MATEMATICA $C^3$

# ALGEBRA DOLCE 2

Manuale per il secondo anno
della Scuola Secondaria di secondo grado

Matematicamente.it

$1^A$ Edizione - 2014

Matematica $C^3$– Algebra dolce 2
Copyright © 2014 Matematicamente.it



COORDINATORI DEL PROGETTO Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini, Daniele Zambelli.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Alessandra Marrata, Nicola Chiriano.

HANNO COLLABORATO Gemma Fiorito, Daniela Hérin, Alessandro Albertini, Luciano Serra, Pierluigi Cunti, Grazia Petrone, Raffaele Santoro, Lisa Maccari, Gavino Napoletano, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Livia Noris, Eugenio Medaglia, Francesca Lorenzoni, Roberto Capancioni, Nicola De Rosa, Riccardo Sala, Lucia Rapella.

PROGETTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Claudio Carboncini, Dimitrios Vrettos.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica $C^3$ - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@istruzione.it.

Versione del documento: 3.0 del 27 giugno 2014.
Stampa prima edizione: aprile 2014.
ISBN 9788896354698

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica $C^3$, Algebra dolce 2 - prima edizione.
Codice ISBN: 9788896354698
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2014.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

# Indice

# Prefazione

*Ciao Daniele, ho appena inoltrato il tuo lavoro al mio professore,*
*lui apprezza molto il progetto* Matematica $C^3$
*e penso che la tua versione gli possa far comodo*
*soprattutto per i primi anni del nostro serale.*
*Già l'anno scorso ha tentato l'adozione ufficiale del* $C^3$ *normale,*
*ma, come precario, è riuscito a strappare solo una promessa,*
*promessa che verrà mantenuta solo se tra un paio di settimane*
*(quando inizierà per me e per lui la scuola) lo rivedrò in cattedra.*
*In ogni caso, che ci sia lui o no, proporrò lo stesso al coordinatore il progetto* $C^3$,
*"Software Libero, Conoscenza Libera, Scuola Libera", giusto?*
*Buon lavoro,*
*Alice*

Giusto, Alice.
La cosa importante è che il testo non sia considerato un oggetto scritto da altri, da un gruppo di professori più o meno strambi, ma sia una traccia. Una traccia lasciata sul terreno di un territorio sconosciuto, a volte inospitale a volte stupefacente.
Una traccia come quella scritta su una mappa del tesoro: un po' bruciacchiata consumata e piena di incrostazioni. A volte incomprensibile, con degli errori che portano fuori pista, a volte scritta male, con alcune parti mancanti oppure con alcune parti inutili che confondono.
Non seguire acriticamente la mappa, non fidarti del testo, leggilo con la penna in mano, correggi, cambia, cancella e aggiungi, parlane in classe.
Contribuisci alla sua evoluzione.
Grazie, ciao.

**Matematica $C^3$** Diversi anni fa, Antonio Bernardo ha avuto il coraggio di coordinare un gruppo di insegnanti che mettendo insieme le proprie competenze hanno creato un testo di matematica per il biennio dei licei scientifici: *Matematica $C^3$*. Con grande generosità e lungimiranza, il gruppo ha scelto di rilasciare il lavoro con una licenza *Creative Commons* libera. Questa licenza permette a chiunque di riprodurre l'opera e divulgarla liberamente, ma permette anche di creare altre opere derivate da *Matematica $C^3$*.

**Specificità di questa versione** Questa versione modifica *Matematica $C^3$* in modo da adattarlo ai programmi delle scuole diverse dal liceo scientifico. Nell'organizzazione del testo si è tenuto conto delle indicazioni ministeriali per la matematica dei licei.

Viene dato più spazio alla geometria nel piano cartesiano proponendo in prima: i punti, i segmenti, le figure; in seconda: le rette. Le trasformazioni geometriche sono proposte sotto forma di schede che guidano l'attività di laboratorio di matematica. Nei numeri naturali viene proposto l'uso di grafi ad albero nella soluzione delle espressioni e nella scomposizione in fattori dei numeri. Nelle disequazioni, il centro dell'attenzione è posto nello studio del segno di un'espressione.

Per quanto riguarda il tema dell'informatica, in prima viene presentato il foglio di calcolo e la geometria della tartaruga mentre in seconda, la geometria interattiva con l'uso di un linguaggio di programmazione e di una apposita libreria grafica.

**Adozione** Questo manuale non vorrebbe essere adottato nel senso di essere *scelto* dal collegio docenti; vorrebbe essere *adottato* nel senso di essere preso in carico, da insegnanti, alunni, famiglie, come un proprio progetto, bisognoso di cure e attenzioni. Ha senso adottarlo se siamo disposti a contribuire alla sua crescita. Si può contribuire in diversi modi: usando il testo o anche solo qualche capitolo, magari per supportare attività di recupero o per trattare temi non presenti nel libro di testo in adozione; segnalando errori, parti scritte male o esercizi non adeguati; proponendo cambiamenti alla struttura; scrivendo o riscrivendo parti del testo; creando esercizi; realizzando illustrazioni.

**Obiettivi** Il progetto *Matematica* $C^3$ ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipo di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Seguendo l'esempio di questa versione, altri insegnanti, studenti, appassionati di matematica, potrebbero proporre delle modifiche per adattare il testo alle esigenze di altri percorsi scolastici.

**Supporti** Matematica $C^3$ è scaricabile dal sito `www.matematicamente.it`. Mentre il cantiere in cui si lavora a questa versione si trova in: `bitbucket.org/zambu/mc3_a1_dolce` e `bitbucket.org/zambu/mc3_a2_dolce`. È disponile in formato elettronico pdf direttamente visualizzabile o stampabile. Sullo stesso sito sono disponibili i sorgenti in LaTeX, che ne permettono la modifica. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono. Oppure può essere usato in formato elettronico su pc, netbook, tablet, smartphone. Può essere proiettato direttamente sulla lavagna interattiva interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni).

Daniele Zambelli.

# Aritmetica e Algebra I


Foto di Jonycunha
http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/
Licenza: Creative Commons Attribution BY-SA

# Numeri reali 1

## 1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei *numeri naturali* racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n + m$ è il numero che si ottiene partendo da $n$ e continuando a contare per altre $m$ unità;
- *sottrazione*: $n - m$ è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a $m$ dà come risultato $n$;
- *moltiplicazione*: $n \cdot m$ è il numero che si ottiene sommando $n$ volte $m$, o meglio sommando $n$ addendi tutti uguali a $m$;
- *divisione*: $n : m$ è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per $m$ dà come risultato $n$;
- *potenza*: $n^m$ è il numero che si ottiene moltiplicando $m$ fattori tutti uguali a $n$ con $m \geqslant 2$, ponendo $n^1 = n$ e $n^0 = 1$;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ con $n \geqslant 2$ è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a $n$ dà come risultato $m$.

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, $n$ ed $m$, la somma $n + m$ e il loro prodotto $n \cdot m$ è sempre un numero naturale; la potenza $n^m$, escluso il caso $0^0$, è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza $n - m$, il quoziente $n : m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$.

Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre eseguire sempre operazioni. Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca possediamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo $10.000 - 12.000$. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di $12.000 - 10.000$. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, possediamo 10.000 euro e dobbiamo pagare 12.000 euro ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno $+$ o il segno $-$. Si genera così l'insieme dei *numeri relativi*.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.

Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre hai casi $n : 0$ e $0 : 0$, non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione 3 : 4. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere eseguita. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuna toccano $\frac{3}{4}$ di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avrà 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.

Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{3}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale $0,75$. Le due scritture sono perfettamente equivalenti.

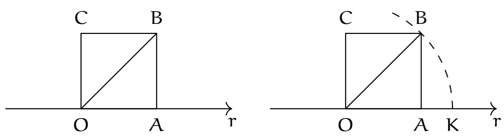
Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei *numeri razionali* che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\} = \left\{ 0, +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{2}{3,} - \frac{1}{5}, -\frac{11}{17}, \frac{129}{1725} \ldots \right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero $\sqrt{2}$, cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; esso non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono *numeri irrazionali*.

Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il ragionamento.

Fissiamo sulla retta orientata $r$ l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale $OB$.




Il triangolo $OAB$ è retto in $A$, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$. Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Sappiamo che 'estrarre la radice quadrata' di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta $r$ che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro $O$ e raggio $OB$ determinando su $r$ il punto $K$ estremo del segmento con $OK = OB$.

Dalla posizione del punto $K$ possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| $x^2$ | 1,21 | 1,44 | 1,69 | 1,96 | 2,25 | 2,89 |

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ oppure $\sqrt{2} = 1,5$ commettiamo un errore minore di $1/10$.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,41 | 1,42 | 1,43 | 1,44 |
| $x^2$ | 1,9881 | 2,0164 | 2,0049 | 2,0776 |

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/100$. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

| Valore per difetto | Numero | Valore per eccesso | Ordine dell'errore |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | 1 |
| 1,4 | $\sqrt{2}$ | 1,5 | $10^{-1}$ |
| 1,41 | $\sqrt{2}$ | 1,42 | $10^{-2}$ |
| 1,414 | $\sqrt{2}$ | 1,415 | $10^{-3}$ |
| 1,4142 | $\sqrt{2}$ | 1,4143 | $10^{-4}$ |
| ... | $\sqrt{2}$ | ... | ... |

Per arrivare a concludere che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a$ e $b$ primi tra loro. Se si eleva al quadrato $\sqrt{2}$ si ottiene $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Elevare un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di $a^2$ e di $b^2$ sono gli stessi di $a$ e di $b$ con gli esponenti raddoppiati, anche $a^2$ e $b^2$ sono primi tra di loro e $a^2$ non può essere il doppio di $b^2$. Quindi $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$, ... Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero $\pi$, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.

Questi numeri sono detti *numeri irrazionali* e insieme ad altri, come $\pi$ ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali.

L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{J}$ è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

## 1.2 I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche. Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625. La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico $0,\overline{9411764705882352}$.

Il numero $\pi$ è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre: $\pi$ = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 ... Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numeri reali.

In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo $r = n + 0, abcd\ldots$, dove $r$ è il numero reale, $n$ è la parte intera e $0, abcd\ldots$ è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione: $1 = 0,99999999\ldots$ come i numeri decimali finiti: $1,225 = 1,22499999999\ldots$ Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.

Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$.

La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$? Per rappresentare il numero $\sqrt{2}$ abbiamo costruito un insieme, che abbiamo indicato con $A$, di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, che abbiamo indicato con $B$, di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero $\sqrt{2}$ spezzi l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due parti: quella dei numeri razionali $a$ tali che $a^2 < 2$ e quella dei numeri razionali $b$ tali che $b^2 > 2$. La coppia di insiemi $(A, B)$ caratterizza il numero $\sqrt{2}$, possiamo anzi identificare $\sqrt{2}$ con la coppia $(A, B)$.

È proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama *sezione*, o *partizione* di $\mathbb{Q}$, una coppia di sottoinsiemi non vuoti $A$ e $B$ che devono soddisfare le condizioni: $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$; $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$.

---

**Esempio 1.1.** Sezioni

- I due insiemi A e B così definiti: $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant 3\}$ definiscono una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3;
- siano $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ perché pur essendo $A \cap B = \emptyset$ non è $A \cup B = \mathbb{Q}$;
- siano $A = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \leqslant \frac{2}{7}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant \frac{2}{7}\right\}$, anche in questo caso la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ poiché $A \cap B = \left\{\frac{2}{7}\right\}$;
- costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tutti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2. $A = \mathbb{Q}^- \cup \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\right\}$. Si ha $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{Q}$, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non esiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme $\mathbb{Q}$.

---

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione $(A, B)$ può essere di tre tipi:

- A ammette massimo e B non ammette minimo;
- A non ammette massimo e B ammette minimo;
- A non ammette massimo e B non ammette minimo.

**Definizione 1.1.** Si chiama *elemento separatore* di una partizione $(A, B)$ di $\mathbb{Q}$ il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione $(A, B)$ ammette un elemento separatore e identifica il numero razionale 3. Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione $(A, B)$ identifica un numero irrazionale.

**Definizione 1.2.** L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo *numero irrazionale* le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.

Ritornando all'esempio precedente, il numero $\sqrt{2}$ è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$ oppure $x^2 < 2$ e $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\right\}$. Nell'insieme A ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto:

$$A = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,414213; \ldots\}.$$

Nell'insieme B ci sono tutti i numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per eccesso:

$$B = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214; \ldots\}.$$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, ma permette di collegare i nuovi numeri all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$, l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

**Definizione 1.3.** Un insieme $X$ si dice *continuo* se ogni partizione $(X', X'')$ di $X$ ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento $x$ appartenente a $X$ tale che per ogni $x'$ di $X'$ e per ogni $x''$ di $X''$ si ha $x' \leqslant x \leqslant x''$.

**Teorema 1.1** (di Dedekind)**.** *Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.*

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione $(A, B)$ di numeri reali.

**Postulato 1.1** (di continuità della retta)**.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.*

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedremo in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

### 1.2.1 Confronto fra numeri reali

Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

---

**Esempio 1.2.** Confrontare i seguenti numeri reali

- $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$, $\sqrt{3} = 1,7320\ldots$; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3;
- $\sqrt{99} < 10$ per verificarlo è sufficiente osservare che $\sqrt{100} = 10$.

---

## 1.3 Richiami sul valore assoluto

Si definisce *valore assoluto* di un numero reale $a$, indicato con $|a|$, il numero stesso se $a$ è positivo o nullo, il suo opposto se $a$ è negativo.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}.$$

Il numero $a$ si dice argomento del valore assoluto.

$|-3| = 3;$ $\quad |+5| = 5;$ $\quad |0| = 0.$

### 1.3.1 Proprietà del valore assoluto

$|x+y| \leqslant |x| + |y|$: il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.

$|x-y| \leqslant |x| + |y|$: il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$: il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$: il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

---

**Esempio 1.3.** Valore assoluto di numeri reali

- $|5+3| = |5| + |3|$ in entrambi i casi si ottiene 8;
- $|5+(-3)| = 2$ mentre $|5| + |-3| = 8$, pertanto $|5+(-3)| < |5| + |-3|$.

---

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

---

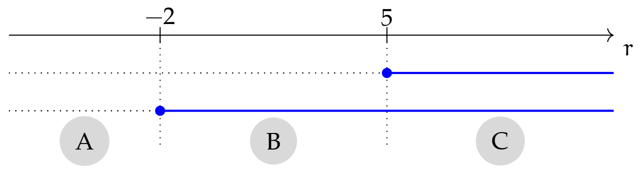
**Esempio 1.4.** Valore assoluto di argomento letterale

- $\left|x^2\right| = x^2$ infatti $x^2$ è una quantità sempre non negativa;
- $\left|a^2+1\right| = a^2+1$ infatti $a^2$ è sempre positivo, aumentato di 1 sarà sempre $> 0$;
- $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x+1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ una funzione di questo tipo si dice *definita per casi*;
- $f(a) = |a+1| - 3a + 1$ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è:

$$f(a) = |a+1| - 3a + 1 = \begin{cases} a+1-3a+1 = -2a+2, \text{ se } a+1 \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant -1 \\ -(a+1)-3a+1 = -4a, \text{ se } a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \end{cases}.$$

**Esempio 1.5.** $f(x) = |x-5| + |x+2|$.

La presenza di due valori assoluti ci obbliga a studiare i casi generati dal segno dei singoli argomenti. Pertanto poiché l'argomento del primo valore assoluto è non negativo per $x \geqslant 5$ e l'argomento del secondo valore assoluto è non negativo per $x \geqslant -2$, possiamo porre la reciproca situazione nel seguente grafico:




(A) $x < -2$: in questo intervallo entrambi gli argomenti sono negativi, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = -x+5-x-2 = -2x+3.$$

Se $x = -2$ si ha $f(-2) = |-2-5| + 0 = 7$;

(B) $-2 < x < 5$ il primo argomento è negativo e il secondo è positivo, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = -x+5+x+2 = 7.$$

Se $x = 5$ si ha $f(5) = 0 + |5+2| = 7$;

(C) $x > 5$ entrambi gli argomenti positivi, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = x-5+x+2 = 2x-3.$$

Possiamo allora sintetizzare in questo modo

$$|x-5| + |x+2| = \begin{cases} -2x+3, \text{ se } x < -2 \\ 7, \text{ se } -2 \leqslant x < 5 \\ 2x-3, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}.$$

## 1.4 Esercizi

### 1.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 1.1 - Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

**1.1.** Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

**1.2.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Esempio: $\sqrt{3}$: $A = \{1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205\}$, $B = \{2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206\}$.

a) $\sqrt{5}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$;
b) $\dfrac{6}{7}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$;
c) $\dfrac{1}{7}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

#### 1.2 - I numeri reali

**1.3.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

**1.4.** Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio: $5 < \sqrt{30} < 6$.

a) $\sqrt{50}$;
b) $\sqrt{47}$;
c) $\sqrt{91}$;
d) $\sqrt{73}$;
e) $\sqrt{107}$;
f) $\sqrt{119}$;
g) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$;
h) $2\sqrt{7}$;
i) $2+\sqrt{7}$;
j) $\sqrt{20}-\sqrt{10}$;
k) $\sqrt{\frac{7}{10}}$;
l) $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

**1.5.** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

a) $\sqrt{2}$, $1$, $\dfrac{2}{3}$, $2,0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\dfrac{3}{2}$ $0,75$.
b) $\pi$, $\sqrt{3}$, $\dfrac{11}{5}$, $0,\overline{9}$, $\sqrt{10}$, $3,1\overline{4}$, $\sqrt[3]{25}$.

**1.6.** Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi$, $0,\overline{3}$, $3,14$, $\frac{3}{2}$, $-2$.

**1.7.** Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale;
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale;
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

### 1.3 - Richiami sul valore assoluto

**1.8.** Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri:

a) $|-5|$
b) $|+2|$
c) $|-1|$
d) $|0|$
e) $|-10|$
f) $|3-5(2)|$
g) $|-3+5|$
h) $\left|(-1)^3\right|$
i) $|-1-2-3|$

**1.9.** Dati due numeri reali $x$ ed $y$ entrambi non nulli e di segno opposto, verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati sotto. Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?

| Relazione | $x=-3, y=5$ | | $x=-2, y=2$ | | $x=-10, y=1$ | | $x=1, y=-5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x\| < \|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x\| = \|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x\| < y$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x+y\| < \|x\|+\|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x-y\| = \|x\|-\|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|\|x\|-\|y\|\| = \|x-y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |

**1.10.** Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

a) $f(x) = |x+1|$;
b) $f(x) = |x-1|$;
c) $f(x) = \left|x^2+1\right|$;
d) $f(x) = \left|(x+1)^2\right|$;
e) $f(x) = \left|x^2-1\right|$;
f) $f(x) = \left|x^3-1\right|$;
g) $f(x) = \left|x^2-6x+8\right|$;
h) $f(x) = \left|x^2+5x+4\right|$.

**1.11.** Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

a) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{|x+2|}$;
b) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;
c) $f(x) = |x+1| + |x-2|$;
d) $f(x) = |x+2| + |x-2|$;
e) $f(x) = |x-2| + |x-3|$;
f) $f(x) = |x+1| \cdot |x+2|$;
g) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{4}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$;
h) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$.

# Radicali 2

## 2.1 Radici

### 2.1.1 Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale r è il numero che si ottiene moltiplicando r per se stesso. Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato: $(+3)^2 = 9$, $(-2)^2 = +4$, $(-5)^2 = (+5)^2 = +25$.

L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama *radice quadrata*. La radice quadrata di un numero reale $a$ è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero $a$.

Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato possa dare come risultato un numero negativo.

**Definizione 2.1.** Si dice *radice quadrata* di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato. In simboli $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ dove $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Il simbolo $\sqrt{\ }$ è il simbolo della radice quadrata; il numero $a$ è detto *radicando*, il numero $b$ è detto *radice quadrata* di $a$.

Dalla definizione $\sqrt{a^2} = a$ con $a \geqslant 0$, quindi $\sqrt{81} = 9$ perché $9^2 = 81$; $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$ perché $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

❑ **Osservazione** $\sqrt{81} = \sqrt{(-9)^2}$, ma non è vero che $\sqrt{(-9)^2} = -9$ perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata sia sempre un numero positivo o nullo. Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione quando il radicando è un'espressione letterale: in questo caso $\sqrt{a^2} = a$ non è del tutto corretto poiché $a$ può assumere sia valori positivi sia valori negativi. Scriveremo correttamente $\sqrt{a^2} = |a|$.

---

**Esempio 2.1.** Radici quadrate

- $\sqrt{4} = 2$ infatti $2^2 = 4$;
- $\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$ infatti $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$;
- $\sqrt{0,01} = 0,1$ infatti $0,1^2 = 0,01$;
- $\sqrt{1} = 1$ infatti $1^2 = 1$;
- $\sqrt{0} = 0$ infatti $0^2 = 0$;
- $\sqrt{-16}$ non esiste, radicando negativo;
- $\sqrt{11}$ esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale;
- $\sqrt{x^2} = |x|$ dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conoscendo il segno di $x$ dobbiamo imporre che il risultato sia sicuramente positivo;

- $\sqrt{a^2-4a+4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$ dobbiamo mettere il valore assoluto perché $a-2$ può anche essere negativo;
- $\sqrt{9(x+1)^2} = 3|x+1|$.

### 2.1.2 Radici cubiche

**Definizione 2.2.** Si dice *radice cubica* di un numero reale $a$ quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato $a$. In simboli $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$ dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale esiste sempre sia per i numeri positivi o nulli, sia per i numeri negativi.

**Esempio 2.2.** Radici cubiche

- $\sqrt[3]{-8} = -2$ infatti $(-2)^3 = -8$;
- $\sqrt[3]{125} = 5$ infatti $5^3 = 125$;
- $\sqrt[3]{1} = 1$ infatti $1^3 = 1$;
- $\sqrt[3]{0} = 0$ infatti $0^3 = 0$;
- $\sqrt[3]{-1000} = -10$ infatti $(-10)^3 = -1000$;
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;
- $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$ infatti $(0,5)^3 = 0,125$;
- $\sqrt[3]{x^3} = x$ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto;
- $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$ non si deve mettere il valore assoluto.

