

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in
INGEGNERIA INFORMATICA

Studio della stabilità robusta mediante funzioni di Lyapunov omogenee

Tesi di Laurea di

Claudio Fantacci

Alessandro Martini

Relatori:

Chiar.mo Prof. Alberto Tesi

Ing. Giorgio Battistelli

Anno Accademico 2008/09

Indice

Introduzione	1
Notazione	3
1 Il concetto di stabilità	4
1.1 Situazioni dinamiche di interesse	5
1.2 Stabilità di uno stato di equilibrio	6
2 Il metodo di Lyapunov	12
2.1 Forma quadratica omogenea	16
2.2 Il metodo di Lyapunov su sistemi LPV	19
3 Funzioni di Lyapunov polinomiali omogenee	24
3.1 La costruzione della matrice $A_{i,\{m\}}$	28
3.2 La costruzione della matrice $L(\boldsymbol{\alpha})$	30
3.3 Alcuni esempi	31
4 Applicazione: il pendolo inverso	35
4.1 Modellazione	35
4.2 Controllore stabilizzante	38
4.3 Metodo di Lyapunov	43
5 Conclusioni	46

Appendice A 48

Appendice B 53

Elenco delle figure

1.1	Stabilità di uno stato di equilibrio.	8
1.2	Esempio di moto non stabile.	11
2.1	Funzione definita positiva.	14
2.2	Funzione semidefinita positiva.	15
2.3	Insieme convesso finitamente generato: politopo.	21
4.1	Schema del problema.	35
4.2	Andamento del parametro α al variare dell'incertezza su l	43
5.1	Candidata di Lyapunov.	49
5.2	Se $k_1 < k_2$, la linea di livello relativa a k_1 è interna a quella relativa a k_2	50
5.3	È sempre possibile trovare un valore R_2 tale che $S(\mathbf{x}_e, R_2)$ sia tutta interna alla linea di livello U_k	51

Elenco delle tabelle

3.1	Confronto dei k_{max} al variare di m per l'esempio 1.	31
3.2	Confronto dei k_{max} al variare di m per l'esempio 3.	34

Introduzione

La problematica del controllo è di forte interesse ingegneristico. Dal settore civile, per la corretta climatizzazione degli edifici, al settore industriale, per il corretto dimensionamento dei macchinari fabbricati: simili esigenze si possono poi ritrovare anche in ambiti differenti da quelli dell'ingegneria tradizionale, come nella gestione dei complessi fenomeni di carattere economico, sociologico o ambientale.

Il controllo automatico classico prende un sistema dinamico, descritto in forma di stato o dalla sua funzione di trasferimento, conosciuto in modo completo e accurato, e genera tramite opportuni algoritmi scelti a discrezione del progettista un controllore ad hoc per quel sistema. Nella pratica ciò non è possibile, perché il sistema che si va a controllare non corrisponde pienamente con il sistema reale di cui ne è appunto un modello, cioè *un'approssimazione*.

Progettare un sistema di controllo consiste nell'imporre un funzionamento desiderato ad un processo assegnato. A tale scopo, l'azione è imposta su di esso manipolando alcune variabili, dette per questo *variabili di controllo*. Tale azione è in generale possibile però solo su una parte del processo, o meglio su quei parametri che per questo motivo sono detti *variabili controllate*.

Nella realtà le *variabili controllate* non dipendono solamente dalle *variabili di controllo*, ma anche da altre grandezze non manipolabili. Tipicamente queste non sono note con precisione ed è inoltre possibile che varino nel tempo in modo casuale o meno. Queste grandezze definiscono *l'incertezza* di un sistema di

controllo.

Lo studio di un sistema di controllo con incertezza è chiaramente più complesso di quello di uno noto a priori. Nel caso migliore, l'incertezza può essere *tempo invariante*, ovvero costante nel tempo, oppure può essere *tempo variante*, ovvero non costante nel tempo: in entrambi i casi è possibile però caratterizzare tali valori all'interno di un opportuno insieme di appartenenza.

Quando si affronta un processo con queste caratteristiche non è più possibile parlare semplicemente di stabilità del sistema sotto controllo, ma bisogna garantire la *stabilità asintotica* del sistema per ogni valore che l'incertezza può assumere all'interno del proprio insieme di variazione. Il controllo che riesce a risolvere questo problema è detto appunto *robusto* proprio perché garantisce tale stabilità per tutti i valori ammissibili dei parametri incerti del sistema.

Le tecniche esistenti atte ad affrontare questa tipologia di problemi sono molteplici, tuttavia quella più usata sfrutta l'utilizzo delle funzioni di Lyapunov e quindi della sua definizione di stabilità. In generale la stabilità di Lyapunov è una *condizione sufficiente* ma non necessaria per garantire la stabilità (anche robusta) di un sistema sotto controllo. Tuttavia anche sfruttando questa definizione non si ha univocità nelle possibili procedure da intraprendere. La diversità possibile è insita proprio nella stessa definizione, la quale non specifica il tipo di funzione da utilizzare. Per questo motivo la ricerca della funzione di Lyapunov adatta al soddisfacimento delle condizioni di stabilità non è facile e non è neanche ovvia la scelta del tipo di funzioni da utilizzare.

Tradizionalmente sono state considerate funzioni di Lyapunov quadratiche nello stato e lineari nei parametri, mentre di più recente utilizzo sono le funzioni polinomiali nello stato e nei parametri. In ogni caso il problema della stabilità robusta si riconduce ad un test di ammissibilità di un sistema di *disuguaglianze matriciali lineari* (LMI) opportunamente formulate.

Notazione

- \mathbb{R} : insieme dei numeri reali;
- \boldsymbol{x} : vettore di nome x ;
- \boldsymbol{x}^0 : origine dello spazio dello stato;
- A^T indica la trasposta della matrice A ;
- $A \succ 0$: indica che la matrice A è definita positiva;
- $A \succeq 0$: indica che la matrice A è semidefinita positiva;
- $A \prec 0$: indica che la matrice A è definita negativa;
- $A \preceq 0$: indica che la matrice A è semidefinita negativa;
- $co\{\boldsymbol{\delta}^1, \dots, \boldsymbol{\delta}^k\}$ indica la chiusura convessa dei vettori $\boldsymbol{\delta}^1, \dots, \boldsymbol{\delta}^k$;

Capitolo 1

Il concetto di stabilità

Il corpo della teoria della stabilità è costituito essenzialmente di:

- **definizioni:** per sviluppare in modo rigoroso la teoria occorre definire in modo preciso cosa significa stabilità, instabilità, e distinguere diversi tipi di stabilità. Ce ne saranno di diversi tipi perché potranno esserci diversi modi di reagire alle perturbazioni e ci potranno essere esigenze più o meno forti da soddisfare;
- **condizioni:** dopo le definizioni, è necessario stabilire quali condizioni debbano essere soddisfatte in una rappresentazione e nei suoi parametri affinché si abbia un tipo o l'altro di stabilità;
- **criteri:** dopo aver stabilito le condizioni di stabilità è importante poter verificare se tali condizioni sono soddisfatte o meno, senza calcolare esplicitamente le uscite. I procedimenti che consentono di effettuare questa verifica prendono il nome di *criteri di stabilità*.

Un contributo fondamentale alla teoria della stabilità è dovuto al matematico russo Lyapunov, il quale, nel 1892, scrisse una celebre memoria sulla stabilità del movimento, che è rimasta il punto di partenza della teoria della stabilità. La teoria di Lyapunov si è dimostrata la più efficace per lo studio della stabilità

nei problemi applicativi, in particolare in quelli ingegneristici. Questa teoria è stata riscoperta dagli ingegneri negli anni '50 e da allora via via trasferita sul piano applicativo: oggi è praticamente l'unica teoria che permette di affrontare i problemi di stabilità su una base matematica seria, non solo nei casi lineari, ma anche in quelli non lineari.

In tutta la trattazione si assumerà che il sistema S allo studio sia descritto mediante una rappresentazione ingresso-stato-uscita:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

in cui $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbf{x}(t) \in X$, $\mathbf{u}(t) \in U$ e $\mathbf{y}(t) \in Y$. Con $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ si rappresenta il valore assunto dallo stato al tempo t in corrispondenza dell'ingresso \mathbf{u} e a partire dallo stato iniziale \mathbf{x}_0 al tempo t_0 ; il vettore $\mathbf{u}(t)$ è composto dalle variabili esterne che intervengono nel sistema (ingressi e disturbi); il vettore $\mathbf{y}(t)$ contiene le uscite che si hanno a disposizione.

1.1 Situazioni dinamiche di interesse

Le situazioni dinamiche di maggiore interesse nella teoria della stabilità sono descritte di seguito.

Traiettoria

Una traiettoria è l'insieme così definito:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})\} \quad (1.2)$$

Essa è l'insieme di tutti i valori assunti dallo stato nell'evoluzione a partire da un certo stato iniziale ed in corrispondenza di un particolare ingresso: essa dipende ovviamente anche dall'istante iniziale. La traiettoria è un luogo di punti nello

spazio di stato; nel caso bidimensionale, i.e. $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, la traiettoria può essere rappresentata come una curva nel piano cartesiano (x_1, x_2) .

Moto

Un moto è l'insieme così definito:

$$\mathcal{B} = \{(t, \mathbf{x}(t)) \in T \times X : t \geq t_0, \mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})\} \quad (1.3)$$

Esso è l'insieme delle coppie di valori (t, \mathbf{x}) nelle quali \mathbf{x} è il valore assunto all'istante t dallo stato nell'evoluzione a partire da un particolare stato iniziale ed in corrispondenza ad un particolare ingresso. La differenza sostanziale rispetto alla traiettoria risiede nel fatto che questa volta si considera, accanto allo stato, anche l'istante di tempo in cui il valore dello stato viene assunto. Il moto è un luogo di punti nell'insieme $T \times X$; nel caso bidimensionale, i.e. $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, può essere rappresentato come una curva nello spazio cartesiano (t, x_1, x_2) .

É chiaro che la proiezione del moto sul piano (x_1, x_2) restituisce la traiettoria. La distinzione tra traiettoria e moto è fondamentale e se ne vedranno presto le applicazioni nella definizione di stabilità. Nel primo caso interessa soltanto conoscere il luogo dei punti dello spazio di stato percorso dal sistema nella sua evoluzione; nel secondo caso interessa anche sapere in quale istante ciascun punto dello spazio di stato viene raggiunto.

1.2 Stabilità di uno stato di equilibrio

Uno stato di equilibrio è un particolare punto nello spazio dello stato nel quale il sistema rimane immutato. Il suo studio è centrale nella teoria della stabilità. Introduciamo ora formalmente il concetto.

Stato di equilibrio

Uno stato \mathbf{x}_e si dice di equilibrio se, nell'evoluzione libera avente origine da tale stato, lo stato del sistema si mantiene costantemente pari ad \mathbf{x}_e . In termini formali, uno stato di equilibrio è qualsiasi elemento \mathbf{x}_e di X che soddisfa la condizione:

$$\mathbf{x}_e = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_e, \mathbf{0}) \quad (1.4)$$

per ogni $t \in T$.

Con riferimento alle definizioni date in precedenza, si può dire che gli stati di equilibrio sono traiettorie degeneri (costituite da un solo elemento di X) corrispondenti ad ingressi nulli su T . Ovvero, in altri termini, gli stati di equilibrio sono le traiettorie corrispondenti a moti costanti.

