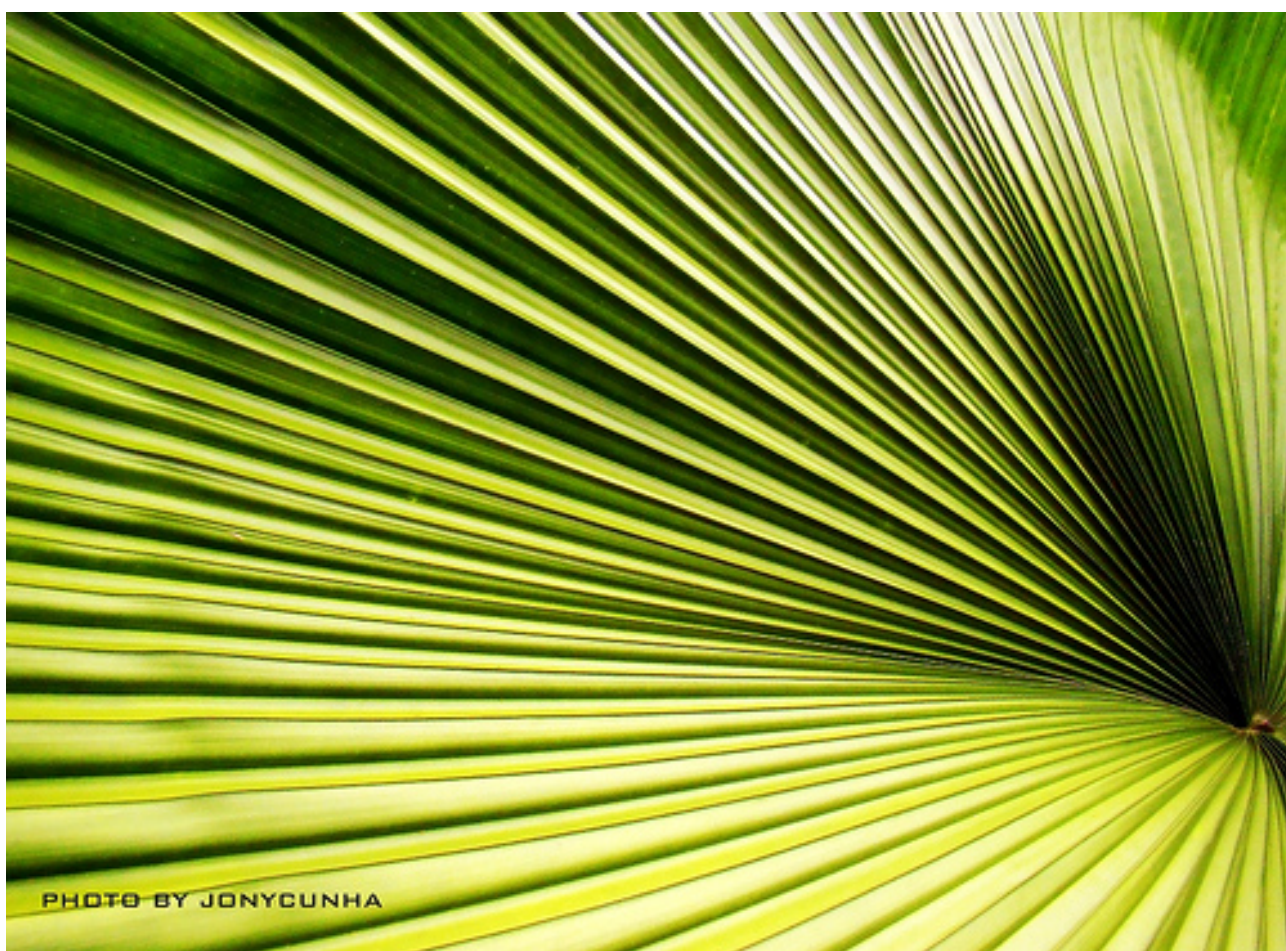


**MATEMATICA C3-ALGEBRA 2**  
**1. NUMERI REALI E RADICALI**



Jonycunha, Ponto de convergencia  
<http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/>



# Numeri reali 1

## 1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei **numeri naturali** racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- ➔ *addizione*:  $n + m$  è il numero che si ottiene partendo da  $n$  e continuando a contare per altre  $m$  unità;
- ➔ *sottrazione*:  $n - m$  è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a  $m$  dà come risultato  $n$  ;
- ➔ *moltiplicazione*:  $n \cdot m$  è il numero che si ottiene sommando  $n$  volte  $m$  , o meglio sommando  $n$  addendi tutti uguali a  $m$  ;
- ➔ *divisione*:  $n \div m$  è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per  $m$  dà come risultato  $n$  ;
- ➔ *potenza*:  $n^m$  è il numero che si ottiene moltiplicando  $m$  fattori tutti uguali a  $n$  con  $m \geq 2$  , ponendo  $n^1 = n$  e  $n^0 = 1$  ;
- ➔ *radice*:  $\sqrt[n]{m}$  con  $n \geq 2$  è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a  $n$  dà come risultato  $m$  .

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi,  $n$  ed  $m$  , la somma  $n + m$  e il loro prodotto  $n \cdot m$  è sempre un numero naturale; la potenza  $n^m$  , escluso il caso  $0^0$  , è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza  $n - m$  , il quoziente  $n \div m$  o la radice  $\sqrt[n]{m}$  .

Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre eseguire sempre operazioni. Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12000 euro anche quando in banca possediamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo  $10000 - 12000$  . Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di  $12000 - 10000$  . Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12000 euro e dobbiamo spenderne 10000 , ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, possediamo 10000 euro e dobbiamo pagare 12000 euro ci rimane

un debito di 2000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno  $+$  o il segno  $-$ . Si genera così l'insieme dei **numeri relativi**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.

Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre ai casi  $n \div 0$  e  $0 \div 0$ , non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione  $3 \div 4$ . Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere eseguita. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuna toccano  $\frac{3}{4}$  di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avrà 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.

Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria  $\frac{3}{4}$  e nel secondo caso la notazione decimale 0,75. Le due scritture sono perfettamente equivalenti.

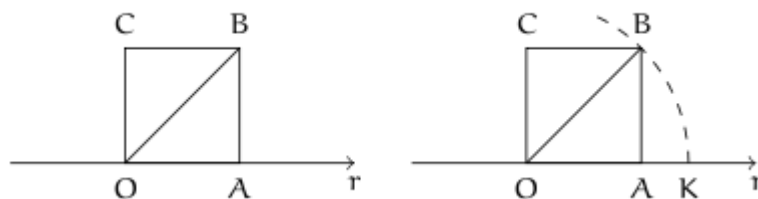
Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei **numeri razionali** che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\} = \left\{ 0, +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{11}{17}, \frac{129}{1725}, \dots \right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero  $\sqrt{2}$ , cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; esso non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono *numeri irrazionali*.

Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il ragionamento.

Fissiamo sulla retta orientata  $r$  l'unità di misura e disegniamo un quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale: 1,02



Il triangolo OAB è rettangolo in A, quindi per il teorema di Pitagora  $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$ . Sostituiamo le misure:  $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ; per ottenere  $\overline{OB}$  dobbiamo estrarre la radice quadrata di 2, cioè  $\overline{OB} = \sqrt{2}$ . Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere,

perché è il numero che esprime la misura della diagonale OB del quadrato, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB e determinando su r il punto K estremo del segmento con  $OK = OB$ .

Dalla posizione del punto K possiamo dire che  $1 < \sqrt{2} < 2$ . Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x <sup>2</sup>	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra 1,42 e 1,52, di conseguenza  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ , ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di  $\sqrt{2}$  mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo  $\sqrt{2} = 1,4$  oppure  $\sqrt{2} = 1,5$  commettiamo un errore minore di  $1/10$ . Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere  $\sqrt{2}$  come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44
x <sup>2</sup>	1,9600	1,9881	2,0164	2,0449	2,0736

Nessuno dei numeri elencato è quello che stiamo cercando, tuttavia possiamo concludere che  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ . Possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di  $\sqrt{2}$  mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di  $1/100$ . Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a  $\sqrt{2}$ .

È possibile continuare indefinitamente questo procedimento, ottenendo valori decimali che approssimano sempre meglio  $\sqrt{2}$ . Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, migliorando a ogni passaggio l'approssimazione. Il procedimento purtroppo sembra non finire mai, né troviamo cifre che si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	Numero	Valore per eccesso	Ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10-1
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10-2
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10-3
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10-4
...	...	...	...

Per arrivare a concludere che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale e precisamente  $2 = \frac{a}{b}$  a e b primi tra loro; si avrebbe, elevando al quadrato,  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ . Se si eleva un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di  $a^2$  e di  $b^2$  sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati. Quindi anche  $a^2$  e  $b^2$  sono primi tra di loro e  $a^2$  non può essere il doppio di  $b^2$ . Quindi  $\frac{a^2}{b^2} \neq 2$  e  $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ .

Oltre a  $\sqrt{2}$  vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici

cubiche del tipo  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[5]{7}$ , ... Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero  $\pi$ , che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.

Questi numeri sono detti numeri **irrazionali** e insieme ad altri, come  $\pi$  ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme  $J$  dei numeri irrazionali. L'unione degli insiemi  $Q$  e  $J$  è l'insieme  $R$  dei numeri reali.

## 1.2 Numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo  $R = Q \cup J$ , i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche.

Per esempio, la frazione  $\frac{17}{16}$  è uguale al numero decimale finito 1,0625.

La frazione  $\frac{16}{17}$  è uguale al numero decimale periodico 0,9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352...

Il numero  $\pi$  è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre:

$\pi = 3, 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820\ 974\ 944\ 592\ 307\ 816\ 406\ 286\ 208\ 998\ 628\ 034\ 825\ 342\ 117\ 067\ 982\ 148\ 086\ 513\ 282\ 306\ 647\ 093\ 844\ 609\ 550\ 582\ 231\ 725\ 359\ 408\ 128\ 481\ 117\ 450\ 284\ 102\ 701\ 938\ 521\ 105\ 559\ 644\ 622\ 948\ 954\ 930\ 381\ 964\ 428\ 810\ 975\ 665\ 933\ 446\ 128\ 475\ 648\ 233\ 786\ 783\ 165\ 271\ 201\ 909\ 145\ 648\ 566\ 923\ 460\ 348\ 610\ 454\ 326\ 648\ 213\ 393\ 607\ 260\ \dots$  Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numeri reali.

In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo  $r = n + 0, abcdefg \dots$ , dove  $r$  è il numero reale,  $n$  è la parte intera e  $0, abcd \dots$  è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione:

$1 = 0,99999999 \dots$  A ben osservare tutti i numeri decimali finiti ammettono la doppia rappresentazione:

$1,225 = 1,2249999999 \dots$  Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.

Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme  $Z$  degli interi relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di  $N \times N$  e l'insieme  $Q$  dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di  $Z \times Z_0$ . La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali  $Q$ ? Per rappresentare il numero  $\sqrt{2}$  abbiamo costruito un insieme, che abbiamo indicato con  $A$ , di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, che abbiamo indicato con  $B$ , di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero  $\sqrt{2}$  spezzi l'insieme dei numeri razionali  $Q$  in due parti: quella dei numeri razionali  $a$  tali che  $a^2 < 2$  e quella dei numeri razionali  $b$  tali che  $b^2 > 2$ . La coppia di insiemi  $(A, B)$  caratterizza il numero  $\sqrt{2}$ , possiamo anzi identificare  $\sqrt{2}$  con la coppia  $(A, B)$ .

È proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama **sezione**, o partizione di  $\mathbb{Q}$ , una coppia di sottoinsiemi non vuoti  $A$  e  $B$  che devono soddisfare le condizioni:  $A \cap B = \emptyset$ ;  $A \cup B = \mathbb{Q}$ ;  $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$ .

Esempi

- ➔ Consideriamo i due insiemi  $A$  e  $B$  così definiti:  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 3\}$ . Essi definiscono una sezione di  $\mathbb{Q}$ , infatti  $A \cap B = \emptyset$ ;  $A \cup B = \mathbb{Q}$  e ogni elemento di  $A$  è minore di ogni elemento di  $B$ ; inoltre possiamo osservare che  $A$  non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre  $B$  ammette il minimo che è 3.

Siano  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$  la coppia  $(A, B)$  non è una sezione di  $\mathbb{Q}$  perché pur essendo  $A \cap B = \emptyset$  non è  $A \cup B = \mathbb{Q}$ .

Siano  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{2}{7}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{2}{7}\}$ , anche in questo caso la coppia  $(A, B)$  non è una sezione di  $\mathbb{Q}$  poiché  $A \cap B = \{\frac{2}{7}\}$ .

- ➔ Costruiamo gli insiemi  $A$  e  $B$  nel seguente modo:  $A$  sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tutti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in  $B$  mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2.  $A = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$ . Si ha  $A \cap B = \emptyset$ ;  $A \cup B = \mathbb{Q}$ , inoltre ogni elemento di  $A$  è minore di ogni elemento di  $B$ , dunque  $(A, B)$  è una sezione di  $\mathbb{Q}$ , ma  $A$  non possiede il massimo e  $B$  non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non esiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme  $\mathbb{Q}$ .