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre il segno della base.

### 2.1.3 Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice $n$.

**Definizione 2.3.** Si dice *radice n-esima* di un numero reale a quel numero $b$ che elevato ad $n$ dà come risultato $a$. In simboli $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ con $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

Non si definisce la radice di indice 0 e la scrittura $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato. Alla scrittura $\sqrt[1]{a}$ si dà il valore $a$.

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

- se l'indice $n$ è dispari $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, inoltre è negativa se $a < 0$, positiva se $a > 0$ e nulla se $a = 0$;
- se l'indice $n$ è pari $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di $a \geqslant 0$ e si ha che $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$.

**Esempio 2.3.** Radici n-esime

- $\sqrt[4]{16} = 2$ infatti $2^4 = 16$;
- $\sqrt[4]{-16}$ non esiste infatti $(-2)^4 = +16$;
- $\sqrt[5]{32} = 2$ infatti $2^5 = 16$;
- $\sqrt[4]{1} = 1$ infatti $1^4 = 1$;
- $\sqrt[n]{0} = 0$;
- $\sqrt[5]{-1} = -1$ infatti $(-1)^5 = -1$;
- $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è pari;
- $\sqrt[5]{x^5} = x$ non va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

## 2.2 Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso. Le *condizioni di esistenza*, in breve si può scrivere C. E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.

Supponiamo di avere $\sqrt[n]{A(x)}$ con $A(x)$ espressione nell'indeterminata $x$, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

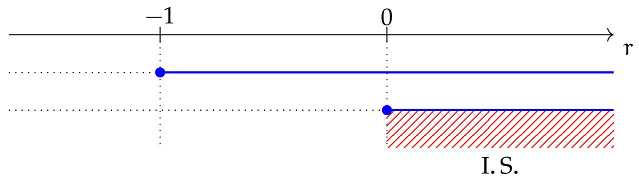
- se $n$ è pari la radice esiste per tutti i valori di $x$ che rendono non negativo il radicando, cioè C. E. $A(x) \geqslant 0$;
- se $n$ è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile $x$, purché esista il radicando stesso.

**Esempio 2.4.** Condizioni di esistenza

- $\sqrt{x}$: C. E. $x \geqslant 0$;
- $\sqrt[3]{x}$: C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $\sqrt{-x}$: C. E. $x \leqslant 0$;
- $\sqrt[3]{-x}$: C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $\sqrt{x-1}$: C. E. $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$;
- $\sqrt{a^2+1}$: C. E. $\forall a \in \mathbb{R}$, infatti $a^2$ è sempre positivo pertanto $a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$;
- $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$: la radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando, tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi C. E. $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$;
- $\sqrt[4]{xy}$: C. E. $xy \geqslant 0$;
- $\sqrt[5]{a^2(a-3)}$: poiché la radice ha indice dispari non occorre porre alcuna condizione di esistenza.

**Esempio 2.5.** Determina le condizioni di esistenza della seguente espressione: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

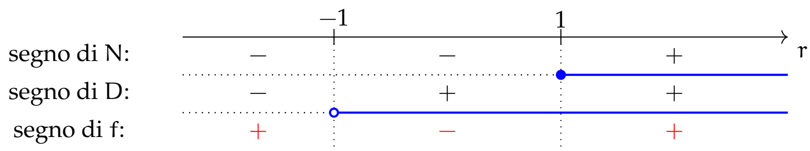
C.E. $\sqrt{x}$ esiste per $x \geqslant 0$, $\sqrt{x+1}$ esiste per $x+1 \geqslant 0$, quindi per individuare le condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il sistema $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$.




In definitiva C. E. $x \geqslant 0$.

**Esempio 2.6.** Determina le condizioni di esistenza della radice $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

C.E. $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$. Occorre discutere il segno della frazione $f$, combinando il segno del numeratore $N$ e del denominatore $D$:




Pertanto C.E. $x < -1 \vee x \geqslant 1$.

---

## 2.3 Potenze ad esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale $a \geqslant 0$ sotto forma di potenza di $a$, vogliamo cioè che sia: $\sqrt[n]{a} = a^x$.

**Caso con esponente positivo** Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza $n$ otteniamo: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (a^x)^n$ da cui si ottiene $a = a^{n \cdot x}$. Trattandosi di due potenze con base $a \geqslant 0$, l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere: $1 = n \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{1}{n}$, quindi: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia $m$ un numero intero positivo, possiamo scrivere $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ e quindi $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

---

**Esempio 2.7.** Calcola le seguenti potenze a esponente razionale positivo.

- $27^{\frac{2}{3}}$: si ha che $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$;
- $25^{\frac{3}{2}}$: si ha che $25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{25}\right)^3 = 5^3 = 125$.

---

**Caso con esponente negativo** Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione $a \neq 0$, infatti risulta: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$

---

**Esempio 2.8.** Calcola le seguenti potenze a esponente razionale negativo.

- $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;
- $125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(5^{-2})^3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$;
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}} = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9}$;
- $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$.

---

In generale si dà la seguente

**Definizione 2.4.** Si dice *potenza a esponente razionale* $\frac{m}{n}$ di un numero reale positivo $a$ l'espressione: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ con $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che a sia un numero positivo? Partiamo dall'espressione $a^{\frac{1}{n}}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, se $n$ è dispari la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base $a$, mentre se è pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per $a \geqslant 0$.

Nel caso generale $a^{\frac{m}{n}}$ con $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ la formula $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è falsa se $a < 0$.

Consideriamo il seguente esempio: $(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^{\frac{1}{6}}\right]^6 = \left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo. Tuttavia possiamo anche scrivere

$$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^6\right]^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.

Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

## 2.4 Semplificazione di radici

**Proposizione 2.1.** *Il valore di una radice in* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *non cambia se moltiplichiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo. In simboli* $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$ *con* $a \geqslant 0$ *e* $m, n, t \in \mathbb{N} - \{0\}$.

---

**Esempio 2.9.** Radici equivalenti.

- $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2}$ abbiamo moltiplicato per 2 indice della radice ed esponente del radicando;

- $\sqrt[3]{a} = \sqrt[9]{a^3}$ abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando.

---

**Proposizione 2.2.** *Il valore di una radice in* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune. In simboli* $\sqrt[nt]{a^{mt}} = \sqrt[n]{a^m}$ *con* $a \geqslant 0$ *e* $m, n, t \in \mathbb{N} - \{0\}$.

---

**Esempio 2.10.** Semplificazione di radici

- $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$: abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando;
- $\sqrt[10]{3^{15}} = \sqrt{3^3}$: abbiamo semplificato per 5;
- $\sqrt[7]{3^9}$: non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni;
- $\sqrt[8]{2^6} = 2^{\frac{6}{8}}$: semplificando la frazione dell'esponente otteniamo $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$;
- $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}} = \sqrt[6]{5^9} = \sqrt[2]{5^3}$;
- $\sqrt[4]{(-3)^2} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$;
- $\sqrt{10^{-4}}$: semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ottiene $10^{-2} = \frac{1}{100}$;
- $\sqrt{30 \cdot 27 \cdot 10}$: scomponendo in fattori primi otteniamo

$$\sqrt{30 \cdot 27 \cdot 10} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}.$$

  Osserviamo che tutti gli esponenti del radicando e l'indice della radice hanno un divisore, quindi $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

---

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere

$$\sqrt[nt]{a^{mt}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} \text{ se la potenza } t \text{ che abbiamo semplificato è dispari} \\ \sqrt[n]{|a^m|}, \text{ se } t \text{ è pari.} \end{cases}$$

---

**Esempio 2.11.** Semplificazione di radici con espressione letterale come radicando.

- $\sqrt{4x^4y^2a^6} = \sqrt{2^2x^4y^2a^6} = 2x^2\left|ya^3\right|$: abbiamo semplificato per 2 sia l'indice della radice che l'esponente del radicando;
- $\sqrt[12]{a^2+2a+1} = \sqrt[12]{(a+1)^2} = \sqrt[6]{|a+1|}$: dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 indice ed esponente;
- $\sqrt{x^2y^2} = |xy|$;
- $\sqrt{x^2+2xy+y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y|$;

- ➡ $\sqrt{x^2+y^2}$ non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza;
- ➡ $\sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{|x-1|}$;

---

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno. Per esempio $\sqrt[10]{(-2)^6} \neq \sqrt[5]{(-2)^3}$, infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.

Invece $\sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-2}$ perché in questo caso la concordanza del segno è conservata, infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.

Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto: $\sqrt[10]{(-2)^6} = \sqrt[5]{\left|-2^3\right|}$.

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno: $\sqrt[10]{x^6} = \sqrt[5]{\left|x^3\right|}$, C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$.

## 2.5 Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, con il divisore diverso da zero.

### 2.5.1 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

---

**Esempio 2.12.** Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando.

- ➡ $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 6^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{6^7}$;
- ➡ $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{6}}$.

---

### 2.5.2 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab},\qquad \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

---

**Esempio 2.13.** Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice.

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$;
- $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}=\sqrt[3]{\frac{9}{72}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$;
- $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}$, C. E. $a\geqslant 0\wedge b>0$ $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}=\sqrt{2a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{9}{2b}}=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}}=\frac{3a}{b}$.

---

### 2.5.3 Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti con lo stesso indice usando la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

**Procedura 2.1.** *Ridurre due o più radici allo stesso indice:*

*a ) scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;*
*b ) porre le condizioni di esistenza;*
*c ) calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;*
*d ) per ciascuna radice dividere il* mcm *per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.*

---

**Esempio 2.14.** Moltiplicazione e divisione di radici con indice diverso.

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}$. Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro mcm è 6, il primo radicando va elevato a 6 : 2 cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a 6 : 3 cioè 2;
- $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{8^3}{27^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2^9}{3^9}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 2^9}{3^9\cdot 2^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}}=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. Il mcm tra gli indici delle radici è 12. Il primo radicando va elevato a $12:3=4$; il secondo radicando va elevato a $12:4=3$; il terzo va elevato a $12:6=2$.

**Esempio 2.15.** $\frac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}}$, C. E. $x>0\wedge y>0$. Il mcm degli indici delle radici è 6, quindi:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}}=\sqrt[6]{\frac{\left(x^2y\right)^2\cdot(xy)^3}{x^2y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^4y^2x^3y^3}{x^2y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^7y^5}{x^2y^3}}=\sqrt[6]{x^5y^2}.$$

**Esempio 2.16.** $\sqrt[3]{\frac{ax+a}{x^2+2x+1}}\cdot\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{ax-a}}$.

a ) Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\frac{a(x+1)}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$;

b ) C. E. $x+1 \neq 0 \wedge a(x-1) > 0 \Rightarrow x \neq -1 \wedge ((a > 0 \wedge x > 1) \vee (a < 0 \wedge x < 1))$;

c ) Semplifichiamo le frazioni di ciascun radicando $\sqrt[3]{\frac{a}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{a}}$;

d ) Trasformiamo nello stesso indice: il mcm degli indici è 6, quindi:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

**Esempio 2.17.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-2x+1}} : \sqrt[4]{\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}}$.

a ) Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} : \sqrt[4]{\frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$;

b ) C. E. $(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$. L'operazione che dobbiamo eseguire è una divisione e dunque il divisore deve essere diverso da zero, quindi $x \neq -1 \wedge x \neq 1$, comunque già implicite nelle C.E. trovate;

| | | $-1$ | | $1$ | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$: | $-$ | | $-$ | $\circ$ | $+$ | |
| $x+1$: | $-$ | $\circ$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-1)(x+1)$: | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

c ) Semplifichiamo i radicandi $\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} : \sqrt[4]{(x-1) \cdot (x+1)}$;

d ) Riduciamo allo stesso indice: il mcm degli indici è 12, quindi:

$$\sqrt[12]{\left[\frac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4} : \sqrt[12]{(x-1)^3(x+1)^3} \Rightarrow \sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^8} \cdot \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}} = \sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^{11}(x+1)^3}}.$$

## 2.6 Portare un fattore sotto il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice bisogna elevarlo all'indice della radice:

- ➡ $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è pari e $a \geqslant 0$;
- ➡ $a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è pari e $a < 0$;
- ➡ $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è dispari.

Ricordando che abbiamo posto $\sqrt[1]{a} = a$, portare un fattore sotto radice quivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

**Esempio 2.18.** Portare un numero reale dentro il segno di radice.

- ➡ $2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$;
- ➡ $3 \cdot \sqrt{\frac{2}{21}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{9 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$;

- $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ lasciamo fuori dalla radice il segno meno $-\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$;
- $-\frac{1}{3} \cdot \sqrt{12} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 12} = -\sqrt{\frac{1}{9} \cdot 12} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$;
- $(1-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = -(\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 \cdot 3}$;
- $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-40}$.

**Esempio 2.19.** Portare una espressione letterale dentro il segno di radice.

- $a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$ l'indice della radice è dispari pertanto si porta sotto radice senza alcuna condizione;
- $(x-1) \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x-1)^3 \cdot x}$ l'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla $x$;
- $(x-2)\sqrt{y}$ osserviamo che il radicale esiste per $y \geqslant 0$. Per portare dentro il segno di radice il coefficiente $(x-2)$ bisogna fare la distinzione:

$$(x-2)\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 y}, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -(2-x)\sqrt{y} = -\sqrt{(2-x)^2 y}, \text{ se } x < 2; \end{cases}$$

- $(x-1)\sqrt{x-2}$. Il radicale esiste per $x-2 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 2$, per questi valori il coefficiente esterno $(x-1)$ è positivo e può essere portato dentro la radice:

$$(x-1)\sqrt{x-2} = \sqrt{(x-1)^2(x-2)};$$

- $\frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}$. Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale: per l'esistenza della frazione $\frac{a+2}{(a-1)^2}$ deve essere $(a-1)^2 \neq 0$, ovvero $a \neq 1$. Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per $a \neq 1$) è sufficiente che sia $a+2 \geqslant 0$ ovvero $a \geqslant -2$. Pertanto le condizioni di esistenza sono $a \geqslant -2$ e $a \neq 1$.

  Studiamo ora il segno della frazione algebrica da portare sotto radice: tale frazione è positiva o nulla per $a < -3 \vee a \geqslant 1$, è negativa per $-3 < a \leqslant 1$.

  Se $a > 1$ si ha $\frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{(a+3)^2} \cdot \frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$.

  Se $-2 < a < 1$ il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi:

$$-\left(-\frac{a-1}{a+3}\right) \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}} = -\sqrt{\frac{[-(a-1)]^2}{(a+3)^2} \cdot \frac{a+2}{(a-1)^2}} = -\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

  Se $a = -2$ l'espressione da calcolare vale zero mentre il caso $a = 1$ è escluso dalla condizione di esistenza.

## 2.7 Portare un fattore fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si inizia scomponendo in fattori irriducibili il radicando, ottenendo un radicale del tipo $\sqrt[n]{a^m}$ con $m \geqslant n$.

**I° modo:** si esegue la divisione intera $m : n$ ottenendo un quoziente $q$ e un resto $r$. Per la proprietà della divisione si ha $m = n \cdot q + r$ quindi $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}}$ e per le proprietà delle potenze $\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^q)^n \cdot a^r}$ e per la regola del prodotto di due radici con medesimo indice si ottiene:

$$\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^q)^n \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^q)^n} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r} \text{ con } r < n.$$

Notiamo che il fattore "fuori" dalla radice ha per esponente il quoziente della divisione intera, mentre il fattore che rimane "dentro" ha per esponente il resto della divisione stessa.

$\sqrt[3]{a^8} = \ldots$ eseguiamo la divisione 8 : 3 con $q = 2$ e $r = 2$, otteniamo $\sqrt[3]{a^8} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$.

**II° modo:** si può trasformare la potenza del radicando nel prodotto di due potenze con la stessa base; una avente esponente multiplo dell'indice della radice e l'altra avente per esponente la differenza tra l'esponente iniziale e il multiplo trovato. Consideriamo il seguente esempio:

$\sqrt[3]{a^8} = \ldots$ il multiplo di 3 più vicino a 8 è 6 quindi, otteniamo

$$\sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}.$$

---

**Esempio 2.20.** Portare un numero reale fuori dal segno di radice.

- $\sqrt{1200}$ Si scompone in fattori primi il radicando $1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$ ne segue allora che $\sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$;
- $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$;
- $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$.

---

Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b}, \text{ se } n \text{ dispari;} \\ |a|\sqrt[n]{b}, \text{ se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

---

**Esempio 2.21.** Portare una espressione letterale fuori dal segno di radice.

- $\sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2}$ bisogna mettere $a$ in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva; se $a < 0$ la relazione $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ è errata;

- $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3}$ occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice. Cominciamo da $a^5$ risulta $5:3=1$ con resto uguale a 2; per $b^7$ si ha $7:3$ con quoziente 2 e resto 1; l'esponente di c è minore dell'indice; per $d^3$ si ha $3:3$ con quoziente 1 e resto 0. In definitiva $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3} = ab^2d\sqrt[3]{a^2bc}$, o anche:

$$\sqrt[3]{a^5b^7cd^3} = \sqrt[3]{(a^3a^2)(b^6b)cd^3} = \sqrt[3]{a^3b^6d^3} \cdot \sqrt[3]{a^2bc} = ab^2d^3\sqrt[3]{a^2bc}.$$

In questo caso non c'è da mettere il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari;

- $\sqrt[3]{\dfrac{3^3x^3y}{z^6}}$, C. E. $z \neq 0$ $\sqrt[3]{\dfrac{3^3x^3y}{z^6}} = 3\dfrac{x}{z^2}\sqrt[3]{y}$;
- $\sqrt[4]{4x^4-4x^5}$ scomponiamo il radicando per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:

$$\sqrt[4]{4x^4-4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)}\ \text{C. E. } 1-x \geqslant 0 \Rightarrow\ x \leqslant 1.$$

Pertanto:

$$\sqrt[4]{4x^4-4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)} = |x|\sqrt[4]{4(1-x)} = \begin{cases} x\sqrt[4]{4(1-x)}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x\sqrt[4]{4(1-x)}, \text{ se } x < 0. \end{cases};$$

- $\sqrt{3(a-1)^2} = |a-1|\sqrt{3} = \begin{cases} (a-1)\sqrt{3}, \text{ se } a > 1 \\ 0, \text{ se } a = 1 \\ (1-a)\sqrt{3}, \text{ se } a < 1. \end{cases}.$

---

## 2.8 Potenza di radice e radice di radice

Per elevare a potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, la radice in potenza con esponente frazionario: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

---

**Esempio 2.22.** Potenza di radice.

- $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2^2} = 2$;
- $\left(\sqrt[3]{2ab^2c^3}\right)^2 = \sqrt[3]{4a^2b^4c^6}$.

---

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$. Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze trasformando la radice in potenza con esponente frazionario: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

**Esempio 2.23.** Radice di radice.

- $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2\cdot 2]{2} = \sqrt[4]{2}$;
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x}} = \sqrt[12]{2x}$.

**Esempio 2.24.** Data l'espressione $E = \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{2}}$ ridurla ad unico radicale.

In questo caso non possiamo subito applicare la regola annunciata, ma dobbiamo portare il fattore esterno dentro la radice più interna ottenendo $\sqrt[5]{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt[10]{18}$.

Osserviamo che l'espressione $E = \sqrt[5]{3 + \sqrt{2}}$ non si può ridurre ad unico radicale, se non sotto determinate condizioni che analizzeremo in seguito.

## 2.9 Somma di radicali

Si dice *radicale* un'espressione del tipo $a\sqrt[n]{b}$ con $a$ e $b$ numeri reali, $b \geqslant 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Il numero $a$ prende il nome di *coefficiente* del radicale.

Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

**Definizione 2.5.** Due radicali si dicono *simili* se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili, si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

Attenzione l'operazione $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ è errata in quanto i radicali addendi non sono simili.

**Esempio 2.25.** Esegui le seguenti somme di radicali.

- $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$;
- $2\sqrt{45} - \sqrt{80} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} - 2^2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$;
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili;
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili;
- $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
- $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$;
- $\frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{4}{3}\sqrt{7} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right)\sqrt{7} = \frac{3-8}{6}\sqrt{7} = -\frac{5}{6}\sqrt{7}$;
- $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = (3-2)\sqrt{2} + (2+3)\sqrt{3} = \sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ abbiamo sommato i radicali simili;
- $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$, C. E. $a \geqslant 0$;
- $\sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} + \sqrt[4]{a^6} : \sqrt[4]{a}$. Poniamo le condizioni di esistenza $a > 0$ e svolgiamo i calcoli: $\sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^3 \cdot a^2} + \sqrt[4]{a^6 : a} = \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^5} = 3\sqrt[4]{a^5} = 3\sqrt[4]{a^4 \cdot a} = 3a\sqrt[4]{a}$.

Per semplificare le espressioni che seguono, useremo le procedure di calcolo dei polinomi.

**Esempio 2.26.** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

- $(1+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-1) = 3\sqrt{2}-1+3\sqrt{2^2}-\sqrt{2} = 3\sqrt{2}-1+3\cdot 2-\sqrt{2} = 2\sqrt{2}+5$;
- $(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1 = 3+1+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3}$;
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{3}(-\sqrt{2}) = 3+2-2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6}$;
- $(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (3)^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3} = 14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}$;
- $(\sqrt{2}+4)(3-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}+\sqrt{2}(-\sqrt{2})+12+4(-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}-2+12-4\sqrt{2} = 10-\sqrt{2}$;
- $(\sqrt{2}-3)^3 = (\sqrt{2})^3-9(\sqrt{2})^2+27\sqrt{2}+(-3)^3 = 2\sqrt{2}-18+27\sqrt{2}-27 = 29\sqrt{2}-45$.