La definizione qui presentata fa riferimento al caso di ingresso nullo, cioè all'*evoluzione libera* del sistema. Non vi è tuttavia alcuna difficoltà a considerare una definizione che faccia riferimento ad un ingresso costante su T : in tal caso, la (1.4) diventa:

$$\mathbf{x}_e = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}}) \quad (1.5)$$

avendo indicato con $\bar{\mathbf{u}}$ il valore costante dell'ingresso.

È chiaro allora che gli stati di equilibrio dipendono dal particolare valore della costante $\bar{\mathbf{u}}$; non si perde di generalità, tuttavia, a studiare il caso definito in (1.4) in quanto si può sempre pensare il valore di $\bar{\mathbf{u}}$ come parametro del sistema. Nel prosieguo ci riferiremo quindi sempre alla definizione di stato di equilibrio con ingresso nullo per semplicità.

Si daranno ora le principali definizioni di stabilità secondo Lyapunov. In tutta la trattazione seguente, si indicherà con $\mathbf{x}(t)$ il valore assunto dalla funzione $\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0})$, e cioè il valore assunto dallo stato in evoluzione libera all'istante t , a partire da uno stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Si assumerà inoltre che lo spazio di

stato X sia uno spazio vettoriale normato.

Stabilità di uno stato di equilibrio

Uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e si dice stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon, \forall t \in T(t_0) \quad (1.6)$$

cioè se comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste un δ , che potrà dipendere da ε e dall'istante iniziale t_0 , tale che, se $\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e$ è in norma minore di δ allora $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$ è in norma minore di ε , per ogni $t \geq t_0$. In altre parole, fissato un intorno di \mathbf{x}_e piccolo quanto si voglia, l'evoluzione libera dello stato si mantiene confinata a tale intorno purché il valore dello stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ non si discosti troppo dal valore di equilibrio \mathbf{x}_e (Figura 1.1).

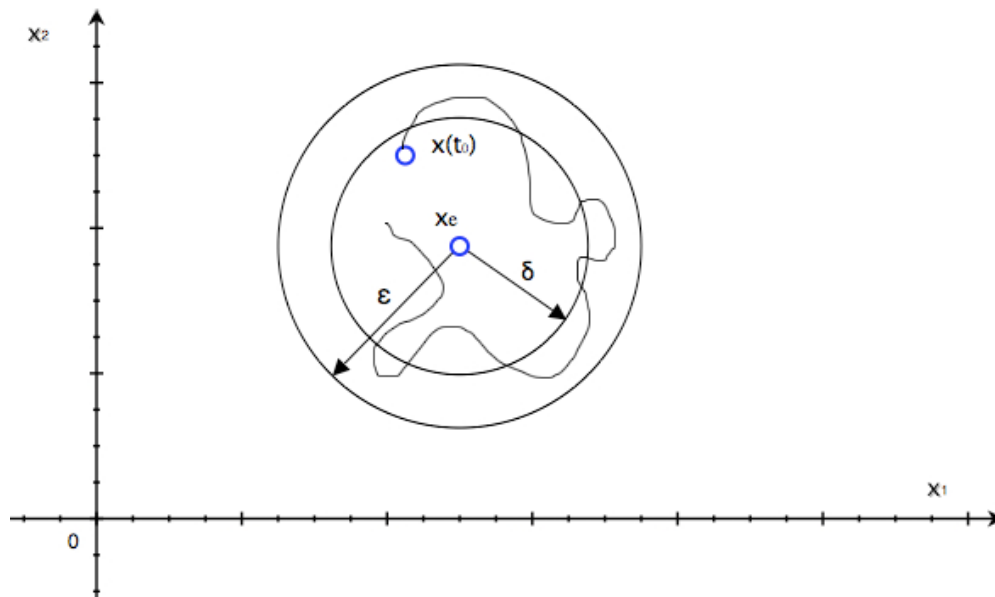


Figura 1.1: Stabilità di uno stato di equilibrio.

Si noti come nella definizione non è richiesto che l'evoluzione ritorni necessariamente al punto di equilibrio: quello che si richiede è solo una *limitatezza locale*, nell'intorno del punto di equilibrio.

Stabilità asintotica di uno stato di equilibrio

Uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e si dice asintoticamente stabile se esso è stabile e se, inoltre:

$$\exists \delta_a(t_0) : \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0 \quad (1.7)$$

In altri termini, uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e è stabile asintoticamente se è stabile (nel senso della definizione precedente) e se, inoltre, quando la perturbazione iniziale è limitata (da un numero δ_a che può dipendere da t_0) l'evoluzione perturbata converge, per $t \rightarrow \infty$, allo stato \mathbf{x}_e stesso.

È importante notare che, in generale, la proprietà indicata in (1.7) è indipendente da (1.1). Può cioè verificarsi la convergenza ad \mathbf{x}_e dell'evoluzione perturbata anche se \mathbf{x}_e non è stabile e viceversa. Infatti la stabilità di \mathbf{x}_e impone una condizione su $\mathbf{x}(t)$ per ogni valore di t mentre la (1.7) impone una condizione su $\mathbf{x}(t)$ solo per valori di t molto elevati.

Stabilità asintotica globale

Uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e si dice stabile asintoticamente globalmente se esso è stabile e se, inoltre:

$$\forall \mathbf{x}(t_0) \in X, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0 \quad (1.8)$$

In altri termini, uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e è stabile asintoticamente globalmente se è stabile e se l'evoluzione perturbata converge asintoticamente allo stato \mathbf{x}_e quale che sia l'entità della perturbazione iniziale. È chiaro che la definizione di stabilità asintotica globale impone una condizione molto più forte di quella imposta dalla stabilità asintotica: in generale la prima (stabilità globale) implica la seconda (stabilità locale), ma non viceversa.

Stabilità esponenziale

Uno stato di equilibrio \mathbf{x}_e si dice stabile esponenzialmente se esiste un valore

$\lambda > 0$ tale che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in T(t_0) \quad (1.9)$$

In altri termini uno stato di equilibrio si dice stabile esponenzialmente se ogni evoluzione perturbata che ha origine nell'intorno di tale stato è limitata, in norma, da una funzione esponenziale decrescente.

Stabilità di un moto

Un moto:

$$\mathcal{B} = \{(t, \mathbf{x}(t)) \in T \times X : t \geq t_0, \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x_0, u)\} \quad (1.10)$$

si dice stabile se:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \\ \Rightarrow \|\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x_0, u)\| < \varepsilon, \forall t \in T \end{aligned} \quad (1.11)$$

La definizione è sostanzialmente simile a quella data per gli stati di equilibrio: l'aspetto essenziale che occorre tener presente è il seguente: un moto è stabile se, per piccole perturbazioni dello stato iniziale, ad ogni istante t successivo all'istante iniziale t_0 l'evoluzione perturbata si mantiene vicina alla evoluzione non perturbata.

Questo non significa che, se la traiettoria associata al moto originario $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x_0, u)$ e quella associata al moto perturbata $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x, u)$ sono vicine, il moto sia necessariamente stabile: infatti le due traiettorie potrebbero essere vicine ma percorse con legge temporale diversa. Ad un istante t la distanza tra $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x_0, u)$ e $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, x, u)$ potrebbe essere superiore ad ε (Figura 1.2).

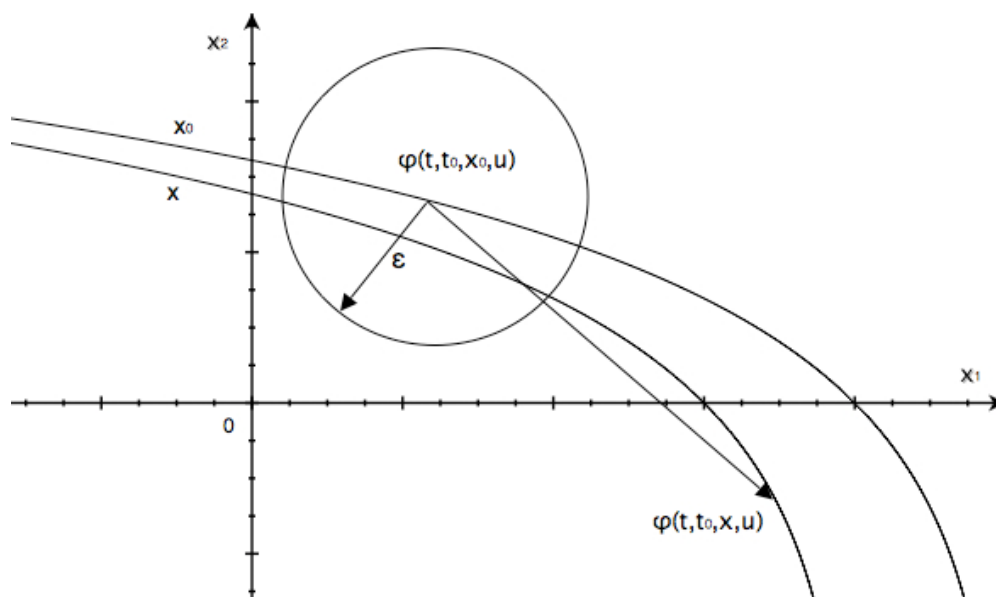


Figura 1.2: Esempio di moto non stabile.

Capitolo 2

Il metodo di Lyapunov

L'interesse fortemente pratico è quello di ricercare criteri che consentano di verificare la stabilità a partire da caratteristiche della funzione $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ stessa, senza che sia necessario risolvere la corrispondente equazione. Il metodo di Lyapunov è il più noto di questi criteri.

Nel seguito, il metodo verrà esposto con riferimento a rappresentazioni *lineari tempo-invarianti* (LTI). Il criterio comunque non perde di generalità e può essere esteso anche allo studio di sistemi non lineari, oppure nel caso tempo-discreto con un'opportuna riformulazione.

Sia data la rappresentazione:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

con $\mathbf{x}(t) \in X = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in U = \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in Y = \mathbb{R}^p$.

La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ descrive le interazioni tra le variabili di stato; la matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ determina l'influenza delle variabili esterne su quelle di stato; la matrice $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ riporta il contributo delle variabili di stato sulle uscite; la matrice $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ relaziona invece le variabili esterne con le uscite.

Le variabili intervengono in maniera lineare, prendono valori in un intervallo

temporale continuo ed in più il sistema mantiene la sua struttura nel tempo, cioè le matrici A , B , C e D sono costanti e note a priori.

Per le considerazioni fatte sugli stati di equilibrio nel capitolo 1, faremo riferimento al sistema con $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ e valuteremo la stabilità dell'origine dello spazio del vettore di stato $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ indicata con \mathbf{x}^0 :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (2.2)$$

É ben noto che, affinché la stabilità asintotica del sistema sia garantita, deve valere che:

$$\Re\{\lambda_i(A) < 0\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

cioè che gli autovalori della matrice A giacciono tutti a sinistra dell'asse immaginario.

L'idea di base del metodo diretto di Lyapunov è la formalizzazione matematica di un'osservazione fisica fondamentale: se l'energia totale di un sistema di qualsiasi natura, ad esempio meccanico o elettrico, viene continuamente dissipata, allora la traiettoria del sistema, sia questo lineare o non lineare, deve convergere a regime in un punto di equilibrio. Pertanto, è possibile analizzare la stabilità di un punto di equilibrio di un sistema dall'analisi della variazione di una sola funzione scalare.