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione  $(A, B)$  può essere di tre tipi:

- ➔  $A$  ammette massimo e  $B$  non ammette minimo;
- ➔  $A$  non ammette massimo e  $B$  ammette minimo;
- ➔  $A$  non ammette massimo e  $B$  non ammette minimo.

**DEFINIZIONE.** Si chiama **elemento separatore** di una partizione  $(A, B)$  di  $\mathbb{Q}$  il massimo di  $A$  o il minimo di  $B$ , nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di  $B$ , la partizione  $(A, B)$  ammette un elemento separatore e identifica il numero razionale 3.

Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione  $(A, B)$  identifica un numero irrazionale.

**DEFINIZIONE.** L'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di  $\mathbb{Q}$ . Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo **\*\*numero irrazionale\*\*** le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.

Ritornando all'esempio precedente, il numero  $\sqrt{2}$  è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oppure } x^2 < 2\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$ .

Nell'insieme  $A$  ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano  $\sqrt{2}$  per difetto:  $A = \{1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; 1, 414213; \dots\}$ .

Nell'insieme  $B$  ci sono tutti i numeri razionali che approssimano  $\sqrt{2}$  per eccesso:  $B = \{2; 1, 5; 1, 42; 1, 415; 1, 4143; 1, 41422; 1, 414214; \dots\}$ .



Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  a partire dall'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ .

Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di  $\mathbb{Q}$ , l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

**DEFINIZIONE.** Un insieme  $X$  si dice **continuo** se ogni partizione  $(X', X'')$  di  $X$  ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento  $x$  appartenente a  $X$  tale che per ogni  $x'$  di  $X'$  e per ogni  $x''$  di  $X''$  si ha  $x' \leq x \leq x''$ .

**TEOREMA DI DEDEKIND.** Ogni partizione dell'insieme  $\mathbb{R}$  di numeri reali ammette uno e un solo elemento separatore.

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione  $(A, B)$  di numeri reali.

**POSTULATO DI CONTINUITÀ DELLA RETTA.** Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiani permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedrete in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

### 1.2.1 Confronto fra numeri reali

Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

Esempi

- ➡  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$  per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ,  $\sqrt{3} = 1,7320\dots$ ; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3.
- ➡  $\sqrt{99} < 10$  per verificarlo è sufficiente osservare che  $\sqrt{100} = 10$ .

## 1.3 Richiami sul valore assoluto

### 1.3.1 Definizione

Si definisce valore assoluto di un numero reale  $a$ , si indica con  $|a|$ , il numero stesso se  $a$  è positivo o nullo, il suo opposto se  $a$  è negativo.



$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Il numero  $a$  si dice argomento del valore assoluto.

$$\Rightarrow |-3| = 3$$

$$\Rightarrow |+5| = 5$$

$$\Rightarrow |0| = 0$$

### 1.3.2 Proprietà del valore assoluto

$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$  Il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.

$\Rightarrow |x - y| \leq |x| + |y|$  Il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.

$\Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.

$\Rightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione  $f(x)$  si ha  $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

Esempi

$$\Rightarrow |5 + 3| = |5| + |3| \text{ in entrambi i casi si ottiene } 8$$

$$\Rightarrow |5 + (-3)| = 2 \text{ mentre } |5| + |-3| = 8, \text{ pertanto } |5 + (-3)| < |5| + |-3|$$

$$\Rightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x^2| = x^2 \text{ infatti } x^2 \text{ è una quantità sempre non negativa.}$$

$$|a^2 + 1| = a^2 + 1 \text{ infatti } a^2 \text{ è sempre positivo, aumentato di } 1 \text{ sarà sempre } > 0.$$

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

$$\Rightarrow f(a) = |a + 1| - 3a + 1 \text{ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è } f(a) = |a + 1| - 3a + 1 = \begin{cases} a + 1 - 3a + 1 & \text{se } a + 1 \geq 0 \rightarrow a \geq -1 \\ -(a + 1) - 3a + 1 & \text{se } a + 1 < 0 \rightarrow a < -1 \end{cases} = \begin{cases} -2a + 2 & \text{se } a \geq -1 \\ -4a & \text{se } a < -1 \end{cases}$$

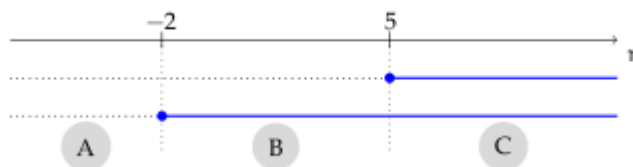
Una funzione di questo tipo si dice **definita per casi**.

Esempi

Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni, esplicitando i casi, come nell'esempio

$$f(x) = |x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \\ -(x - 5) & \text{se } x - 5 < 0 \rightarrow x < 5 \end{cases}$$

- $f(x) = |x - 5| + |x + 2|$ ; la presenza di due valori assoluti ci obbliga a studiare i casi generati dal segno dei singoli argomenti. Pertanto poiché l'argomento del primo valore assoluto è non negativo per  $x \geq 5$  e l'argomento del secondo valore assoluto è non negativo per  $x \geq -2$ , possiamo porre la reciproca situazione in un grafico:



L'insieme dei numeri reali resta diviso in tre intervalli:

1.  $x < -2$  in questo intervallo entrambi gli argomenti sono negativi, pertanto  $f(x) = |x - 5| + |x + 2| = -x + 5 - x - 2 = -2x + 3$ . Se  $x = -2$  si ha  $f(-2) = |-2 - 5| + 0 = 7$
2.  $-2 < x < 5$  il primo argomento è negativo e il secondo è positivo, pertanto  $f(x) = |x - 5| + |x + 2| = -x + 5 + x + 2 = 7$ . Se  $x = 5$  si ha  $f(5) = 0 + |5 + 2| = 7$
3.  $x > 5$  entrambi gli argomenti positivi, pertanto  $f(x) = |x - 5| + |x + 2| = x - 5 + x + 2 = 2x - 3$ .

Possiamo allora sintetizzare in questo modo  $f(x) = |x - 5| + |x + 2| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 7 & \text{se } -2 \leq x < 5 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

## 1.4 Esercizi

### 1.4.1 Numeri reali

**1.1.** Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per  $\sqrt{2}$ , che  $\sqrt{3}$  non è razionale.

**1.2.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso, come nell'esempio:

$$\sqrt{3}: A = \{ 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; \dots \} B = \{ 2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206; \dots \}$$

$$\sqrt{5}: A = \{ \dots \} B = \{ \dots \}$$

$$\frac{6}{7}: A = \{ \dots \} B = \{ \dots \}$$

$$\frac{1}{6}: A = \{ \dots \} B = \{ \dots \}$$

**1.3.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ .

**1.4.** Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio:  $5 < \sqrt{30} < 6$

$$\sqrt{50}, \sqrt{47}, \sqrt{91}, \sqrt{73}, \sqrt{107}, \sqrt{119}$$

$$1. \sqrt{5} + \sqrt{3}, 2\sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}, \sqrt{20} - \sqrt{10}, \sqrt{\frac{7}{10}}, 7 + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

**1.5.** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

$$\sqrt{2}, 1, \frac{2}{3}, 2, 0\overline{13}, \sqrt{5}, \frac{3}{2}, 0,75$$

$$\pi, \sqrt{3}, \frac{11}{5}, 0,9, \sqrt{10}, 3,14, \sqrt[3]{25}$$

**1.6.** Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ , l'insieme dei numeri interi relativi  $\mathbb{Z}$ , l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ , l'insieme  $J$  dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri:  $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \pi, 0,\overline{3}, 3,14, \frac{3}{2}, -2$

**1.7.** Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni

- |  |     |
|--|-----|
| 1. un numero decimale finito è sempre un numero razionale                      | V F |
| 2. un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale                | V F |
| 3. un numero decimale periodico è un numero irrazionale                        | V F |
| 4. la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale     | V F |
| 5. la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale | V F |
| 6. il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale            | V F |
| 7. il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale        | V F |

#### 1.4.2 Valore assoluto

**1.8.** Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri:  $|-5|, | +2|, |-1|, |0|, |-10|, |+3-5|, |-3+5|, |(-1)^3|, |-1-2-3|, |+3 \cdot (-2) - 5|$

**1.9.** Due numeri reali  $x$  ed  $y$  sono entrambi non nulli e di segno opposto.

**1.10.** Come nell'esempio, elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

$f(x) =  x+1 $	$f(x) =  x^2 - 6x + 8 $	$f(x) =  x+2  +  x-2 $
$f(x) =  x-1 $	$f(x) =  x^2 + 5x + 4 $	$f(x) =  x-2  +  x-3 $
$f(x) =  x^2 + 1 $	$f(x) = \left  \frac{x+1}{x+2} \right $	$f(x) =  x+1  \cdot  x+2 $
$f(x) =  (x+1)^2 $	$f(x) = \left  \frac{x+1}{x-1} \right $	$f(x) = \left  \frac{x+1}{4} \right  + \left  \frac{x+2}{x+1} \right $
$f(x) =  x^2 - 1 $	$f(x) =  x+1  +  x-2 $	$f(x) = \left  \frac{x+1}{x+2} \right  + \left  \frac{x+2}{x+1} \right $
$f(x) =  x^3 - 1 $		

**1.11.** Verifica le seguenti relazioni sostituendo al posto di  $x$  e  $y$  opportuni valori. Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?

$$|x| < |y|$$

$$|x| = |y|$$

$$|x| < y$$

$$|x+y| < |x| + |y|$$

$$|x-y| < |x| - |y|$$

$$||x| - |y|| = |x - y|$$

Risultati: a) dipende da  $x$  e  $y$ ; b) dipende da  $x$  e  $y$ ; c) dipende da  $x$  e  $y$ ; d) sempre vera; e) sempre vera; f) sempre falsa.



## 2.1 Radici

### 2.1.1 Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale  $r$  è il numero che si ottiene moltiplicando  $r$  per se stesso. Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato:  $(+3)^2 = 9$ ;  $(-2)^2 = +4$ ;  $(-5)^2 = (+5)^2 = +25$ .

L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama radice quadrata. La radice quadrata di un numero reale  $a$  è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero  $a$ .

Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato possa dare come risultato un numero negativo.

DEFINIZIONE. Si dice radice quadrata di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato.

In simboli  $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$  dove  $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Il simbolo  $\sqrt{\text{None}}$  è il simbolo della radice quadrata; il numero  $a$  è detto radicando, il numero  $b$  è detto radice quadrata di  $a$ .

Dalla definizione  $\sqrt{a^2} = a$  con  $a \geq 0$ .

Per esempio  $\sqrt{81} = 9$  perché  $9^2 = 81$ ;  $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$  perché  $(\frac{3}{8})^2 = \frac{9}{64}$ .

Osserva ora che  $\sqrt{81} = \sqrt{(-9)^2}$  ma non è vero che  $\sqrt{(-9)^2} = -9$  perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata sia sempre un numero positivo o nullo.

Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero  $n$

Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione quando il radicando è un'espressione letterale: in questo caso  $\sqrt{a^2} = a$  non è del tutto corretto poiché  $a$  può assumere sia valori positivi sia valori negativi. Scriveremo correttamente  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Esempi

$$\sqrt{4} = 2 \text{ infatti } 2^2 = 4$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \text{ infatti } (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$$

$$\sqrt{0,01} = 0,1 \text{ infatti } 0,1^2 = 0,01$$

$$\sqrt{1} = 1 \text{ infatti } 1^2 = 1$$

$$\sqrt{0} = 0 \text{ infatti } 0^2 = 0$$

$\sqrt{-16}$  non esiste, radicando negativo.

$\sqrt{11}$  esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale.

$\sqrt{x^2} = |x|$  dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conoscendo il segno di  $x$  dobbiamo imporre che il risultato sia sicuramente positivo.

$\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$  dobbiamo mettere il valore assoluto perché  $a-2$  può anche essere negativo.

$$\sqrt{9(x+1)^2} = 3|x+1|$$

### 2.1.2 Radici cubiche

**Definizione:** Si dice radice cubica di un numero reale  $a$  quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato  $a$ . In simboli  $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$  dove  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale esiste sempre sia per i numeri positivi o nulli, sia per i numeri negativi.

Esempi

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ infatti } (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \text{ infatti } 5^3 = 125$$

$$\sqrt[3]{1} = 1 \text{ infatti } 1^3 = 1$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \text{ infatti } 0^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{-1000} = -10 \text{ infatti } (-10)^3 = -1000$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \text{ infatti } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{0,125} = 0,5 \text{ infatti } (0,5)^3 = 0,125$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \text{ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto}$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1 \text{ non si deve mettere il valore assoluto}$$

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre il segno della base.

### 2.1.3 Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice  $n$ .

**DEFINIZIONE.** Si dice radice n-esima di un numero reale  $a$  quel numero  $b$  che elevato ad  $n$  dà come risultato  $a$ .

In simboli  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$  con  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Non si definisce la radice di indice 0: la scrittura  $\sqrt[0]{a}$  è priva di significato.

Alla scrittura  $\sqrt[n]{a}$  si dà il valore  $a$ .