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze con esponente frazionario per poi applicare le proprietà delle potenze:

**Esempio 2.27.** Trasforma i radicali in potenze con esponente frazionario applicando le proprietà delle potenze.

- $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[6]{a^5\cdot b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a^2 b}$;
- $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a^6 b}}{a\sqrt[3]{b}}}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^6 b}}{a\sqrt[3]{b}}} &= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}} \\
&= a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}} \\
&= a^{\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{9}} \\
&= \sqrt[10]{a^3}\cdot\sqrt[9]{b^2};
\end{aligned}$$

➡ $\sqrt[6]{\dfrac{x^3 \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{x^2 - \sqrt{xy}}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{x^2 - \sqrt{xy}}} &= \left(\frac{x^3 \cdot (xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2 - (xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \left(\frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2 - x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \left[x^{\frac{17}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{6}} \\ &= x^{\frac{17}{36}} \cdot y^{\frac{1}{9}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

---

## 2.10 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Nel calcolo di espressioni che contengono radicali può capitare che al denominatore compaiano dei radicali. Per migliorare l'approssimazione si cerca di evitare questa situazione e operare affinché non compaiano radicali al denominatore. Questa operazione prende il nome di *razionalizzazione del denominatore*.

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformare una frazione in una frazione equivalente avente per denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

**I° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di fattore razionalizzante:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

---

**Esempio 2.28.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

➡ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

➡ $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

➡ $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a-1}} = \dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}} = \dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1} = \dfrac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1} = (a+1)\sqrt{a-1}.$

---

**II° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $n > m$.

In questo caso il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. Infatti si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{(n-m)}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Se abbiamo un'espressione in cui l'esponente del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

---

**Esempio 2.29.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$: il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$ quindi:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2};$$

- $\dfrac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}$: il fattore razionalizzante è $\sqrt[4]{x^3a^2b}$ quindi:

$$\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}} = \frac{ab\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{xa^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}} = \frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}} = \frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab} = \frac{\sqrt[4]{x^3a^2b}}{x};$$

- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^5}} = \dfrac{1}{b\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{b}}{b^2}.$

---

**III° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ oppure $\dfrac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ . Il fattore razionalizzante nel primo caso è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, nel secondo è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Sviluppiamo solo il primo caso, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

---

**Esempio 2.30.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{5^2}} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = -(\sqrt{3}+\sqrt{5});$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2^2}} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{7};$
- $\dfrac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \dfrac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \dfrac{(1+\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a^2}} = \dfrac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a}$ con $a \geqslant 0 \wedge a \neq 1$.

---

**IV° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

---

**Esempio 2.31.** Razionalizza $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Il fattore di razionalizzazione è in questo caso $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}};$$

ora il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt{6}$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2\cdot 6}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

---

**V° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

In questo caso si utilizza il prodotto notevole $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ e quello analogo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}&=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}\\&=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.\end{aligned}$$

---

**Esempio 2.32.** Razionalizza $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$.

Il fattore di razionalizzazione è in questo caso $\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}$ quindi:

$$\frac{1\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{2-3}=-\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right).$$

---

## 2.11 Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

I radicali doppi possono essere trasformati nella somma algebrica di due radicali semplici se l'espressione $a^2-b$ è un quadrato perfetto. La formula per ottenere la trasformazione in radicali semplici è:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

---

**Esempio 2.33.** Trasforma, se possibile, i seguenti radicali doppi in radicali semplici.

- $\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$;
- $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, razionalizzando il denominatore si ottiene: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$;
- $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{7+\sqrt{24}}$ per applicare la formula abbiamo portato il fattore 2 dentro la radice: $\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} + \sqrt{\frac{7-5}{2}} = \sqrt{6}+1$;
- $\sqrt{5+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-3}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-3}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{22}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{22}}{2}}$ la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

---

## 2.12 Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

### 2.12.1 Equazioni di primo grado

---

**Esempio 2.34.** Risolvi le seguenti equazioni.

- $\sqrt{3}x = 9 \Rightarrow\ x = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$;
- $(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6} = 2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1$.

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6} = 2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1\\
\Rightarrow&\sqrt{3}x-x-\sqrt{6} = 2x-3\cdot 2-\sqrt{2}+1\\
\Rightarrow&\sqrt{3}x-3x = \sqrt{6}-\sqrt{2}-5\\
\Rightarrow&x(\sqrt{3}-3) = \sqrt{6}-\sqrt{2}-5\\
\Rightarrow&x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}.
\end{aligned}$$

Razionalizziamo ora il denominatore:

$$x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9} = -\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{5}{2}.$$

---

### 2.12.2 Disequazioni di primo grado

**Esempio 2.35.** Risolvi le seguenti disequazioni.

- $(\sqrt{3}-1)x \leqslant \sqrt{3}$ il coefficiente dell'incognita è positivo, quindi: $x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ e poi razionalizzando $x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;
- $2x \cdot (1-\sqrt{2}) \geqslant -3\sqrt{2}$ il coefficiente dell'incognita è negativo, quindi $x \leqslant \dfrac{-3\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}$ e poi razionalizzando $x \leqslant 3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

### 2.12.3 Sistemi di primo grado

**Esempio 2.36.** Risolvi $\begin{cases} x(2+\sqrt{2})+y=\sqrt{2}(2+x) \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases}$.

Eseguiamo i calcoli per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} 2x+x\sqrt{2}+y=2\sqrt{2}+x\sqrt{2} \\ x-y\sqrt{2}-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-y\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2\sqrt{2} \\ x-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

e con il metodo di riduzione, sommando le due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} 3x=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=2\sqrt{2}-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=2\sqrt{2}-2\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}.$$

## 2.13 Esercizi

### 2.13.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 2.1 Radici

**2.1.** Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle).

a) $\sqrt{9}$;
b) $\sqrt{36}$;
c) $\sqrt{-49}$;
d) $\sqrt{64}$;
e) $\sqrt{-81}$;
f) $\sqrt{\frac{16}{25}}$;
g) $\sqrt{\frac{49}{81}}$;
h) $\sqrt{\frac{121}{100}}$;
i) $\sqrt{\frac{144}{36}}$;
j) $\sqrt{\frac{-1}{4}}$;
k) $\sqrt{0,04}$;
l) $\sqrt{0,09}$;
m) $\sqrt{0,0001}$;
n) $\sqrt{\frac{144}{9}}$;
o) $\sqrt{0,16}$.

**2.2.** Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle).

a) $\sqrt{-0,09}$;
b) $\sqrt{25 \cdot 16}$;
c) $\sqrt{36 \cdot 49}$;
d) $\sqrt{0,04 \cdot 0,0121}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{100}}$;
f) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$;
g) $\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$.

**2.3.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a $1/10$: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{17}{4}}$.

**2.4.** Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto.

a) $\sqrt{a^2+2a+1}$;
b) $\sqrt{4x^2+8x+4}$;
c) $\sqrt{9-12a+4a^2}$.

**2.5.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a $1/10$: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{250}$.

**2.6 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt[3]{27}$;
b) $\sqrt[3]{64}$;
c) $\sqrt[3]{-1}$;
d) $\sqrt[3]{1000}$;
e) $\sqrt[3]{125}$;
f) $\sqrt[3]{-216}$;
g) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$;
h) $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$;
i) $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$.

**2.7 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt[3]{0,001}$;
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;
c) $\sqrt[3]{-0,008}$;
d) $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}$;
e) $\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{122+\sqrt[3]{27}}}}$;
f) $\sqrt[3]{27 \cdot \sqrt{64}}$;
g) $\sqrt[9]{0}$;
h) $\sqrt[8]{-1}$;
i) $\sqrt[5]{-100000}$.

**2.8** (*). Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt[4]{0,0001}$;
b) $\sqrt[4]{81}$;
c) $\sqrt[6]{64}$;
d) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$;
e) $\sqrt[4]{-4}$;
f) $\sqrt[10]{0}$;
g) $\sqrt[4]{0,0081}$;
h) $\sqrt[5]{34-\sqrt[4]{14+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}}$;
i) $\sqrt{20+\sqrt[3]{121+\sqrt[4]{253+\sqrt[5]{243}}}}$.

**2.9** (*). Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt{21+\sqrt{16}}$;
b) $\sqrt[5]{31+\sqrt[4]{1}}$;
c) $\sqrt[5]{240+\sqrt{9}}$;
d) $\sqrt{\sqrt{0,16}}$;
e) $\sqrt[5]{32\cdot 10^{-5}}$;
f) $\sqrt{3\sqrt{37-4\sqrt{81}}\cdot 27}$;
g) $\sqrt{72+\sqrt{80+\sqrt{1}}}$;
h) $\sqrt{\frac{25a^4}{9}}$;
i) $\sqrt[4]{620+\sqrt[4]{625}}$.

**2.10** (*). Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt{24336}$;
b) $\sqrt[5]{243}$;
c) $\sqrt[4]{600+\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}$;
d) $\sqrt[3]{8a^3+12a^2+6a+1}$;
e) $\sqrt[3]{a^6+9a^4+27a^2+27}$;
f) $\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}$.

## 2.2 Condizioni di esistenza

**2.11** (*). Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a) $\sqrt[3]{x+1}$;
b) $\sqrt{1-x}$;
c) $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$;
d) $\sqrt{3x^2y}$;
e) $\sqrt[3]{3xy}$;
f) $\sqrt[4]{-2x^2y^2}$;
g) $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$;
h) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$;
i) $\sqrt{\dfrac{4-x}{x-3}}$.

**2.12** (*). Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a) $\sqrt{x^2(x+1)}$;
b) $\sqrt[3]{1+a^2}$;
c) $\sqrt[6]{2x-1}$;
d) $\sqrt{1-x}+2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$;
e) $\sqrt{1+|x|}$;
f) $\sqrt{(a-1)(a-2)}$;
g) $\sqrt{|x|+1}\cdot\sqrt[3]{x+1}$;
h) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}$;
i) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3-x}}$.

**2.13** (*). Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a) $\sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$;
b) $\sqrt{\dfrac{2y}{(2y+1)^2}}$;
c) $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-x}}$;
d) $\sqrt{\dfrac{a}{a^2-a-2}}$;
e) $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$;
f) $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}}$;
g) $\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}}$;
h) $\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{|x|}}$;
i) $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2+4+8x}{9}}$.

**2.14** (*). Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a ) $\sqrt[6]{\dfrac{(b^2+1+2b)^3}{729b^6}}$;
b ) $\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-4}}$;
c ) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}}$;
d ) $\sqrt[4]{\dfrac{m+1}{m-1}}$;
e ) $\sqrt[3]{x(x+2)^2}$;
f ) $\sqrt{\dfrac{1+a}{a^2}}$;
g ) $\sqrt{\dfrac{a+2}{a(a-4)}}$;
h ) $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$;
i ) $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+6a+9}}$.

**2.15** (*). Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a ) $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$;
b ) $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$;
c ) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$;
d ) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^3+1}}$;
e ) $\sqrt{2x+3}$;
f ) $\sqrt[3]{a^2-1}$;
g ) $\sqrt{x(x+1)(x+2)}$;
h ) $\sqrt{|x|+1}$;
i ) $\sqrt{\dfrac{x}{|x+1|}}$;
j ) $\sqrt{\dfrac{1}{-x^2-1}}$.

## 2.3 Potenze ad esponente razionale

**2.16.** Calcola le seguenti potenze con esponente razionale.

a ) $4^{\frac{3}{2}}$;
b ) $8^{\frac{2}{3}}$;
c ) $9^{-\frac{1}{2}}$;
d ) $16^{\frac{3}{4}}$;
e ) $16^{\frac{5}{4}}$;
f ) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$;
g ) $125^{-\frac{2}{3}}$;
h ) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$;
i ) $25^{-\frac{3}{2}}$;
j ) $27^{\frac{4}{3}}$.

**2.17** (*). Calcola le seguenti potenze con esponente razionale.

a ) $32^{\frac{2}{5}}$;
b ) $49^{-\frac{1}{2}}$;
c ) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$;
d ) $\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;
e ) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}$;
f ) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}$;
g ) $4^{0,5}$;
h ) $16^{0,25}$;
i ) $32^{0,2}$;
j ) $100^{0,5}$.

**2.18** (*). Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario.

a ) $\sqrt{2}$;
b ) $\sqrt[3]{8^2}$;
c ) $\sqrt[7]{5^3}$;
d ) $\sqrt{3^3}$;
e ) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{3^3}\right)}$;
f ) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}}$;
g ) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$;
h ) $\sqrt[5]{\dfrac{4^2}{3^2}}$.

**2.19** (*). Trasforma nella forma radicale le seguenti espressioni.

a) $\left((a^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{1}{4}}$;
b) $\left(1+\left(1+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

**2.20.** Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

$$0,00000001, \quad (0,1)^{10}, \quad (0,1)^{0,1}, \quad 10^{-10}, \quad \sqrt{0,0000000001}.$$

## 2.4 Semplificazione di radici

**2.21.** Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva.

a) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[8]{\ldots}$;
b) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{\ldots}$;
c) $\sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{\ldots}$;
d) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{\ldots}$;
e) $\sqrt{2} = \sqrt[\cdots]{16}$;
f) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[\cdots]{81}$.

**2.22.** Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva.

a) $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[\cdots]{25}$;
b) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[\cdots]{\frac{27}{8}}$;
c) $\sqrt[21]{a^7} = \sqrt[6]{\ldots}, a>0$;
d) $\sqrt[8]{a^{24}} = \sqrt[5]{\ldots}, a>0$;
e) $\sqrt[3]{27} = \frac{1}{\sqrt{\cdots}}$;
f) $\sqrt{x^4+2x^2+1} = \sqrt[7]{\ldots}$

**2.23** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{25}$;
b) $\sqrt[6]{8}$;
c) $\sqrt[8]{16}$;
d) $\sqrt[9]{27}$;
e) $\sqrt[4]{100}$;
f) $\sqrt[6]{144}$;
g) $\sqrt[4]{169}$;
h) $\sqrt[6]{121}$;
i) $\sqrt[6]{125}$.

**2.24** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{49}$;
b) $\sqrt[6]{64}$;
c) $\sqrt[12]{16}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$;
e) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$;
f) $\sqrt[10]{\frac{25}{81}}$;
g) $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}$;
h) $\sqrt[9]{-3^3}$;
i) $\sqrt[6]{(-2)^4}$.

**2.25** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[12]{-4^6}$;
b) $\sqrt[10]{-32}$;
c) $\sqrt[6]{5^2-4^2}$;
d) $\sqrt[4]{12^2+5^2}$;
e) $\sqrt[10]{3^2+4^2}$;
f) $\sqrt[4]{10^2-8^2}$;
g) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^{15}}$;
h) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 4^6}$;
i) $\sqrt[5]{5^5 \cdot 4^{10} \cdot 2^{15}}$.

**2.26** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[9]{27 \cdot 8 \cdot 125}$;
b) $\sqrt[4]{625}$;
c) $\sqrt[6]{1000}$;
d) $\sqrt[4]{2+\frac{17}{16}}$;
e) $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{4}+\frac{1}{8}\right)^4}$;
f) $\sqrt[6]{\left(1+\frac{21}{4}\right)^3}$;
g) $\sqrt[16]{(-16)^4}$;
h) $\sqrt[10]{2^{10} \cdot 3^{20}}$;
i) $\sqrt[6]{2^8 \cdot 3^6}$.

**2.27** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[12]{3^6 \cdot 4^{12}}$;
b) $\sqrt[4]{2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 12^5}$;
c) $\sqrt[6]{3^9 \cdot 8^2}$;
d) $\sqrt[4]{9x^2y^4}$;
e) $\sqrt[3]{64a^6b^9}$;
f) $\sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$;
g) $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}$;
h) $\sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}$;
i) $\sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$.

**2.28** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\left(\sqrt{a+1}\right)^6$;
b) $\sqrt[9]{27a^6b^{12}}$;
c) $\sqrt[12]{(2x+3)^3}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{0{,}008x^{15}y^9}{8a^{18}}}$;
e) $\sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$;
g) $\sqrt[6]{a^2+2a+1}$;
h) $\sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}$;
i) $\sqrt{3a^2+\sqrt{a^4}}$.

**2.29** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}$;
b) $\sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$;
c) $\sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{9x^2}{y^6}}$;
e) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^6}{25x^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{2x^2-2}{8x^2-8}}$;
g) $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}$;
h) $\sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$;
i) $\sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$.

**2.30** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{a^2+6a+9}$;
b) $\sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}$;
c) $\sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$;
d) $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$;
e) $\sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}$;
f) $\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-2a+1}$;
g) $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}$;
h) $\sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7(x^3+3x^2+3x+1)^2}}$;
i) $\sqrt{\frac{(x^3+x^2y)(a+2)}{2x+2y+ax+ay}}$.

**2.31.** [*] Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[2n]{16^n}$;
b) $\sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$;
c) $\sqrt[n^2]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$;
d) $\sqrt[3n]{27^n \cdot 64^2n}$;
e) $\sqrt[2n^2]{16^2n \cdot 81^2n}$;
f) $\sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$;
g) $\sqrt[5]{25x^3y^4}$;
h) $\sqrt[12]{81a^6b^{12}}$;
i) $\sqrt[5]{32x^{10}}$.

## 2.5 Moltiplicazione e divisione di radici

**2.32** (*). Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;
b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;
c) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$;
d) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$;
e) $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt{50}$;
f) $\sqrt{40}:\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)$;
g) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{45}$;
h) $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{9}$;
i) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{6}:\sqrt[5]{12}$.

**2.33 (*).** Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[6]{81}:\sqrt[6]{9}$;
b) $\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}$;
c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$;
d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}$;
e) $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt{3}$;
f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$;
g) $\sqrt{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$;
h) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^3}$.

**2.34 (*).** Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\left(\sqrt[3]{\frac{42}{13}}:\sqrt[3]{\frac{91}{36}}\right):\sqrt{13}$;
b) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{24}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$;
c) $\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$;
d) $\sqrt[5]{2^3}\cdot\ \sqrt[10]{2^4}$;
e) e)$\sqrt{15}\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{8}$;
f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$;
g) $\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}}\quad:\quad\sqrt{1-\frac{1}{2}}\ \cdot$
$\sqrt[6]{12}$;
h) $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$.

**2.35.** [*] Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{12a}$;
b) $\sqrt{3a}:\sqrt{\frac{1}{5}a}$;
c) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^2}$;
d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^6b}{2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}$;
f) $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}a}:\sqrt[6]{3a}$.

**2.36 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[5]{ay}$;
b) $\sqrt[3]{(x+1)^2}:\sqrt{x-1}$;
c) $\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a+b}$;
d) $\sqrt{a^2-3a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$;
e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}:\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$.

**2.37 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}:\sqrt{\frac{2}{a}}$;
b) $\sqrt{\frac{a+1}{a-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}}$;
c) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}}$;
d) $\sqrt{a^4b}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$;
e) $\sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}$;
f) $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}:\sqrt{x+y}$.

**2.38 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$;
b) $\frac{\sqrt{4a^2-9}\cdot\sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$;
c) $\sqrt{\frac{9-a^2}{(a+3)^2}}\cdot\sqrt{\frac{27+9a}{3-a}}$;
d) $\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}}$;
e) $\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}}$;
f) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}}\cdot\sqrt[6]{a^2-4b^2}$.

**2.39 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}$;
b) $\frac{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$.

## 2.6 Portare un fattore sotto il segno di radice

**2.40 (*).** Trasporta dentro la radice i fattori esterni.

a) $2\sqrt{2}$;
b) $3\sqrt{3}$;
c) $2\sqrt{3}$;
d) $3\sqrt{2}$;
e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
f) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$;
g) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;
h) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$;
i) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$;
j) $2\sqrt[3]{2}$;
k) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$;
l) $4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;
m) $-3\sqrt{3}$;
n) $-2\sqrt[3]{2}$;
o) $\frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}$;
p) $\frac{-1}{5}\sqrt{5}$;
q) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;
r) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$.

**2.41 (*).** Trasporta dentro la radice i fattori esterni, discutendo i casi letterali.

a) $x\sqrt{\frac{1}{5}}$;
b) $x^2\sqrt[3]{x}$;
c) $a\sqrt{2}$;
d) $x^2\sqrt[3]{3}$;
e) $2a\sqrt{5}$;
f) $a\sqrt{-a}$;
g) $(a-1)\sqrt{a}$;
h) $(x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}$;
i) $x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$;
j) $\frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}$;
k) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}-x}$;
l) $\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$.

## 2.7 Portare un fattore fuori dal segno di radice

**2.42 (*).** Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{250}$;
b) $\sqrt{486}$;
c) $\sqrt{864}$;
d) $\sqrt{3456}$;
e) $\sqrt{20}$;
f) $\sqrt{0,12}$;
g) $\sqrt{45}$;
h) $\sqrt{48}$;
i) $\sqrt{98}$;
j) $\sqrt{50}$;
k) $\sqrt{300}$;
l) $\sqrt{27}$;
m) $\sqrt{75}$;
n) $\sqrt{40}$;
o) $\sqrt{12}$;
p) $\sqrt{80}$.

**2.43 (*).** Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{\frac{18}{80}}$;
b) $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{9}}$;
c) $\sqrt{1-\frac{9}{25}}$;
d) $\sqrt{\frac{10}{3}+\frac{2}{9}}$;
e) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}$;
f) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}$;
g) $\frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}}$;
h) $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$;
i) $\sqrt[3]{250}$;
j) $\sqrt[3]{24}$;
k) $\sqrt[3]{108}$;
l) $\sqrt[4]{32}$;
m) $\sqrt[4]{48}$;
n) $\sqrt[4]{250}$;
o) $\sqrt[5]{96}$;
p) $\sqrt[5]{160}$.

**2.44 (*).** Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{x^2y}$;
b) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}}$;
c) $\sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{d^9}}$;
d) $\sqrt{4ax^2}$;
e) $\sqrt{9a^2b}$;
f) $\sqrt{2a^2x}$;
g) $\sqrt{x^3}$;
h) $\sqrt{a^7}$;
i) $\sqrt[3]{16a^3x^4}$;
j) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$;
k) $\sqrt[3]{27a^7b^8}$;
l) $\sqrt{18a^6b^5c^7}$.