Nel nostro caso di sistema LTI, il metodo di Lyapunov permette di scrivere una condizione equivalente a quella dello studio degli autovalori. Per poter presentare il teorema fondamentale di Lyapunov, è necessario introdurre preliminarmente alcuni concetti. Più precisamente, si consideri una funzione scalare del vettore di stato \mathbf{x} :

$$V(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

e si supponga che questa funzione sia continua e derivabile, rispetto alle n componenti x_1, \dots, x_n del vettore di stato in una regione attorno al punto di equilibrio

\mathbf{x}_e . Per una funzione di questo tipo è abituale dare le seguenti definizioni:

Definizione 2.1 *La funzione $V(\mathbf{x})$ si dice definita positiva, brevemente $V(\mathbf{x}) \succ 0$, in $S(\mathbf{x}_e, r) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq r\}$ se:*

- (i) $V(\mathbf{x}_e) = 0$
- (ii) $V(\mathbf{x}) > 0; \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e, \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_e, r)$

cioè se $V(\mathbf{x})$ è positiva per tutti gli \mathbf{x} diversi da \mathbf{x}_e e contenuti in una sfera di centro \mathbf{x}_e e raggio r .

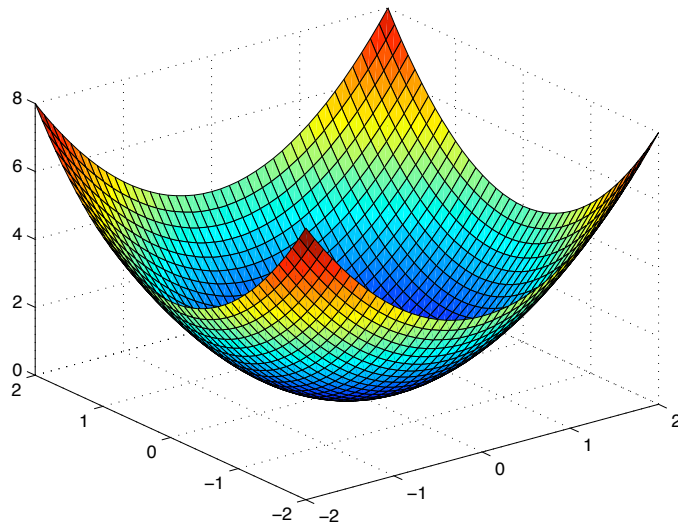


Figura 2.1: Funzione definita positiva.

Analogamente si definisce una funzione definita negativa ($V(\mathbf{x}) \prec 0$). Esiste inoltre una proprietà meno forte riscontrabile in una funzione, definita di seguito:

Definizione 2.2 *La funzione $V(\mathbf{x})$ si dice semidefinita positiva, brevemente $V(\mathbf{x}) \succeq 0$, in $S(\mathbf{x}_e, r)$ se:*

- (i) $V(\mathbf{x}_e) = 0$
- (ii) $V(\mathbf{x}) \geq 0; \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e, \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_e, r)$

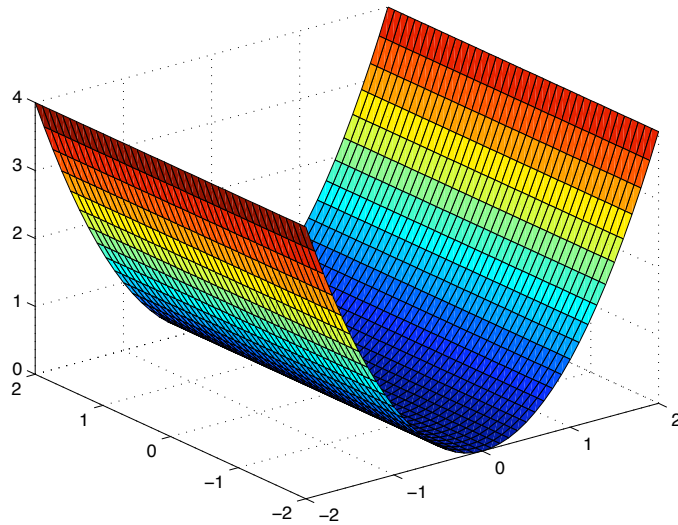


Figura 2.2: Funzione semidefinita positiva.

La semidefinitezza è, come già sottolineato, un requisito meno forte. Analogamente si può ottenere la definizione di funzione semidefinita negativa ($V(\mathbf{x}) \preceq 0$).

Introdotta ora tale terminologia, possiamo enunciare il *Teorema di Lyapunov*:

Teorema 2.1 *Uno stato \mathbf{x}_e di equilibrio è stabile se esiste una funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva in un opportuno intorno $S(\mathbf{x}_e, r)$ e tale che $\dot{V}(\mathbf{x})$ sia semidefinita negativa nello stesso intorno.*

Richiedendo una condizione più forte su $\dot{V}(\mathbf{x})$ si può dare inoltre il seguente risultato per la stabilità asintotica:

Teorema 2.2 *Uno stato \mathbf{x}_e di equilibrio è stabile asintoticamente se esiste una funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva in un opportuno intorno $S(\mathbf{x}_e, r)$ e tale che $\dot{V}(\mathbf{x})$ sia definita negativa nello stesso intorno.*

Si tratta di un criterio in generale *sufficiente ma non necessario*. Se si riesce a trovare una funzione $V(\mathbf{x})$ che soddisfa alle condizioni richieste allora lo stato \mathbf{x}_e

risulta stabile (o asintoticamente stabile), altrimenti non si può dire nulla. Per una dimostrazione si rimanda all'Appendice A.

L'utilità dei risultati stabiliti dai teoremi precedenti diviene concreta, sul piano applicativo, ove si sappia costruire per il sistema in esame una funzione $V(\mathbf{x})$ che soddisfi alle condizioni previste per assicurare la stabilità o la stabilità asintotica. Occorre però dire che il teorema di Lyapunov non dà informazioni sulla forma che deve avere la funzione $V(\mathbf{x})$, nè indicazioni sulla sua costruzione. Parallelamente, si pone anche la domanda: se in una rappresentazione assegnata uno stato di equilibrio è stabile (o stabile asintoticamente) si può essere certi che almeno una funzione di Lyapunov esista?

In effetti si può dimostrare che nel caso di rappresentazioni LTI, la risposta a tale domanda è affermativa: pertanto, l'esistenza di almeno una funzione di Lyapunov si rivela in questi casi una *condizione necessaria e sufficiente* di stabilità. L'enunciato del criterio di stabilità asintotica richiede l'introduzione del concetto di *forma quadratica omogenea*.

2.1 Forma quadratica omogenea

Una funzione $V(\mathbf{x})$ si chiama forma quadratica omogenea se è del tipo:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (2.5)$$

In tal caso, la $V(\mathbf{x})$ si può esprimere sinteticamente nel modo seguente:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (2.6)$$

dove P è una matrice avente per elementi i coefficienti p_{ij} della (2.5). Poichè nella (2.5) compaiono sia i termini del tipo $x_i x_j$ che $x_j x_i$, si può osservare che:

$$p_{ij}x_i x_j + p_{ji}x_j x_i = (p_{ij} + p_{ji})x_i x_j \quad (2.7)$$

cioè i valori che sono necessari per caratterizzare P sono le somme degli elementi simmetrici rispetto alla diagonale. Una scelta quindi conveniente è quella di prendere P simmetrica, cioè con $p_{ij} = p_{ji}$. Questo semplifica molto il controllo sulla positività di P e, di conseguenza, di $V(\mathbf{x})$. Enunciamo il noto criterio di *Sylvester*:

Teorema 2.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica del tipo (2.6) sia definita positiva è che gli n minori principali della matrice P siano tutti positivi, cioè con determinante maggiore di 0.*

Siamo ora pronti per il criterio necessario e sufficiente di stabilità asintotica precedentemente anticipato:

Teorema 2.4 *Sia data una rappresentazione:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.8)$$

l'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente se e solo se, fissata comunque una matrice simmetrica Q definita positiva, l'equazione:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.9)$$

nell'incognita P ammette soluzione unica, simmetrica e definita positiva.

Soffermiamoci su questo risultato. Se supponiamo, fissata Q simmetrica e definita positiva, di ottenere dalla (2.9) una P unica, simmetrica e definita positiva, allora

certamente è vero che:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \succ 0 \quad (2.10)$$

Inoltre, risulta che:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} \quad (2.11)$$

Combinando la (2.8) con la (2.11) si ottiene:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} \quad (2.12)$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \prec 0 \quad (2.13)$$

poichè Q è simmetrica e definita positiva per ipotesi. Questo semplice ragionamento dimostra in effetti la sufficienza del criterio. Per la dimostrazione della parte necessaria, ed in particolare sull'unicità della soluzione, occorre lavorare sulle proprietà della matrice A .

L'equazione (2.9) è nota come *equazione di Lyapunov*. Pertanto, se essa è verificata con Q simmetrica definita positiva, allora la derivata della funzione radialmente illimitata e globalmente definita positiva $V(\mathbf{x})$ è globalmente definita negativa. Questo garantisce che il punto di equilibrio origine sia globalmente asintoticamente stabile per il sistema. Osserviamo anche che è possibile fissare una generica matrice Q simmetrica definita positiva (generalmente si pone $Q = I$ per semplicità di calcolo) e risolvere l'equazione di Lyapunov per determinare P .

Riformulando il problema prendendo spunto dai precedenti ragionamenti, affinché un sistema soddisfi la condizione di stabilità asintotica deve valere che

esista una matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^T P + P A \prec 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Quest'ultimo risultato è in forma di *disequazione lineare matriciale*, conosciuta come LMI (*Linear Matrix Inequality*) e ci consente di verificare la condizione di stabilità asintotica per un sistema lineare stazionario. L'importanza di tale riscrittura risiede nel fatto di poter utilizzare tutta la teoria alla base di tali tipi di problemi di ottimizzazione e di potersi avvalere dei numerosi risolutori automatici disponibili gratuitamente come *Yalmip* [3] e *SeDuMi* [4]. Per una breve introduzione a tali strumenti, si faccia riferimento all'Appendice B.

2.2 Il metodo di Lyapunov su sistemi LPV

La proprietà di tempo invarianza delle matrici A , B , C e D decade qualora il sistema sia affetto da incertezza: in tali circostanze, quello che si fa è lasciare come parametri incogniti quei fattori di incertezza che intervengono nella struttura del sistema. Il modello si presenta quindi nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\boldsymbol{\delta})\mathbf{x}(t) + B(\boldsymbol{\delta})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C(\boldsymbol{\delta})\mathbf{x}(t) + D(\boldsymbol{\delta})\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

Il vettore $\boldsymbol{\delta} \in \Delta \subset \mathbb{R}^k$ rappresenta il vettore dei parametri incerti e può influenzare in generale tutte le matrici del sistema. Tale vettore potrebbe essere incognito in quanto formato da grandezze non misurabili, oppure avere una struttura variabile nel tempo. Nella pratica è molto facile che ciò accada: si pensi semplicemente ad un veicolo in movimento che vede la sua massa diminuire in virtù del consumo di carburante. In tali casi, è necessario introdurre il vettore $\boldsymbol{\delta}$ tempo variante per avere un modello più fedele alla realtà.