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

se l'indice  $n$  è dispari  $\sqrt[n]{a}$  è definita per qualsiasi valore di  $a \in \mathbb{R}$ , inoltre è negativa se  $a < 0$ , positiva se  $a > 0$  e nulla se  $a = 0$ ;

se l'indice  $n$  è pari  $\sqrt[n]{a}$  è definita solo per i valori di  $a \geq 0$  e si ha che  $\sqrt[n]{a} \geq 0$ .

Esempi

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ infatti } 2^4 = 16$$

$$\sqrt[4]{-16} \text{ non esiste infatti } (-2)^4 = +16$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \text{ infatti } 2^5 = 32$$

$$\sqrt[4]{1} = 1 \text{ infatti } 1^4 = 1$$

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1 \text{ infatti } (-1)^5 = -1$$

$$\sqrt[4]{x^4} = |x| \text{ va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è pari}$$

$$\sqrt[5]{x^5} = x \text{ non va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.}$$

## 2.2 Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso.

Le condizioni di esistenza, in breve si può scrivere C.E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.

Supponiamo di avere  $\sqrt[n]{A(x)}$  con  $A(x)$  polinomio nell'indeterminata  $x$ , dobbiamo distinguere i seguenti casi:

se  $n$  è pari la radice esiste per tutti i valori di  $x$  che rendono non negativo il radicando, cioè C.E.  $A(x) \geq 0$

→ se  $n$  è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile  $x$ , purché esista il radicando stesso.

Esempi

$\sqrt{x}$  C.E.  $x \geq 0$ ,

→  $\sqrt[3]{x}$  C.E.  $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{-x}$  C.E.  $x \leq 0$

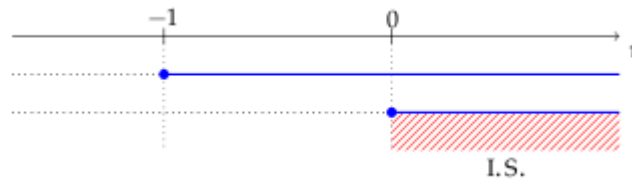
$\sqrt[3]{-x}$  C.E.  $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x-1}$  C.E.  $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$\sqrt{a^2+1}$  C.E.  $\forall a \in \mathbb{R}$ , infatti  $a^2$  è sempre positivo pertanto  $a^2+1 > 0 \forall a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$  C.E. La radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando, tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi C.E.  $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$ .

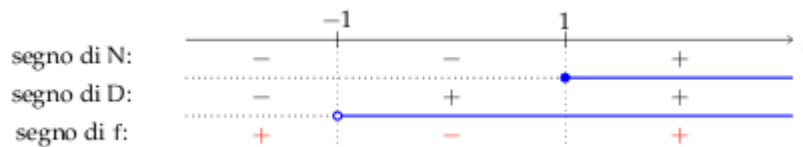
$\sqrt[4]{xy}$  C.E.  $xy \geq 0$



$\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$  C.E.  $\sqrt{x}$  esiste per  $x \geq 0$ ,  $\sqrt{x+1}$  esiste per  $x+1 \geq 0$ , per individuare le condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il

sistema  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$  cioè  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

In definitiva C.E.  $x \geq 0$ .





$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

C.E.  $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$  Occorre discutere il segno della frazione

Pertanto C.E.  $x < -1 \vee x \geq 1$

$\sqrt[5]{a^2(a-3)}$  Poiché la radice ha indice dispari non occorre porre alcuna condizione di esistenza.

## 2.3 Potenze a esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale  $a \geq 0$  sotto forma di potenza di  $a$ , vogliamo cioè che sia:

$$\sqrt[n]{a} = a^x$$

### 2.3.1 Caso con esponente positivo

Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza  $n$  otteniamo:

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^x)^n \text{ da cui si ottiene } a = a^{n \cdot x}$$

Trattandosi di due potenze con base  $a \geq 0$ , l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere:

$$1 = n \cdot x \rightarrow x = \frac{1}{n}$$

Possiamo quindi scrivere:  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia  $m$  un numero intero positivo, possiamo scrivere

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Pertanto possiamo scrivere che  $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

Esempi

$$\text{Calcola } 27^{\frac{2}{3}} \text{ Si ha che } 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{Calcola } 25^{\frac{3}{2}} \text{ Si ha che } 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

### 2.3.2 Caso con esponente negativo

Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione  $a \neq 0$ , infatti risulta:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Esempi

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(5^{-2})^3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}} = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9}$$

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

In generale si dà la seguente

DEFINIZIONE. Si dice potenza a esponente razionale  $\frac{m}{n}$  di un numero reale positivo  $a$  l'espressione:  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$  con  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che  $a$  sia un numero positivo?

Partiamo dall'espressione  $a^{\frac{1}{n}}$  con  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , se  $n$  è dispari la potenza  $a^{\frac{1}{n}}$  è sempre definita per ogni valore della base  $a$ , mentre se è pari  $a^{\frac{1}{n}}$  è definita solo per  $a \geq 0$ .

Nel caso generale  $a^{\frac{m}{n}}$  con  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  la formula  $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$  è falsa se  $a < 0$ .

Infatti facciamo un esempio:

$(-2)^{\frac{6}{6}} = \{(-2)^{\frac{1}{6}}\}^6 = (\sqrt[6]{-2})^6$  che non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo.

Tuttavia possiamo anche scrivere  $(-2)^{\frac{6}{6}} = \{(-2)^6\}^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.

Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

## 2.4 Semplificazione delle radici

**PROPOSIZIONE.** Il valore di una radice in  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  non cambia se moltiplichiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo.

In simboli  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n^t]{a^{mt}}$  con  $a \geq 0, m, n, t \in \mathbb{N} - \{0\}$

Esempi

$\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2}$  abbiamo moltiplicato per 2 indice della radice ed esponente del radicando.

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[9]{a^3}$  abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando

**PROPOSIZIONE.** Il valore di una radice in  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune. In simboli  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{t}]{a^{\frac{m}{t}}}$  con  $a \geq 0, m, n, t \in \mathbb{N} - \{0\}$

Esempi

$\sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$  abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando.

$\sqrt[10]{3^{15}} = \sqrt[3]{3^3}$  abbiamo semplificato per 5.

$\sqrt[7]{3^9}$  non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni.

$\sqrt[8]{2^6} = 2^{\frac{6}{8}} =$  semplificando la frazione dell'esponente  $= 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

$\sqrt[6]{(\frac{1}{5})^{-9}} = \sqrt[6]{5^9} = \sqrt[2]{5^3}$

$\sqrt[4]{(-3)^2} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$

$\sqrt[10]{10^{-4}}$  semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ha  $10^{-2} = \frac{1}{100}$   
 $\sqrt[10]{30 \cdot 27 \cdot 10}$  scomponendo in fattori primi otteniamo  $\sqrt[10]{30 \cdot 27 \cdot 10} = \sqrt[10]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt[10]{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$  osserviamo che tutti gli esponenti del radicando e l'indice della radice hanno un divisore, quindi  $\sqrt[10]{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere  $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & \text{se la potenza } t \text{ che abbiamo semplificato è dispari} \\ \sqrt[n]{|a^m|} & \text{se } t \text{ è pari} \end{cases}$

Esempi

→  $\sqrt{4x^4y^2a^6} = \sqrt{2^2x^4y^2a^6} = 2x^2|y|a^3$  abbiamo semplificato per 2 sia l'indice della radice che l'esponente del radicando.

$\sqrt[12]{a^2 + 2a + 1} = \sqrt[12]{(a+1)^2} = \sqrt[6]{|a+1|}$  Dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 gli indici.

$\sqrt{x^2y^2} = |xy|$ ;  $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y|$ ;  $\sqrt{x^2 + y^2}$  non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza.

$\sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{|x-1|}$

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno. Per esempio  $\sqrt[10]{(-2)^6} \neq \sqrt[5]{(-2)^3}$  infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.

Invece  $\sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-2}$  perché in questo caso la concordanza del segno è conservata, infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.

Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto:  $\sqrt[10]{(-2)^6} = \sqrt[5]{|-2^3|}$ .

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno:  $\sqrt[10]{x^6} = \sqrt[5]{|x^3|}$  C.E: x può assumere qualunque valore reale.

## 2.5 Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, con il divisore diverso da zero.

### 2.5.1 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

Esempi

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{6} &= 6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = 6^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{6^7} \\ \sqrt[4]{6} \div \sqrt[3]{6} &= 6^{\frac{1}{4}} \div 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{6}}\end{aligned}$$

### 2.5.2 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} \rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Anche per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \rightarrow \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \div b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esempi

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}} &= \sqrt[3]{\frac{9}{72}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sqrt{2a} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \div \sqrt{\frac{2b}{9}} \text{ C.E. } a \geq 0 \wedge b > 0 \quad \sqrt{2a} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \div \sqrt{\frac{2b}{9}} = \sqrt{2a \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{9}{2b}} = \sqrt{\frac{9a^2}{b^2}} = \frac{3a}{b}$$

### 2.5.3 Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti con lo stesso indice usando la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

*Procedura per ridurre due o più radici allo stesso indice:*

1. scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;
2. porre le condizioni di esistenza;
3. calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;
4. per ciascuna radice dividere il m.c.m. per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.

Esempi

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$  Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro m.c.m. è 6, il primo radicando va elevato a 6:2 cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a 6:3 cioè 2  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{27}} \div \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$  Il m.c.m. tra gli indici delle radici è 12. Il primo radicando va elevato a 12:3=4; il secondo radicando va elevato a 12:4=3; il terzo va elevato a 12:6=2.  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{27}} \div \sqrt[6]{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{8^3}{27^3} \div \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{(2^3)^3}{(3^3)^3} \div \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{2^9}{3^9} \div \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^6 \cdot 2^9}{3^9 \cdot 2^6}} = \sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

$\frac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}}$  C.E.  $x > 0 \wedge y > 0$ . Il m.c.m. degli indici delle radici è 6, quindi:  $\frac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x^2y)^2 \cdot (xy)^3}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^4y^2x^3y^3}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^7y^5}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{x^5y^2}$

Scomponiamo in fattori i radicandi  $\sqrt[3]{\frac{a(x+1)}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$

Poniamo le C.E.  $x+1 \neq 0 \wedge a(x-1) > 0 \rightarrow x \neq -1 \wedge ((a > 0 \wedge x > 1) \vee (a < 0 \wedge x < 1))$

Semplifichiamo le frazioni di ciascun radicando  $\sqrt[3]{\frac{a}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{a}}$

→ Trasformiamo nello stesso indice: il m.c.m. degli indici è 6, quindi  $\sqrt[6]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3} =$

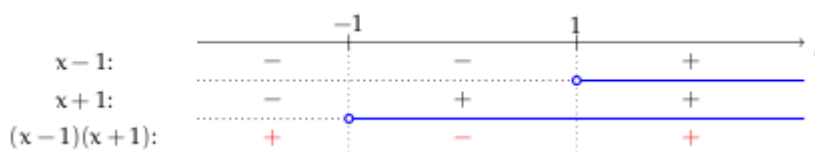
$$\sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-2x+1}} \div \sqrt[4]{\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}}$$

Scomponiamo in fattori i radicandi  $\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} \div \sqrt[4]{\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$

Determiniamo le C.E.  $(x-1)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$ . L'operazione che dobbiamo eseguire è una divisione e dunque il divisore deve essere diverso da zero, quindi  $x \neq -1 \wedge x \neq 1$ , comunque già implicate nelle C.E. trovate

Semplifichiamo i radicandi  $\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} \div \sqrt[4]{(x-1) \cdot (x+1)}$



Riduciamo allo stesso indice: il m.c.m. degli indici è 12  $\sqrt[12]{\left[\frac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4} \div \sqrt[12]{(x-1)^3 \cdot (x+1)^3}$

Poniamo sotto la stessa radice  $\sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^8} \cdot \frac{1}{(x-1)^3 \cdot (x+1)^3}} = \sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^{11} \cdot (x+1)^3}}$ .

## 2.6 Portare un fattore sotto il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice bisogna elevarlo all'indice della radice:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \text{ se } n \text{ pari e } a \geq 0$$

$$a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b} \text{ se } n \text{ pari e } a < 0$$

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \text{ se } n \text{ dispari}$$

Ricordando che abbiamo posto  $\sqrt[n]{a} = a$ , portare un fattore sotto radice equivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

Esempi

$2\sqrt[3]{5}$  portare il 2 dentro il segno di radice

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$$

$$3 \cdot \sqrt{\frac{2}{21}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{9 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ lasciamo fuori dalla radice il segno meno } -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \sqrt{12} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 12} = -\sqrt{\frac{1}{9} \cdot 12} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$(1 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = -(\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot 3}$$

$$-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-40}$$

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$  l'indice della radice è dispari pertanto si porta sotto radice senza alcuna condizione.

$(x-1) \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x-1)^3 \cdot x}$  l'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla  $x$ .