**2.45** (*). Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{a^2+a^3}$; b) $\sqrt{4x^4-4x^2}$; c) $\sqrt{25x^7-25x^5}$; d) $\sqrt[3]{3a^5b^2c^9}$; e) $\sqrt[4]{16a^4b^5c^7x^6}$; f) $\sqrt[5]{64a^4b^5c^6d^7}$; g) $\sqrt[6]{a^{42}b^{57}}$; h) $\sqrt[7]{a^{71}b^{82}}$; i) $\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^7}$.

## 2.8 Potenza di radice e radice di radice

**2.46** (*). Esegui le seguenti potenze di radici.

a) $(\sqrt{3})^2$; b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$; c) $\left(\sqrt{4}\right)^2$; d) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$; e) $(2\sqrt{3})^2$; f) $(3\sqrt{5})^2$; g) $\left(5\sqrt{2}\right)^2$; h) $(-2\sqrt{5})^2$; i) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$; j) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2$; k) $\left(a\sqrt{2a}\right)^2$; l) $\left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$; m) $(2\sqrt[3]{3})^3$; n) $(3\sqrt[3]{3})^3$; o) $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3})^3$; p) $(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9})^3$.

**2.47** (*). Esegui le seguenti potenze di radici.

a) $(\sqrt{3})^3$; b) $(2\sqrt{5})^3$; c) $\left(3\sqrt{2}\right)^3$; d) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$; e) $(\sqrt[3]{3})^6$; f) $(\sqrt[3]{5})^5$; g) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$; h) $(\sqrt[6]{3})^4$; i) $\left(\sqrt[6]{3ab^2}\right)^4$; j) $\left(\sqrt[4]{16a^2b^3}\right)^2$; k) $\left(\sqrt[3]{6a^3b^2}\right)^4$; l) $\left(\sqrt[3]{81ab^4}\right)^4$.

**2.48** (*). Esegui le seguenti radici di radici.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$; d) $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$; e) $\sqrt{\sqrt{16}}$; f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$; g) $\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$; h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}}$.

**2.49** (*). Esegui le seguenti radici di radici.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{3a}}$; b) $\sqrt{\sqrt[4]{3ab}}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}$; d) $\sqrt[4]{\sqrt{(2a)^5}}$; e) $\sqrt{2(a-b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}$; f) $\sqrt{3(a+b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}}$.

## 2.9 Somma di radicali

**2.50** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}-3\sqrt{3}$; c) $8\sqrt{6}-3\sqrt{6}$; d) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$; e) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{7}-7\sqrt{7}+4\sqrt{7}$; g) $11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2})$; h) $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})]$.

**2.51** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$;
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$;
c) $3\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$;
d) $5\sqrt{10}-\left(6+4\sqrt{19}\right)+2-\sqrt{10}$;
e) $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$;
f) $-3\sqrt{7}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{7}+8\sqrt{3}$;
g) $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+6\sqrt{6}-7\sqrt{3}-8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$;
h) $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;
i) $5\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6}+3\sqrt[3]{6}-2\sqrt{6}$;
j) $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$.

**2.52** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$;
b) $3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450})$;
c) $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$;
d) $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$;
e) $\sqrt{\frac{32}{25}}-\sqrt{\frac{108}{25}}+\sqrt{\frac{27}{49}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}}$;
f) $2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}$.

**2.53** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{4}{5}\sqrt{b}-\sqrt{a}+0,4\sqrt{b}$;
b) $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$;
c) $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$;
d) $2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}$;
e) $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+b}$;
f) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{5}\sqrt{x}+0,4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$;
g) $2a\sqrt{2a}-7a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$;

**2.54** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $6\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-7\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+9\sqrt{b}+\sqrt{a}$;
b) $3\sqrt{xy}+3\sqrt{x}-3\sqrt{y}+2\sqrt{xy}-3(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

**2.55** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$;
b) $(3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$;
c) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;
d) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$;
e) $(\sqrt{3}+1)^2$;
f) $(\sqrt{3}-2)^2$;
g) $(2+\sqrt{5})^2$;
h) $(4-\sqrt{3})^2$;
i) $(6+2\sqrt{3})^2$;
j) $(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$;
k) $(\sqrt{2}-1)^2$;
l) $(2\sqrt{2}-1)^2$.

**2.56** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt{3}+1)^2$;
b) $(\sqrt{3}-3)^2$;
c) $(\sqrt{5}-2)^2$;
d) $(2\sqrt{5}+3)^2$;
e) $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$;
f) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$;
g) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$;
h) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$;
i) $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$;
j) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2$;
k) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$;
l) $(\sqrt[3]{2}-1)^3$.

**2.57** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt[3]{3}+1)^3$;
b) $(\sqrt[3]{2}-2)^3$;
c) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3$;
d) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})$;
e) $\left[(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)\right]^2$;
f) $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$;
g) $(\sqrt{3}+\sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{3}$;
h) $3\sqrt{3}+\sqrt{3}:\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})^2$;

i ) $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{25}$;
j ) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})$;
k ) $(1+\sqrt{2})^2$;
l ) $(2-\sqrt{2})^2$.

**2.58** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$;
b ) $(2\sqrt{2}-1)^2$;
c ) $(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$;
d ) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$;
e ) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{7})^2$;
f ) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$;
g ) $(\sqrt{x}-1)^2$;
h ) $(2x+\sqrt{x})^2$;
i ) $(x+\sqrt[3]{x})^3$;
j ) $(2x+\sqrt{x})(2x-\sqrt{x})$;
k ) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;
l ) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{a}\right)$.

**2.59** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$;
b ) $(\sqrt{2}-1)^2-(2\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;
c ) $(\sqrt{3}+1)^2+\sqrt{3}(\sqrt{3}-3)-2(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)$;
d ) $(\sqrt{3}-3)^2+(\sqrt{3}-3)^3+2\sqrt{27}-\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2)$;
e ) $(\sqrt{5}-2)^2-(2\sqrt{5}+3)^2+\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+1\right](\sqrt{5}+\sqrt{2})$;
f ) $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2+2(\sqrt{7}+\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{35}$;
g ) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2$;
h ) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

**2.60.** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{x}-1)^2+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$;
b ) $(\sqrt{2}-1)^3+(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{2}-1$;
c ) $2\sqrt{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$;
d ) $(\sqrt{10}-\sqrt{7})(2\sqrt{10}+3\sqrt{7})$;
e ) $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$;
f ) $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$;
g ) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$;
h ) $\sqrt{27ax^4}+5x^2\sqrt{75a}$.

**2.61** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $\sqrt{125}+3\sqrt[6]{27}-\sqrt{45}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{20}+7\sqrt[8]{81}$;
b ) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[9]{a^8}$;
c ) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$;
d ) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$;
e ) $(\sqrt{2}+3)\cdot(1-\sqrt{3})^2$;
f ) $(\sqrt[3]{2}+3)\cdot(1-\sqrt[3]{3})^2$;
g ) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$;
h ) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\left(\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}\right)$.

**2.62** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a-b}{2a+b}}$;
b ) $\sqrt{\frac{9a}{b}}\sqrt{\frac{b^2-2b}{3ab-6a}}$;
c ) $\sqrt{\frac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a+b}{3a-b}}$;
d ) $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}}}}:\sqrt{\frac{a}{a+3}}$;

f) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{1}{x-1}}}}\cdot\sqrt[4]{x+1}$.

**2.63 (*).** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}}$;
b) $\left(\sqrt{\frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{\frac{ab^5+ab^4}{a}}-2\sqrt{b+1}\right)\cdot\frac{b^2}{(b+1)^2}$;
c) $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[3]{y\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}}$;
d) $\sqrt[4]{\frac{b^2-1}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3b-3}{6b^2}}:\sqrt[6]{\frac{(b-1)^4}{4b^5}}$;
e) $\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{ab-b}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2-2a+1}{ab+b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}}$;
f) $\sqrt[3]{\frac{x^2+2xy+y^2}{x+3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5x}{x^2+6x+9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+y}{5x}}$.

**2.64 (*).** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt[3]{\frac{x^2-x}{x+1}}\cdot\sqrt[15]{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}}:\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$;
b) $\sqrt{\frac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{y^3-y^2}}-x\sqrt{\frac{4x+4}{y^3-y^2}}$;
c) $\left(\sqrt{\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^3}}+\sqrt{\frac{xy^5+xy^4}{x}}-2\sqrt{y+1}\right):\frac{(y+1)^2}{y^2}$;
d) $\sqrt[4]{\frac{a^2-a}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}:\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$;
e) $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}}$;
f) $\sqrt[6]{\frac{1}{x}+4x-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+4x+4}\cdot\sqrt{\frac{x}{4x^2-1}}$.

**2.65.** [*] Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}}$;
b) $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}-2+\frac{3}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9a^2(a+3)^3}{(a-3)^2}}\right):\sqrt{\frac{a^2-9}{3a}}$;
c) $\sqrt[4]{\frac{a^3-a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$;
d) $\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{4y^2}}:\left(\sqrt[6]{\frac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4y^2}}\right)$;
e) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2}}:\left(\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right)$;
f) $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}}+\sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}}-\sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}$.

**2.66.** [*] Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$;
b) $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}}+\sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$;
c) $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}}+\sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}}-\sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$;

d) $\sqrt{4x-12y}+\sqrt{\frac{x^3-3x^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3y^3}{x^2}}$;

e) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}$;

f) $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}$.

**2.67** (*). Esegui trasformando i radicali in potenze con esponente frazionario.

a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}:\sqrt{\frac{1}{a}}$;

b) $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}}:\sqrt[7]{a^4\sqrt{a}}$;

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

d) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$.

## 2.10 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

**2.68** (*). Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; d) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; e) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; f) $\frac{4}{2\sqrt{2}}$; g) $\frac{3}{\sqrt{27}}$; h) $\frac{4}{\sqrt{8}}$; i) $-\frac{10}{5\sqrt{5}}$; j) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$; k) $-\frac{3}{4\sqrt{5}}$; l) $\frac{1}{\sqrt{50}}$.

**2.69.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{9}{\sqrt{18}}$; b) $\frac{7}{\sqrt{48}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{45}}$; d) $\frac{5}{\sqrt{125}}$; e) $\frac{6}{5\sqrt{120}}$; f) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}$; h) $3\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$; i) $\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$; j) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; k) $\frac{x}{\sqrt{x}}$; l) $\frac{ax}{\sqrt{2a}}$.

**2.70** (*). Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{2a}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{a}{2\sqrt{a}}$; c) $\frac{x}{3\sqrt{2x}}$; d) $\frac{x^2}{a\sqrt{x}}$; e) $\frac{3x}{\sqrt{12x}}$; f) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; g) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; h) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; i) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$; j) $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$; k) $\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$; l) $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

**2.71** (*). Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$; b) $\frac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}$; c) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$; d) $\frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; e) $\frac{3a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$; f) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$; g) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$; h) $\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$; i) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; j) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; k) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$; l) $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$.

**2.72.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; b) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$; d) $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$; e) $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$; f) $\frac{6}{5\sqrt[3]{100}}$; g) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$; h) $\frac{3}{2\sqrt[6]{27}}$; i) $\frac{10}{\sqrt[5]{125}}$; j) $\frac{16}{\sqrt[3]{36}}$; k) $\frac{9}{\sqrt[4]{2025}}$; l) $\frac{1}{\sqrt[5]{144}}$.

**2.73 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}}$; b) $\frac{ab^2}{\sqrt[3]{ab^2}}$; c) $\frac{3a^2b}{\sqrt[4]{9ab^3}}$; d) $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27ab^2c^5}}$; e) $\frac{5x}{\sqrt[3]{x\sqrt{5}}}$; f) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16a^2b^3c^4}}$; g) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{xy}}$; h) $\frac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9a}}$; i) $\frac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4a^2x}}$; j) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; k) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; l) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

**2.74.** [*] Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$; c) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$; d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; e) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; f) $\frac{3}{2+3\sqrt{3}}$; g) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$; h) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; i) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; j) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{ab}}$; k) $\frac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}$; l) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$.

**2.75.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$; b) $\frac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$; c) $\frac{a-2}{\sqrt{a}-2}$; d) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-2\sqrt{x}}$; e) $\frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$; f) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; g) $\frac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$; h) $\frac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$; i) $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{ab}}$; j) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$; l) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$.

**2.76 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$; b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$; c) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$; d) $\frac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$; e) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$; f) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$; g) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; h) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$; i) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; j) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; k) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; l) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

## 2.11 Radicali doppi

**2.77 (*).** $a^2-b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{12-\sqrt{23}}$; b) $\sqrt{12+2\sqrt{5}}$; c) $\sqrt{15+\sqrt{29}}$; d) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$; e) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$; f) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; g) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$; h) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; i) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$; j) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$; k) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$; l) $\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

**2.78 (*).** $a^2-b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; c) $\sqrt{7-\sqrt{33}}$; d) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; e) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; f) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$; g) $\sqrt{8-\sqrt{55}}$; h) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

**2.79.** $a^2 - b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{8-\sqrt{39}}$;
b) $\sqrt{8-4\sqrt{7}}$;
c) $\sqrt{8+\sqrt{15}}$;
d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;
e) $\sqrt{\frac{15}{2}-\sqrt{\frac{86}{9}}}$;
f) $\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}$;
g) $\sqrt{\frac{8}{5}-\sqrt{\frac{7}{4}}}$;
h) $\sqrt{10+\sqrt{19}}$.

### 7.2 Equazioni della retta

**2.80 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\sqrt{2}x = 2$;
b) $\sqrt{2}x = \sqrt{12}$;
c) $2x = \sqrt{6}$;
d) $\sqrt{2}x = \sqrt{6} + \sqrt{14}$;
e) $x - \sqrt{3} = 2\left(x - \sqrt{3}\right)$;
f) $2\sqrt{3}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$;
g) $2x + \sqrt{5} = \sqrt{5}x + 2$;
h) $(1+\sqrt{2})x = \sqrt{2}(1-\sqrt{2})$.

**2.81 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{8}} = x - \sqrt{2}$;
b) $2x - \left(x+\sqrt{3}\right)\sqrt{2} = 2x + 3\sqrt{5}$;
c) $\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x-1}{2}$;
d) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = 2$;
e) $(x+\sqrt{2})^2 - (x+\sqrt{3})^2 = 6$.

**2.82 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\frac{x-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}-3x}{4} = 2x$;
b) $2(x-1)^2 - \sqrt{2}x = 1 + 2x(x-2)$;
c) $\frac{\sqrt{3}}{3x-6} - \frac{1}{20-10x} = \sqrt{3} + 2$;
d) $\frac{3x-2}{\sqrt{8}x-\sqrt{32}} + \frac{5x}{4\sqrt{3}x-8\sqrt{3}} = 0$.

**2.83 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali.

a) $4x + \sqrt{2} < 2x - \sqrt{2}$;
b) $(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}+\sqrt{2}x) < 3\sqrt{2}$;
c) $x\sqrt{2} + \sqrt{5} > \sqrt{10}$;
d) $3(x-\sqrt{3}) < 2(x+\sqrt{3}) - \sqrt{6}$;
e) $\frac{x-\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

**2.84 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x \geqslant 2 \\ (3-\sqrt{2})x < \sqrt{2} \end{cases}$;
b) $\begin{cases} 2(x-\sqrt{2}) > 3x - \sqrt{3} \\ (x-\sqrt{2})^2 > (x-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

**2.85 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{6} \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x - \sqrt{3} = 2 - y \\ x + 2 = y + \sqrt{3} \end{cases}$;
c) $\begin{cases} x + 2y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - 2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$;
d) $\begin{cases} \frac{2(x+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x-y}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

**2.86 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=2 \\ \sqrt{3}x-4y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+y=-2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4 \\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+3\sqrt{2}y=2 \\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8} \end{cases}$.

**2.87 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x+y=3\sqrt{5} \\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27} \\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=4 \\ 2x+\sqrt{32}y=-1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=2 \\ x\sqrt{3}-y=1 \end{cases}$.

**2.88 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x-2y\sqrt{2}=\sqrt{2} \\ x\sqrt{2}+y=\sqrt{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=1 \\ x+y\sqrt{2}=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+3y\sqrt{2}=0 \\ x+y=\sqrt{8} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x\sqrt{3}+4y\sqrt{2}=4 \\ x\sqrt{12}+8y\sqrt{2}=-4 \end{cases}$.

### Esercizi di riepilogo

**2.89.** Vero o Falso? È dato un quadrato di lato $3\sqrt{2}$.

a) Il suo perimetro è in numero irrazionale [V] [F]
b) La sua area è un numero irrazionale [V] [F]

**2.90.** Vero o Falso? È dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza 14.

a) il suo perimetro è un numero irrazionale [V] [F]
b) la sua area è un numero razionale [V] [F]
c) il perimetro non esiste perché non si sommano razionali con irrazionali [V] [F]
d) la misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale [V] [F]

**2.91.** Vero o Falso? Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente $\sqrt{3}$cm e $\sqrt{13}$cm.

a) l'ipotenusa ha come misura un numero razionale [V] [F]
b) il perimetro è un numero irrazionale [V] [F]
c) l'area è un numero irrazionale [V] [F]

**2.92.** Vero o Falso? È dato un quadrato di lato $1+\sqrt{5}$.

a) la misura della diagonale è un numero irrazionale [V] [F]
b) l'area è un numero irrazionale [V] [F]

**2.93.** Vero o Falso? È dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza $\sqrt{3}$.

a) il perimetro è un numero irrazionale [V] [F]
b) l'area è un numero irrazionale [V] [F]
c) la misura della diagonale è un numero irrazionale [V] [F]
d) il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale [V] [F]

**2.94.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo che questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.

**2.95.** Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-5)^2} = -5$ è falsa?

**2.96.** Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni.

a) la radice terza del triplo di $a$ è uguale ad $a$;
b) dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del quoziente;
c) il doppio della radice quadrata di $a$ è uguale alla radice quadrata del quadruplo di $a$;
d) dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma;
e) la radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8;
f) dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata;
g) sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati.

**2.97.** Riscrivi in ordine crescente i radicali $\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$,

**2.98.** Verifica che il numero irrazionale $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ appartiene all'intervallo $(1;2)$ e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

**2.99.** Dati i numeri $\alpha = \sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{30}+\sqrt{3})} + \sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17})\cdot(7\sqrt{2}-\sqrt{17})}$ e $\beta = (3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5}) - \frac{3}{2+\sqrt{5}}$, quali affermazioni sono vere?

a) sono entrambi irrazionali;
b) solo $\alpha$ è irrazionale;
c) $\alpha$ è minore di $\beta$;
d) $\alpha$ è maggiore di $\beta$;
e) $\beta$ è irrazionale negativo.

**2.100.** Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali $l_1 = \sqrt[3]{1-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{7}} \cdot \sqrt[3]{25}$ e $l_2 = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot (\sqrt[8]{6})^3 : \sqrt[4]{\sqrt{6}}$. Determinare la misura del perimetro e della diagonale del rettangolo.

**2.101.** Se $x$ è positivo e diverso da 1, l'espressione $E = \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1} - \frac{4}{\sqrt{x}+1}} : \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{\sqrt{x}+1}}$ è uguale a:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$; c) $\frac{1}{x}$; d) $\sqrt[8]{x}$; e) 0.

**2.102.** Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie $(a, b)$ di numeri reali positivi con $a = 3b$, l'espressione $E = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a+b}{a-b}$ ha il numeratore doppio del denominatore.

**2.103.** Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere.

a ) $x+2\sqrt{3}$ per $x=\sqrt{3}$
b ) $\sqrt{2}x+3\sqrt{6}$ per $x=\sqrt{3}$
c ) $x^2+x-1$ per $x=\sqrt{2}$
d ) $x^2+\sqrt{5}x-1$ per $x=\sqrt{5}$
e ) $(x+2\sqrt{2})^2$ per $x=\sqrt{2}$

**2.104.** Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}}:\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1}$.

**2.105 (*).** Risolvi le seguenti equazioni.

a ) $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3x+3}{\sqrt{3}}$;
b ) $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}}+\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=2$.

**2.106.** Per quale valore di k il sistema lineare è determinato? $\begin{cases} x\sqrt{3}+(k-\sqrt{3})y=1 \\ -2x+y\sqrt{6}=-k \end{cases}$.

**2.107.** L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<0$ è:

a ) $x \geqslant 0$;
b ) $x \leqslant 0$;
c ) $x>0$;
d ) $x<0$;
e ) $\mathbb{R}$.

**2.108.** Data l'espressione $E=\frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}-1$, stabilire se esistono valori di $a$ che la rendono positiva.

**2.109.** Data la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a ) determina il suo dominio;
b ) riscrivi la funzione razionalizzando il denominatore;
c ) calcola $f(2)$;
d ) per quali valori di $x$ si ha $f(x)>0$?;
e ) risolvi l'equazione $f(x)=0$.