Nel nostro studio tratteremo soltanto quei casi che soddisfano la seguente ipotesi: la dipendenza delle matrici dal vettore dei parametri $\boldsymbol{\delta}$ deve essere di tipo affine, ovvero:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\delta}) &= A_0 + \delta_1 A_1 + \dots + \delta_k A_k \\ B(\boldsymbol{\delta}) &= B_0 + \delta_1 B_1 + \dots + \delta_k B_k \\ C(\boldsymbol{\delta}) &= C_0 + \delta_1 C_1 + \dots + \delta_k C_k \\ D(\boldsymbol{\delta}) &= D_0 + \delta_1 D_1 + \dots + \delta_k D_k \end{aligned} \tag{2.16}$$

La dipendenza dai parametri incerti è quindi lineare. Pertanto, il sistema in (2.15) con matrici affini è detto LPV (*Linear Parameters Varying*).

Riconducendoci al caso $\mathbf{u}(t) = 0$, in sistema LPV si presenta nella forma seguente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\boldsymbol{\delta})\mathbf{x}(t) \tag{2.17}$$

Per poter sfruttare la teoria delle LMI e ridurre la complessità del problema, occorre innanzitutto garantire che Δ sia un *insieme convesso finitamente generato*. Brevemente, si riportano le definizioni fondamentali alla corretta comprensione del concetto:

Definizione 2.3 *Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per ogni coppia $(x, y) \in S$ vale che:*

$$(1 - \alpha)x + \alpha y \in S \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Da questi tipi di insieme possiamo ulteriormente definire:

- **iperpiano:** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$;
- **iperspazio:** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$;
- **poliedro:** *rappresenta quella regione del piano costituita dall'intersezione di un numero finito di iperpiani o iperspazi;*
- **politopo:** *rappresenta un poliedro compatto, cioè chiuso e limitato.*

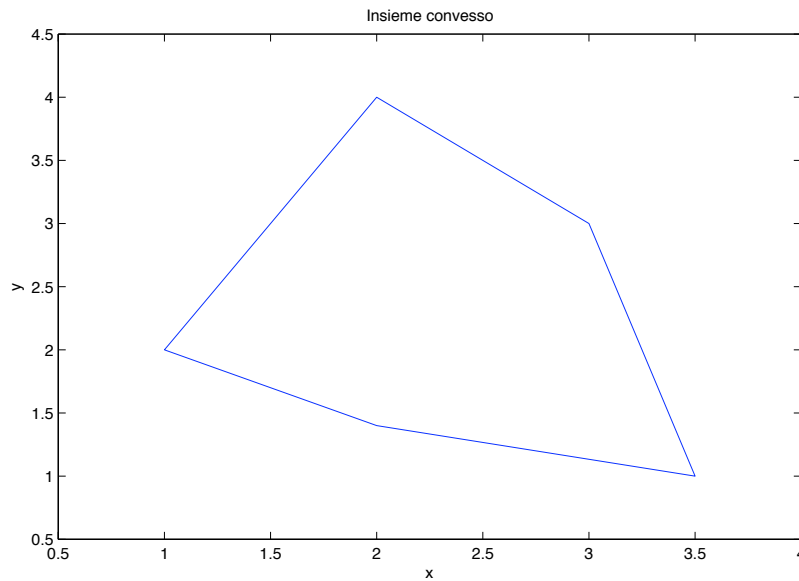


Figura 2.3: Insieme convesso finitamente generato: politopo.

Pertanto, per il resto della trattazione il vettore dei parametri incerti $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$ è tale che soddisfi per ogni istante di tempo $t \geq 0$ il vincolo:

$$\boldsymbol{\delta} \in \Delta = \text{co}\{\boldsymbol{\delta}^1, \dots, \boldsymbol{\delta}^k\} = \left\{ \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{\delta} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \boldsymbol{\delta}^{(i)}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (2.18)$$

dove $\boldsymbol{\delta}^i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, N$, sono vettori dati che rappresentano i vertici del politopo e $\text{co}\{\cdot\}$ denota la chiusura convessa di tali vertici.

Analizziamo ora il caso in cui l'incertezza sia tempo invariante, ovvero ci troviamo nella situazione in cui i parametri incerti sono costanti nel tempo. Il risultato espresso in (2.14) è applicabile anche a (2.17):

Teorema 2.5 *Il sistema in (2.17) è quadraticamente stabile se $\exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che:*

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^T(\boldsymbol{\delta})P + PA(\boldsymbol{\delta}) \prec 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta} \in \Delta \end{cases} \quad (2.19)$$

con la stessa P per ogni $\boldsymbol{\delta}$.

Inoltre, se l'insieme Δ che caratterizza il vettore di parametri incerti è un *politopo*, allora il sistema non è solo quadraticamente stabile, ma è anche *globalmente asintoticamente esponenzialmente stabile*. Tuttavia, a livello applicativo (2.19) richiede di risolvere un problema con *infiniti vincoli*: è perciò impensabile affrontare un problema pratico a questo livello.

A questo punto, la teoria sulle LMI permette di verificare la stabilità asintotica di un sistema semplicemente concentrandosi sugli N vertici $\boldsymbol{\delta}^{(i)}, i = 1, \dots, N$ del politopo; in particolare quello che interessa è valutare se i vertici del politopo permettono di risolvere la relativa equazione di Lyapunov.

Teorema 2.6 *Sia $A(\boldsymbol{\delta})$ affine, cioè:*

$$A(\boldsymbol{\delta}) = A_0 + \delta_1 A_1 + \dots + \delta_k A_k$$

e sia Δ un insieme compatto e finitamente generato, cioè:

$$\Delta = \text{co}\{\boldsymbol{\delta}^1, \dots, \boldsymbol{\delta}^k\}$$

Allora $A(\boldsymbol{\delta})$ è globalmente asintoticamente esponenzialmente stabile $\forall \boldsymbol{\delta} \in \Delta$ se e solo se $A(\boldsymbol{\delta}^{(i)})$ con $i = 1, \dots, N$ sono globalmente asintoticamente esponenzialmente stabili. Ovvero se $\exists P = P^T$ tale che:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^T(\boldsymbol{\delta}^{(i)})P + PA(\boldsymbol{\delta}^{(i)}) \prec 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.20)$$

Vediamo un semplice esempio. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\ddot{\zeta}(t) + \dot{\zeta}(t) + k\zeta(t) = 0 \quad (2.21)$$

con $0 \leq k \leq \kappa$ unico parametro incerto. Scegliendo come stato $\boldsymbol{x}(t) = [\zeta(t), \dot{\zeta}(t)]^T$

si ottiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$ è affine e riscrivibile perciò come:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A_0} + k \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{A_1}$$

L'insieme Δ del parametro incerto k degenera in questo caso in un segmento di estremi 0 e κ : pertanto i due vertici da considerare sono $\delta^{(1)} = 0$ e $\delta^{(2)} = \kappa$.

Quindi, applicando la (2.20) otteniamo:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^T(0)P + PA(0) \prec 0 \\ A^T(\kappa)P + PA(\kappa) \prec 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & -1 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & -1 \end{bmatrix} \prec 0 \end{cases}$$

nell'incognita $P = P^T$.

Capitolo 3

Funzioni di Lyapunov polinomiali omogenee

Una simile trattazione può essere inoltre ripetuta anche per quanto riguarda funzioni di Lyapunov non più soltanto quadratiche nello stato ma omogenee nelle variabili di stato, del tipo:

$$v_m(\mathbf{x}) = \sum_{i_1+\dots+i_n=m} c_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (3.1)$$

dove i_1, \dots, i_n sono interi non negativi e $c_{i_1,\dots,i_n} \in \mathbb{R}$ sono coefficienti di peso.

Le candidate di Lyapunov così costruite prendono il nome di funzioni di Lyapunov polinomiali omogenee, in breve HPLF (*Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions*). Tali funzioni sono una valida alternativa alle altre classi di funzioni di Lyapunov poichè migliorano il grado di stabilità robusta rispetto alle funzioni quadratiche di Lyapunov. Infatti all'aumentare del grado della funzione scelta, aumentano anche i parametri a disposizione ed il conseguente potere descrittivo della candidata di Lyapunov.

Riprendiamo quindi il sistema lineare incerto presentato nel capitolo precedente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\boldsymbol{\delta})\mathbf{x}(t) \quad (3.2)$$

dove $A(\boldsymbol{\delta})$ può essere riscritta come già mostrato in precedenza come:

$$A(\boldsymbol{\delta}) = (A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i) \quad (3.3)$$

dove $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono matrici date e $\boldsymbol{\delta}$ rispetta la (2.18). Il nostro studio è tuttavia ristretto ad una particolare classe di funzioni di Lyapunov, ovvero alle funzioni polinomiali omogenee di grado $2m$. Tale scelta non è comunque restrittiva, in quanto le HPLF di grado dispari non possono essere positive per ogni $x \neq 0$.

L'obiettivo è quello di trovare un HPLF di grado $2m$, denotato con $v_{2m}(\mathbf{x})$, tale che:

1. $v_{2m}(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\dot{v}_{2m}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{\delta} \in \Delta$

Una HPLF di grado $2m$ ammette una *rappresentazione matriciale quadratica* (*Square Matricial Representation, SMR*) del tipo:

$$v_{2m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\{m\}})^T C_g \mathbf{x}^{\{m\}} \quad (3.4)$$

dove $\mathbf{x}^{\{m\}} \in \mathbb{R}^d$ si dice *vettore esteso* ed è il vettore della forma omogenea di grado m in \mathbf{x} (contenente tutti i monomi di grado m formati con le n componenti dello stato), mentre $C_g \in \mathbb{R}^{d \times d}$ è una matrice di coefficienti. Non è difficile verificare che la dimensione d di $\mathbf{x}^{\{m\}}$ è data da:

$$d = \frac{(n + m - 1)!}{(n - 1)!m!} \quad (3.5)$$

Un'importante proprietà dell'SMR è che la matrice C_g non è unica. Infatti, se si considera l'insieme della matrici definito come

$$\mathcal{L} = \{L = L^T \in \mathbb{R}^{d \times d} : (\mathbf{x}^{\{m\}})^T L \mathbf{x}^{\{m\}} = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.6)$$

allora la famiglia di matrici C_g che descrivono $v_{2m}(x)$ può essere parametrizzata come

$$C_g(\boldsymbol{\alpha}) = C_g + L(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.7)$$

dove $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{L}}}$ è un vettore di parametri liberi e $L : \mathbb{R}^{d_{\mathcal{L}}} \rightarrow \mathcal{L}$ è una parametrizzazione lineare di \mathcal{L} . La dimensione $d_{\mathcal{L}}$ è data da:

$$d_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}d(d+1) - \frac{(n+2m-1)!}{(n-1)!2m!}. \quad (3.8)$$

Concludendo, la rappresentazione

$$v_{2m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\{m\}})^T C_g(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}^{\{m\}} \quad (3.9)$$

dove $\mathbf{x}^{\{m\}} \in \mathbb{R}^d$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{L}}}$, viene detta *rappresentazione matriciale quadratica completa* (*Complete SMR, CSMR*) di $v_{2m}(\mathbf{x})$.