$(x-2)\sqrt{y}$  osserviamo che il radicale esiste per  $y \geq 0$ . Per portare dentro il segno di radice il coefficiente  $(x-2)$  bisogna fare la distinzione:  $(x-2)\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 y} & \text{se } x \geq 2 \\ -(2-x)\sqrt{y} = -\sqrt{(2-x)^2 y} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$(x-1)\sqrt{x-2}$  Il radicale esiste per  $x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ , per questi valori il coefficiente esterno  $(x-1)$  è positivo e può essere portato dentro la radice  $(x-1)\sqrt{x-2} = \sqrt{(x-1)^2(x-2)}$

$\frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}$  Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale. Per l'esistenza della frazione  $\frac{a+2}{(a-1)^2}$  deve essere  $(a-1)^2 \neq 0$ , ovvero  $a \neq 1$ . Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per  $a \neq 1$ ) è sufficiente che sia  $a+2 \geq 0$  ovvero  $a \geq -2$ . Pertanto le condizioni di esistenza sono  $a \geq -2$  e  $a \neq 1$ . Studiamo il segno della frazione algebrica da portare sotto radice. Tale frazione è positiva o nulla per  $a < -3 \vee a \geq 1$ , è negativa per  $-3 < a \leq 1$ .

$$\text{Se } a > 1 \text{ si ha } \frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{(a+3)^2} \cdot \frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

Se  $-2 < a < 1$  il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi Trasporta dentro la radice i fattori esterni, discutendo i casi letterali

Se  $a = -2$  l'espressione da calcolare vale zero, mentre Il caso  $a = 1$  è escluso dalla condizione di esistenza.

## 2.7 Portare uno o più fattori fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si inizia scomponendo in fattori irriducibili il radicando, ottenendo un radicale del tipo  $\sqrt[n]{a^m}$  con  $m \geq n$

I° modo

Si esegue la divisione intera  $m \div n$  ottenendo un quoziente  $q$  e un resto  $r$ . Per la proprietà della divisione si ha  $m = n \cdot q + r$  quindi il radicale diventa  $\sqrt[n]{a^m}$ , per le proprietà delle potenze il radicando si trasforma in un prodotto di potenze  $\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^n)^q \cdot a^r}$  e per la regola del prodotto di due radici con medesimo indice si ottiene  $\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^n)^q \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^n)^q} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$  con  $r < n$ . Notiamo che nella divisione intera e sotto la radice lo stesso fattore  $a$  con l'esponente uguale al resto della divisione.

Esempio

$$\sqrt[3]{a^8} = \dots \text{ eseguiamo la divisione } 8 \div 3 \text{ con } q = 2 \text{ e } r = 2, \text{ otteniamo } \sqrt[3]{a^8} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

II° modo

Si può trasformare la potenza del radicando nel prodotto di due potenze con la stessa base; una avente esponente multiplo dell'indice della radice e l'altra avente per esponente la differenza tra l'esponente iniziale e il multiplo trovato.

Esempi

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^8} &= \dots \text{ il multiplo di 3 più vicino a 8 è 6 quindi, otteniamo } \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \\ &= \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \\ \sqrt[3]{a^5} &= \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \sqrt[3]{a^2} \end{aligned}$$

Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a| \sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Esempi

$$\sqrt{1200} \text{ Si scompone in fattori primi il radicando } 1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3 \text{ ne segue allora che}$$

$$\sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5 \sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$\sqrt{2a^2} = |a| \sqrt{2}$  bisogna mettere  $a$  in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva; se  $a < 0$  la relazione  $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$  è errata

$\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3}$  Occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice. Cominciamo da  $a^5$  risulta  $5:3 =$  quoziente 1, resto 2; per  $b^7$  si ha  $7:3 =$  quoziente 2, resto 1; l'esponente di  $c$  è minore dell'indice; per  $d^3$  si ha  $3:3 =$  quoziente 1, resto 0. In definitiva  $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3} = a b^2 d \sqrt[3]{a^2 b c}$ , o anche:  $\sqrt[3]{a^5 b^7 c d^3} = \sqrt[3]{(a^3 a^2)(b^6 b) c d^3} = \sqrt[3]{a^3 b^6 d^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 b c} =$

$ab^2d^3\sqrt[3]{a^2bc}$ . In questo caso non c'è da mettere il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

$$\sqrt[3]{\frac{3^3x^3y}{z^6}} \text{ C.E. } z \neq 0 \sqrt[3]{\frac{3^3x^3y}{z^6}} = 3 \frac{x}{z^2} \sqrt[3]{y}$$

$\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5}$  Scomponiamo il radicando per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:  $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)}$  C.E.  $1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ .

$$\text{Pertanto } \sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)} = |x| \sqrt[4]{4(1-x)} = \begin{cases} x \sqrt[4]{4(1-x)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x \sqrt[4]{4(1-x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3(a-1)^2} \text{ portare fuori dalla radice } \sqrt{3(a-1)^2} = |a-1| \sqrt{3} = \begin{cases} (a-1)\sqrt{3} & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a = 1 \\ (1-a)\sqrt{3} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

## 2.8 Potenza di radice e radice di radice

### 2.8.1 Potenza di radice

Per elevare a potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando:  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ . Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, le radici in esponenti con indici frazionari:  $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempi

$$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\left(\sqrt[3]{2ab^2c^3}\right)^2 = \sqrt[3]{4a^2b^4c^6}$$

### 2.8.2 Radice di radice

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ . Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze trasformando le radici in potenze con esponente frazionario:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Esempi

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2 \cdot 2]{2} = \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x}} = \sqrt[12]{2x}$$

## 2.9 Somma di radicali

Si dice radicale un'espressione del tipo  $a\sqrt[n]{b}$  con  $a$  e  $b$  numeri reali,  $b \geq 0$  ed  $n \in \mathbb{N}$ . Il numero  $a$  prende il nome di coefficiente del radicale.

Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

DEFINIZIONE. Due radicali si dicono simili se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili, si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

Attenzione l'operazione  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$  è errata: i radicali addendi non sono simili.



Esempi

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{45} - \sqrt{80} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} - 2^2 \sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$  non si può eseguire perché i radicali non sono simili

$\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$  non si può eseguire perché i radicali non sono simili

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{4}{3}\sqrt{7} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right)\sqrt{7} = \frac{3-8}{6}\sqrt{7} = -\frac{5}{6}\sqrt{7}$$

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = (3-2)\sqrt{2} + (2+3)\sqrt{3} = \sqrt{2} + 5\sqrt{3} \text{ sommiamo i radicali simili}$$

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a} \text{ C.E. } a \geq 0$$

$$\sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} + \sqrt[4]{a^6} \div \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^3 \cdot a^2} + \sqrt[4]{a^6} \div a = \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^5} = 3\sqrt[4]{a^5} = 3\sqrt[4]{a^4 \cdot a} = 3a\sqrt[4]{a} \text{ C.E. } a > 0$$

Per semplificare le espressioni che seguono, useremo le procedure di calcolo dei polinomi.

Esempi

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2} - 1) &= 1 \cdot 3\sqrt{2} - 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 1 + 3\sqrt{2^2} - \sqrt{2} = \\ &= 3\sqrt{2} - 1 + 3 \cdot 2 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 5 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{3} + 1)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 3 + 1 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2}) = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 &= (3)^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 14 + 6\sqrt{2} + \\ &+ 6\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + 4) \cdot (3 - \sqrt{2}) &= \sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 2 + 12 - 4\sqrt{2} = \\ &= 10 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 3)^3 &= (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2(-3) + 3\sqrt{2}(-3)^2 + (-3)^3 = \sqrt{2^3} + 3(2)(-3) + 3(9)\sqrt{2} - 27 = \\ &= 2\sqrt{2} - 18 + 27\sqrt{2} - 27 = 29\sqrt{2} - 45 \end{aligned}$$

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze con esponente frazionario per poi applicare le proprietà delle potenze:

Esempi

$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[6]{a^5 \cdot b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a^2 b}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[5]{a^2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^6 b}}{a \sqrt[3]{b}}} &= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{9}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{9}} = \\ &= a^{\frac{3}{10}} \cdot b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[10]{a^3} \cdot \sqrt[9]{b^2}. \end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{x^2 - \sqrt{xy}}} = \left(\frac{x^3 \cdot (xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2 - (xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2 - x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{x^{\frac{10}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}\right)^{\frac{1}{6}} =$$

## 2.10 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Nel calcolo di espressioni che contengono radicali può capitare che al denominatore compaiano dei radicali. Per migliorare l'approssimazione si cerca di evitare questa situazione e operare affinché non compaiano radicali al denominatore. Questa operazione prende il nome di razionalizzazione del denominatore.

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformare una frazione in una frazione equivalente avente per denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

I Caso

La frazione è del tipo  $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per  $\sqrt{b}$ , che prende il nome di fattore razionalizzante:  $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

Esempi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1} = (a+1)\sqrt{a-1}$$

II Caso

La frazione è del tipo  $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$  con  $n > m$ .

In questo caso il fattore razionalizzante è  $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ . Infatti si ha:  $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$

Se abbiamo un esercizio in cui la potenza del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

Esempi

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ il fattore razionalizzante è } \sqrt[3]{2^2} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\frac{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}}{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}} \text{ il fattore razionalizzante è } \sqrt[4]{x^3a^2b} \quad \frac{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}}{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}} = \frac{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}} = \frac{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3\cdot x^3a^2b}} = \frac{\frac{ab}{\sqrt[4]{x^3a^2b^3}}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^3a^2b^4}} = \frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab} = \frac{\sqrt[4]{x^3a^2b}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b^5}} = \frac{1}{b\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{b^2} \text{ con } b \neq 0.$$

III Caso

La frazione è del tipo  $\frac{x}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$  oppure  $\frac{x}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ . Il fattore razionalizzante del primo tipo è  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ , nel secondo è  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

Sviluppiamo solo il primo tipo, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Esempi

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2-5^2}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = -(\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{7}$$

$$\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{(1+\sqrt{a})^2}{1-a^2} = \frac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a} \text{ con } a \geq 0 \wedge a \neq 1$$

IV Caso

La frazione è del tipo  $\frac{x}{\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

Esempio

$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$  il fattore di razionalizzazione è  $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$   $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}} =$   
 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-5} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}{2+3+2\sqrt{6}-5} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}$  il fattore razionalizzante di questa frazione è  $\sqrt{6}$   
 $\cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12+\sqrt{18}-\sqrt{30}}}{2\cdot 6}$  portando fuori radice si ha  $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

V Caso

La frazione è del tipo  $\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Si utilizza il prodotto notevole  $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$  e quello analogo  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{x(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3} = \frac{x(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$

Esempio

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}} \text{ il fattore di razionalizzazione è } \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2} \text{ quindi } \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}}{2-3} = -(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$$

## 2.11 Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo  $\sqrt{a+\sqrt{b}}$  oppure  $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

I radicali doppi possono essere trasformati nella somma algebrica di due radicali semplici se l'espressione  $a^2-b$  è un quadrato perfetto, la formula per ottenere la trasformazione in radicali semplici è:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

$$\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} + \sqrt{\frac{7-5}{2}} = \sqrt{6} + 1.$$

$\sqrt{5+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-3}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-3}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{22}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{22}}{2}}$  la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

## 2.12 Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

### 2.12.1 Equazioni di primo grado

Esempi

$$\sqrt{3}x = 9 \quad \sqrt{3}x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{6} &= 2x - \sqrt{2}(3\sqrt{2}+1) + 1\sqrt{3}x - x - \sqrt{6} = 2x - 3 \cdot 2 - \sqrt{2} + 1\sqrt{3}x - x - \sqrt{6} \\
 x - 2x &= \sqrt{6} - 6 - \sqrt{2} + 1\sqrt{3}x - 3x = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 5x \quad x(\sqrt{3}-3) = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 5x \\
 x &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3} \cdot \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9} = \frac{2\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{-6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

### 2.12.2 Disequazioni di primo grado

Esempio

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3}-1)x &\leq \sqrt{3} \text{ il coefficiente } \sqrt{3}-1 \text{ è positivo quindi: } (\sqrt{3}-1)x \leq \sqrt{3} \rightarrow x \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \rightarrow x \leq \\
 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} &\rightarrow x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3-1} \rightarrow x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\
 2x - (1-\sqrt{2}) &\geq -3\sqrt{2} \text{ il coefficiente dell'incognita } 2 \text{ è positivo, quindi } x \leq \frac{-3\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})} \text{ e poi} \\
 \text{razionalizzando } x &\leq 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

### 2.12.3 Sistemi di primo grado

Esempio

$$\begin{cases} x(2+\sqrt{2}) + y = \sqrt{2}(2+x) \\ x - (\sqrt{2}+1)y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases} \text{ eseguiamo i calcoli per ottenere la forma canonica } \begin{cases} 2x + x\sqrt{2} + y = 2\sqrt{2} + x \\ x - y\sqrt{2} - y = -\frac{\sqrt{2}}{2} - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2\sqrt{2} \\ x - y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ con il metodo di riduzione, sommando le due equazioni otteniamo } \begin{cases} 3x = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2} - 2x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 2\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

## 2.13 Esercizi

### 2.13.1 Radici

**2.1.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a 1/10:  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{11}$ ;  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ;  $\sqrt{\frac{17}{4}}$