### 2.13.2 Risposte

**2.6** b) 4, h) $-\frac{4}{5}$, i) $\frac{10}{3}$.

**2.7** e) 3, h) $\emptyset$.

**2.8** b) 3, d) $\frac{2}{3}$, h) 2.

**2.9** c) 3, e) 0,2, i) 5.

**2.10** d) $2a+1$, e) $a^2+3$, f) $1-2x$.

**2.11** a) $\forall x \in \mathbb{R}$, b) $x \leqslant 1$, c) $x>-1$, d) $y \geqslant 0$, f)$x>1$.

**2.12** a) $x \geqslant -1$, d) $\emptyset$, i) $-12$.

**2.13** a) $-2<x \leqslant 5$, e) $b<-2 \vee b>2$.

**2.14** b) $0 \leqslant x \leqslant 1 \vee x>4$, e) $-2<a<0 \vee a>4$.

**2.15** a) $\forall x \in \mathbb{R}$, d) $\forall x \in \mathbb{R}$, g) $-2<x<-1 \vee x>0$, i) $x>0$, f)$\emptyset$.

**2.17** a) 4, f) 25, i) 2.

**2.18** c) $5^{\frac{3}{7}}$, g) $25^{-\frac{1}{3}}$.

**2.19** a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^2+1)^2}+1}$.

**2.23** c) $\sqrt{2}$, e) $\sqrt{10}$, i) $\sqrt{5}$.

**2.24** b) 2, d) $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}$, h) $\sqrt[3]{-3}$.

**2.25** a) $\emptyset$, e) $\sqrt[5]{5}$, g) 12.500.

**2.26** b) 5, d) , e) $\frac{9}{4}$, g) 2.

**2.27** a) $4 \cdot \sqrt{3}$, e) $4a^2b^3$, i) $|y| \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |x|}{3}}$.

**2.28** a) $\sqrt{(2x+3)}$, e) $\sqrt[5]{\frac{11a^2}{b}}$, i) $2 \cdot |a|$.

**2.29** b) $\sqrt[5]{|a^2+3x|}$, f) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{5a^2|b|^3}{a^2+2}$.

**2.30** c) $|a|\sqrt{|a-1|}$, d) $|x-3|$, h) $\frac{|x-1|}{|b||x+1|}$.

**2.31** b) $\sqrt[4]{\frac{8}{9}}$, e) $\sqrt[n]{6^4}$, i) $2x^2$.

**2.32** a) 15, d) 30, i) 1.

**2.33** c) $\sqrt[6]{3^7}$, e) $\sqrt[6]{3^7}$, h) $\sqrt[6]{\frac{3^2 \cdot 5^3}{4^2}}$.

**2.34** b) $\frac{5}{4}$, d) 2, e) 60, h) $\sqrt[6]{\frac{3^5}{2^5}}$.

**2.35** b) $\sqrt{15}$, c) $2ab$, e) $\sqrt[6]{\frac{2^3a^2}{3^4}}$.

**2.36** b) $\sqrt[6]{\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}}$, c) $\sqrt{a-b}$, e) $\sqrt[6]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)(1+x^2)^2}}$.

**2.37** b) $\sqrt[6]{\frac{(a+1)(a+3)^2}{(a-3)(a-1)^2}}$, c) $\sqrt[6]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+3)}}$, f) $\sqrt{\frac{x-y}{xy}}$.

**2.38** a) $\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$, d) $\sqrt[6]{\frac{(a+2)^7}{(a-1)^7}}$, e) $\sqrt[6]{\frac{x+2}{x^2(x+1)}}$.

**2.39** a) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$.

**2.40** a) $\sqrt{2^3}$, g) $\sqrt{\frac{3}{4}}$, o) $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

**2.41** b) $\sqrt[3]{x^7}$, g) $\sqrt{(a-1)^2a}$.

**2.42** a) $5\sqrt{10}$, b) $9\sqrt{6}$, c) $12\sqrt{6}$, d) $24\sqrt{6}$, k) $10\sqrt{3}$.

**2.43** b) $\frac{1}{6}\sqrt{97}$, g) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

**2.44** e) $3|a|\sqrt{b}$, C. E. $b >= 0$.

**2.45** b) $|2x|\sqrt{x^2-1}$, C. E. $x \leqslant 1 \vee x \geqslant 1$, i) $(a+a^2+a^3)\sqrt{a}$.

**2.46** d) $\sqrt{2^3}$, l) $2a^3$, p) $\frac{1}{9}$.

**2.47** j) $\sqrt{2^4a^2\,|b^3|}$.

**2.48** h) $\sqrt[3]{a^2}$.

**2.49** f) $\sqrt[3]{3(a+b)}$, C. E. $a > b$.

**2.50** c) $5\sqrt{6}$, f) $-\sqrt{7}$, g) $3(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$, h) $7\sqrt{7}$.

**2.51** c) $\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$, j) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

**2.52** a) 0, b) 0, c) $\sqrt[4]{2}+12\sqrt[3]{2}$, d) $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3}$, e) $\frac{2}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{7}\sqrt{3}$, f) 0.

**2.53** a) $-\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{b}$, b) $(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}$.

**2.54** a) $9\sqrt{b}-\sqrt{ab}$.

**2.55** e) $4+2\sqrt{3}$, f) $7-4\sqrt{3}$, g) $9+4\sqrt{5}$, h) $19-8\sqrt{3}$, i) $48+24\sqrt{3}$, j) $\frac{27}{4}-\sqrt{18}$.

**2.56** i) $8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$, l) $1-3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$.

**2.57** i) $3\sqrt{5}+25$.

**2.58** f) $-19-12\sqrt{6}$, k) $a+2+\frac{1}{a}$.

**2.59** a) $x-y$, g) 6.

**2.61** c) $\sqrt[5]{b^7}$, h) $\sqrt{b}$.

**2.62** e) $\sqrt[12]{\frac{a}{a+3}}$, f) $\sqrt[8]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}$.

**2.63** a) $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^3}}$, b) $(b-1)^2\sqrt{b+1}$, c) $2\sqrt[3]{y^2}$, d) $\sqrt[12]{\frac{(b+1)^3}{b(b-1)}}$, e) $\sqrt[4]{\frac{(a-1)^2}{2}}$, f) $\frac{x+y}{x+3}$.

**2.64** a) $\sqrt[3]{x}$, c) $(y-1)^2\sqrt{y+1}$, d) $\sqrt[12]{\frac{a^{11}}{(a^2-1)^6}}$, e) $\sqrt[24]{\frac{a^{10}b^{10}(a+b)^{11}}{x^{11}}}$, f) $\sqrt[6]{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

**2.65** a) $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}$, b) $\sqrt[6]{\frac{27a^3}{a-3}}$, c) $\sqrt[6]{\frac{a-1}{a(a+1)^3}}$, d) $\sqrt{2y-1}$, e) $\sqrt[6]{4a^2(2a-1)}$, f) $\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}$.

**2.66** a) $\frac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}$, b) $\frac{(1+2x)^2}{2x}\sqrt{x^2+xy+y^2}$, c) $\sqrt{a}$, d) $\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3y}$, e) $(1+a)^2$.

**2.67** a) $\sqrt{a^3}$, b) $\sqrt[14]{a^3}$, c) $\sqrt[9]{a^{19}}$, d) $\sqrt[5]{b^7}$.

**2.68** d) $2\sqrt{5}$, h) $\sqrt{2}$, j) $\frac{\sqrt{6}}{9}$,

**2.70** c) $\frac{\sqrt{2x}}{6}$.

**2.71** c) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$, l) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{36}$.

**2.73** b) $\sqrt[3]{a^2b}$.

**2.74** d) $3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

**2.77** d) $\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**2.78** d) $\sqrt{6}+1$.

**2.80** e) , f) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, g) 1, h) $4-3\sqrt{2}$.

**2.81** a) $18-12\sqrt{2}$, b) $-\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{2}$, c) $-(1+\sqrt{2})$, e) $\emptyset$, f) $\frac{-7(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$.

**2.82** a) $-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{36+17\sqrt{3}}{30}$, d) $\frac{36-10\sqrt{6}}{29}$.

**2.83** a) $x<-\sqrt{2}$, b) $x>\frac{\sqrt{2}-6}{2}$, c) $x>\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}$, d) $x<5\sqrt{3}-\sqrt{6}$, e) $x\geqslant\frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}$.

**2.84** a) $\emptyset$, b) $\frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}<x<\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

**2.85** a) $(\sqrt{2};\sqrt{3})$, b) $(\sqrt{3};2)$, c) $(\sqrt{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3})$, d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3};2\sqrt{2})$.

**2.86** a) $(\frac{\sqrt{3}+8}{7};\frac{2\sqrt{3}-1}{7})$, b) $(\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{1}{2})$, c) $(\frac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6}\,\frac{10-5\sqrt{10}}{6}$, d) $\mathbb{R}$, e) $(\frac{2-3\sqrt{6}}{5};\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5})$.

**2.87** a) $\emptyset$, b) $(\frac{9+9\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2})$, c) $(\frac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\frac{\sqrt{2}}{4})$, d) $(\frac{\sqrt{3}}{2}-1;\frac{1}{2}-\sqrt{3})$.

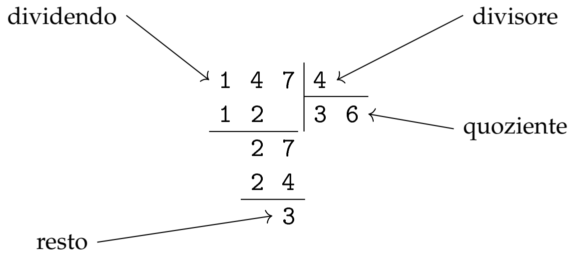
**2.88** a) $(\frac{\sqrt{2}+4}{5};\frac{\sqrt{2}-2}{5})$, b) $(\sqrt{2};-1)$, c) $(-\frac{4\sqrt{2}+12}{7};\frac{18\sqrt{2}+12}{7})$, d) $\emptyset$.

**2.105** a) $-1$, b) $2\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

# Divisione tra due polinomi 3

## 3.1 Polinomi in una sola variabile

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio $147 : 4$. Si tratta di trovare un quoziente $q$ e un resto $r < 4$, in modo che $147 = q \times 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:




Verifichiamo che $147 = 36 \times 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.

In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio $x$, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, $A(x)$ *dividendo* e $B(x)$ *divisore*, vogliamo determinare altri due polinomi, $Q(x)$ *quoziente* e $R(x)$ *resto*, con grado di $R(x)$ minore del grado di $B(x)$, per i quali: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

---

**Esempio 3.1.** Eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo dobbiamo sempre controllare che:

- il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore: $A(x)$ ha grado 4, $B(x)$ grado 2;
- i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile, in questo caso la $x$; poiché ciò non è vero, riscriviamo $A(x)$ ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$;
- dividendo e divisore siano in forma completa, cioè abbiano i termini con tutti i gradi; nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1; B(x) = 3x^2 + 0x - 1.$$

**Passo I** Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{dividendo}} & \multicolumn{3}{c}{\text{divisore}} \\
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
\multicolumn{5}{c}{\text{Spazio per i calcoli}} & \multicolumn{3}{c}{\text{Spazio per il quoziente}}
\end{array}
$$

**Passo II** Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, otteniamo $x^2$ che è il primo termine del quoziente; esso va riportato nello spazio dedicato al quoziente.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
 & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & x^2 & &
\end{array}
$$

**Passo III** Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & &
\end{array}
$$

**Passo IV** Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & & \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & &
\end{array}
$$

**Passo V** Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto, $-4x^3 + x^2 + 5x - 1$ e il divisore $3x^2 + 0x - 1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5} & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \end{array}$$

**Passo VI** Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto, con segno opposto, sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5} & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\ & -4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & & \end{array}$$

**Passo VII** Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x) = x^2 + \frac{11}{3}x - 1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è $x^2$, per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & +\frac{1}{3} \\ \cline{1-5} & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\ & +4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & & \\ & & -x^2 & +0x & +\frac{1}{3} & & & \\ \cline{4-5} & & & +\frac{11}{3}x & -\frac{2}{3} & & & \end{array}$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x) : B(x)$ ha quoziente $Q(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ e resto $R(x) = +\frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$.

**Verifica** Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra: $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.

$$\begin{aligned}\left(3x^2-1\right)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x &= 3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}\\ &= 3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}\\ &= x^4-4x^3+5x-1\\ &= A(x).\end{aligned}$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? È sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il seguente teorema.

---

**Teorema 3.1** (Divisione euclidea). *Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con grado di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.*

❑ **Osservazione** Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$. Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

**Definizione 3.1.** Si dice che un polinomio A (dividendo) è divisibile per un polinomio B (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A = Q \cdot B$.

---

**Esempio 3.2.** Eseguiamo la divisione tra $A(x) = x^3-2x^2+x-2$ e $B(x) = x^2+1$. I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di A è maggiore del grado di B e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nello schema per eseguire l'algoritmo. Risulta: $\left(x^3-2x^2+x-2\right) : \left(x^2+1\right) = (x-2)$; il resto $R(x)$ è il polinomio nullo e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$. Infatti $\left(x^2+1\right) \cdot (x-2) = \left(x^3-2x^2+x-2\right)$.

$$\begin{array}{rrrr|rrr} x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2 & +0x & +1 \\ \cline{5-7} -x^3 & -0x^2 & -x & & x & -2 & \\ \cline{1-4} & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ \cline{2-4} & & & 0 & & & \end{array}$$

---

In conclusione, se $A(x)$ è un polinomio di grado $n$ e $B(x)$ un polinomio di grado $m$ con $n \geqslant m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g < m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B. Se $n < m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

## 3.2 Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio

---

**Esempio 3.3.** Siano $A(a,b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ e $B(a,b) = a - 3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili $a$ e $b$ rispettivamente di grado 3 e grado 1.

Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile. Dividiamo il polinomio $A(a,b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ per il polinomio $B(a,b) = a - 3b$ rispetto alla variabile $a$. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No. A non lo è. Quindi ordiniamo A:
$$A(a,b) = 3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3;$$
- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile $a$? Sì.

Costruiamo lo schema per eseguire l'algoritmo e procediamo:

$$\begin{array}{cccc|cc} 3a^3 & +3a^2b & +4ab^2 & -2b^3 & a & -3b \\ \cline{5-6} & & \dots & & 3a^2 & -\dots \end{array}$$

Il quoziente è $Q = \dots\dots\dots$; il resto $R = 118b^3$

Verifica ..................

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile $b$, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile $b$? No. Ordinando A, risulta:
$$A(a,b) = -2b^3 + 4ab^2 + 3a^2b + 3a^3 + 3a^2b;$$
e ordinando B, risulta
$$B(a,b) = -3b + a;$$
- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile $b$? Sì.

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

---

## 3.3 Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, *nel caso in cui il divisore sia di grado 1* si può applicare una regola nota come regola di Ruffini e che si basa sui seguenti teoremi.

**Teorema 3.2.** *Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x - k$ è uguale al valore che $A(x)$ assume quando al posto della variabile x si sostituisce il valore k, $R = A(k)$.*

*Dimostrazione.* Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x) = (x-k) \cdot Q(x) + R$$

in cui si è scritto $R$ anziché $R(x)$, poiché è una costante.

Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile $x$, sostituiamo al suo posto il valore $k$ e otteniamo:

$$A(k) = \underbrace{(k-k)}_{0} \cdot Q(k) + R = R.$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x = k$ è proprio uguale al resto della divisione. □

**Teorema 3.3** (di Ruffini)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $x-k$ è che risulti $A(k) = 0$.*

*Dimostrazione. Prima implicazione*: $A(x)$ divisibile per $x-k \Rightarrow A(k) = 0$.

Poiché $A(x)$ è divisibile per $x-k$, per definizione di divisibilità deve essere $R = 0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k) = R = 0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k) = 0$.

*Seconda implicazione*: $A(k) = 0 \Rightarrow A(x)$ divisibile per $x-k$.

Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R = A(k)$ e per ipotesi $A(k) = 0$, ne segue che $R = 0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x-k$. □

**Procedura 3.4.** *Dividere un polinomio con la regola di Ruffini:*

*a )* *calcolo del resto;*
*b )* *applicazione del procedimento di divisione;*
*c )* *verifica.*

---

**Esempio 3.4.** $\left(a^2 - 3a + 1\right) : (a-1)$.

Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a) = a^2 - 3a + 1$ per il binomio $B(a) = a - 1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.

**Passo I** *Calcolo del polinomio resto.*

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(a)$: $(1)^2 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$.

Il resto della divisione è $-1$.

**Passo II** *Applicazione del procedimento di divisione.*

Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.

Coefficienti numerici del divendo

Termine noto del divisore cambiato di segno

Termine noto del dividendo

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & \downarrow & & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e riportare il risultato sotto il secondo coefficiente

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Sommare i due termini appena incolonnati $-3+1=-2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1 \cdot (-2) = -2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati $1-2=-1$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

quoziente

resto

Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e $-2$. Quoziente e resto sono allora $Q(x) = a - 2$ e $R = -1$.

**Passo III** *Verifica*

Come nella divisione con i numeri si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(a-2)(a-1) + (-1) = a^2 - a - 2a + 2 - 1 = a^2 - 3a + 1.$$

**Esempio 3.5.** $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$.

Applicazione del procedimento di divisione

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 0 | $-5$ | 6 |
| $-1$ | | $-4$ | $+4$ | $+1$ |
| | 4 | $-4$ | $-1$ | 7 |

Termine noto del divisore cambiato di segno

Resto

Coefficienti del polinomio quoziente

$$Q(x) = 4x^2 - 4x - 1 \qquad R = 7.$$

*Verifica.*

$$Q(x) \cdot B(x) + R = A(x)$$

$$\left(4x^2 - 4x - 1\right) \cdot (x + 1) + 7 = 4x^3 + 4x^2 - 4x - x - 1 + 7 = 4x^3 - 5x + 6$$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

**Esempio 3.6.** Dividere con la regola di Ruffini $\left(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 7\right) : (2x - 1)$.

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x + n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia. Il resto invece risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l'algoritmo precedente e *ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per* 2.

La divisione allora diventa $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + \frac{7}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

### 3.3.1 Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della nuova divisione $\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ resto della divisione.

Applicazione del procedimento di divisione.

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & +1 & \frac{7}{2} \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}
$$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio $x^3 - 2x$, il resto è $\frac{7}{2} \cdot 2 = 7$.

**Verifica** Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$\left(x^3 - 2x\right)(2x - 1) + 7 = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 7.$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx - \alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, basta dividere dividendo e divisore per $n$. Si ottengono $Q(x)$ e resto. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare per il coefficiente $n$. Infatti si ha: $A(x) = (nx - \alpha)Q(x) + R$ e, dividendo ambo i membri per $n$, si ha:

$$\frac{A(x)}{n} = \left(x - \frac{\alpha}{n}\right) Q(x) + \frac{R}{n}.$$

## 3.4 Esercizi

### 3.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 3.1 Polinomi in una sola variabile

**3.1.** Completa la divisione

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 7x^4 & +0x^3 & -5x^2 & +x & -1 & 2x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8} & & \dots & & & \frac{7}{2}x & \dots & \\ \hline & & -\frac{3}{2}x^2 & +x & -1 & & & \\ & & & \dots & & & & \\ \cline{2-5} & & & x & -\frac{7}{4} & & & \end{array}$$

**3.2 (*).** Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $(3x^2-5x+4):(2x-2)$;
b) $(4x^3-2x^2+2x-4):(3x-1)$;
c) $(5a^3-a^2-4):(a-2)$;
d) $(6y^5-5y^4+y^2-1):(2y^2-3)$.

**3.3 (*).** Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $(-7a^4+3a^2-4+a):(a^3-2)$;
b) $(x^7-4):(x^3-2x^2+3x-7)$;
c) $\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{3}{2}\right):(x^2+3x)$;
d) $\left(2x^4+2x^3-\frac{15}{2}x^2-15x-7\right):(2x+3)$.

**3.4 (*).** Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $(6-7a+3a^2-4a^3+a^5):(1-2a^3)$;
b) $(a^6-1):(1+a^3+2a^2+2a)$;
c) $\left(a^4-\frac{5}{4}a^3+\frac{11}{8}a^2-\frac{a}{2}\right):\left(a^2-\frac{a}{2}\right)$;
d) $(2x^3-6x^2+6x-2):(2x-2)$.

**3.5.** Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $(2x^5-11x^3+2x+2):(x^3-2x^2+1)$;
b) $(15x^4-2x+5):(2x^2+3)$;
c) $\left(-\frac{9}{2}x^2-2x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{69}{8}x-\frac{9}{4}-\frac{4}{3}x^5\right):\left(-2x^2-3x-\frac{3}{4}\right)$.

#### 3.2 Polinomi in più variabili

**3.6.** Dividi il polinomio $A(x,y)=x^3+3x^2y+2xy^2$ per il polinomio $B(x,y)=x+y$ rispetto alla variabile $x$. Il quoziente è $Q(x,y)=\dots\dots\dots$, il resto è $R(x,y)=0$.

Ordina il polinomio $A(x,y)$ in modo decrescente rispetto alla variabile $y$ ed esegui nuovamente la divisione. Il quoziente è sempre lo stesso? Il resto è sempre zero?

**3.7.** Esegui le divisioni tra polinomi rispetto alla variabile $x$.

a) $\left(3x^4+5ax^3-a^2x^2-6a^3x+2a^4\right):\left(3x^2-ax-2a^2\right)$;
b) $\left(-4x^5+13x^3y^2-12y^3x^2+17x^4y-12y^5\right):\left(2x^3-3yx^2+2y^2x-3y^3\right)$;
c) $\left(x^5-x^4-2ax^3+3ax^2-2a\right):\left(x^2-2a\right)$.

## 3.3 Regola di Ruffini

**3.8.** Completa la seguente divisione utilizzando la regola di Ruffini: $\left(x^2-3x+1\right):(x-3)$.

- Calcolo del resto: $(+3)^2-3(+3)+1=\dots$;
- calcolo del quoziente: $Q(x)=1x+0=x \quad R=\dots$;
- verifica: $(x-3)\cdot x+\dots=x^2-3x+1$.

**3.9 (*).** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(3x^3-4x^2+5x-1\right):(x-2)$;
b) $\left(x^5-x^3+x^2-1\right):(x-1)$;
c) $\left(x^4-10x^2+9\right):(x-3)$.

**3.10 (*).** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^4+5x^2+5x^3-5x-6\right):(x+2)$;
b) $\left(4x^3-2x^2+2x-4\right):(x+1)$;
c) $\left(\frac{4}{3}y^4-2y^2+\frac{3}{2}y-2\right):\left(y+\frac{1}{2}\right)$.