Introduciamo adesso dei teoremi necessari allo studio delle HPLF. Per un generico sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, introduciamo la *matrice estesa* $A_{\{m\}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, definita nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^{\{m\}} = \frac{\partial \mathbf{x}^{\{m\}}}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} = A_{\{m\}} \mathbf{x}^{\{m\}} \quad (3.10)$$

Le matrici estese giocano un ruolo fondamentale nell'analisi dei sistemi di controllo. La veridicità di questa affermazione è dovuta al fatto che la *matrice estesa* $A_{\{m\}}$ ha le seguenti due proprietà fondamentali:

1. Sia $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e α, β in \mathbb{R} . Allora

$$(\alpha A + \beta B)_{\{m\}} = \alpha A_{\{m\}} + \beta B_{\{m\}} \quad (3.11)$$

2. Siano $A_{0,\{m\}}$ e $A_{i,\{m\}}$ due matrici che denotano, rispettivamente, le matrici

estese di A_0 e A_i . Consideriamo il cosiddetto *sistema esteso*

$$\dot{\mathbf{x}}^{\{m\}}(t) = (A_{0,\{m\}} + \sum_{i=1}^k \delta_i A_{i,\{m\}}) \mathbf{x}^{\{m\}}(t) = A(\boldsymbol{\delta})_{\{m\}} \mathbf{x}^{\{m\}}(t) \quad (3.12)$$

Allora, per ogni $v_{2m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\{m\}})^T V \mathbf{x}^{\{m\}}$, si ha

$$\frac{d}{dt} v_{2m}(\mathbf{x}) \big|_{\dot{\mathbf{x}}^{\{m\}}(t)=A(\boldsymbol{\delta})_{\{m\}} \mathbf{x}^{\{m\}}(t)} = \frac{d}{dt} v_{2m}(\mathbf{x}) \big|_{\dot{\mathbf{x}}(t)=A(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{x}(t)} \quad (3.13)$$

I seguenti risultati forniscono una condizione sufficiente per stabilire l'esistenza di una HPLF di grado $2m$ per il sistema (3.2).

Teorema 3.1 *Sia $\bar{A}_j = A(\boldsymbol{\delta}^j)$, $j = 1, \dots, N$ e sia $\bar{A}_{j,\{m\}}$ la sua matrice estesa. Se il sistema di LMI*

$$\begin{cases} V > 0 \\ -V \bar{A}_{j,\{m\}} - \bar{A}_{j,\{m\}}^T V - L(\boldsymbol{\alpha}^j) > 0, j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.14)$$

ammette una soluzione ammissibile $V = V^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\boldsymbol{\alpha}^j \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{L}}}$, $j = 1, \dots, N$, allora $v_{2m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\{m\}})^T V \mathbf{x}^{\{m\}}$ è una HPLF per (3.2).

Tale risultato è la generalizzazione con le matrici estese del Teorema 2.6. É da sottolineare il fatto che il sistema (3.14) è un problema LMI di ammissibilità di soluzione che può essere risolto efficacemente per via numerica mediante tool quali i già citati Yalmip e SeDuMi (Appendice B). Poniamo in evidenza che le variabili libere del sistema (3.14) sono la matrice $V = V^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ed i vettori $\boldsymbol{\alpha}^j \in \mathbb{R}^{d_{\mathcal{L}}}$, $j = 1, \dots, N$, e sono in numero uguale a $d(d+1)/2 + N \cdot d_{\mathcal{L}} - 1$. In alcuni casi, a seconda della dimensione n di \mathbf{x} e del grado $2m$ di $v_{2m}(\mathbf{x})$, la condizione sufficiente del Teorema 3.1 diventa anche necessaria per l'esistenza di una HPLF per il sistema (3.2). Il prossimo risultato che vedremo è centrale per stabilire tale condizione necessaria e sufficiente:

Lemma 3.1 *Consideriamo l'insieme*

$$\mathfrak{E} = \{(n, 2), n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 2m), m \in \mathbb{N}\} \cup \{(3, 4)\}, \quad (3.15)$$

dove \mathbb{N} denota l'insieme dei numeri interi positivi. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $g_{2m}(\mathbf{x})$ una forma omogenea non negativa di grado $2m$. Se $(n, 2m) \in \mathfrak{E}$, allora $g_{2m}(\mathbf{x})$ può essere scritta come somma di quadrati di una forma omogenea di grado m . Inoltre, se $g_{2m}(\mathbf{x})$ è positiva, allora ammette un SMR definito positivo, cioè esiste una matrice $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$ definita positiva tale che $g_{2m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\{m\}})^T V \mathbf{x}^{\{m\}}$.

Enunciato quindi tale Lemma si può presentare il successivo ed ultimo teorema:

Teorema 3.2 *Sia $(n, 2m) \in \mathfrak{E}$. Allora, esiste una HPLF di grado $2m$ per il sistema (3.2) se e solo se il sistema (3.14) ammette una soluzione ammissibile.*

L'alto numero di parametri liberi nelle LMI fa sì che la condizione sufficiente data dal Teorema 3.1 sia più forte rispetto alla condizione di stabilità quadratica del Teorema 2.5. Inoltre, la CSMR della forma omogenea permette di formulare la condizione necessaria e sufficiente del Teorema 3.2 per il caso in cui $(n, 2m) \in \mathfrak{E}$.

3.1 La costruzione della matrice $A_{i, \{m\}}$

Presentiamo, a titolo di esempio, il calcolo della matrice $A_{i, \{m\}}$ per $n = 2, m = 2$, cioè con:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2]^T \\ \mathbf{x}^{\{2\}} &= [x_1^2, x_2^2, x_1x_2]^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

Introduciamo la seguente notazione per la matrice $A(\boldsymbol{\delta})$ per evidenziare i termini affini rispetto ai parametri incerti δ_i , $i = 1, \dots, k$:

$$A(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} A^{11}(\boldsymbol{\delta}) & A^{12}(\boldsymbol{\delta}) \\ A^{21}(\boldsymbol{\delta}) & A^{22}(\boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{11} + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i^{11} & A_0^{12} + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i^{12} \\ A_0^{21} + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i^{21} & A_0^{22} + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i^{22} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Dalla definizione di sistema esteso:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^{\{m\}} = A_{\{m\}} \mathbf{x}^{\{m\}} \quad (3.18)$$

si procede per il calcolo delle matrice estesa $A_{\{m\}}(\boldsymbol{\delta})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^{\{m\}} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{x}^{\{m\}}}{\partial \mathbf{x}} A(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{11}(\boldsymbol{\delta}) & A^{12}(\boldsymbol{\delta}) \\ A^{21}(\boldsymbol{\delta}) & A^{22}(\boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1^2 A^{11}(\boldsymbol{\delta}) + 2x_1 x_2 A^{12}(\boldsymbol{\delta}) \\ 2x_1 x_2 A^{21}(\boldsymbol{\delta}) + 2x_2^2 A^{22}(\boldsymbol{\delta}) \\ x_1^2 A^{21}(\boldsymbol{\delta}) + x_1 x_2 (A^{11}(\boldsymbol{\delta}) + A^{22}(\boldsymbol{\delta})) + x_2^2 A^{12}(\boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} = \\ &= \overbrace{\begin{bmatrix} 2A^{11}(\boldsymbol{\delta}) & 0 & 2A^{12}(\boldsymbol{\delta}) \\ 0 & 2A^{22}(\boldsymbol{\delta}) & 2A^{21}(\boldsymbol{\delta}) \\ A^{21}(\boldsymbol{\delta}) & A^{12}(\boldsymbol{\delta}) & (A^{11}(\boldsymbol{\delta}) + A^{22}(\boldsymbol{\delta})) \end{bmatrix}}^{A(\boldsymbol{\delta})_{\{m\}}} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si può concludere quindi che la generica $A_{i,\{m\}}$ è nella forma:

$$A_{i,\{m\}} = \begin{bmatrix} 2A_i^{11} & 0 & 2A_i^{12} \\ 0 & 2A_i^{22} & 2A_i^{21} \\ A_i^{21} & A_i^{12} & (A_i^{11} + A_i^{22}) \end{bmatrix}$$

Analogamente si può procedere al variare dei valori di n e m .

3.2 La costruzione della matrice $L(\boldsymbol{\alpha})$

Riprendendo la definizione (3.6):

$$\mathcal{L} = \{L = L^T \in \mathbb{R}^{d \times d} : (\mathbf{x}^{\{m\}})^T L \mathbf{x}^{\{m\}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

questa fornisce già il metodo per l'individuazione della matrice stessa. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ il vettore di parametri per L : il problema si imposta, nel caso $n = 2$, $m = 2$, come la ricerca dei valori di tali parametri così da soddisfare la condizione:

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} = 0$$

La risoluzione di tale sistema conduce alla seguente struttura:

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

che presenta un solo parametro libero in accordo con (3.8). Con un procedimento analogo si ottengono le varie matrici L al variare di n e m .

	m	2	3	4	5	6	7	8
Chesi, Garulli, Tesi, Vicino	\mathbf{k}_{\max}	5.73	6.21	6.39	6.64	6.65	6.78	6.79
Fantacci, Martini	\mathbf{k}_{\max}	5.73	6.21	6.39	6.64	6.65	6.78	6.79

Tabella 3.1: Confronto dei k_{max} al variare di m per l'esempio 1.

3.3 Alcuni esempi

Il metodo precedentemente esposto è stato implementato in codice Matlab e distribuito su Internet con il nome *RobLy* [5]. Gli autori hanno automatizzato il processo di costruzione e definizione del problema con LMI, rendendo trasparente all'utilizzatore i vari dettagli. Per approfondimenti, si rimanda all'Appendice B e al repository ufficiale.

Al fine di testare il software, sono stati condotti dei test comparativi con gli esempi proposti in [1], ed i risultati vengono ora presentati.

Esempio 1 Si considerino le matrici:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e si supponga che $k > 0$. L'interesse sta nell'individuare il valore massimo di k per cui $A(k) = A_0 + kA_1$ sia stabile. In questo esempio, $n = 2$. I risultati seguenti mostrano che le soluzioni ottenute sono in questo caso le medesime.

Esempio 2 Si considerino le matrici:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -10 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

e si supponga $k > 0$. L'interesse sta nell'individuare il valore massimo di k per cui $A(k) = A_0 + kA_1$ sia stabile. In questo esempio, $n = 3$. In [1] viene calcolato, nel caso $m = 2$, il valore massimo di k , che risulta pari a 75.1071. Col risolutore degli autori si ottiene invece 77.1239.

Esempio 3 Questo secondo esempio coincide con quello presentato nella (2.21):

$$\ddot{\zeta}(t) + \dot{\zeta}(t) + k\zeta(t) = 0$$

con $0 \leq k \leq \kappa$ unico parametro incerto. La matrice A che si ottiene scegliendo come stato $\mathbf{x}(t) = [\zeta(t), \dot{\zeta}(t)]^T$ è:

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$$

Tale matrice è affine e riscrivibile perciò come:

$$A(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A_0} + k \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{A_1}$$

L'insieme Δ del parametro incerto k degenera come già visto in un segmento di estremi 0 e κ : pertanto i due vertici da considerare sono $\delta^{(1)} = 0$ e $\delta^{(2)} = \kappa$. Calcolando le matrici estese come mostrato in (3.1) si ottiene:

$$A_{0,\{m\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,\{m\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come mostrato in (3.2), la matrice $L(\boldsymbol{\alpha})$ risulta essere:

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Quindi, applicando (3.14) otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} V > 0 \\ -V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T V - L(\boldsymbol{\alpha}^1) > 0 \\ -V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2\kappa \\ -\kappa & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2\kappa \\ -\kappa & 1 & -1 \end{bmatrix}^T V - L(\boldsymbol{\alpha}^2) > 0 \end{array} \right.$$

nell'incognita $V = V^T$ ed $L(\boldsymbol{\alpha}^j)$, $j = 1, 2$.

