de códigos de cálculo para simulación de transitorios de operación de la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXVI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2009.
- [37] G. Glasstone S. Bell. *Nuclear reactor theory*. Inglés. Krieger Publishing Company, 1970 (vid. pág. 2).
- [38] A. F. Henry. *Nuclear reactor analysis*. Inglés. Cambridge, MIT, 1975 (vid. págs. 2, 39).
- [39] V. Hernandez, J. E. Roman y V. Vidal. «SLEPc: A Scalable and Flexible Toolkit for the Solution of Eigenvalue Problems». Inglés. En: *ACM Transactions on Mathematical Software* 31.3 (sep. de 2005), págs. 351-362 (vid. pág. 61).
- [16] Di Cesare J. y col. «Inclusión del simulador de Teleperm XS en la suite de calculo acoplada DyPRA para transitorios de operación de Atucha II». En: *Actas de la XXXVIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2011.
- [17] Gómez Omil J.P., Theler G. y Mazzantini O. «Esquema de acople entre RELAP y códigos de control para el cálculo de transitorios de seguridad en la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXIX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2012.
- [40] J. R. Lamarsh. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. Inglés. Addison-Wesley, 1966 (vid. pág. 2).
- [41] E. E. Lewis y W. F. Miller. *Computational Methods of Neutron Transport*. Inglés. John Wiley y Sons, 1984 (vid. págs. 2, 3, 8, 10, 49, 50, 61).
- [18] Rivero M. y Theler G. «Optimization of the numerical solution of the nuclear reactor neutron diffusion equation». Inglés. En: *Congreso Mundial y Exposición Ingeniería 2010, Buenos Aires*. Buenos Aires, 2010.
- [19] Rivero M. y col. «Desarrollo y acople de códigos de cálculo para simulación de transitorios de operación de la Central Nuclear Atucha II». En: *Actas de la XXXVII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2010.
- [6] Gomez Omil J. P. y col. «Implementation of an External Code for the Control and Protection System of Atucha I Nuclear Power Plant». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXIII*. Number 44, Computational Applications in Nuclear Technology (A) (2014), págs. 2819-2830.
- [20] Garbero R. y col. «Emulación del control de potencia y nivel de presurizador con la suite de cálculo acoplado DyPRA en transitorios de operación de Atucha II». En: *Actas de la XXXIX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear*. Buenos Aires, 2012.
- [42] M. Rivero. «Optimización computacional de la solución numérica de la ecuación de difusión de neutrones». Tesis de la Maestría en Simulación Numérica y Control. Univesidad de Buenos Aires, 2011 (vid. pág. 61).

- [23] M. Rivero. *Optimización computacional del código PCE*. Inf. téc. 10105-G-IT-007. TECNA S.A., 2010.
- [43] R. J. G. Stammler y M. J. Abbate. *Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design*. Inglés. Academic Press, 1983 (vid. págs. 2, 10, 49).
- [24] G. Theler. *Cálculo de condiciones de estado estacionario de la CNA2 con DyPRA*. Inf. téc. 10105-G-IT-019. TECNA S.A., 2012.
- [7] G. Theler. «Geometric Optimization of Nuclear Reactor Cores». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXII*. Number 32 Optimization and Control (2013), págs. 2659-2709.
- [8] G. Theler. «On the design basis of a new core-level neutronic code written from scratch». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXIII*. Number 48, Numerical Methods in Reactor Physics (B) (2014), págs. 3169-3194.
- [25] G. Theler. *On the design basis of a new core-level neutronic code written from scratch: the milonga free nuclear reactor core analysis code*. Inglés. Inf. téc. WA-MI-AR-14-11D3. 2014.
- [26] G. Theler. *On the implementation of reactor control and protection systems as Fortran routines and data exchange mechanisms between RELAP and other codes*. Inglés. Inf. téc. 10527-N-IT14-102. TECNA S.A., 2014.
- [27] G. Theler. *RELAP5CPL: Extensión del código RELAP para permitir la realización de simulaciones termofluidodinámicas acopladas con códigos de cálculo externos*. Inf. téc. 10105-G-IT-001. TECNA S.A., 2010.
- [1] G. Theler. «Unstructured Grids and the Multigroup Neutron Diffusion Equation». Inglés. En: *Science and Technology of Nuclear Installations 2014*:641863 (2013).
- [28] G. Theler. *Verificación de la geometría discretizada de las barras de control de la CNA2 en el código neutrónico de núcleo PCE*. Inf. téc. 10105-G-IT-103. TECNA S.A., 2013.
- [2] G. Theler y F. J. Bonetto. «On the stability of the point reactor kinetics equations». Inglés. En: *Nuclear Engineering and Design* 240.6 (jun. de 2010), págs. 1443-1449.
- [21] G. Theler, F. J. Bonetto y A. Clause. «Optimización de parametros en reactores de potencia: base de diseño del código neutrónico milonga». En: *Reunion Anual de la Asociacion Argentina de Tecnologia Nuclear XXXVII* (2010).
- [22] G. Theler, F. J. Bonetto y A. Clause. «Solution of the 2D IAEA PWR Benchmark with the neutronic code milonga». Inglés. En: *Actas de la Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear XXXVIII* (2011).
- [9] G. Theler, J. P. Gómez Omil y O. Mazzantini. «A coupled scheme for the deterministic safety transient analysis of the Atucha I Nuclear Power Plant». Inglés. En: *Mecánica Computacional Volume XXXIII*. Number 45 Computational Applications in Nuclear Technology (B) (2014), págs. 2939-2955.
- [10] G. Theler, J. P. Gómez Omil y E. Pellegrino. «A shared-memory-based coupling scheme for modeling the behavior of a Nuclear Power Plant core». Inglés. En: *Mecánica Computacional XXXII*. Number 18 Multiphysics (2013), págs. 1501-1517 (vid. pág. 2).

- [29] G. Theler y M. Rivero. *PUMITACPL: Extensión del Programa Cinético Espacial de cálculo neutrónico 3D para permitir simulaciones con realimentación termohidráulica y señales de control externas*. Inf. téc. 10105-G-IT-004. TECNA S.A., 2010.
- [30] Germán Theler. *Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico*. Tesis de la Carrera de Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro. 2008.
- [31] Germán Theler. *Controladores basados en lógica difusa y loops de convección natural caóticos*. Proyecto Integrador de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro. 2007.
- [32] Germán Theler. *Difusión de neutrones en mallas no estructuradas: comparación entre volúmenes y elementos finitos*. Monografía Final de la materia "Introducción al método de elementos finitos", Universidad de Buenos Aires. 2013 (vid. pág. 2).
- [3] G. Theler y col. «A coupled calculation suite for Atucha II operational transients analysis». Inglés. En: *Science and Technology of Nuclear Installations* 2011:785304 (2011).

Agradecimientos

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consetetur.