**3.11 (*).** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(\frac{1}{3}x^5-\frac{3}{2}x-2\right):(x+2)$;
b) $\left(2a-\frac{4}{3}a^4-2a^2-\frac{1}{3}\right):\left(a-\frac{1}{2}\right)$;

**3.12.** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(27x^3-3x^2+2x+1\right):(x+3)$;
b) $\left(2x^4-5x^3-3x+2\right):(x-1)$;
c) $\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{x^3}{3}+2x^4\right):\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

**3.13.** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(6a^3-9a^2+9a-6\right):(3a-2)$;
b) $\left(2x^4-3x^2-5x+1\right):(2x-3)$;
c) $\left(x^5+\frac{1}{3}x^4-2x^2-\frac{2}{3}x\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

**3.14 (*).** Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^3-2x^2+2x-4\right):(2x-2)$;
b) $\left(3x^4-2x^3+x-1\right):(2x-3)$;
c) $\left(\frac{3}{2}a^4-2a^2+a-\frac{1}{2}\right):(3a-1)$.

**3.15 (*).** Risolvi le seguenti divisioni nella variabile $a$.

a) $\left(3a^4b^4+a^2b^2+2ab+2\right):(ab-1)$;
b) $\left(3a^4b^2-2a^2b\right):\left(a^2b-3\right)$.

**3.16 (*).** Risolvi le seguenti divisioni nella variabile $x$ utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^4 - ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x - 6a^4\right) : (x - 2a)$;
b) $\left(x^4 - 2ax^3 + 2a^3x - a^4\right) : (x + a)$.

**3.17 (*).** Risolvi utilizzando, quando puoi, il teorema di Ruffini.

a) Per quale valore di $k$ il polinomio $x^3 - 2x^2 + kx + 2$ è divisibile per $x^2 - 1$?
b) Per quale valore di $k$ il polinomio $x^3 - 2x^2 + kx$ è divisibile per $x^2 - 1$?
c) Per quale valore di $k$ il polinomio $x^3 - 3x^2 + x - k$ è divisibile per $x + 2$?
d) Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile $a$ che, diviso per $a^2 - 1$ dà come quoziente $a^2 + 1$ e come resto $-1$.

**3.18 (*).** Risolvi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile $x$ che risulti divisibile per $(x - 1)$ e per $(x - 2)$ e tale che il resto della divisione per $(x - 3)$ sia uguale a $-4$;
b) Per quale valore di $a$ la divisione $\left(2x^2 - ax + 3\right) : (x + 1)$ dà resto 5?
c) Per quale valore di $k$ il polinomio $2x^3 - x^2 + kx - 3k$ è divisibile per $x + 2$?
d) I polinomi $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3k - 2$ e $B(x) = kx^2 - (3k - 1)x - 4k + 7$ divisi entrambi per $x + 1$ per quale valore di $k$ hanno lo stesso resto?

### 3.4.2 Risposte

**3.2** a) $Q(x) = \frac{3}{2}x - 1; R(x) = 2$, b) $Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{16}{27}; R(x) = -\frac{92}{27}$, c) $Q(a) = 5a^2 + 9a + 18$; $R(a) = 32$, d) $Q(y) = 3y^3 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{13}{4}; R(y) = \frac{27}{2}y - \frac{43}{4}$.

**3.3** a) $Q(a) = -7a; R(a) = 3a^2 - 13a - 4$, b) $Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 17$; $R(x) = 32x^2 - 30x + 115$, c) $Q(x) = x - \frac{7}{2}$; $R(x) = \frac{13}{2}x + \frac{3}{2}$, d) $Q(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3$; $R(x) = 2$.

**3.4** a) $Q(a) = 2 - \frac{1}{2}a^2; R(a) = \frac{7}{2}a^2 - 7a + 4$, b) $Q(a) = a^3 - 2a^2 + 2a - 1; R(a) = 0$, c) $Q(a) = a^2 - \frac{3}{4}a + 1; R(a) = 0$, d) $Q(x) = x^2 - 2x + 1; R(x) = 0$.

**3.9** a) $Q(x) = 3x^2 + 2x + 9; R(x) = 17$, b) $Q(x) = x^4 + x^3 + x + 1; R(x) = 0$, c) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3; R(x) = 0$.

**3.10** a) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3; R(x) = 0$, b) $Q(x) = 4x^2 - 6x + 8; R(x) = -12$, c) $Q(y) = \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{7}{3}; R(y) = -\frac{19}{6}$.

**3.11** a) $Q(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{6}; R(x) = -\frac{29}{3}$,

**3.14** a) $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $R(x) = -3$, b) $Q(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{15}{8}x + \frac{53}{16}$; $R(x) = \frac{143}{16}$, c) $Q(a) = \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{11}{18}a + \frac{7}{54}; R(a) = -\frac{10}{27}$.

**3.15** a) $Q(a) = 3a^3b^3 + 3a^2b^2 + 4ab + 6$; $R(a) = 8$, b) $Q(a) = 3a^2b + 7; R(a) = 21$.

**3.16** a) $Q(x) = x^3 + ax^2 - 2a^2x + 3a^3; R(x) = 0$ b) $Q(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3; R(x) = 0$.

**3.17** a) $k = -1$, b) nessuno, c) $k = -22$, d) $a^4 - 2$.

**3.18** a) $-2x^2 + 6x - 4$, b) $a = 0$, c) $k = -4$, d) $k = 2$.

# Scomposizione in fattori 4

## 4.1 Cosa vuol dire scomporre in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come il prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro danno come risultato il polinomio stesso. Si può paragonare la scomposizione in fattori di un polinomio alla scomposizione in fattori dei numeri naturali.

Per esempio, scomporre il numero 36 significa scriverlo come $2^2 \cdot 3^2$ dove 2 e 3 sono i suoi fattori primi. Anche $36 = 9 \cdot 4$ è una scomposizione, ma non è in fattori primi. Allo stesso modo un polinomio va scomposto in fattori non ulteriormente scomponibili che si chiamano irriducibili.

| | |
|---|---|
| 36 | 2 |
| 18 | 3 |
| 6 | 3 |
| 2 | 2 |
| 1 | |

Il polinomio $3a^3b^2 - 3ab^4$ si può scomporre in fattori in questo modo

$$3ab^2(a-b)(a+b),$$

infatti eseguendo i prodotti si ottiene

$$3ab^2(a-b)(a+b) = 3ab^2(a^2+ab-ba-b^2) = 3ab^2\left(a^2-b^2\right) = 3a^3b^2 - 3ab^4.$$

La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati. Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

**Definizione 4.1.** Un polinomio si dice *riducibile* (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà *irriducibile*.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali, ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi. Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

**Definizione 4.2.** La scomposizione in fattori di un polinomio è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

## 4.2 Raccoglimento totale a fattore comune

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Prendiamo in considerazione il seguente prodotto: $a(x+y+z) = ax + ay + az$.

Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax + ay + az$ come possiamo fare per individuare il prodotto che lo ha generato? In questo caso semplice possiamo osservare che i tre monomi contengono tutti la lettera $a$, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo

$$ax + ay + az = a(x + y + z).$$

---

**Esempio 4.1.** Analizziamo la scomposizione in fattori $3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right)$.

$$\begin{aligned} 3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right) &= 3a^2b(2a^3) + 3a^2b(-5b^2) + 3a^2b(-7c) \\ &= 6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il raccoglimento totale a fattore comune. Partendo da $6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc$ possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera $a$ è in comune, come la lettera $b$. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto $3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right)$ di partenza.

---

**Procedura 4.1.** *Mettere in evidenza il fattore comune:*

*a)* *trovare il* MCD *di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono;*
*b)* *scrivere il polinomio come prodotto del* MCD *per il polinomio ottenuto dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il* MCD*;*
*c)* *verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.*

---

**Esempio 4.2.** Scomporre in fattori $5a^2x^2 - 10ax^5$.

a) Tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5;
b) tra la parte letterale sono in comune le lettere $a$ e $x$, la $a$ con esponente 1, la $x$ con esponente 2;
c) pertanto il MCD è $5ax^2$;
d) passiamo quindi a scrivere $5a^2x^2 - 10ax^5 = 5ax^2(\dots\dots\dots)$;
e) nella parentesi vanno i monomi che si ottengono dalle divisioni $5a^2x^2 : 5ax^2 = a$ e $-10ax^5 : 5ax^2 = -2x^3$.

In definitiva $5a^2x^2 - 10ax^5 = 5ax^2(a - 2x^3)$.

**Esempio 4.3.** Scomporre in fattori $10x^5y^3z - 15x^3y^5z - 20x^2y^3z^2$.

a) Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore per formare il MCD. $\text{MCD} = 5x^2y^3z$;
b) divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:
   - ➡ $10x^5y^3z : 5x^2y^3z = 2x^3$;
   - ➡ $-15x^3y^5z : 5x^2y^3z = -3xy^2$;
   - ➡ $-20x^2y^3z^2 : 5x^2y^3z = -4z$;

c ) il polinomio si può allora scrivere come $5x^2y^3z \cdot (2x^3 - 3xy^2 - 4z)$;

d ) Il fattore da raccogliere a fattore comune può essere scelto con il segno $(+)$ o con il segno $(-)$. Nell'esempio precedente è valida anche la seguente scomposizione: $10x^5y^3z - 15x^3y^5z - 20x^2y^3z^2 = -5x^2y^3z \cdot (-2x^3 + 3xy^2 + 4z)$.

**Esempio 4.4.** Scomporre in fattori $-8x^2y^3 + 10x^3y^2$.

a ) Poiché il primo termine è negativo possiamo mettere a fattore comune un numero negativo. Tra 8 e 10 il MCD è 2. Tra $x^2y^3$ e $x^3y^2$ mettiamo a fattore comune le lettere $x$ e $y$, entrambe con esponente 2, perché è il minimo esponente con cui compaiono. In definitiva il monomio da mettere a fattore comune è $-2x^2y^2$;

b ) pertanto possiamo cominciare a scrivere $-2x^2y^2(\dots\dots\dots)$;

c ) eseguiamo le divisioni $-8x^2y^3 : (-2x^2y^2) = +4y$ e $10x^3y^2 : (-2x^2y^2) = -5x$. I quozienti trovati $+4y$ e $-5x$ vanno nelle parentesi.

In definitiva $-8x^2y^3 + 10x^3y^2 = -2x^2y^2(4y - 5x)$.

**Esempio 4.5.** Scomporre in fattori $6a(x-1) + 7b(x-1)$.

a ) Il fattore comune è $(x-1)$, quindi il polinomio si può scrivere come $(x-1) \cdot [\dots\dots\dots]$;

b ) nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni:

- ➡ $6a(x-1) : (x-1) = 6a$;
- ➡ $7b(x-1) : (x-1) = 7b$.

In definitiva $6a(x-1) + 7b(x-1) = (x-1)(6a+7b)$.

**Esempio 4.6.** Scomporre in fattori $10(x+1)^2 - 5a(x+1)$.

a ) Il fattore comune è $5(x+1)$, quindi possiamo cominciare a scrivere $5(x+1) \cdot [\dots\dots\dots]$;

b ) nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni:

- ➡ $10(x+1)^2 : 5(x+1) = 2(x+1)$;
- ➡ $-5a(x+1) : 5(x+1) = a$.

In definitiva $10(x+1)^2 - 5a(x+1) = 5(x+1)\left[2(x+1) - a\right]$.

---

## 4.3 Raccoglimento parziale a fattore comune

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.

Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z) = ax + ay + az + bx + by + bz$. Supponiamo ora di avere il polinomio $ax + ay + az + bx + by + bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

---

**Esempio 4.7.** Scomponiamo in fattori $ax + ay + az + bx + by + bz$. Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.

Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo $a$ tra i primi tre termini e $b$ tra gli ultimi tre, avremo: $a(x+y+z) + b(x+y+z)$. Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza $ax + ay + az + bx + by + bz = a(x+y+z) + b(x+y+z) = (x+y+z)(a+b)$.

---

**Procedura 4.2.** *Eseguire il raccoglimento parziale.*

a ) *Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;*
b ) *verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio...) comune a tutti i termini;*
c ) *se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;*
d ) *se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.*

---

**Esempio 4.8.** Scomporre in fattori $ax + ay + bx + ab$.

a ) Provo a mettere in evidenza la $a$ nel primo e secondo termine e la $b$ nel terzo e quarto termine: $ax + ay + bx + ab = a(x+y) + b(x+a)$;
b ) in questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

**Esempio 4.9.** Scomporre in fattori $bx - 2ab + 2ax - 4a^2$.

a ) Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale: $b$ nei primi due monomi e $2a$ negli altri due;
b ) $\underline{bx} - \underline{2ab} + \underline{\underline{2ax}} - \underline{\underline{4a^2}} = b(\underline{x-2a}) + 2a(\underline{x-2a}) = (x-2a)(b+2a)$.

**Esempio 4.10.** Scomporre in fattori $bx^3 + 2x^2 - bx - 2 + abx + 2a$.

a ) Raggruppiamo nel seguente modo: $\underline{bx^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{2}} + \underline{abx} + \underline{\underline{2a}}$ tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune $bx$, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune 2;
b ) $\underline{bx^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{2}} + \underline{abx} + \underline{\underline{2a}} = bx\left(\underline{x^2-1+a}\right) + 2\left(\underline{x^2-1+a}\right) = \left(x^2-1+a\right)\left(bx+2\right)$.

**Esempio 4.11.** Scomporre in fattori $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx$.

a ) Il fattore comune è $5a$, quindi:
  ➡ $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx = 5a\left(b^2 - 2bc - 5bx + 10cx\right)$;
b ) vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale $5a(\underline{b^2} - \underline{2bc} - \underline{\underline{5bx}} + \underline{\underline{10cx}}) = 5a\left[b(\underline{b-2c}) - 5x(\underline{b-2c})\right] = 5a(b-2c)(b-5x)$.

---

## 4.4 Esercizi

### 4.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 4.1 Cosa vuol dire scomporre in fattori

**4.1.** Associa le espressioni a sinistra con i polinomi a destra.

a) $(a+2b)^2$;
b) $3ab^2(a^2-b)$;
c) $(2a+3b)(a-2b)$;
d) $(3a-b)(3a+b)$;
e) $(a+b)^3$;
f) $(a+b+c)^2$;

g) $2a^2-4ab+3ab-6b^2$;
h) $a^2+4ab+4b^2$;
i) $9a^2-b^2$;
j) $3a^3b^2-3ab^3$;
k) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$;
l) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

#### 4.2 Raccoglimento totale a fattore comune

**4.2 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $ax+3a^2x-abx$;
b) $15b^2+12bc+21abx+6ab^2$;
c) $15x^2y-10xy+25x^2y^2$.

**4.3 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $-12a^8b^9-6a^3b^3-15a^4b^3$;
b) $2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2b^2c^2$;
c) $2m^7+8m^6+8m^5$.

**4.4 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $9x^2b+6xb+18xb^2$;
b) $20a^5+15a^7+10a^4$;
c) $x^2b-x^5-4x^3b^2$.

**4.5.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $3xy+6x^2$;
b) $b^3+\frac{1}{3}b$;
c) $3xy-12y^2$;
d) $x^3-ax^2$;
e) $9a^3-6a^2$;
f) $5x^2-15x$.

**4.6.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $18x^2y-12y^2$;
b) $4x^2y-x^2$;
c) $5x^3-2x^2$;
d) $-2x^3+2x$;
e) $3a+3$;
f) $-8x^2y^3-10x^3y^2$.

**4.7.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $\frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{3}a^4b^3-\frac{5}{9}a^2b^2$;
b) $12a^3x^5-18ax^6-6a^3x^4+3a^2x^4$;
c) $\frac{2}{3}a^4bc^2-4ab^3c^2+\frac{10}{3}abc^2$;
d) $-\frac{3}{5}a^4bx+\frac{3}{2}ab^4x-2a^3b^2x$.

**4.8.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $-\frac{5}{2}a^3b^3 - \frac{5}{3}a^4b^2 + \frac{5}{6}a^3b^4$;
b) $91m^5n^3 + 117m^3n^4$;
c) $\frac{2}{3}a^2x + \frac{5}{4}ax^2 - \frac{5}{4}ax$;
d) $-5a^2 + 10ab^2 - 15a$.

**4.9.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $ab^2 - a + a^2$;
b) $2b^6 + 4b^4 - b^9$;
c) $2a^2b^2x - 4a^2b$;
d) $-a^4 - a^3 - a^5$;
e) $-3a^2b^2 + 6ab^2 - 15b$;
f) $a^2b - b + b^2$.

**4.10.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $2b^6 + 4b^4 - b^9$;
b) $-5a^4 - 10a^2 - 30a$;
c) $-a^2b^2 - a^3b^5 + b^3$;
d) $-2x^6 + 4x^5 - 6x^3y^9$;
e) $-2x^2z^3 + 4z^5 - 6x^3z^3$;
f) $-\frac{4}{9}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

**4.11.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$;
b) $a^n + a^{n-1} + a^{n-2}$;
c) $\frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{6}a^3b^2$;
d) $a^n + a^{2n} + a^{3n}$.

**4.12.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $2x^{2n} - 6x^{(n-1)} + 4x^{(3n+1)}$;
b) $a^2x^{n-1} - 2a^3x^{n+1} + a^4x^{2n}$;
c) $a(x+y) - b(x+y)$;
d) $(x+y)^3 - (x+y)^2$.

**4.13 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $a^n + a^{n+1} + a^{n+2}$;
b) $(a+2)^3 - (a+2)^2 - a - 2$;
c) $2a(x-2) + 3x(x-2)^2 - (x-2)^2$.

**4.14 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $x^2(a+b)^3 + x^3(a+b) + x^5(a+b)^2$;
b) $3(x+y)^2 - 6(x+y) + 2x(x+y)$.

**4.15.** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $5y^3(x-y)^3 - 3y^2(x-y)$;
b) $5a(x+3y) - 3(x+3y)$;
c) $2x(x-1) - 3a^2(x-1)$;
d) $2(x-3y) - y(3y-x)$.

**4.16 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

a) $3x^2(a+b) - 2x^3(a+b) + 5x^5(a+b)$;
b) $(2x-y)^2 - 5x^3(2x-y) - 3y(2x-y)^3$.

### 4.3 Raccoglimento parziale a fattore comune

**4.17 (*).** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $2x - 2y + ax - ay$; b) $3ax - 6a + x - 2$; c) $ax + bx - ay - by$.

**4.18.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $3ax - 9a - x + 3$;
b) $ax^3 + ax^2 + bx + b$;
c) $2ax - 4a - x + 2$;
d) $b^2x + b^2y + 2ax + 2ay$.

**4.19 (*).** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$; b) $x^3 - x^2 + x - 1$; c) $ay + 2x^3 - 2ax^3 - y$.

**4.20.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $-x^3 + x^2 + x - 1$;
b) $x^3 + x^2 - x - 1$;
c) $x^3 - 1 - x + x^2$;
d) $-x^3 - x - 1 - x^2$.

**4.21.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $x^3 + x^2 + x + 1$;
b) $b^2x - b^2y + 2x - 2y$;
c) $b^2x - b^2y - 2ax - 2ay$;
d) $xy + x + ay + a + by + b$.

**4.22.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $3x + 6 + ax + 2a + bx + 2b$;
b) $2x - 2 + bx - b + ax - a$;
c) $2x - 2 + bx - b - ax + a$;
d) $2x + 2 + bx - b - ax + a$.

**4.23.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $2x - b + ax - a - 2 + bx$;
b) $a^3 + 2a^2 + a + 2$;
c) $a^2x + ax - a - 1$;
d) $3xy^3 - 6xy - ay^2 + 2a$.

**4.24.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $a^2x^3 + a^2x^2 + a^2x - 2x^2 - 2x - 2$;
b) $3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x$;
c) $2ax - 2a + abx - ab + a^2x - a^2$;
d) $3x^4y^4 - 6x^4y^2 - ax^3y^3 + 2ax^3y$.

**4.25.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $b^2x - 2bx + by - 2y$;
b) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$;
c) $ax + bx + 2x - a - b - 2$;
d) $3(x + y)^2 + 5x + 5y$.

**4.26 (*).** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $bx^2 - bx + b + x^2 - x + 1$;
b) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$;
c) $\frac{1}{5}a^2b + 3ab^2 - \frac{1}{3}a - 5b$.

**4.27.** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $3x^4 + 9x^2 - 6x^3 - 18x$;
b) $2a - a^2 + 8b - 4ab$;
c) $4x^2 + 3a + 4xy - 4ax - 3y - 3x$;
d) $3x^4 - 3x^3 + 2x - 2$.

**4.28 (*).** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $(a-2)(a-3) + ab - 2b$;
b) $\frac{1}{8}x^3 - 2xy^2 + \frac{1}{2}yx^2 - 8y^3$;
c) $ab - bx^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{2}{3}x^3$.

**4.29 (*).** Scomponi in fattori con il raccoglimento parziale a fattore comune, se possibile.

a) $45x^3 + 15xy + 75x^2y + 21x^2y^2 + 7y^3 + 35xy^3$;
b) $10x^3 - 12x^2 - 5xy + 6y$;
c) $6a^3 + 3a^2b - 2ab^3 - b^4$.

**4.30 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $a^{14} + 4a^{10} - 2a^{12} - 8a^8$;
b) $3x^2(x+y)^2 + 5x^3 + 5x^2y$;
c) $ax^3y + ax^2y + axy + ay$.

**4.31.** Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $b^2x + b^2y - 2bx - 2by$;
b) $b^2x - 2bx - 2by + b^2y$;
c) $2ab^2 + 2b^2c - 2a^2b^2 - 2ab^2c$;
d) $3ax + 6a + a^2x + 2a^2 + abx + 2ab$.

**4.32 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $2^{11}x^2 + 2^{12}x + 2^{15}x + 2^{16}$;
b) $6x^2 + 6xy - 3x(x+y) - 9x^2(x+y)^2$;
c) $2x^3 + 2x^2 - 2ax^2 - 2ax$.

**4.33.** Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $2bx^2 + 4bx - 2x^2 - 4ax$;
b) $x^4 + x^3 - x^2 - x$;
c) $15x(x+y)^2 + 5x^2 + 5xy$;
d) $2a^2mx - 2ma^2 - 2a^2x + 2a^2$.