**2.2.** Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto:  $\sqrt{a^2+2a+1}$ ,  $\sqrt{4x^2+8x+4}$ ,  $\sqrt{9-12a+4a^2}$

**2.3.** Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle)

**2.4.**  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{36}$ ,  $\sqrt{-49}$ ,  $\sqrt{64}$ ,  $\sqrt{-81}$

**2.5.**  $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ,  $\sqrt{\frac{49}{81}}$ ,  $\sqrt{\frac{121}{100}}$ ,  $\sqrt{\frac{144}{36}}$ ,  $\sqrt{\frac{-1}{4}}$

**2.6.**  $\sqrt{0,04}$ ,  $\sqrt{0,09}$ ,  $\sqrt{0,0001}$ ,  $\sqrt{0,16}$ ,  $\sqrt{-0,09}$

**2.7.**  $\sqrt{\frac{144}{9}}$ ,  $\sqrt{25 \cdot 16}$ ,  $\sqrt{36 \cdot 49}$ ,  $\sqrt{0,04 \cdot 0,0121}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{100}}$

**2.8.**  $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}}$ ,  $\sqrt{5 + \sqrt{14 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

**2.9.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a 1/10:  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt[3]{100}$ ,  $\sqrt[3]{25}$ ,  $\sqrt[3]{250}$

**2.10.** Determina le seguenti radici se esistono

**2.11.**  $\sqrt[3]{27}$ ,  $\sqrt[3]{64}$  R. 4,  $\sqrt[3]{-1}$

**2.12.**  $\sqrt[3]{1000}$ ,  $\sqrt[3]{125}$ ,  $\sqrt[3]{-216}$

**2.13.**  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ ,  $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$  R.  $\frac{10}{3}$

**2.14.**  $\sqrt[3]{0,001}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ ,  $\sqrt[3]{-0,008}$

**2.15.**  $\sqrt[3]{4 + \sqrt[3]{61 + \sqrt[3]{25 + \sqrt[3]{8}}}}$ ,  $\sqrt[3]{25 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{122 + \sqrt[3]{27}}}}$  R. 3,  $\sqrt[3]{27 \cdot \sqrt[3]{64}}$

**2.16.**  $\sqrt[9]{0}$   $\sqrt[8]{-1}$  R. non esiste,  $\sqrt[5]{-100000}$

**2.17.**  $\sqrt[4]{0,0001}$ ,  $\sqrt[4]{81}$ ,  $\sqrt[6]{64}$

**2.18.**  $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$  R.  $\frac{2}{3}$ ,  $\sqrt[4]{-4}$ ,  $\sqrt[10]{0}$

**2.19.**  $\sqrt[4]{0,0081}$ ,  $\sqrt[5]{34 - \sqrt[4]{14 + \sqrt{2 + \sqrt[3]{8}}}}$  R.2,  $\sqrt{20 + \sqrt[3]{121 + \sqrt[4]{253 + \sqrt[5]{243}}}}$

**2.20.**  $\sqrt{21 + \sqrt{16}}$ ,  $\sqrt[5]{31 + \sqrt[4]{1}}$ ,  $\sqrt[5]{240 + \sqrt{9}}$  R.3

**2.21.**  $\sqrt{\sqrt{0,16}}$ ,  $\sqrt[5]{32 \cdot 10^{-5}}$  R.0,2,  $\sqrt{3\sqrt{37 - 4\sqrt{81}} \cdot 27}$  R.5

**2.22.**  $\sqrt{72 + \sqrt{80 + \sqrt{1}}}$ ,  $\sqrt{\frac{25a^4}{9}}$ ,  $\sqrt[4]{620 + \sqrt[4]{625}}$

**2.23.**  $\sqrt{24336}$   $\sqrt[5]{243}$   $\sqrt[4]{600 + \sqrt{25} \cdot \sqrt{25}}$

**2.24.**  $\sqrt[3]{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}$  R.(2a+1),  $\sqrt[3]{a^6 + 9a^4 + 27a^2 + 27}$  R.  $a^2 + 3$ ,  $\sqrt[3]{1 - 6x + 12x^2 - 8x^3}$  R.1-2x

### 2.13.2 Condizioni di esistenza

Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

**2.25.**  $\sqrt[3]{x+1}$  R. C.E.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{1-x}$  R. C.E.  $x \leq 1$

**2.26.**  $\sqrt{\frac{1}{x+1}}$  R. C.E.  $x > -1$ ,  $\sqrt{3x^2y}$  R. C.E.  $y \geq 0$

**2.27.**  $\sqrt[3]{3xy}$   $\sqrt[4]{-2x^2y^2}$

**2.28.**  $\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x-1}}$  R. C.E.  $x > 1$ ,  $\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$

**2.29.**  $\sqrt{\frac{4-x}{x-3}}$ ,  $\sqrt{x^2(x+1)}$  R. C.E.  $x \geq -1$

**2.30.**  $\sqrt[3]{1+a^2}$   $\sqrt[6]{2x-1}$

$$2.31. \sqrt{1-x} + 2\sqrt{\frac{1}{x-1}} \text{ R. nessun valore, } \sqrt{1+|x|}$$

$$2.32. \sqrt{(a-1)(a-2)}, \sqrt{|x|+1} \cdot \sqrt[3]{x+1}$$

$$2.33. \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}, \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{3-x}} \text{ R. C.E. } x=1$$

$$2.34. \sqrt{\frac{5-x}{x+2}} \text{ R. C.E. } -2 < x \leq 5, \sqrt{\frac{2y}{(2y+1)^2}}$$

$$2.35. \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}, \sqrt{\frac{a}{a^2-a-2}}$$

$$2.36. \sqrt{\frac{1}{b^2-4}} \text{ R. C.E. } b < -2 \vee b > 2, \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}}$$

$$2.37. \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}, \sqrt[6]{\frac{x-1}{|x|}}$$

$$2.38. \sqrt[4]{\frac{4x^2+4+8x}{9}}, \sqrt[6]{\frac{(b^2+1+2b)^3}{729b^6}}$$

$$2.39. \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-4}} \text{ R. C.E. } 0 \leq x \leq 1 \vee x > 4, \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}}$$

$$2.40. \sqrt[4]{\frac{m+1}{m-1}}, \sqrt[3]{x(x+2)^2}$$

$$2.41. \sqrt{\frac{1+a}{a^2}}, \sqrt{\frac{a+2}{a(a-4)}} \text{ R. C.E. } -2 < a < 0 \vee a > 4$$

$$2.42. \sqrt{\frac{1}{b^2-4}}, \sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$$

$$2.43. \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \text{ R. C.E. } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$$

$$2.44. \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}, \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+1}} \text{ R. C.E. } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2.45. \sqrt{2x+3}, \sqrt[3]{a^2-1}$$

$$2.46. \sqrt{x(x+1)(x+2)} \text{ R. C.E. } -2 < x < -1 \vee x > 0, \sqrt{|x|+1} \text{ R. C.E. } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2.47. \sqrt{\frac{x}{|x+1|}} \text{ R. C.E. } x > 0, \sqrt{\frac{1}{-x^2-1}} \text{ R. nessun valore}$$

### 2.13.3 Potenze a esponente razionale

Calcola le seguenti potenze con esponente razionale

$$2.48. 4^{\frac{3}{2}}, 8^{\frac{2}{3}}, 9^{-\frac{1}{2}}, 16^{\frac{3}{4}}$$

$$2.49. 16^{\frac{5}{4}}, \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}, 125^{-\frac{2}{3}} \text{ R. } \frac{1}{25}, \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2.50. 25^{-\frac{3}{2}}, 27^{\frac{4}{3}}, 32^{\frac{2}{5}} \text{ R. } 4, 49^{-\frac{1}{2}}$$

$$2.51. \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}, (0,008)^{-\frac{2}{3}} \text{ R. } 25$$

**2.52.**  $4^{0,5}, 16^{0,25}, 32^{0,2}$  R.2,  $100^{0,5}$

**2.53.** Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario

**2.54.**  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8^2}, \sqrt[7]{5^3}$  R.  $5^{\frac{3}{7}}, \sqrt{3^3}$

**2.55.**  $\sqrt{\left(\frac{1}{3^3}\right)}, \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$  R.  $25^{-\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{\frac{4^2}{3^2}}$

**2.56.** Trasforma nella forma radicale:  $\left((a^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + 1\right)^{\frac{1}{4}}$  R.  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^2 + 1)^2 + 1}}, \left(1 + \left(1 + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$

**2.57.** Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:  $0,00000001, (0,1)^{10}, (0,1)^{0,1}, 10^{-10}, \sqrt[10]{0,0000000001}$

#### 2.13.4 Semplificazione delle radici

Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva

**2.58.**  $\sqrt[4]{4} = \sqrt[8]{\dots}, \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{\dots}, \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{\dots}, \sqrt{2} = \sqrt[6]{\dots}$

**2.59.**  $\sqrt{2} = \sqrt[16]{\dots}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[81]{\dots}, \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[25]{\dots}, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[27]{\frac{27}{8}}$

**2.60.**  $\sqrt[21]{a^7} = \sqrt[6]{\dots}$  con  $a > 0$   $\sqrt[8]{a^{24}} = \sqrt[5]{\dots}$  con  $a > 0$   $\sqrt[3]{27} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt[7]{\dots}$

Semplifica i radicali

**2.61.**  $\sqrt[4]{25}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[8]{16}$  R.  $\sqrt{2}$

**2.62.**  $\sqrt[9]{27}, \sqrt[4]{100}$  R.  $\sqrt{10}, \sqrt[6]{144}$

**2.63.**  $\sqrt[4]{169}, \sqrt[6]{121}, \sqrt[6]{125}$  R.  $\sqrt{5}$

**2.64.**  $\sqrt[4]{49}, \sqrt[6]{64}$  R. 2,  $\sqrt[12]{16}$

**2.65.**  $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$  R.  $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}, \sqrt[4]{\frac{1}{16}}, \sqrt[10]{\frac{25}{81}}$

**2.66.**  $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}, \sqrt[9]{-3^3}$  R.  $\sqrt[3]{-3}, \sqrt[6]{(-2)^4}$

**2.67.**  $\sqrt[12]{-4^6}$  R. impossibile,  $\sqrt[10]{-32}, \sqrt[6]{5^2 - 4^2}$

**2.68.**  $\sqrt[4]{12^2 + 5^2}, \sqrt[10]{3^2 + 4^2}$  R.  $\sqrt[5]{5}, \sqrt[4]{10^2 - 8^2}$

**2.69.**  $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^{15}}$  R. 12.500,  $\sqrt[4]{3^4 \cdot 4^6}, \sqrt[5]{5^5 \cdot 4^{10} \cdot 2^{15}}$

**2.70.**  $\sqrt[9]{27 \cdot 8 \cdot 125}, \sqrt[4]{625}$  R. 5,  $\sqrt[6]{1000}$

**2.71.**  $\sqrt[4]{2 + \frac{17}{16}}, \sqrt[6]{\left(\frac{13}{4} + \frac{1}{8}\right)^4}$  R.  $\frac{9}{4}, \sqrt[6]{\left(1 + \frac{21}{4}\right)^3}$

**2.72.**  $\sqrt[16]{(-16)^4}$  R. 2,  $\sqrt[10]{2^{10} \cdot 3^{20}}, \sqrt[6]{2^8 \cdot 3^6}$

**2.73.**  $\sqrt[12]{3^6 \cdot 4^{12}}$  R.  $4 \cdot \sqrt{3}, \sqrt[4]{2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 12^5}, \sqrt[6]{3^9 \cdot 8^2}$



- 2.74.**  $\sqrt[4]{9x^2y^4}, \sqrt[3]{64a^6b^9}$  R.  $4a^2b^3, \sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$
- 2.75.**  $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}, \sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}, \sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$  R.  $|y| \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |x|}{3}}$
- 2.76.**  $(\sqrt{a+1})^6, \sqrt[9]{27a^6b^{12}}, \sqrt[12]{(2x+3)^3}$  R.  $\sqrt{(2x+3)}$
- 2.77.**  $\sqrt[6]{\frac{0,008x^{15}y^9}{8a^{18}}}, \sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$  R.  $\sqrt[5]{\frac{11a^2}{b}} \sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$
- 2.78.**  $\sqrt[6]{a^2+2a+1}, \sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}, \sqrt{3a^2+\sqrt{a^4}}$  R.  $2 \cdot |a|$
- 2.79.**  $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}, \sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$  R.  $\sqrt[5]{|a^2+3x|}, \sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$
- 2.80.**  $\sqrt[6]{\frac{9x^2}{y^6}}, \sqrt[4]{\frac{16a^4b^6}{25x^2}}, \sqrt{\frac{2x^2-2}{8x^2-8}}$  R.  $\frac{1}{2}$
- 2.81.**  $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}, \sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$  R.  $\frac{5a^2|b^3|}{a^2+2}, \sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$
- 2.82.**  $\sqrt[4]{a^2+6a+9}, \sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}, \sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$  R.  $|a| \sqrt{|a-1|}$
- 2.83.**  $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$  R.  $|x-3|, \sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}, \sqrt{a^2+2a+1} - \sqrt{a^2-2a+1}$
- 2.84.**  $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}, \sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7(x^3+3x^2+3x+1)^2}}$  R.  $\frac{|x-1|}{|b||x+1|}, \sqrt{\frac{(x^3+x^2y)(a+2)}{2x+2y+ax+ay}}$
- 2.85.**  $\sqrt[2n]{16^n}, \sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$  R.  $\sqrt[4]{\frac{8}{9}}, \sqrt[n^2]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$
- 2.86.**  $\sqrt[3n]{27^n \cdot 64^{2n}}, \sqrt[2n^2]{16^{2n} \cdot 81^{2n}}$  R.  $\sqrt[n]{6^4}, \sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$
- 2.87.**  $\sqrt[5]{25x^3y^4}, \sqrt[12]{81a^6b^{12}}, \sqrt[5]{32x^{10}}$  R.  $2x^2$