Come si può notare, per $k = 0$ la matrice A presenta un autovalore nullo, ed infatti correttamente il risolutore segnala l'impossibilità di garantire stabilità per qualsiasi range che contenga $k = 0$. L'esperimento mostra come sia comunque sufficiente un k positivo per poter sperare di trovare un intervallo di valori stabilizzanti. L'attenzione quindi è posta sul valore massimo k_{max} di tale parametro ed è di seguito confrontato con quello ottenuto in [1]:

Chesi, Garulli, Tesi, Vicino	m	1	2	3	4	5	6
	k_{max}	1	1.50	1.99	2.29	2.40	2.50
	m	7	8	9	10	11	12
	k_{max}	2.61	2.66	2.69	2.74	2.77	2.79
Fantacci, Martini	m	1	2	3	4	5	6
	k_{max}	1.020	1.530	2.039	2.329	2.431	2.534
	m	7	8	9	10	11	12
	k_{max}	2.639	2.684	2.722	2.759	2.791	2.809

Tabella 3.2: Confronto dei k_{max} al variare di m per l'esempio 3.

In questo caso, il risolutore proposto dagli autori ottiene risultati migliori.

Esempio 4 Si considerino le matrici:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

e si supponga che $k \geq 0$. Ci si convince facilmente che k debba essere minore di 1 per garantire che gli autovalori di $A(k) = A_0 + A_1$ siano minori di 0. In [1], si ottiene tale risultato solo a partire da $m = 3$, mentre il risolutore proposto dagli autori perviene a tale conclusione fin da $m = 1$.

Capitolo 4

Applicazione: il pendolo inverso

4.1 Modellazione

Un'asta di lunghezza l , inerzia I e massa m , supposta concentrata tutta nel suo centro di massa, è incernierata ad un carrello di massa M , il cui movimento è comandato da una forza F . Il sistema meccanico complessivo è descritto nella seguente figura:

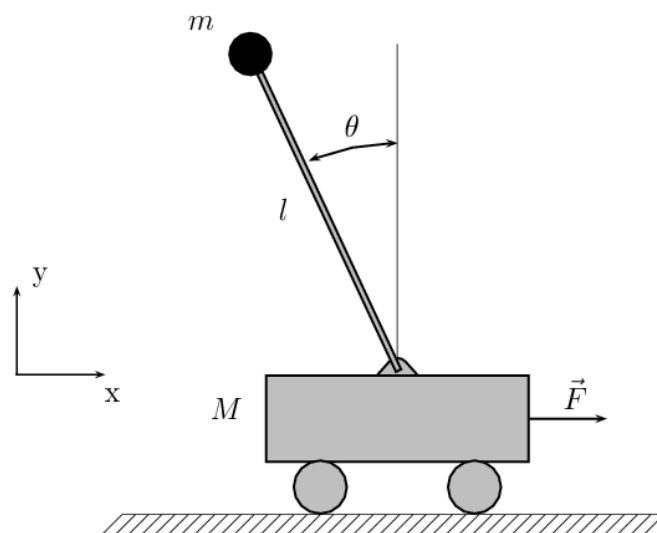


Figura 4.1: Schema del problema.

Le equazioni di moto possono essere facilmente ricavate usando le equazioni di Lagrange. Facendo riferimento al disegno, dove la posizione del centro di massa del carrellino al tempo t è $x_c(t)$, $\theta(t)$ indica lo scostamento angolare del pendolo dalla verticale e le forze attive sono quella di gravità e F in direzione x , la Lagrangiana $L = T - V$, con T energia cinetica del sistema e V energia potenziale, risulta essere:

$$L = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad (4.1)$$

dove si è omessa la dipendenza temporale per semplicità di notazione. Con v_c si intende la velocità del carrello e con v_p la velocità del pendolo. Considerando che, in ogni istante, la posizione del pendolo è data dalla coppia di coordinate $(x_c + l\sin\theta, l\cos\theta)$, le due velocità possono essere espresse rispetto a x_c e θ come segue:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \dot{x}_c^2 \\ v_p^2 &= \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(x_c + l\sin\theta)\right)^2 \end{aligned}$$

In particolare, semplificando l'espressione relativa a v_p^2 si ottiene:

$$\begin{aligned} v_p^2 &= \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(x_c + l\sin\theta)\right)^2 = (-l\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{x}_c + l\cos\theta\dot{\theta})^2 = \\ &= l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \dot{x}_c^2 + l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_cl\cos\theta\dot{\theta} = \\ &= \dot{x}_c^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_cl\cos\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

La Lagrangiana risulta ora quindi nella seguente forma:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}_c^2 + ml\dot{x}_c\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad (4.2)$$

Le conseguenti equazioni di moto sono dunque date da:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} = F \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ora:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = \frac{d}{dt}((M + m)\dot{x}_c - ml\dot{\theta}\cos\theta) = (M + m)\ddot{x}_c - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta$
- $\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(-ml\dot{x}_c\cos\theta + ml^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}) = -ml\ddot{x}_c\cos\theta + ml\dot{x}_c\sin\theta\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta}$
- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{x}_c\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta$

Sostituendo tali risultati in (4.3) si ottengono infine le equazioni di moto dell'intero sistema:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x}_c - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = ml\cos\theta\ddot{x}_c \end{cases} \quad (4.4)$$

Esse descrivono completamente la dinamica del sistema. Tali equazioni sono non lineari, ma poichè l'obiettivo del nostro controllo è quello di mantenere il pendolo lungo la verticale, possiamo procedere ad una linearizzazione nell'intorno di $\theta \simeq 0$. Per piccoli valori di θ , si è soliti approssimare le funzioni $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$ con il corrispettivo sviluppo di Taylor del primo ordine, cioè:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\simeq \theta \\ \cos(\theta) &\simeq 1 \end{aligned}$$

Inoltre, per eliminare il contributo non lineare dato da $ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2$, imponiamo

che $\dot{\theta} \simeq 0$. Si ottengono pertanto le seguenti equazioni linearizzate:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x}_c - ml\ddot{\theta} = F \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta = ml\ddot{x}_c \end{cases} \quad (4.5)$$

4.2 Controllore stabilizzante

Adottando la scelta canonica per lo stato del sistema:

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

da (4.5) si ottiene la seguente rappresentazione $I/S/U$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \Delta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_3 \\ 0 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} F \\ \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

dove si è scelto F come ingresso e θ come uscita. Inoltre, si ha che:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{m^2 l^2 g}{(M+m)I+mMl^2} \\ \Delta_2 &= mgl \left(\frac{1}{I+ml^2} + \frac{m^2 l^2}{(I+ml^2)((M+m)I+mMl^2)} \right) \\ \Delta_3 &= \frac{I+ml^2}{(M+m)I+mMl^2} \\ \Delta_4 &= \frac{ml}{(M+m)I+mMl^2}\end{aligned}$$

La conseguente funzione di trasferimento è:

$$\begin{aligned}P(s) &= \frac{Ml^3 m^2 + lm(M+m)I}{(Mml^2 + mI + MI)(Ml^2 m s^2 - gl m^2 - Mglm + m s^2 I + M s^2 I)} = \\ &= \frac{ml}{((M+m)I + mMl^2)s^2 - (M+m)mgl}\end{aligned}$$

Procediamo adesso con lo studio di un controllore stabilizzante a livello *simbolico* della tipologia *Proporzionale Derivativo*.

Dalla precedente espressione ricaviamo la posizione dei due poli del sistema:

$$s = \pm \sqrt{\frac{(M+m)mgl}{(M+m)I + mMl^2}} \quad (4.6)$$

E' possibile fin da subito notare che i poli al denominatore sono uguali ma di segno opposto. Facendo riferimento al luogo delle radici ciò significa che al variare del guadagno ad anello i poli giungono all'origine quindi diventano complessi coniugati, ovvero oscillanti. Non è pertanto possibile stabilizzare il sistema con un solo controllore proporzionale. L'idea è quella di introdurre uno zero a sinistra per annullare il polo stabile, ma introdurne un altro il più possibile a sinistra in modo da spostare il centro della stella sul semipiano sinistro ed essere in grado, pertanto, di stabilizzare il sistema per certi valori del guadagno ad anello. Questo tipo di controllore si dice *Proporzionale Derivativo* e quello proposto dagli autori

è nella forma:

$$C(s) = k \frac{s + \sqrt{\frac{(M+m)mg}{(M+m)I+mMI^2}}}{s + 10\sqrt{\frac{(M+m)mg}{(M+m)I+mMI^2}}} \quad (4.7)$$

Scriviamolo in I/S/U... Definiamo i seguenti valori nominali:

- $M_0 = 0.5Kg$;
- $m_0 = 0.2Kg$;
- $l_0 = 0.3m$;
- $g_0 = 9.81m/s^2$
- $I_0 = 0.006Kg \cdot m^2$

Adottando quindi un controllore del tipo:

$$C(s) = k \frac{s + 5.586}{s + 55.86} \quad (4.8)$$

dove lo zero stabile in -5.586 è necessario per annullare il polo stabile per l'impianto $P_0(s)$ nominale, il polo in -55.86 serve per sbilanciare il centro della stella verso sinistra mentre k è il parametro proporzionale libero per variare il guadagno ad anello. Adottando quindi tale controllore si ottiene:

$$C(s)P_0(s) = \frac{0.06k}{s^2 + 53.2740s - 328.7920} \quad (4.9)$$

che in un sistema retroazionato con trasduttore H unitario permette di stabilizzare il sistema che risulta:

$$W(s) = \frac{0.06k}{s^2 + 53.274s + 0.06k - 328.792} \quad (4.10)$$

Scelto quindi un k appropriato, il sistema nominale risulta stabile, ovvero con tutti i poli a parte reale minore di 0. Un esempio potrebbe essere con $k = 15000$.

Pertanto il controllore risulta:

$$C(s) = 15000 \frac{s + 5.586}{s + 55.86} \quad (4.11)$$

Prendendo adesso come riferimento il controllore $C(s)$ scelto e l'impianto $P(s)$ generico, si studia la robustezza del controllore. Pertanto:

$$C(s)P(s) = 15000 \frac{ml(s + 5.586)}{(s + 55.86)((M + m)I + mMI^2)s^2 - (M + m)mgl} \quad (4.12)$$

e conseguentemente

$$\begin{aligned} W(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= \frac{15000ml(s+5.586)}{(s+55.86)[((M+m)I+mMI^2)s^2-(M+m)mgl]+15000ml(s+5.586)} = \\ &= \frac{15000mls+83790}{((M+m)I+mMI^2)s^3+55.86((M+m)I+mMI^2)s^2+(15000ml-(M+m)mgl)s+83790ml-55.86(M+m)mgl} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da quest'ultimo risultato, con semplici calcoli con l'antitrasformata di Laplace, si ottiene la seguente equazione nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} ((M + m)I + mMI^2)\ddot{\theta} + 55.86((M + m)I + mMI^2)\dot{\theta} + \\ + (15000ml - (M + m)mgl)\dot{\theta} + (83790ml - 55.86(M + m)mgl)\theta = \\ = 15000ml\dot{u} + 83790u \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definiamo lo stato del sistema come segue:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Con semplici passaggi matriciali, dalla (4.14) si ottiene la seguente matrice A per

la rappresentazione I/S/U del sistema in esame:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -55.86 & \frac{-15000ml+(M+m)mgl}{(M+m)I+mMI^2} & \frac{-83790ml+55.86(M+m)mgl}{(M+m)I+mMI^2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La matrice A è evidentemente non lineare rispetto alle varie grandezze fisiche. Supponendo costanti e pari ai valori nominali la massa M del carrello, la massa m del pendolo e l'inerzia I del pendolo, supponiamo di prendere come parametro:

$$\alpha = \frac{l}{(M_0+m_0)I_0+m_0M_0l^2} = \frac{l}{0.0042+0.1l^2} \quad (4.17)$$

La matrice A è affine rispetto a tale parametro e può essere riscritta come:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -55.86 & -2998.6266\alpha & -16681.2819\alpha \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Tale parametro, per $l = 0.3$, ovvero il valore nominale per il quale abbiamo precedentemente verificato la stabilità, risulta pari a 22.73. Pertanto, un iniziale vertice del nostro politopo, in questo caso degenerato ad un segmento, è stato proprio considerato $\alpha = 22.73$, sicuramente stabile, mentre l'altro valore è stato scelto inizialmente pari a 24.4, cioè al valore massimo assumibile dal parametro al variare di l .