**4.34 (*).** Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

a) $\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{3}ax^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}a$;
b) $\frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}xy + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2y - \frac{5}{9}(x^2 - xy)$;
c) $2b(x+1)^2 - 2bax - 2ba + 4bx + 4b$.

### 4.4.2 Risposte

**4.2** a) $ax(3a-b+1)$, b) $3b(7ax+2ab+5b+4c)$, c) $5xy(5xy+3x-2)$.

**4.3** a) $-3a^3b^3\left(4a^5b^6+5a+2\right)$, b) $2b^2(a+c-a^2-c^2)$, c) $2m^5\left(m+2\right)^2$.

**4.4** a) $3bx(3x+6b+2)$, b) $5a^4\left(3a^3+4a+2\right)$, c) $-x^2\left(x^3+4b^2x-b\right)$.

**4.13** a) $a^n(1+a+a^2)$, b) $(a+2)\left(a^2+3a+1\right)$, c) $(x-2)\left(3x^2-7x+2a+2\right)$.

**4.14** a) $x^2(a+b)(ax^3+bx^3+x+a^2+2ab+b^2)$, b) $(x+y)\left(5x+3y-6\right)$.

**4.16** a) $x^2(a+b)(5x^3-2x+3)$, b) $(2x-y)\left(2x-y-5x^3-12x^2y+12xy^2-3y^3\right)$.

**4.17** a) $(x-y)(2+a)$, b) $(x-2)(3a+1)$, c) $(a+b)(x-y)$.

**4.19** a) $(3x-3)\left(x^2+1\right)$, b) $(x-1)\left(x^2+1\right)$, c) $(a-1)\left(y-2x^3\right)$.

**4.26** a) $(b+1)(x^2-x+1)$, b) $\left(a^2-b\right)\left(a-b^2\right)$, c) $\left(\frac{3}{5}ab-1\right)\left(\frac{1}{3}a+5b\right)$.

**4.28** a) $(a-2)(a-3+b)$, b) $(x+4y)\left(\frac{1}{8}x^2-2y^2\right)$, c) $\left(a-x^2\right)\left(b-\frac{2}{3}x\right)$.

**4.29** a) $\left(15x+7y^2\right)\left(3x^2+y+5xy\right)$, b) $\left(2x^2-y\right)\left(5x-6\right)$, c) $(3a^2-b^3)(2a+b)$.

**4.30** a) $a^8\left(a^2-2\right)\left(a^4+4\right)$, b) $x^2(x+y)(3x+3y+5)$, c) $ay(x+1)(x^2+1)$.

**4.32** a) $2^{11}(x+2)(x+16)$, b) $-3x(x+y)\left(3x^2+3xy-1\right)$, c) $2x(x+1)(x-a)$.

**4.34** a) $\frac{1}{3}a(x^2+1)(2x-1)$, b) $\frac{1}{9}x(x-y)(16+x)$, c) $2b(x+1)(x-a+3)$.

# 5 Riconoscimento di prodotti notevoli

## 5.1 Quadrato di un binomio

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli. Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2.$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2.$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze.

$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (-A-B)^2.$$

$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = (-A+B)^2.$$

---

**Esempio 5.1.** Scomporre in fattori $4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$.

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:

$$4a^2 + 12ab^2 + 9b^4 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot (3b^2) + \left(3b^2\right)^2 = \left(2a + 3b^2\right)^2.$$

**Esempio 5.2.** Scomporre in fattori $x^2 - 6x + 9$.

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno "meno". Dunque: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x-3)^2$, ma anche $x^2 - 6x + 9 = (-x+3)^2$.

**Esempio 5.3.** Scomporre in fattori $x^4 + 4x^2 + 4$.

Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati. $x^4 + 4x^2 + 4$ è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = \left(x^2\right)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (x^2) + (2)^2 = \left(x^2 + 2\right)^2.$$

---

**Procedura 5.1.** *Individuare il quadrato di un binomio:*

a ) *individuare le basi dei due quadrati;*
b ) *verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;*
c ) *scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi;*
d ) *mettere il segno "più" o "meno" in accordo al segno del termine che non è un quadrato.*

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno “meno”.

---

**Esempio 5.4.** Scomporre in fattori $-9a^2 + 12ab - 4b^2$.

Mettiamo $-1$ a fattore comune $-9a^2 + 12ab - 4b^2 = -(9a^2 - 12ab + 4b^2) = -(3a - 2b)^2$.

**Esempio 5.5.** Scomporre in fattori $-x^4 - x^2 - \frac{1}{4}$.

$$-x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x^4 + x^2 + \frac{1}{4}\right) = -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

**Esempio 5.6.** Scomporre in fattori $-x^2 + 6xy^2 - 9y^4$.

$$x^2 + 6xy^2 - 9y^4 = -\left(x^2 - 6xy^2 + 9y^4\right) = -\left(x - 3y^2\right)^2.$$

---

Possiamo avere un trinomio che “diventa” quadrato di binomio dopo aver messo qualche fattore comune in evidenza.

---

**Esempio 5.7.** Scomporre in fattori $2a^3 + 20a^2 + 50a$.

Mettiamo a fattore comune $2a$, allora $2a^3 + 20a^2 + 50a = 2a(a^2 + 10a + 25) = 2a(a + 5)^2$.

**Esempio 5.8.** Scomporre in fattori $2a^2 + 4a + 2$.

$$2a^2 + 4a + 2 = 2\left(a^2 + 2a + 1\right) = 2(a + 1)^2.$$

**Esempio 5.9.** Scomporre in fattori $-12a^3 + 12a^2 - 3a$.

$$-12a^3 + 12a^2 - 3a = -3a\left(4a^2 - 4a + 1\right) = -3a(2a - 1)^2.$$

**Esempio 5.10.** Scomporre in fattori $\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2$.

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2 + 2ab + 4b^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^2,$$

o anche

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{8}\left(a^2 + 8ab + 16b^2\right) = \frac{3}{8}(a + 4b)^2.$$

---

## 5.2 Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio secondo le seguenti regole.

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2 = (-A - B - C)^2.$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutt’e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

---

**Esempio 5.11.** Scomporre in fattori $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b$.

I primi tre termini sono quadrati, rispettivamente di $4a^2$,$b$ e $1$, si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti: $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b = \left(4a^2 + b + 1\right)^2$.

**Esempio 5.12.** Scomporre in fattori $x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz$.

$$x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz = \left(x^2 - y - z\right)^2 = \left(-x^2 + y + z\right)^2.$$

**Esempio 5.13.** Scomporre in fattori $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma:

$$3x^2 = x^2 + 2x^2.$$

In questo modo si ha:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2.$$

---

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A + B + C + D)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD.$$

## 5.3 Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule.

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3.$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero, elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo, se è negativo rimane negativo.

---

**Esempio 5.14.** Scomporre in fattori $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$.

Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di $2a$ e di $b$, il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di $2a$ e $b$, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra $2a$ e il quadrato di $b$. Abbiamo dunque:

$$8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (b) + 3 \cdot (2a) \cdot (b)^2 = (2a + b)^3.$$

**Esempio 5.15.** Scomporre in fattori $-27x^3 + 27x^2 - 9x + 1$.

Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di $-3x$ e di $1$. Dunque:

$$-27x^3 + 27x^2 - 9x + 1 = (-3x)^3 + 3 \cdot (-3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3x) \cdot 1^2 + 1 = (-3x + 1)^3.$$

**Esempio 5.16.** Scomporre in fattori $x^6 - x^4 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{27}$.

Le basi del cubo sono $x^2$ e $-\frac{1}{3}$ i termini centrali sono i tripli prodotti, quindi $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$.

---

## 5.4 Differenza di due quadrati

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B).$$

---

**Esempio 5.17.** Scomporre in fattori $\frac{4}{9}a^4-25b^2$.

$$\frac{4}{9}a^4-25b^2=\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2-(5b)^2=\left(\frac{2}{3}a^2+5b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2-5b\right).$$

**Esempio 5.18.** Scomporre in fattori $-x^6+16y^2$.

$$-x^6+16y^2=-\left(x^3\right)^2+(4y)^2=\left(x^3+4y\right)\cdot\left(-x^3+4y\right).$$

**Esempio 5.19.** Scomporre in fattori $a^2-(x+1)^2$. La formula precedente vale anche se $A$ e $B$ sono polinomi. $a^2-(x+1)^2=[a+(x+1)]\cdot[a-(x+1)]=(a+x+1)(a-x-1)$.

**Esempio 5.20.** Scomporre in fattori $\left(2a-b^2\right)^2-(4x)^2$.

$$\left(2a-b^2\right)^2-(4x)^2=\left(2a-b^2+4x\right)\cdot\left(2a-b^2-4x\right).$$

**Esempio 5.21.** Scomporre in fattori $(a+3b)^2-(2x-5)^2$.

$$(a+3b)^2-(2x-5)^2=(a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5).$$

---

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2-C^2=A^2+2AB+B^2-C^2$;
- $A^2-(B+C)^2=A^2-B^2-2BC-C^2$;
- $(A+B)^2-(C+D)^2=A^2+2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$.

---

**Esempio 5.22.** Scomporre in fattori $4a^2-4b^2-c^2+4bc$.

Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$$\begin{aligned}4a^2-4b^2-c^2+4bc&=4a^2-\left(4b^2+c^2-4bc\right)\\&=(2a)^2-(2b-c)^2=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c).\end{aligned}$$

**Esempio 5.23.** Scomporre in fattori $4x^4-4x^2-y^2+1$.

$$4x^4-4x^2-y^2+1=\left(2x^2-1\right)^2-(y)^2=(2x^2-1+y)\cdot(2x^2-1-y).$$

**Esempio 5.24.** Scomporre in fattori $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$.

$$\begin{aligned}a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2&=\left(a^2+1+2a\right)-\left(b^2+9c^2-6bc\right)\\&=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c).\end{aligned}$$

---

## 5.5 Esercizi

### 5.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 5.1 Quadrato di un binomio

**5.1.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $a^2-2a+1$;
b) $x^2+4x+4$;
c) $y^2-6y+9$;
d) $16t^2+8t+1$;
e) $4x^2+1+4x$;
f) $9a^2-6a+1$.

**5.2.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $4x^2-12x+9$;
b) $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$;
c) $9x^2+4+12x$;
d) $\frac{4}{9}a^4-4a^2+9$;
e) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$;
f) $16a^2+\frac{1}{4}b^2-4ab$.

**5.3.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $-9x^2-\frac{1}{4}+3x$;
b) $4x^2+4xy+y^2$;
c) $a^4+36a^2+12a^3$;
d) $144x^2-6xa^2+\frac{1}{16}a^4$;
e) $x^2-6xy+9y^2$;
f) $-x^2-6xy-9y^2$.

**5.4.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $25+10x+x^2$;
b) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$;
c) $25-10x+x^2$;
d) $\frac{9}{25}a^4-6a^2+25$;
e) $4x^2+2x^4+1$;
f) $4x^2-4x^4-1$.

**5.5.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $-a^3-2a^2-a$;
b) $3a^7b-6a^5b^2+3a^3b^3$;
c) $100+a^2b^4+20ab^2$;
d) $2x^{13}-8x^8y+8x^3y^2$;
e) $x^8+8x^4y^2+16y^4$;
f) $-x^2+6xy+9y^2$.

**5.6.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $4a^2b^4-12ab^3+9b^6$;
b) $a^2+a+1$;
c) $36a^6b^3 + 27a^5b^4 + 12a^7b^2$;
d) $25x^{14}+9y^6+30x^7y^3$;
e) $-a^7-25a^5+10a^6$;
f) $25a^2+49b^2+35ab$.

**5.7.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $4y^6+4-4y^2$;
b) $\frac{1}{4}a^2+2ab+b^2$;
c) $25a^2-10ax-x^2$;
d) $9x^2+4y^2-6xy$.

**5.8.** Individua perché i seguenti polinomi non sono quadrati di un binomio.

a) $4x^2+4xy-y^2$ non è un quadrato di binomio perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
b) $x^2-6xy+9y$ non è un quadrato di binomio perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
c) $25+100x+x^2$ non è un quadrato di binomio perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}$ non è un quadrato di binomio perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
e) $25t^2 + 4 - 10t$ non è un quadrato di binomio perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**5.9** (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $24a^3 + 6a + 24a^2$;
b) $3a^2x - 12axb + 12b^2x$;
c) $5a^2 + 2ax + \frac{1}{5}x^2$;
d) $x^6y + x^2y + 2x^4y$.

**5.10** (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $x^5 + 4x^4 + 4x^3$;
b) $2y^3 - 12y^2x + 18x^2y$;
c) $-50t^3 - 8t + 40t^2$;
d) $2^{10}x^2 + 2^6 \cdot 3^{20} + 3^{40}$.

**5.11** (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $2^{20}x^{40} - 2^{26} \cdot x^{50} + 2^{30} \cdot x^{60}$;
b) $10^{100}x^{50} - 2 \cdot 10^{75}x^{25} + 10^{50}$.

**5.12** (*). Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

a) $10^{11}x^{10} - 2 \cdot 10^9x^5 + 10^6$;
b) $x^{2n} + 2x^n + 1$.

## 5.2 Quadrato di un polinomio

**5.13.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$;
c) $x^2 + y^2 + 4 + 4x + 2xy + 4y$;
d) $4a^4 - 6ab - 4a^2b + 12a^3 + b^2 + 9a^2$.

**5.14.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $9x^6 + 2y^2z + y^4 - 6x^3z - 6x^3y^2 + z^2$;
b) $\frac{1}{4}a^2 + b^4 + c^6 + ab^2 + ac^3 + 2b^2c^3$;
c) $a^2 + 2ab + b^2 - 2a + 1 - 2b$;
d) $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 4 - xy + 4x - 2y$.

**5.15.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab$;
b) $-x^2 - 2xy - 9 - y^2 + 6x + 6y$;
c) $4a^2 + 4ab - 8a + b^2 - 4b + 4$;
d) $a^2b^2 + 2a^2b + a^2 - 2ab^2 - 2ab + b^2$.

**5.16.** Individua perché i seguenti polinomi non sono quadrati.

a) $a^2 + b^2 + c^2$ non è un quadrato perché;
b) $x^2 + y^2 + 4 + 4x + 4xy + 4y$ non è un quadrato perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
c) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc - 2ab$ non è un quadrato perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
d) $a^2 + b^2 - 1 - 2a - 2b + 2ab$ non è un quadrato perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**5.17 (*).** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $a^2+4ab-2a+4b^2-4b+1$;
b) $a^2b^2+2a^2b+a^2+4ab^2+4ab+4b^2$;
c) $x^2-6xy+6x+9y^2-18y+9$.

**5.18.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ scomponi prima $3x^2=x^2+2x^2$;
b) $4a^4+8a^2+1+8a^3+4a$ scomponi prima $8a^2=4a^2+4a^2$;
c) $9x^4+6x^3-11x^2-4x+4$ scomponi in maniera opportuna $-11x^2$.

**5.19.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio.

a) $25x^2-20ax-30bx+4a^2+12ab+9b^2$;
b) $2a^{10}x+4a^8x+2a^6x+4a^5x+4a^3x+2x$;
c) $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$;
d) $x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$.

### 5.3 Cubo di un binomio

**5.20.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$;
b) $b^3+12a^2b-6ab^2-8a^3$;
c) $-12a^2+8a^3-b^3+6ab$;
d) $-12a^2b+6ab+8a^3-b^3$.

**5.21.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $-x^3+6x^2-12x+8$;
b) $-x^9-3x^6+3x^3+8$;
c) $x^3y^6+1+3x^2y^2+3xy^2$;
d) $x^3+3x-3x^2-1$.

**5.22.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $-5x^5y^3-5x^2-15x^4y^2-15x^3y$;
b) $-a^6+27a^3+9a^5-27a^4$;
c) $64a^3-48a^2+12a-1$;
d) $a^6+9a^4+27a^2+27$.

**5.23.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a) $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$;
b) $0,001x^6+0,015x^4+0,075x^2+0,125$;
c) $\frac{27}{8}a^3-\frac{27}{2}a^2x+18ax^2-8x^3$;
d) $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$.

**5.24.** Individua perché i seguenti polinomi non sono cubi.

a) $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$ non è un cubo perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
b) $27a^3-b^3+9a^2b-9ab^2$ non è un cubo perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
c) $8x^3+b^3+6x^2b+6xb^2$ non è un cubo perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
d) $x^3+6ax^2-6a^2x+8a^3$ non è un cubo perché . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**5.25.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a ) $x^3-6x^2+12x-8$;
b ) $a^3b^3+12ab+48ab+64$;
c ) $216x^3-540ax^2+450a^2x-125a^3$;
d ) $8x^3+12x^2+6x+2$.

**5.26 (*).** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a ) $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$;
b ) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$;
c ) $a^6+3a^5+3a^4+a^3$;
d ) $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$.

**5.27.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a ) $8x^3-36x^2+54x-27$;
b ) $x^6+12ax^4+12a^2x^2+8a^3$;
c ) $x^{300}-10^{15}-3\cdot10^5x^{200}+3\cdot10^{10}x^{100}$;
d ) $a^{6n}+3a^{4n}x^n+3a^{2n}x^{2n}+x^{3n}$.

**5.28.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio.

a ) $10^{15}a^{60}+3\cdot10^{30}a^{45}+3\cdot10^{45}a^{30}+10^{60}a^{15}$;
b ) $10^{-33}x^3-3\cdot10^{-22}x^2+3\cdot10^{-11}x-1$.

## 5.4 Differenza di due quadrati

**5.29.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a ) $a^2-25b^2$;
b ) $16-x^2y^2$;
c ) $25-9x^2$;
d ) $4a^4-9b^2$;
e ) $x^2-16y^2$;
f ) $144x^2-9y^2$.

**5.30.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a ) $16x^4-81z^2$;
b ) $a^2b^4-c^2$;
c ) $4x^6-9y^4$;
d ) $-36x^8+25b^2$;
e ) $-1+a^2$;
f ) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^4$.

**5.31.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a ) $\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$;
b ) $2a^2-50$;
c ) $a^3-16ab^6$;
d ) $-4x^2y^2+y^2$;
e ) $-4a^2+b^2$;
f ) $25x^2y^2-\frac{1}{4}z^6$.

**5.32.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a ) $-a^2b^4+49$;
b ) $16y^4-z^4$;
c ) $a^8-b^8$;
d ) $a^4-16$;
e ) $16a^2-9b^2$;
f ) $9-4x^2$.

**5.33.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a ) $\frac{1}{4}x^2-1$;
b ) $a^2-9b^2$;
c ) $\frac{25}{16}a^2-1$;
d ) $-16+25x^2$;
e ) $25a^2b^2-\frac{9}{16}y^6$;
f ) $-4x^8+y^{12}$.

**5.34.** Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati.

a) $\frac{1}{4}x^2 - 0,01y^4$;
b) $x^6 - y^8$;
c) $x^4 - y^8$.

**5.35 (*).** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(b+3)^2 - x^2$;
b) $a^8 - (b-1)^2$;
c) $(x-1)^2 - a^2$.

**5.36.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(x-y)^2 - (y+z)^2$;
b) $-(2a-1)^2 + (3b+3)^2$;
c) $x^2 - b^2 - 9 - 6b$.

**5.37.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $b^2 - x^4 + 1 + 2b$;
b) $a^4 + 4a^2 + 4 - y^2$;
c) $x^2 - y^2 - 1 + 2y$.

**5.38 (*).** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(2x+3)^2 - (2y+1)^2$;
b) $a^2 - 2ab + b^2 - 4$;
c) $(2x-3a)^2 - (x-a)^2$.

**5.39.** Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

a) $(a-1)^2 - (a+1)^2$;
b) $a^{2n} - 4$;
c) $a^{2m} - b^{2n}$;
d) $x^2n - y^4$.

### 5.5.2 Risposte

**5.9** a) $6a(2a+1)^2$, b) $3x(a-2b)^2$, c) $\frac{1}{5}(x+5a)^2$, d) $x^2y\left(x^2+1\right)^2$.

**5.10** a) $x^3(x+2)^2$, b) $2y(3x-y)^2$, c) $-2t(5t-2)^2$, d) $\left(2^5x+3^{20}\right)^2$.

**5.11** a) $2^{20}x^{40}\left(1-2^5x^{10}\right)^2$, b) $10^{50}\left(10^{25}x^{25}-1\right)^2$.

**5.12** a) $10^6\left(10^5x^{10}-2\cdot 10^3x^5+1\right)$, b) $(x^n+1)^2$.

**5.17** a) $(a+2b-1)^2$, b) $(ab+a+2b)^2$, c) $(x-3y+3)^2$.

**5.26** a) $\left(a^2+b^2\right)^3$, b) $(2a-3b)^3$, c) $a^3(a+1)^3$, d) $a\left(a^3-2\right)^3$.

**5.35** a) $(b+3-x)(b+3+x)$, b) $(a^4-b+1)(a^4+b-1)$, c) $(x+a-1)(x-a-1)$.

**5.38** a) $4(x+y+2)(x-y+1)$, b) $(a-b-2)(a-b+2)$, c) $(3x-4a)(x-2a)$.

# 6 Altre tecniche di scomposizione

## 6.1 Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio $x^2 + 5x + 6$ come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando:

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)\,x + a\cdot b.$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2 + (a+b)\,x + a\cdot b = (x+a)\cdot(x+b)\,.$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri $a$ e $b$ tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

---

**Esempio 6.1.** $x^2 + 7x + 12$.

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi. Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri naturali solo come:

$$12\cdot 1;\quad 6\cdot 2;\quad 3\cdot 4.$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma (S) +7 e prodotto (P) +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)\cdot(x+3)\,.$$

**Esempio 6.2.** $x^2 - \overset{S}{8}x + \overset{P}{15}$.

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia $-8$ e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15; $-1$ e $-5$; $-3$. Allora i due numeri cercati sono $-5$ e $-3$. Il trinomio si scompone come:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-5) \cdot (x-3)\,.$$

**Esempio 6.3.** $x^2 + \overset{S}{4}x - \overset{P}{5}$.

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà $-5$ come prodotto, precisamente $+5$ e $-1$. Il polinomio si scompone:

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5) \cdot (x-1)\,.$$

**Esempio 6.4.** $x^2 - \overset{S}{3}x - \overset{P}{10}$.

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno $-10$ come prodotto sono $-10$; $+1$, ma anche $-5$; $+2$. Quelli che danno $-3$ come somma sono $-5$ e $+2$.

$$x^2 - 3x - 10 = (x-5) \cdot (x+2)\,.$$

**Esempio 6.5.** In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore.

- $x^4 + 5x^2 + 6 = \left(x^2+3\right) \cdot \left(x^2+2\right)$;
- $x^6 + x^3 - 12 = \left(x^3+4\right) \cdot \left(x^3-3\right)$;
- $a^4 - 10a^2 + 9 = \underbrace{\left(a^2-9\right) \cdot \left(a^2-1\right)}_{\text{differenze di quadrati}} = (a+3) \cdot (a-3) \cdot (a+1) \cdot (a-1)$;
- $-x^4 - x^2 + 20 = -\left(x^4 + x^2 - 20\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot \left(x^2-4\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$;
- $2x^5 - 12x^3 - 14x = 2x \cdot \left(x^4 - 6x^2 - 7\right) = 2x \cdot \left(x^2-7\right) \cdot \left(x^2+1\right)$;
- $-2a^7 + 34a^5 - 32a^3 = -2a^3\left(a^4 - 17a^2 + 16\right) = -2a^3\left(a^2-1\right)\left(a^2-16\right)$
  $= -2a^3\,(a-1)\,(a+1)\,(a-4)\,(a+4)\,.$

---

È possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili.