### 2.13.5 Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali (le lettere, dove compaiono, rappresentano numeri reali positivi)

- 2.88.**  $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$  R. 15,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}, \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$
- 2.89.**  $\sqrt{75} \cdot \sqrt{12}$  R. 30,  $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt{50}, \sqrt{40} \div (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})$
- 2.90.**  $\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{45}, \sqrt[3]{3} \div \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} \div \sqrt[5]{12}$  R. 1
- 2.91.**  $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{81} \div \sqrt[6]{9}, \sqrt[4]{1+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{2-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}, \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$  R.  $\sqrt[6]{3^7}$
- 2.92.**  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{8}, \sqrt[6]{81} \cdot \sqrt{3}$  R.  $\sqrt[6]{3^7}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
- 2.93.**  $\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \div \sqrt{\frac{2}{25}}, \sqrt{\frac{10}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{3}} \div \sqrt[6]{\frac{4}{9}}$  R.  $\sqrt[6]{\frac{3^2 \cdot 5^3}{4^2}}, \sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^3}$
- 2.94.**  $\left(\sqrt[3]{\frac{42}{13}} \div \sqrt[3]{\frac{91}{36}}\right) \div \sqrt{13}, \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{24}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$  R.  $\frac{5}{4}, \sqrt[3]{5+\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

$$2.95. \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[10]{2^4} \text{ R. } 2, \sqrt{15} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{8} \text{ R. } 60, \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$2.96. \sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}} \div \sqrt{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{12}, \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{2+\frac{1}{4}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{3^5}{2^5}}$$

$$2.97. \sqrt[3]{4a} \cdot \sqrt[3]{9a} \cdot \sqrt[3]{12a}, \sqrt{3a} \div \sqrt{\frac{1}{5}a} \text{ R. } \sqrt{15}$$

$$2.98. \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b^2} \text{ R. } 2ab, \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \div \sqrt[6]{x}$$

$$2.99. \sqrt{\frac{1}{a^4}} \cdot \sqrt{\frac{a^6b}{2}} \div \sqrt{\frac{2b}{a}}, \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}a} \div \sqrt[6]{3a} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{2^3a^2}{3^4}}$$

$$2.100. \sqrt[3]{ax} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[5]{ay}, \sqrt[3]{(x+1)^2} \div \sqrt{x-1} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}}$$

$$2.101. \sqrt{a^2-b^2} \div \sqrt{a+b} \text{ R. } \sqrt{a-b}, \sqrt{a^2-3a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$$

$$2.102. \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)(1+x^2)^2}}, \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \div \sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$2.103. \sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{1+a}{a^2}} \div \sqrt{\frac{2}{a}}, \sqrt{\frac{a+1}{a-3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{(a+1)(a+3)^2}{(a-3)(a-1)^2}}$$

$$2.104. \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \div \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+3)}}, \sqrt{a^4b} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$$

$$2.105. \sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}, \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} \div \sqrt{x+y} \text{ R. } \sqrt{\frac{x-y}{xy}}$$

$$2.106. \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \div \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \text{ R. } \sqrt{\frac{a+b}{ab}}, \frac{\sqrt{4a^2-9} \cdot \sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$$

$$2.107. \sqrt{\frac{9-a^2}{(a+3)^2}} \cdot \sqrt{\frac{27+9a}{3-a}}, \sqrt{\frac{a+2}{a-1}} \div \sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{(a+2)^7}{(a-1)^7}}$$

$$2.108. \sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{x+2}{x^2(x+1)}}, \sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}} \cdot \sqrt[6]{a^2-4b^2}$$

$$2.109. \sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}} \text{ R. } \sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$$

$$2.110. \frac{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} \div \sqrt[3]{\frac{x}{y} - \frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$$

### 2.13.6 Portare uno o più fattori fuori dal segno di radice

Trasporta dentro la radice i fattori esterni, discutendo i casi letterali

$$2.111. 2\sqrt{2} \text{ R. } \sqrt{2^3}, 3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$2.112. \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ R. } \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\sqrt[3]{2}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}, 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$2.113. -3\sqrt{3}, -2\sqrt[3]{2}, \frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}, \frac{-1}{5}\sqrt{5} \text{ R. } -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}, (1+\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{2}$$

$$2.114. x\sqrt{\frac{1}{5}}, x^2\sqrt[3]{x} \text{ R. } \sqrt[3]{x^7}, a\sqrt{2}, x^2\sqrt[3]{3}, 2a\sqrt{5}, a\sqrt{-a}$$

$$2.115. (a-1)\sqrt{a} \text{ R. } \sqrt{(a-1)^2a}, (x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}, x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$$

$$2.116. \frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}, \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}} - x, \frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$$

Semplifica i radicali portando fuori tutti i fattori possibili, facendo attenzione al valore assoluto

$$2.117. \sqrt{250} \text{ R. } 5\sqrt{10}, \sqrt{486} \text{ R. } 9\sqrt{6}$$

$$2.118. \sqrt{864} \text{ R. } 12\sqrt{6}, \sqrt{3456} \text{ R. } 24\sqrt{6}$$

$$2.119. \sqrt{20}, \sqrt{0,12}, \sqrt{45}, \sqrt{48}$$

$$2.120. \sqrt{98}, \sqrt{50}, \sqrt{300} \text{ R. } 10\sqrt{3}, \sqrt{27}$$

$$2.121. \sqrt{75}, \sqrt{40}, \sqrt{12}, \sqrt{80}$$

$$2.122. \sqrt{\frac{18}{80}}, \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{9}} \text{ R. } \frac{1}{6}\sqrt{97}, \sqrt{1 - \frac{9}{25}}, \sqrt{\frac{10}{3} + \frac{2}{9}}$$

$$2.123. \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}, \frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}} \text{ R. } \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$$

$$2.124. \sqrt[3]{250}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{108}, \sqrt[4]{32}$$

$$2.125. \sqrt[4]{48}, \sqrt[4]{250}, \sqrt[5]{96}, \sqrt[5]{160}$$

$$2.126. \sqrt{x^2y}, \sqrt{\frac{a^5}{b^2}}, \sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{d^9}}, \sqrt{4ax^2}$$

$$2.127. \sqrt{9a^2b} \text{ R. } 3|a|\sqrt{b} \text{ C.E. } b \geq 0, \sqrt{2a^2x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{a^7}$$

$$2.128. \sqrt[3]{16a^3x^4}, \sqrt[3]{4a^4b^5}, \sqrt[3]{27a^7b^8}, \sqrt{18a^6b^5c^7}$$

$$2.129. \sqrt{a^2+a^3}, \sqrt{4x^4-4x^2} \text{ R. } |2x|\sqrt{x^2-1} \text{ C.E. } x \leq 1 \vee x \geq 1, \sqrt{25x^7-25x^5}, \sqrt[3]{3a^5b^2c^9}$$

$$2.130. \sqrt[4]{16a^4b^5c^7x^6}, \sqrt[5]{64a^4b^5c^6d^7}, \sqrt[6]{a^{42}b^{57}}, \sqrt[7]{a^{71}b^{82}}$$

$$2.131. \sqrt{a^3} + \sqrt{a^5} + \sqrt{a^7} \text{ R. } (a + a^2 + a^3)\sqrt{a}$$

### 2.13.7 Potenza di radice e radice di radice

Esegui le seguenti potenze di radici

$$2.132. (\sqrt{3})^2, (\sqrt[3]{2})^3, (\sqrt{4})^2, (\sqrt[4]{2})^6 \text{ R. } \sqrt{2^3}$$

$$2.133. (2\sqrt{3})^2, (3\sqrt{5})^2, (5\sqrt{2})^2 \text{ R. } 50, (-2\sqrt{5})^2$$

$$2.134. \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2, (a\sqrt{2a})^2 \text{ R. } 2a^3, \left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$$

$$2.135. (2\sqrt[3]{3})^3, (3\sqrt[3]{3})^3, \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3 \text{ R. } \frac{1}{9}, \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9}\right)^3$$

$$2.136. (\sqrt{3})^3, (2\sqrt{5})^3, (3\sqrt{2})^3, (\sqrt[3]{2})^6$$

$$2.137. (\sqrt[3]{3})^6, (\sqrt[3]{5})^5, (\sqrt[3]{2})^6, (\sqrt[6]{3})^4$$

$$2.138. (\sqrt[6]{3ab^2})^4, (\sqrt[4]{16a^2b^3})^2 \text{ R. } \sqrt{2^4a^2|b^3|}, (\sqrt[3]{6a^3b^2})^4, (\sqrt[3]{81ab^4})^4$$

Esegui le seguenti radici di radici

$$2.139. \sqrt[3]{\sqrt{2}}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}, \sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$$

$$2.140. \sqrt{\sqrt{16}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}, \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}} \text{ R. } \sqrt[3]{a^2}$$

$$2.141. \sqrt{\sqrt[3]{3a}}, \sqrt{\sqrt[4]{3ab}}, \sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}, \sqrt[4]{\sqrt{(2a)^5}}$$

$$2.142. \sqrt{2(a-b)} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}, \sqrt{3(a+b)} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}} \text{ R. } \sqrt[3]{3(a+b)} \text{ C.E. } a > b.$$

### 2.13.8 Somma di radicali

Esegui le seguenti operazioni con radicali

$$2.143. 3\sqrt{2} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$2.144. 8\sqrt{6} - 3\sqrt{6} \text{ R. } 5\sqrt{6}, \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

$$2.145. 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}, 2\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 4\sqrt{7} \text{ R. } -\sqrt{7}$$

$$2.146. 11\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - (8\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \text{ R. } 3(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

$$2.147. 5\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - [2\sqrt{3} - (4\sqrt{7} - 3\sqrt{3})] \text{ R. } 7\sqrt{7}$$

$$2.148. \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2.149. 3\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} \text{ R. } \sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$$2.150. 5\sqrt{10} - (6 + 4\sqrt{19}) + 2 - \sqrt{10}, \sqrt{5} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$2.151. -3\sqrt{7} + 4\sqrt{2} + \sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 8\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} - 7\sqrt{3} - 8\sqrt{5} - 9\sqrt{6}$$

$$2.152. \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}, 5\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - 2\sqrt[4]{6} + 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{6}$$

$$2.153. \sqrt{75} + 3\sqrt{18} - 2\sqrt{12} - 2\sqrt{50} \text{ R. } \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$2.154. 3\sqrt{128} - 2\sqrt{72} - (2\sqrt{50} + \sqrt{8}) \text{ R. } 0$$

$$2.155. 3\sqrt{48} + 2\sqrt{32} + \sqrt{98} - (4\sqrt{27} + \sqrt{450}) \text{ R. } 0$$

$$2.156. \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} + 5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} \text{ R. } \sqrt[4]{2} + 12\sqrt[3]{2}$$

$$2.157. 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[4]{243} + 3\sqrt[4]{48} - \sqrt[3]{250} \text{ R. } \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[4]{3}$$

$$2.158. \sqrt{\frac{32}{25}} - \sqrt{\frac{108}{25}} + \sqrt{\frac{27}{49}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{8}{9}} \text{ R. } \frac{2}{15}\sqrt{2} - \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