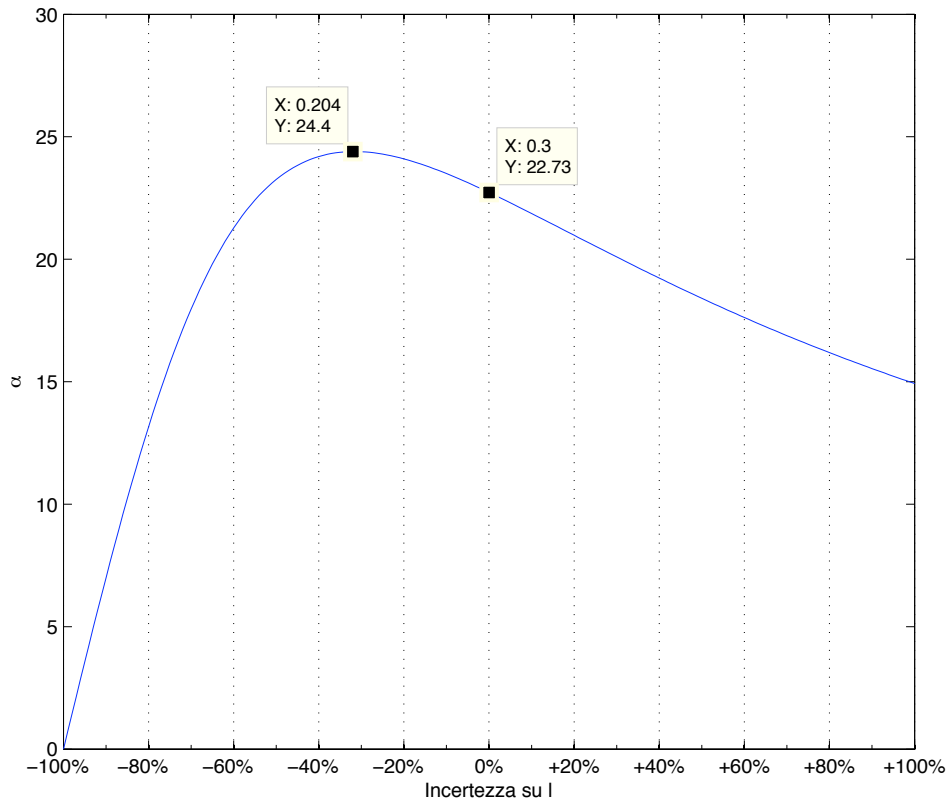


Figura 4.2: Andamento del parametro α al variare dell'incertezza su l .

4.3 Metodo di Lyapunov

Scomponiamo la matrice A rispetto al parametro α :

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -55.86 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2998.6266 & -16681.2819 \end{bmatrix}$$

Come anticipato in precedenza, l'insieme Δ del parametro incerto α è inizialmente un segmento di estremi $\delta^{(1)} = 22.73$ e $\delta^{(2)} = 24.4$. La ricerca dell'intervallo di valori che assicurano la stabilità del sistema è stata eseguita con una ricerca di tipo dicotomico sugli estremi, andando a valutare l'output del risolutore automatico

proposto dagli autori.

L'esperienza è stata condotta a partire da $m = 1$. Conseguentemente, il primo passo consiste sostanzialmente nello studio del problema con l'impostazione classica, poichè per tale valore di m si ottiene una candidata di Lyapunov quadratica omogenea classica. Di seguito riportiamo l'output del software scritto dagli autori che imposta il problema come descritto nel capitolo 3 e lo risolve.

La matrice P è definita positiva. Gli autovalori sono:

Lambda1: 4.14e-06

Lambda2: 0.052376

Lambda3: 6.7892

Il vincolo è soddisfatto. Gli autovalori sono:

Lambda1: -3.1469

Lambda2: -1.1848

Lambda3: -3.7955e-05

Il vincolo è soddisfatto. Gli autovalori sono:

Lambda1: -3.548

Lambda2: -1.188

Lambda3: -2.5342e-05

Il sistema risulta pertanto stabile per tutti i valori di α compresi tra i due estremi. Poichè il margine destro di tale intervallo risulta essere anche il massimo valore fisicamente ammissibile per il parametro, l'attenzione è stata posta sul margine inferiore. Questo è sceso fino a giungere al valore di 0.1.

L'esperimento è stato condotto quindi su m via via più grandi, ma già per

$m = 2$ si ottiene come limite inferiore per α un numero molto vicino a 0. Questa prova quindi certifica come il controllo proposto risulti robusto per variazioni significative della lunghezza dell'asta l , purchè sostanzialmente non si giunga alla sua eliminazione.

Capitolo 5

Conclusioni

La tesi ha percorso i passaggi teorici per lo studio di un sistema incerto tramite funzioni di Lyapunov omogenee. È stato presentato il concetto generale di stabilità, dapprima attraverso la formulazione classica e successivamente nella accezione di Lyapunov. Quest'ultima permette di studiare la stabilità di un sistema verificando la positività di una particolare funzione quadratica nello stato, detta candidata di Lyapunov. L'idea di base di tale metodo è la formalizzazione matematica di un'osservazione fisica fondamentale: se l'energia totale di un sistema di qualsiasi natura, ad esempio meccanico o elettrico, viene continuamente dissipata, allora la traiettoria del sistema, sia questo lineare o non lineare, deve convergere a regime in un punto di equilibrio.

Il metodo di Lyapunov ben si presta allo studio di un sistema di controllo con incertezza, chiaramente più complesso di quello di uno noto a priori. Quando si affronta un processo con queste caratteristiche non è più possibile parlare semplicemente di stabilità del sistema sotto controllo, ma bisogna garantire la stabilità asintotica del sistema per ogni valore che l'incertezza può assumere all'interno del proprio insieme di variazione. Il controllo che riesce a risolvere questo problema è detto appunto robusto. Tramite il metodo di Lyapunov, tale studio è ricondotto alla risoluzione di un sistema di disequazioni lineari matriciali (LMI), da valutare

sui vertici del politopo definito dai parametri incerti stessi.

Per problemi di elevata complessità, la funzione di Lyapunov standard non è in grado di descrivere completamente il sistema incerto. Una prima soluzione al problema potrebbe essere quella di cercare altre forme della funzione specifiche per il problema da risolvere. Naturalmente, l'interesse forte è nel mantenere la stessa struttura quadratica senza dover stravolgere il lavoro già svolto. Tale obiettivo si raggiunge pienamente con una generalizzazione della funzione di Lyapunov standard, ora non più soltanto quadratica nello stato ma anche omogenea nelle variabili di stato. Le candidate di Lyapunov così costruite prendono il nome di funzioni di Lyapunov polinomiali omogenee, in breve HPLF (Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions). All'aumentare del grado della funzione scelta, aumentano anche i parametri a disposizione ed il conseguente potere descrittivo della candidata.

La generalizzazione avviene attraverso 3 passaggi fondamentali: la definizione dello stato esteso del sistema, della matrice A estesa e la definizione della matrice L . Quest'ultima permette di ovviare alla non unicità di rappresentazione della matrice A estesa.

Il procedimento di formulazione e risoluzione delle LMI con HPLF è stato implementato in Matlab e reso disponibile su Internet [5]: i risultati forniti dal risolutore in questa tesi mostrano l'efficacia del metodo.

Appendice A

Si riporta di seguito la dimostrazione del Teorema di Lyapunov (Teorema 2.1 nella pagina 15 e Teorema 2.2 nella pagina 15).

Dimostrazione

Si presenterà una prova di tipo geometrico, limitata al caso $n = 2$; le considerazioni che vengono svolte hanno, tuttavia, validità generale.

Si consideri una funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva in un intorno $S(\mathbf{x}_e, r)$ e la corrispondente superficie $V = V(x_1, x_2)$ nello spazio cartesiano (x_1, x_2, V) . Intersecando tale superficie con piani perpendicolari all'asse V , definiti dall'equazione:

$$V = k$$

si ottengono delle curve le cui proiezioni sul piano (x_1, x_2) prendono il nome di *linee di livello* della funzione $V(\mathbf{x})$. Tali proiezioni possono essere formalmente rappresentate con la relazione:

$$U_k = \{\mathbf{x} \in X : V(\mathbf{x}) = k\}$$

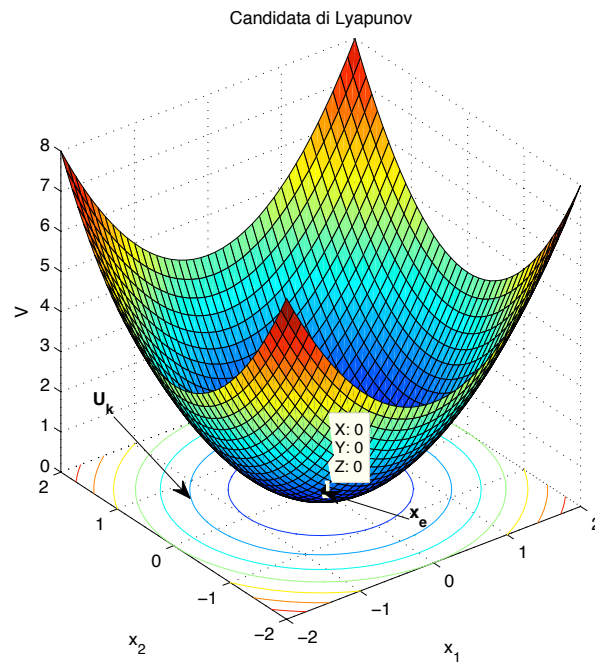


Figura 5.1: Candidata di Lyapunov.

Essendo la funzione $V(\mathbf{x})$ definita positiva, le linee di livello risultano chiuse, almeno per k sufficientemente piccolo, ed inoltre, se $k_1 < k_2$, la linea di livello relativa a k_1 è interna a quella relativa a k_2 . In base alla continuità della funzione $V(\mathbf{x})$, si può osservare che, fissato comunque un valore R_1 compreso tra 0 e r esiste certamente un valore k tale che la linea di livello U_k sia tutta interna ad $S(\mathbf{x}_e, R_1)$. La situazione si presenta cioè come in figura:

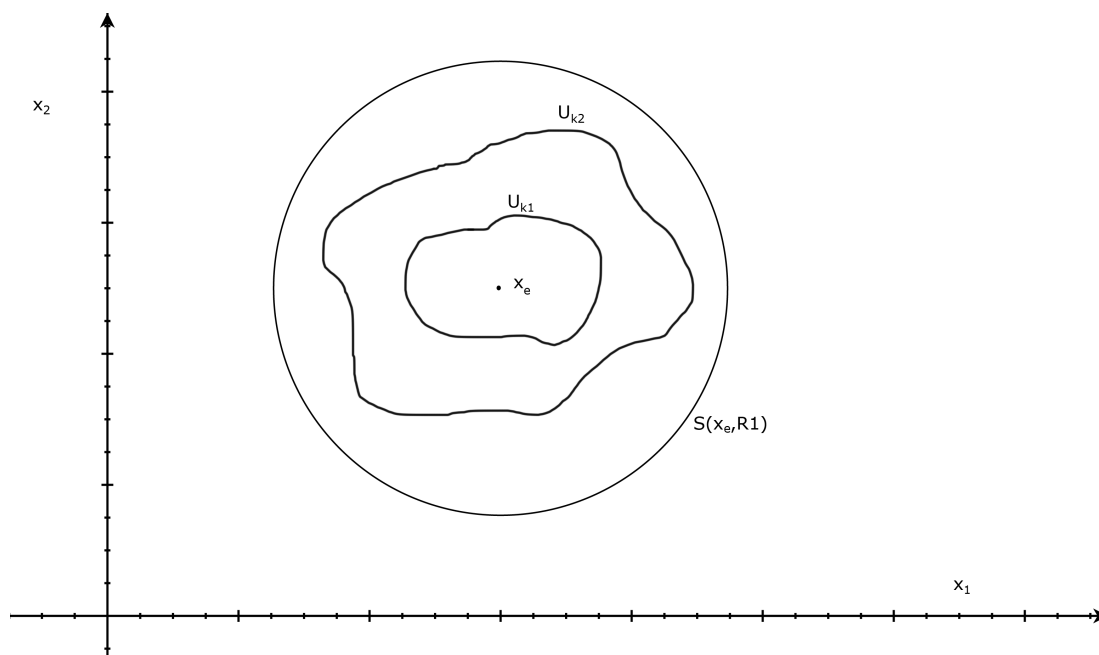


Figura 5.2: Se $k_1 < k_2$, la linea di livello relativa a k_1 è interna a quella relativa a k_2 .

Inoltre, per il fatto che U_k è una curva chiusa che comprende x_e al suo interno, è sempre possibile trovare un valore R_2 tale che $S(x_e, R_2)$ sia tutta interna alla linea di livello U_k (figura (5.3)).

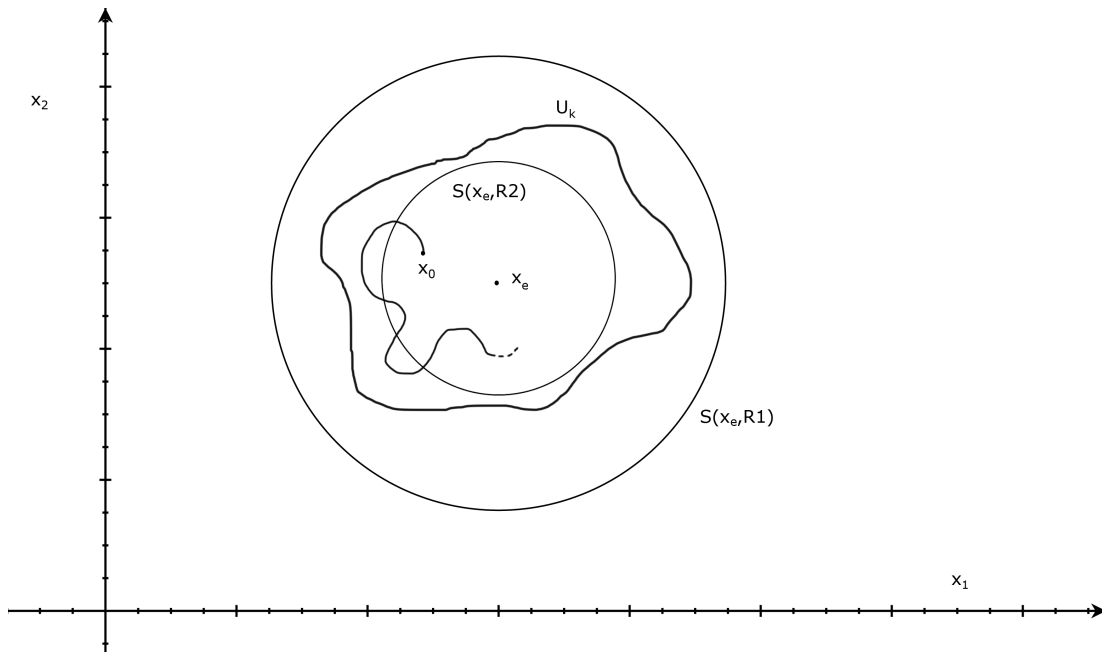


Figura 5.3: È sempre possibile trovare un valore R_2 tale che $S(\mathbf{x}_e, R_2)$ sia tutta interna alla linea di livello U_k

Si consideri ora una traiettoria dello stato avente origine in un punto \mathbf{x}_0 interno ad $S(\mathbf{x}_e, R_2)$. Calcoliamo i valori della funzione $V(\mathbf{x})$ nei punti di questa traiettoria. Poiché la derivata rispetto al tempo di tale funzione è negativa o nulla (per ipotesi) per tutti i valori del tempo per cui $\mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{x}_e, r)$, si deduce che, sul medesimo intervallo di tempo, la funzione $V(\mathbf{x}(t))$ è *non crescente*. Grazie a questo fatto ed alla continuità di $V(\mathbf{x}(t))$ rispetto a t , si può concludere che per ogni t la funzione $V(\mathbf{x}(t))$ si mantiene inferiore a U_k o, il che è lo stesso, che per ogni t lo stato $\mathbf{x}(t)$ risulta interno a $S(\mathbf{x}_e, R_1)$.

Si è così mostrato che, se $V(\mathbf{x})$ è definita positiva e $\dot{V}(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa in $S(\mathbf{x}_e, r)$, allora:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < R_2 \rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < R_1 \quad \forall t \in T(t_0)$$

Per quanto riguarda la stabilità asintotica, se $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *definita negativa*, allora $V(\mathbf{x}(t))$ è *decrescente* lungo la traiettoria $\mathbf{x}(t)$: poiché $V(\mathbf{x}(t)) > 0$ per ogni

$\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}_e$ in $S(\mathbf{x}_e, r)$ si può allora asserire che, se $\mathbf{x}_0 \in S(\mathbf{x}_e, R_2)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{x}) = 0$$

Poiché in $S(\mathbf{x}_e, r)$ la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ si annulla solo quando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$, si può concludere che:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < R_2 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$$

□

Appendice B

Vengono introdotti gli strumenti software utilizzati in questa tesi.

Yalmip e SeDuMi

Yalmip è un linguaggio di modellazione per definire e risolvere avanzati problemi di ottimizzazione. È implementato come toolbox gratuito per MATLAB ed è stato ideato da Johan Löfberg.

La principale motivazione per usare Yalmip è il rapido sviluppo di algoritmi. Il linguaggio è coerente con la sintassi standard di MATLAB e risulta quindi estremamente semplice per chi ha già familiarità con l'ambiente.

Un altro vantaggio di Yalmip consiste nell'implementazione di innumerevoli accorgimenti per la modellazione, che permettono all'utente di concentrarsi sul problema di alto livello lasciando al software il compito di ottimizzare numericamente il modello.

Classi di problemi Il linguaggio di modellazione supporta un gran numero di classi di problemi di ottimizzazioni, come quelli lineari, quadratici, geometrici, multiparametrici ed ovviamente permette di risolvere sistemi di disequazioni matriciali (LMI) in maniera efficiente.

Risolutori Una delle idee centrali in Yalmip è quella di focalizzarsi sul linguaggio e su algoritmi di alto livello, rimandando a risolutori esterni il compito

di computare il problema. In ogni caso, anche Yalmip stesso implementa algoritmi interni per l'ottimizzazione, che tipicamente risolvono sottoproblemi a partire da quello originale usando i risolutori esterni. Uno dei possibili risolutori di cui Yalmip costituisce di fatto l'interfaccia è SeDuMi.

SeDuMi è un pacchetto software completamente gratuito per risolvere problemi di ottimizzazione, rilasciato sotto licenza GNU/GPL.

L'interfaccia più usata da SeDuMi è appunto Yalmip. SeDuMi è scritto nel linguaggio di MATLAB ed in C ed è stato sviluppato per funzionare sotto MATLAB stesso. SeDuMi funziona quindi su Windows, Linux, Unix, AIX, Solaris e MacOS.

RobLy

RobLy (abbreviazione delle parole chiave ***Robust*** e ***Lyapunov***) è un software per MATLAB sviluppato dagli autori che sfrutta i due tools precedentemente descritti e che automatizza tutti i calcoli necessari alla risoluzione del problema di ricerca della soluzione. Il software è stato sviluppato in modo tale che fosse di facile ed immediato utilizzo. Nel dettaglio una volta calcolata la matrice A del sistema e scelto il grado omogeneo m dello stato basta richiamare la funzione `robLySearch` passandogli tali valori come parametri. Fatto ciò viene richiesto all'utente di inserire i soli vertici del politopo su cui eseguire l'analisi. Come output a video si ottiene la matrice L , i passaggi del risolutore Yalmip, la matrice P ed un'analisi sugli autovalori dei vincoli imposti sul problema per determinare se la soluzione trovata porta il sistema ad essere stabile.

Di seguito viene fornito un esempio:

```
>> syms k
>> A = [0 1; -k -1];
>> m = 2;
```

```
>> robLySearch(A,m)
Inserire i vertici del politopo nella formattazione
[value1,value2,...,value3]: (Inserendo x/X termina)

[0.001]
[1.530]
x

symL =
[      0,      0, -x1/2]
[      0, x1,      0]
[-x1/2,      0,      0]

{Yalmip Output}

La matrice P è definita positiva. Gli autovalori sono:
Lambda1: 0.049485
Lambda2: 0.15487
Lambda3: 1.5588

Il vincolo è soddisfatto. Gli autovalori sono:
Lambda1: -0.89919
Lambda2: -0.37188
Lambda3: -0.00012669

Il vincolo è soddisfatto. Gli autovalori sono:
Lambda1: -5.932
Lambda2: -0.027918
Lambda3: -0.004457
```

Bibliografia

- [1] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, A. Vicino
Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties
(Automatica 39, 1027-1035, 2003)

- [2] A. Ruberti, A. Isidori
Teoria della stabilità - appunti dalle lezioni
(Siderea, 1977)

- [3] YALMIP : *A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*
di J. Löfberg
Proceedings of the CACSD Conference, 2004
<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>

- [4] SeDuMi
A software package to solve optimization problems over symmetric cones
<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>

- [5] RobLy: Software MATLAB per l'analisi robusta di sistemi incerti
C. Fantacci, A. Martini
<http://code.google.com/p/robly/>