- 2.159.**  $2\sqrt{\frac{27}{8}} + 5\sqrt{\frac{3}{50}} + 7\sqrt{\frac{27}{98}} - 5\sqrt{\frac{147}{50}}$  R. 0
- 2.160.**  $\frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{4}{5}\sqrt{b} - \sqrt{a} + 0,4\sqrt{b}$  R.  $-\frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{2}{5}\sqrt{b}$
- 2.161.**  $6\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} - 7\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} + 9\sqrt{b} + \sqrt{a}$  R.  $9\sqrt{b} - \sqrt{ab}$
- 2.162.**  $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{a^4 - a^3b} - \sqrt[3]{ab^3 - b^4}$  R.  $(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}$
- 2.163.**  $3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} \cdot 2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}$
- 2.164.**  $\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} + 2\sqrt{a+b}, \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{5}\sqrt{x} + 0,4\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$
- 2.165.**  $2a\sqrt{2a} - 7a\sqrt{2a} + 3a\sqrt{2a} - \frac{1}{2}\sqrt{a}, 3\sqrt{xy} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 2\sqrt{xy} - 3(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
- 2.166.**  $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2), (3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$
- 2.167.**  $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1), (\sqrt{2}-3\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{3}-\sqrt{2})$
- 2.168.**  $(\sqrt{3}+1)^2$  R.  $4+2\sqrt{3}, (\sqrt{3}-2)^2$  R.  $7-4\sqrt{3}$
- 2.169.**  $(2+\sqrt{5})^2$  R.  $9+4\sqrt{5}, (4-\sqrt{3})^2$  R.  $19-8\sqrt{3}$
- 2.170.**  $(6+2\sqrt{3})^2$  R.  $48+24\sqrt{3}, (\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$  R.  $\frac{27}{4}-\sqrt{18}$
- 2.171.**  $(\sqrt{2}-1)^2, (2\sqrt{2}-1)^2$
- 2.172.**  $(\sqrt{3}+1)^2, (\sqrt{3}-3)^2$
- 2.173.**  $(\sqrt{5}-2)^2, (2\sqrt{5}+3)^2$
- 2.174.**  $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2, (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$
- 2.175.**  $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2, (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
- 2.176.**  $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$  R.  $8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$
- 2.177.**  $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$
- 2.178.**  $(\sqrt[3]{2}-1)^3$  R.  $1-3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$
- 2.179.**  $(\sqrt[3]{3}+1)^3, (\sqrt[3]{2}-2)^3$
- 2.180.**  $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3, (\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})$
- 2.181.**  $\left[(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)\right]^2, (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$

$$2.182. (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}, 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \div \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})^2$$

$$2.183. 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} - 3\sqrt{5} + \sqrt{25} \text{ R. } 3\sqrt{5} + 25, \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2}\right) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{4}\right)$$

$$2.184. (1 + \sqrt{2})^2, (2 - \sqrt{2})^2$$

$$2.185. (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, (2\sqrt{2} - 1)^2$$

$$2.186. (3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2, (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2$$

$$2.187. (4\sqrt{3} - 3\sqrt{7})^2, (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2 \text{ R. } -19 - 12\sqrt{6}$$

$$2.188. (\sqrt{x} - 1)^2, (2x + \sqrt{x})^2$$

$$2.189. (x + \sqrt[3]{x})^3, (2x + \sqrt{x})(2x - \sqrt{x})$$

$$2.190. \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \text{ R. } a + 2 + \frac{1}{a}, \left(\sqrt{a} + \frac{1}{a}\right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{a}\right)$$

$$2.191. (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \text{ R. } x - y$$

$$2.192. (\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$$

$$2.193. (\sqrt{3} + 1)^2 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 3) - 2(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 3)$$

$$2.194. (\sqrt{3} - 3)^2 + (\sqrt{3} - 3)^3 + 2\sqrt{27} - \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 2)$$

$$2.195. (\sqrt{5} - 2)^2 - (2\sqrt{5} + 3)^2 + \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 1\right](\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

$$2.196. (2\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{7} + \sqrt{5} + 1)^2 - \sqrt{35}$$

$$2.197. (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \text{ R. } 6$$

$$2.198. (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$$

$$2.199. (\sqrt{x} - 1)^2 + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)$$

$$2.200. (\sqrt{2} - 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^2 \sqrt{2} - 1$$

$$2.201. 2\sqrt{54} - \sqrt[4]{243} + 3\sqrt[4]{48} - \sqrt[3]{250}$$

$$2.202. (\sqrt{10} - \sqrt{7})(2\sqrt{10} + 3\sqrt{7})$$

$$2.203. \sqrt{48x^2y} + 5x\sqrt{27y}$$

$$2.204. \sqrt{5}\sqrt{15} - 4\sqrt{3}$$

$$2.205. (\sqrt{7} - \sqrt{5}) (2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})$$

$$2.206. \sqrt{27ax^4} + 5x^2\sqrt{75a}$$

$$2.207. \sqrt{125} + 3\sqrt[6]{27} - \sqrt{45} - 2\sqrt[4]{9} + \sqrt{20} + 7\sqrt[8]{81}$$

$$2.208. \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[9]{a^8}$$

$$2.209. \sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}} \div \sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b} \text{ R. } \sqrt[5]{b^7}$$

$$2.210. \sqrt[3]{\frac{x}{y^3} - \frac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{xy^3 - y^4} - \sqrt[3]{8x - 8y}$$

$$2.211. (\sqrt{2} + 3) \cdot (1 - \sqrt{3})^2$$

$$2.212. (\sqrt[3]{2} + 3) \cdot (1 - \sqrt[3]{3})^2$$

$$2.213. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}$$

$$2.214. \sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b^2}}} \div (\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b}) \text{ R. } \sqrt{b}$$

$$2.215. \sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}} \sqrt{\frac{a-b}{2a+b}}$$

$$2.216. \sqrt{\frac{9a}{b}} \sqrt{\frac{b^2-2b}{3ab-6a}}$$

$$2.217. \sqrt{\frac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}} \sqrt{\frac{a+b}{3a-b}}$$

$$2.218. \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$$

$$2.219. \sqrt[3]{\frac{a}{a+3}} \sqrt{\frac{a}{a+3}} \sqrt{\frac{a}{a+3}} \div \sqrt{\frac{a}{a+3}} \text{ R. } \sqrt[12]{\frac{a}{a+3}}$$

$$2.220. \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sqrt{\frac{1}{x^2-31}} \cdot \sqrt[4]{x+1} \text{ R. } \sqrt[8]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}$$

$$2.221. \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}} \text{ R. } \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^3}}$$

$$2.222. \left( \sqrt{\frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{ab^5+ab^4}{a}} - 2\sqrt{b+1} \right) \cdot \frac{b^2}{(b+1)^2} \text{ R. } (b-1)^2\sqrt{b+1}$$

$$2.223. \left( \sqrt[3x]{y^x} \sqrt[4x]{y} + \sqrt[6]{y^2} \sqrt[2x^2]{y} \right) \cdot \sqrt[3]{y} \sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}} \text{ R. } 2\sqrt[3]{y^2}$$

$$2.224. \sqrt[4]{\frac{b^2-1}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3b-3}{6b^2}} \div \sqrt[6]{\frac{(b-1)^4}{4b^5}} \text{ R. } \sqrt[12]{\frac{(b+1)^3}{b(b-1)}}$$

$$2.225. \sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{ab-b}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2-2a+1}{ab+b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}} \text{ R. } \sqrt[4]{\frac{(a-1)^2}{2}}$$

- 2.226.  $\sqrt[3]{\frac{x^2+2xy+y^2}{x+3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5x}{x^2+6x+9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+y}{5x}} \text{ R. } \frac{x+y}{x+3}$
- 2.227.  $\sqrt[3]{\frac{x^2-x}{x+1}} \cdot \sqrt[15]{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}} \div \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}} \text{ R. } \sqrt[3]{x}$
- 2.228.  $\sqrt{\frac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}} + \sqrt{\frac{x^3+x^2}{y^3-y^2}} - x\sqrt{\frac{4x+4}{y^3-y^2}}$
- 2.229.  $\left(\sqrt{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^3}} + \sqrt{\frac{xy^5+xy^4}{x}} - 2\sqrt{y+1}\right) \div \frac{(y+1)^2}{y^2} \text{ R. } (y-1)^2\sqrt{y+1}$
- 2.230.  $\sqrt[4]{\frac{a^2-a}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} \div \sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2} - \frac{1}{a-1}} \text{ R. } \sqrt[12]{\frac{a^{11}}{(a^2-1)^6}}$
- 2.231.  $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}} \text{ R. } \sqrt[24]{\frac{a^{10}b^{10}(a+b)^{11}}{x^{11}}}$
- 2.232.  $\sqrt[6]{\frac{1}{x} + 4x - 4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} + 4x + 4} \cdot \sqrt{\frac{x}{4x^2-1}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{2x+1}{2x-1}}$
- 2.233.  $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}} \text{ R. } \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}$
- 2.234.  $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3} - 2 + \frac{3}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9a^2(a+3)^3}{(a-3)^2}}\right) \div \sqrt{\frac{a^2-9}{3a}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{27a^3}{a-3}}$
- 2.235.  $\sqrt[4]{\frac{a^3-a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2} - \frac{1}{a-1}} \text{ R. } \sqrt[6]{\frac{a-1}{a(a+1)^3}}$
- 2.236.  $\sqrt{1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2}} \div \left(\sqrt[6]{\frac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4y^2}}\right) \text{ R. } \sqrt{2y-1}$
- 2.237.  $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{4a^2}} \div \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right) \text{ R. } \sqrt[6]{4a^2(2a-1)}$
- 2.238.  $\sqrt{\frac{1}{5a} + \frac{1}{25a^2}} + \sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}} - \sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}} \text{ R. } \frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}$
- 2.239.  $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3} - \frac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{xy^3 - y^4} - \sqrt[3]{8x - 8y} \text{ R. } \frac{(1-y)^2}{y} \sqrt[3]{x-y}$
- 2.240.  $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}} + \sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}} + \sqrt{4x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2} \text{ R. } \frac{(1+2x)^2}{2x} \sqrt{x^2 + xy + y^2}$
- 2.241.  $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}} + \sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}} - \sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}} \text{ R. } \sqrt{a}$
- 2.242.  $\sqrt{4x-12y} + \sqrt{\frac{x^3-3x^2y}{y^2}} + \sqrt{\frac{xy^2-3y^3}{x^2}} \text{ R. } \frac{(x+y)^2}{xy} \sqrt{x-3y}$
- 2.243.  $\left(\sqrt{\frac{1}{x^2-2x+1}} + \sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}} + \sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right) \cdot \sqrt[3]{x-1} \text{ R. } (1+a)^2$
- 2.244.  $\left(\sqrt[3x]{y^x} \sqrt[4x]{y} + \sqrt[6]{y^2} \sqrt[2x^2]{y}\right) \cdot \sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}$

Esegui le seguenti operazioni trasformando i radicali in potenze con esponente frazionario.

2.245.  $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}} \div \sqrt{\frac{1}{a}} \text{ R. } \sqrt{a^3}$



$$2.246. \sqrt[5]{a\sqrt{a^3}} \cdot \sqrt{a\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}} \div \sqrt[7]{a^4\sqrt{a}} \text{ R. } \sqrt[14]{a^3}$$

$$2.247. \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \text{ R. } \sqrt[9]{a^{19}}$$

$$2.248. \sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}} \div \sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt{b} \text{ R. } \sqrt[5]{b^7}$$

### 2.13.9 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Razionalizza i seguenti radicali

$$2.249. \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{10}{\sqrt{5}} \text{ R. } 2\sqrt{5}$$

$$2.250. -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{4}{\sqrt{8}} \text{ R. } \sqrt{2}$$

$$2.251. -\frac{10}{5\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{6}} \text{ R. } \frac{\sqrt{6}}{9}, -\frac{3}{4\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$2.252. \frac{9}{\sqrt{18}}, \frac{7}{\sqrt{48}}, \frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{125}}$$

$$2.253. \frac{6}{5\sqrt{120}}, \frac{1}{3\sqrt{20}}, \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}, 3\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$$

$$2.254. \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \frac{a}{\sqrt{a}}, \frac{x}{\sqrt{x}}, \frac{ax}{\sqrt{2a}}$$

$$2.255. \frac{2a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{a}}, \frac{x}{3\sqrt{2x}} \text{ R. } \frac{\sqrt{2x}}{6}, \frac{x^2}{a\sqrt{x}}$$

$$2.256. \frac{3x}{\sqrt{12x}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$2.257. \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$2.258. \frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} \text{ R. } \frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$2.259. \frac{3a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}, \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}, \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$2.260. \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{\sqrt[3]{5}}, \frac{4}{\sqrt[3]{6}} \text{ R. } \frac{2}{3}\sqrt[3]{36}$$

$$2.261. \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{\sqrt[3]{5}}, \frac{4}{\sqrt[3]{6}}$$

$$2.262. \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}, \frac{6}{5\sqrt[3]{100}}, \frac{2}{\sqrt[5]{9}}, \frac{3}{2\sqrt[6]{27}}$$

$$2.263. \frac{10}{\sqrt[5]{125}}, \frac{16}{\sqrt[3]{36}}, \frac{9}{\sqrt[4]{2025}}, \frac{1}{\sqrt[5]{144}}$$

$$2.264. \frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}}, \frac{ab^2}{\sqrt[3]{ab^2}} \text{ R. } \sqrt[3]{a^2b}, \frac{3a^2b}{\sqrt[4]{9ab^3}}, \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27ab^2c^5}}$$

$$2.265. \frac{5x}{\sqrt[3]{x\sqrt{5}}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16a^2b^3c^4}}, \frac{\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{xy}}, \frac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9a}}$$

$$2.266. \frac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4a^2x}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

- 2.267.  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{2}+1}, \frac{2}{\sqrt{2}-1}, \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
- 2.268.  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \text{ R. } 3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}, \frac{3}{2+3\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{x}+1}, \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
- 2.269.  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{ab}}, \frac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}$
- 2.270.  $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}, \frac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}, \frac{a-2}{\sqrt{a}-2}, \frac{a-x}{\sqrt{a-2}\sqrt{x}}$
- 2.271.  $\frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}, \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}, \frac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$
- 2.272.  $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{ab}}, \frac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}, \frac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$
- 2.273.  $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}, \frac{a-4b^2}{\sqrt{a-2b}}$
- 2.274.  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}, \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
- 2.275.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

### 2.13.10 Radicali doppi

2.276. Verificate che  $a^2 - b$  sia un quadrato perfetto prima di applicare la formula di trasformazione

- 2.277.  $\sqrt{12-\sqrt{23}}, \sqrt{12+2\sqrt{5}}, \sqrt{15+\sqrt{29}}, \sqrt{3+\sqrt{5}} \text{ R. } \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2.278.  $\sqrt{3-\sqrt{8}}, \sqrt{4+2\sqrt{3}}, \sqrt{4-\sqrt{7}}, \sqrt{5+\sqrt{21}}$
- 2.279.  $\sqrt{6+4\sqrt{2}}, \sqrt{6-3\sqrt{3}}, \sqrt{6+2\sqrt{5}}, \sqrt{6-\sqrt{11}}$
- 2.280.  $\sqrt{7+3\sqrt{5}}, \sqrt{7+2\sqrt{10}}, \sqrt{7-\sqrt{33}}, \sqrt{7+2\sqrt{6}} \text{ R. } \sqrt{6}+1$
- 2.281.  $\sqrt{7-\sqrt{13}}, \sqrt{8+2\sqrt{15}}, \sqrt{8-\sqrt{55}}, \sqrt{8+4\sqrt{3}}$
- 2.282.  $\sqrt{8-\sqrt{39}}, \sqrt{8-4\sqrt{7}}, \sqrt{8+\sqrt{15}}, \sqrt{5+2\sqrt{6}}$
- 2.283.  $\sqrt{\frac{15}{2}-\sqrt{\frac{86}{9}}}, \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{8}{5}-\sqrt{\frac{7}{4}}}, \sqrt{10+\sqrt{19}}$

### 2.13.11 Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali

- 2.284.  $\sqrt{2}x = 2, \sqrt{2}x = \sqrt{12}, 2x = \sqrt{6}, \sqrt{2}x = \sqrt{6} + \sqrt{14}$
- 2.285.  $x - \sqrt{3} = 2(x - \sqrt{3}) \text{ R. } \sqrt{3}, 2\sqrt{3}x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ R. } \frac{\sqrt{6}}{3}$
- 2.286.  $2x + \sqrt{5} = \sqrt{5}x + 2 \text{ R. } 1, (1 + \sqrt{2})x = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) \text{ R. } 4 - 3\sqrt{2}$
- 2.287.  $\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{8}} = x - \sqrt{2} \text{ R. } 18 - 12\sqrt{2}, 2x - (x + \sqrt{3})\sqrt{2} = 2x + 3\sqrt{5} \text{ R. } -\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{2}$

$$2.288. \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x-1}{2} \text{ R. } -(1 + \sqrt{2})$$

$$2.289. \frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = 2 \text{ impossibile}$$

$$2.290. (x + \sqrt{2})^2 - (x + \sqrt{3})^2 = 6 \text{ R. } \frac{-7(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}$$

$$2.291. \frac{x-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}-3x}{4} = 2x \text{ R. } -\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$$

$$2.292. 2(x-1)^2 - \sqrt{2}x = 1 + 2x(x-2) \text{ R. } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2.293. \frac{\sqrt{3}}{3x-6} - \frac{1}{20-10x} = \sqrt{3} + 2 \text{ R. } \frac{36+17\sqrt{3}}{30}$$

$$2.294. \frac{3x-2}{\sqrt{8x}-\sqrt{32}} + \frac{5x}{4\sqrt{3x}-8\sqrt{3}} = 0 \text{ R. } \frac{36-10\sqrt{6}}{29}$$

Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali

$$2.295. 4x + \sqrt{2} < 2x - \sqrt{2} \text{ R. } x < -\sqrt{2}$$

$$2.296. (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + \sqrt{2}x) < 3\sqrt{2} \text{ R. } x > \frac{\sqrt{2}-6}{2}$$

$$2.297. x\sqrt{2} + \sqrt{5} > \sqrt{10} \text{ R. } x > \frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$2.298. 3(x - \sqrt{3}) < 2(x + \sqrt{3}) - \sqrt{6} \text{ R. } x < 5\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$2.299. \frac{x-\sqrt{2}}{2} \leq \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ R. } x \geq \frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}$$

$$2.300. \begin{cases} \sqrt{2}x \geq 2 \\ (3 - \sqrt{2})x < \sqrt{2} \end{cases} \text{ impossibile}$$

$$2.301. \begin{cases} 2(x - \sqrt{2}) > 3x - \sqrt{3} \\ (x - \sqrt{2})^2 > (x - \sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ R. } \frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < x < \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

Risolvi i seguenti sistemi a coefficienti irrazionali

$$2.302. \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{6} \end{cases} \text{ R. } (\sqrt{2}; \sqrt{3}), \begin{cases} x - \sqrt{3} = 2 - y \\ x + 2 = y + \sqrt{3} \end{cases} \text{ R. } (\sqrt{3}; 2)$$

$$2.303. \begin{cases} x + 2y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - 2y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ R. } (\sqrt{2} + \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}), \begin{cases} \frac{2(x+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x-y}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ R. } (\sqrt{2} + \sqrt{3}; 2\sqrt{2})$$

$$2.304. \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - 4y = 1 \end{cases} \text{ R. } (\frac{\sqrt{3}+8}{7}; \frac{2\sqrt{3}-1}{7}), \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 1 \\ 2x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \text{ R. } (\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{1}{2})$$

$$2.305. \begin{cases} 4x - 2\sqrt{5}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + y = -2 \end{cases} \text{ R. } (\frac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6}; \frac{10-5\sqrt{10}}{6})$$

$$2.306. \begin{cases} \sqrt{3}x + 4\sqrt{2}y = 4 \\ \sqrt{12}x + 8\sqrt{2}y = 8 \end{cases} \text{ indeterminato}$$

$$2.307. \begin{cases} 2x + 3\sqrt{2}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = -\sqrt{8} \end{cases} \quad R. \left( \frac{2-3\sqrt{6}}{5}; \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5} \right)$$

$$2.308. \begin{cases} x + y = 3\sqrt{5} \\ \sqrt{8}x + 2\sqrt{2}y = -5\sqrt{11} \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$$2.309. \begin{cases} x - 3\sqrt{3}y = \sqrt{27} \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{243}y = 0 \end{cases} \quad R. \left( \frac{9+9\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$2.310. \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = 4 \\ 2x + \sqrt{32}y = -1 \end{cases} \quad R. \left( \frac{1}{2} + 4\sqrt{2}; -2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$2.311. \begin{cases} x - y\sqrt{3} = 2 \\ x\sqrt{3} - y = 1 \end{cases} \quad R. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \frac{1}{2} - \sqrt{3} \right)$$

$$2.312. \begin{cases} x - 2y\sqrt{2} = \sqrt{2} \\ x\sqrt{2} + y = \sqrt{2} \end{cases} \quad R. \left( \frac{\sqrt{2}+4}{5}; \frac{\sqrt{2}-2}{5} \right)$$

$$2.313. \begin{cases} x\sqrt{2} + y = 1 \\ x + y\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad R. (\sqrt{2}; -1)$$

$$2.314. \begin{cases} 2x + 3y\sqrt{2} = 0 \\ x + y = \sqrt{8} \end{cases} \quad R. \left( -\frac{4\sqrt{2}+12}{7}; \frac{18\sqrt{2}+12}{7} \right)$$

$$2.315. \begin{cases} x\sqrt{3} + 4y\sqrt{2} = 4 \\ x\sqrt{12} + 8y\sqrt{2} = -4 \end{cases} \quad R. \text{ impossibile}$$

$$2.316. \begin{cases} x - 3y\sqrt{3} = 0 \\ -x\sqrt{3} + 9y = 0 \end{cases} \quad R. \text{ indeterminato}$$

$$2.317. \begin{cases} x + y = 3\sqrt{5} \\ 2x - y = \sqrt{5} \end{cases} \quad R. \left( \frac{4\sqrt{5}}{3}; \frac{5\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$2.318. \begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = -1 \\ x\sqrt{8} - y = 0 \end{cases} \quad R. \left( \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{2}{3} \right)$$

### 2.13.12 Esercizi di riepilogo

Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se è Vera o Falsa.

2.319. È dato un quadrato di lato  $3\sqrt{2}$ .

1. Il suo perimetro è un numero irrazionale VF
2. La sua area è un numero irrazionale VF

2.320. È dato un rettangolo di base  $\sqrt{12}$  e altezza 14.

1. Il suo perimetro è un numero irrazionale VF
2. La sua area è un numero razionale VF

3. Il perimetro non esiste perché non si sommano numeri razionali con numeri irrazionali VF
  4. La misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale VF
- 2.321.** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente  $\sqrt{3}$  cm e  $\sqrt{13}$  cm.
1. L'ipotenusa ha come misura un numero razionale VF
  2. Il perimetro è un numero irrazionale VF
  3. L'area è un numero irrazionale VF
- 2.322.** È dato un quadrato di lato  $1 + \sqrt{5}$
1. La misura della diagonale è un numero irrazionale VF
  2. L'area è un numero irrazionale VF
- 2.323.** È dato un rettangolo di base  $\sqrt{12}$  e altezza  $\sqrt{3}$ .
1. Il perimetro è un numero irrazionale VF
  2. L'area è un numero irrazionale VF
  3. La misura della diagonale è un numero irrazionale VF
  4. Il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale VF
- 2.324.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo che questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.
- 2.325.** Perché l'uguaglianza  $\sqrt{(-5)^2} = -5$  è falsa?
- 2.326.** Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni
1. La radice terza del triplo di  $a$  è uguale ad  $a$ . VF
  2. Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del quoziente. VF
  3. Il doppio della radice quadrata di  $a$  è uguale alla radice quadrata del quadruplo di  $a$ . VF
  4. Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. VF
  5. La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. VF
  6. Dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. VF
  7. Sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. VF
- 2.327.** Riscrivi in ordine crescente i radicali  $\sqrt{5}$ ;  $4\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{3}$

**2.328.** Verifica che il numero irrazionale  $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$  appartiene all'intervallo  $(1;2)$  e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

**2.329.** Sono assegnati i numeri  $\alpha = \sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{30}+\sqrt{3})} + \sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17}) \cdot (7\sqrt{2}+\sqrt{17})}$  e  $\beta = (3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5}) - \frac{3}{2+\sqrt{5}}$ , quali affermazioni sono vere?

1. sono entrambi irrazionali;
2. solo  $\alpha$  è irrazionale;
3.  $\alpha$  è minore di  $\beta$  ;
4.  $\alpha$  è maggiore di  $\beta$  ;
5.  $\beta$  è irrazionale negativo

**2.330.** Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali  $l_1 = \sqrt[3]{1-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{7}} \cdot \sqrt[3]{25}$  e  $l_2 = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot (\sqrt[8]{6})^3 \div \sqrt[4]{\sqrt{6}}$ . Determinare la misura del perimetro e della diagonale del rettangolo.

**2.331.** Se  $x$  è positivo e diverso da 1, l'espressione  $E = \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1} - \frac{4}{\sqrt{x}+1}} \div \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{\sqrt{x}+1}}$  è uguale a:

1.  $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$
2.  $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$
3.  $\frac{1}{x}$
4.  $\sqrt[8]{x}$
5. 0

**2.332.** Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie  $(a,b)$  di numeri reali positivi con  $a = 3b$ , l'espressione  $E = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a+b}{a-b}$  ha il numeratore doppio del denominatore.

**2.333.** Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere

1.  $x + 2\sqrt{3}$  per  $x = \sqrt{3}$
2.  $\sqrt{2}x + 3\sqrt{6}$  per  $x = \sqrt{3}$
3.  $x^2 + x - 1$  per  $x = \sqrt{2}$
4.  $x^2 + \sqrt{5}x - 1$  per  $x = \sqrt{5}$
5.  $(x + 2\sqrt{2})^2$  per  $x = \sqrt{2}$

**2.334.** Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale  $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}} \div \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + 1}$

Risolvi le equazioni

**2.335.**  $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3x+3}{\sqrt{3}}$   $\mathbb{R} \setminus [-1]$

**2.336.**  $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}} + \frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = 2$   $\mathbb{R} \setminus [2 \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})]$

**2.337.** Per quale valore di  $k$  il sistema lineare è determinato?  $\begin{cases} x\sqrt{3} + (k - \sqrt{3})y = 1 \\ -2x + y\sqrt{6} = -k \end{cases}$

**2.338.** L'insieme di soluzioni della disequazione  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 0$  è:

1.  $x \geq 0$
2.  $x \leq 0$
3.  $x > 0$
4.  $x < 0$
5. sempre verificata.

**2.339.** Stabilire se esistono valori di  $a$  che rendono positiva l'espressione:  $E = \frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} - 1$

**2.340.** Data la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

1. Determina il suo dominio,
2. Riscrivi la funzione razionalizzando il denominatore,
3. Calcola  $f(2)$ ,
4. Per quali valori di  $x$  si ha  $f(x) > 0$ ?
5. Risolvi l'equazione  $f(x) = 0$  razionalizzando il denominatore,
6. Calcola  $f(2)$ ,