---

**Esempio 6.6.** $x^2 + 5xy + 6y^2$.

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo: $x^2 + \overset{S}{5}xy + \overset{P}{6}y^2$.

Bisogna cercare due monomi A e B tali che $A + B = 5y$ e $A \cdot B = 6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono $+3$ e $+2$, i monomi cercati sono $+3y$ e $+2y$, infatti $+3y + 3y = +5y$ e $+3y \cdot (+2y) = +6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue: $x^2 + 5xy + 6y^2 = (x+3y)(x+2y)$.

---

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio.

---

**Esempio 6.7.** $2x^2 - x - 1$.

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia $-1$ e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2 \cdot (-1) = -2$. I numeri sono $-2$ e $+1$. Spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1.$$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 \underbrace{-2x + x}_{-x} -1 = 2x \cdot \underline{(x-1)} + 1 \cdot \underline{(x-1)} = (x-1) \cdot (2x+1)\,.$$

---

**Procedura 6.1.** *Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi* $ax^2 + bx + c$ *con* $a \neq 1$*, cerchiamo due numeri* $m$ *ed* $n$ *tali che* $m + n = b$ *e* $m \cdot n = a \cdot c$*; se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente* $b$ *e riscrivere il polinomio nella forma* $p = ax^2 + (m+n) \cdot x + c$ *su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.*

## 6.2 Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio $P(x)$, se riusciamo a trovare un numero $k$ per il quale $P(k) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per il binomio $x - k$, allora possiamo scomporre $P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra $P(x)$ e $(x-k)$.

Il problema di scomporre un polinomio $P(x)$ si riconduce quindi a quello della ricerca del numero $k$ che sostituito alla $x$ renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche *radice del polinomio*.

Il numero $k$ non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.

❑ **Osservazione** Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

---

**Esempio 6.8.** $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.

Per $x = 1$ si ha $p(1) = (1)^3 + (1)^2 - 10 \cdot (1) + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere $P(x)$ per $x - 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | −10 | 8 |
| 1 | | 1 | 2 | −8 |
| | 1 | 2 | −8 | |

Predisponiamo una griglia come quella a fianco, al primo rigo mettiamo i coefficienti di $P(x)$, al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del polinomio quoziente: $q(x) = x^2 + 2x - 8$.

Possiamo allora scrivere:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8).$$

Per fattorizzare il polinomio di secondo grado $x^2 + 2x - 8$ possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia $+2$ e il cui prodotto sia $-8$. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto $-8$ e precisamente tra le seguenti coppie $(+8, -1)$, $(-8, +1)$, $(+4, -2)$, $(-4, +2)$. La coppia che dà per somma $+2$ è $(+4, -2)$. In definitiva si ha:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8) = (x - 1)(x - 2)(x + 4).$$

**Esempio 6.9.** $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$.

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Sostituiamo questi numeri al posto della $x$, finché non troviamo la radice.

Per $x = 1$ si ha $P(1) = 1 - 5 - 7 + 29 + 30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.

Per $x = -1$ si ha

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 29 \cdot (-1) + 30 \\ &= +1 + 5 - 7 - 29 + 30 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una radice del polinomio è quindi $-1$; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | −7 | 29 | 30 |
| −1 | | −1 | 6 | 1 | −30 |
| | 1 | −6 | −1 | 30 | 0 |

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Possiamo allora scrivere:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x + 1)(x^3 - 6x^2 - x + 30).$$

Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da $-1$.

Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1) + 30 = -1 - 6 + 1 + 30 \neq 0$.

Per $x = +2$ si ha $P(+2) = (+2)^3 - 6 \cdot (+2)^2 - 1 \cdot (+2) + 30 = +8 - 24 - 2 + 30 \neq 0$.

Per $x = -2$ si ha $P(+2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 1 \cdot (-2) + 30 = -8 - 24 + 2 + 30 = 0$.

Quindi $-2$ è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordiamo che al primo rigo dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −6 | −1 | 30 |
| −2 | | −2 | 16 | −30 |
| | 1 | −8 | 15 | 0 |

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3-6x^2-x+30=(x+2)\cdot(x^2-8x+15)$.

Infine possiamo scomporre $x^2-8x+15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma $-8$ e prodotto $+15$ sono $-3$ e $-5$. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:

$$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5).$$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

**Esempio 6.10.** $6x^2-x-2$.

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di $-2$ e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1;\pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono

$$\left\{\pm\frac{1}{1};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{2}{1};\pm\frac{2}{3};\pm\frac{2}{6}\right\}$$

cioè

$$\left\{\pm 1;\pm\frac{1}{2};\pm 2;\pm\frac{2}{3};\pm\frac{1}{3}\right\}.$$

Si ha $A(1)=-3; A(-1)=5; A\left(\frac{1}{2}\right)=-1; A\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x)=6x^2-x-2$ è divisibile per $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2-x-2$ come $Q(x)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | −1 | −2 |
| $-\frac{1}{2}$ | | −3 | 2 |
| | 6 | −4 | 0 |

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente. Il quoziente è $Q(x)=6x-4$ Il polinomio sarà scomposto in $(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$$6x^2-x-2 = (6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2(3x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (3x-2)(2x+1).$$

---

## 6.3 Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo $A^3+B^3$ e $A^3-B^3$ possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

---

**Esempio 6.11.** $x^3-8$.

Il polinomio si annulla per $x=2$, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | −8 |
| 2 | | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 2 | 4 | / |

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 + 2x + 4$ e la scomposizione risulta

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Notiamo che il quoziente assomiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un "falso quadrato". Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

**Esempio 6.12.** $x^3 + 27$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 27 |
| −3 | | −3 | 9 | −27 |
| | 1 | −3 | 9 | / |

Il polinomio si annulla per $x = -3$, cioè $P(-3) = (-3)^3 + 27 = -27 + 27 = 0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x + 3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 - 3x + 9$ e la scomposizione risulta

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9).$$

---

In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2),$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

## 6.4 Scomposizione mediante metodi combinati

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro.

Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare *un raccoglimento totale*;
2. *contare il numero di termini* di cui si compone il polinomio:
   a) con *due* termini analizzare se il binomio è
      i. una *differenza di quadrati* $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$;
      ii. una *differenza di cubi* $A^3 - B^3 = (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$;
      iii. una *somma di cubi* $A^3 + B^3 = (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$;
      iv. una *somma di quadrati* nel qual caso è *irriducibile* $A^2 + B^2$.
   b) con *tre* termini analizzare se è

i. un *quadrato di binomio* $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$;
ii. un *trinomio particolare* del tipo $x^2 + Sx + P = (x + a)(x + b)$ con $a + b = S$ e $a \cdot b = P$;
iii. un *falso quadrato*, che è irriducibile $A^2 \pm AB + B^2$.

c) con *quattro* termini analizzare se è

i. un *cubo di binomio* $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$;
ii. una *particolare differenza di quadrati* $A^2 \pm 2AB + B^2 - C^2 = (A \pm B + C)(A \pm B - C)$;
iii. un *raccoglimento parziale* $ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$.

d) con *sei* termini analizzare se è

i. un *quadrato di trinomio* $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$;
ii. un *raccoglimento parziale* $ax + bx + cx + ay + by + cy = (a + b + c)(x + y)$.

3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la *regola di Ruffini*.

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari.

$$A^5 + B^5 = (A + B)\left(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4\right),$$
$$A^5 - B^5 = (A - B)\left(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4\right),$$
$$A^7 \pm B^7 = (A \pm B)\left(A^6 \mp A^5B + A^4B^2 \mp A^3B^3 + A^2B^4 \mp AB^5 + B^6\right),$$
$$(A^{11} - B^{11}) = (A - B)(A^{10} + A^9B + A^8B^2 + A^7B^3 + A^6B^4 + A^5B^5 + A^4B^6 + A^3B^7 + A^2B^8 + AB^9 + B^{10}).$$

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o diverso) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$$A^8 - B^{10} = \left(A^4 - B^5\right)\left(A^4 + B^5\right).$$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$$A^6 + B^6 = \left(A^2\right)^3 + \left(B^2\right)^3 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^4 - A^2B^2 + B^4\right),$$
$$A^{10} + B^{10} = \left(A^2\right)^5 + \left(B^2\right)^5 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^8 - A^6B^2 + A^4B^4 - A^2B^6 + B^8\right).$$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti o da completare in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi.

---

**Esempio 6.13.** $a^2x + 5abx - 36b^2x$.

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo; tra i suoi monomi si ha MCD $= x$; effettuiamo il raccoglimento totale: $x \cdot \left(a^2 + 5ab - 36b^2\right)$. Il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo e può essere riscritto

$$a^2 + (5b) \cdot a - 36b^2.$$

Proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi $m$ ed $n$ tali che $m + n = 5b$ e $m \cdot n = -36b^2$; i due monomi sono $m = 9b$ ed $n = -4b$;

$$a^2x + 5abx - 36b^2x = x \cdot (a + 9b) \cdot (a - 4b).$$

**Esempio 6.14.** $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$.

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2 + y^2 + 2 \cdot (xy - x - y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.

I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere $-2$, quindi $\left(\underline{x + y}\right)^2 - 2 \cdot \left(\underline{x + y}\right)$, raccogliendo $(x + y)$ tra i due termini si ottiene

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y) \cdot (x + y - 2).$$

**Esempio 6.15.** $8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2$.

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (1 - 4a - 5b)^2.$$

Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno stesso lo quadrato possiamo riscrivere:

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (-1 + 4a + 5b)^2.$$

$$\begin{aligned} 8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2 &= (4a + 5b - 1) \cdot (2 - 1 + 4a + 5b) \\ &= (4a + 5b - 1) \cdot (1 + 4a + 5b). \end{aligned}$$

**Esempio 6.16.** $t^3 - z^3 + t^2 - z^2$.

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili. Poiché due monomi sono nella variabile $t$ e gli altri due nella variabile $z$ potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale: $t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = t^2 \cdot (t + 1) - z^2 \cdot (z + 1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.

Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2\right) + (t - z) \cdot (t + z).$$

Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t - z)$

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2 + t + z\right).$$

**Esempio 6.17.** $x^3 - 7x - 6$.

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile. Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3. Procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero che annulla il polinomio nell'insieme dei divisori del termine noto $D = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Per $x = +1$ si ha $P(+1) = (+1)^3 - 7 \cdot (+1) - 6 = 1 - 7 - 6 \neq 0$. Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$. quindi $p = x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot q(x)$ con $q(x)$ polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

Pertanto: $P(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole. Cerchiamo due numeri $a$ e $b$ tali che $a + b = -1$ e $a \cdot b = -6$. I due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno $-6$ come prodotto, precisamente $(-6, +1)$, $(-3, +2)$, $(+6, -1)$, $(+3, -2)$. La coppia che fa al caso nostro è $(-3, +2)$ quindi si scompone $q = x^2 - x - 6 = (x-3) \cdot (x+2)$.

In definitiva $x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+2)$.

**Esempio 6.18.** $\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4$.

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di binomio; negli altri tre possiamo raccogliere $-1$;

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4 = \left(m^2 - 4\right)^2 - \left(m^2 + 4m + 4\right)$$

Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di binomio, quindi:

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - (m+2)^2,$$

che si presenta come differenza di quadrati, allora diviene:

$$\left[\left(m^2 - 4\right) + (m+2)\right] \cdot \left[\left(m^2 - 4\right) - (m+2)\right]$$

.

Eliminando le parentesi tonde $\left(m^2 + m - 2\right) \cdot \left(m^2 - m - 6\right)$.

I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned}(m^2 + m - 2) \cdot (m^2 - m - 6) &= (m+2) \cdot (m-1) \cdot (m-3) \cdot (m+2) \\ &= (m+2)^2 \cdot (m-1) \cdot (m-3).\end{aligned}$$

**Esempio 6.19.** $(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2 - 9\right)$.

$$(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2 - 9\right) = (a-3)^2 + 3 \cdot (a-3) \cdot (a+1) - (a-3) \cdot (a+3).$$

Mettiamo a fattore comune $(a-3)$:

$$(a-3) \cdot [(a-3) + 3 \cdot (a+1) - (a+3)].$$

Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore e otteniamo:

$$(a-3)(a-3+3a+3-a-3)=(a-3)(3a-3).$$

**Esempio 6.20.** $a^4+a^2b^2+b^4$.

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo $a^2b^2$ otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:

$$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2-(ab)^2=\left(a^2+b^2+ab\right)\left(a^2+b^2-ab\right).$$

**Esempio 6.21.** $a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$.

$$\begin{aligned}a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5 &= a^3\left(a^2+2ab+b^2\right)+b^3\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= \left(a^3+b^3\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)^2\\ &= (a+b)^3\left(a^2-ab+b^2\right).\end{aligned}$$

**Esempio 6.22.** $a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12$.

$$\begin{aligned}a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12 &= x^2\left(a^2+2a-3\right)-4\left(a^2+2a-3\right)\\ &= \left(x^2-4\right)\left(a^2+2a-3\right)\\ &= (x+2)(x-2)(a-1)(a+3).\end{aligned}$$

---

## 6.5 Esercizi

### 6.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 6.1 Trinomi particolari

**6.1.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2-5x-36$;
b) $x^2-17x+16$;
c) $x^2-13x+12$;
d) $x^2+6x+8$;
e) $x^2+7x+12$;
f) $x^2-2x-3$.

**6.2.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2+9x+18$;
b) $x^2-5x+6$;
c) $x^2-8x-9$;
d) $x^2-7x+12$;
e) $x^2-6x+8$;
f) $x^2-51x+50$.

**6.3.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2-3x-4$;
b) $x^2+5x-14$;
c) $x^4+8x^2+12$;
d) $x^2+4x-12$;
e) $x^2-3x+2$;
f) $x^4-5x^2+4$.

**6.4.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2+3x-10$;
b) $x^2+13x+12$;
c) $x^2+2x-35$;
d) $x^6-5x^3+4$;
e) $x^2+5x-36$;
f) $x^2+8x+7$.

**6.5.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2-10x+24$;
b) $y^2+y-20$;
c) $x^2+4x-45$;
d) $x^2-4x-21$;
e) $x^2+4x-21$;
f) $x^2-10x+21$.

**6.6.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^4+9x^2-10$;
b) $x^6-x^3-30$;
c) $-x^6+7x^3-10$;
d) $2x^3+14x^2+20x$;
e) $-3x^6+15x^4-12x^2$;
f) $x^4-37x^2+36$.

**6.7.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^{20}+4x^{12}-32x^4$;
b) $x^{40}-x^{20}-20$;
c) $x^{14}-37x^7+36$;
d) $x^2+4xy-32y^2$;
e) $a^2-ax-20x^2$;
f) $a^2-12xa-64x^2$.

**6.8.** Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $m^2+20mn+36n^2$;
b) $x^4-8x^2a+12a^2$;
c) $x^6+9x^3y^2-36y^4$;
d) $x^2y^2-2xy-35$;
e) $a^4b^2-a^2b-72$;
f) $x^4+11x^2+24$.

**6.9 (*).** Scomponi i seguenti polinomi seguendo la traccia.

a) $2x^2-3x-5=2x^2+2x-5x-5=$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
b) $3y^2+y-10=3y^2+6y-5y-10=$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

c) $5t^2 - 11t + 2 = 5t^2 - 10t - t + 2 = \ldots\ldots$;
d) $-3t^2 + 4t - 1 = -3t^2 + 3t + t - 1 = \ldots\ldots$;
e) $2x^2 - 3x - 9 = 2x^2 - 6x + 3x - 9 = \ldots\ldots$

**6.10.** Scomponi i seguenti polinomi.

a) $3a^2 - 4a + 1$;
b) $11k - 6k^2 + 7$;
c) $4b^2 - 4b - 3$;
d) $6x^2 - 13x - 15$;
e) $x^2 + 10ax + 16a^2$;
f) $2x^4 + x^2 - 3$.

## 6.2 Scomposizione con la regola Ruffini

**6.11.** Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $2x^2 - 5x + 2$;
b) $3x^2 - 5x - 2$;
c) $x^3 - 4x^2 + x + 6$;
d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$;
e) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$;
f) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

**6.12.** Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3$;
b) $x^3 + x^2 - 5x + 3$;
c) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$;
d) $3x^3 + 5x^2 - 16x - 12$;
e) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$;
f) $2x^3 - 13x^2 + 24x - 9$;
g) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2$;
h) $4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6$.

**6.13 (*).** Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3 - 9x - 9 + x^2$;
b) $m^3 + 2m^2 - m - 2$;
c) $a^3 + a^2 - 4a - 4$;
d) $3a^2 + a - 2$;
e) $6a^3 - a^2 - 19a - 6$;
f) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$;
g) $3t^3 - t^2 - 12t + 4$;
h) $3x^4 + x^3 - 29x^2 - 17x + 42$;
i) $y^4 + y^3 - 3y^2 - 4y - 4$;
j) $t^4 - 8t^2 - 24t - 32$.

**6.14 (*).** Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $2x^5 + 16x^4 + 25x^3 - 34x^2 - 27x + 90$;
b) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 9x + 18$;
c) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$;
d) $a^5 + 3a^4 - 2a^3 - 9a^2 - 11a - 6$;
e) $2x^5 + 16x^4 + 19x^3 - 94x^2 - 213x - 90$;
f) $6x^2 - 7x + 2$;
g) $3x^3 + x^2 + x - 2$;
h) $2x^3 + x^2 + 2x + 1$;
i) $3x^3 + 9x - x^2 - 3$;
j) $1 + 5x + 6x^2 + 4x^3 + 8x^4$.

**6.15 (*).** Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $a^6 + 6a^4 + 11a^2 + 6$. *Suggerimento*: sostituisci $a^2 = x$;
b) $2x^{2n} + x^n - 3$. *Suggerimento*: $x^n = a$;
c) $x^3 - ax^2 - 2ax + 2a^2$ *Suggerimento*: cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$.

### 6.3 Somma e differenza di due cubi

**6.16.** Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $x^3 - 1$;
b) $27 - x^3$;
c) $x^3 + 1$;
d) $x^3 + 8$;
e) $64a^3 - 8b^3$;
f) $8x^3 - 27y^3$;
g) $0,001^3 - x^3$;
h) $10^{-3}x^3 - 10^3y^3$;
i) $x^6 - y^6$;
j) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}b^3$.

**6.17.** Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $27x^3 - 8y^3$;
b) $a^3b^3 - 1$;
c) $a^9 - 1$;
d) $a^6 - 1$;
e) $\frac{27}{8}x^3 - 8$;
f) $a^3 - 125$;
g) $0,064x^3 + \frac{1}{27}y^3$;
h) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}t^3$;
i) $x^6 - y^3$;
j) $x^9 + 27y^3$.

**6.18.** Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $8x^{12} - 1$;
b) $a^{300} + 1$;
c) $5x^4y^3 + \frac{625}{8}x$;
d) $a^{3n} - 8b^3$;
e) $a^{3n+3} + 1$;
f) $\frac{5}{8}a^4 - \frac{5}{27}ab^3$.

### 6.5.2 Esercizi riepilogativi

**6.19 (*).** Scomponi in fattori.

a) $(x+1)^2 - (y-1)^2$;
b) $5x^4y^2 + 5x^2y + \frac{5}{4}$;
c) $(y-1)^2 - 2y + 2$;
d) $4 - (y-1)^2$;
e) $4x^2 - xy - 4x + y$;
f) $0,\overline{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2$;
g) $3x + k + 3x^2 + kx$;
h) $x^3 + 3x - 4x^2$;
i) $4x^2 - 7x - 2$;
j) $6x^2 - 24xy + 24y^2$.

**6.20 (*).** Scomponi in fattori.

a) $x^2 - (2+a)x + 2a$;
b) $2x^2 + 5x - 12$;
c) $\frac{1}{16}a^2 + 4b^4 - ab^2$;
d) $81a - 16a^3b^2$;
e) $a^2 - 10a - 75$;
f) $ax + bx - 3ay - 3by$;
g) $x^5 + x^3 + x^2 + 1$;
h) $0,09x^4y^5 - 0,04y$;
i) $-a^2x - 2abx - b^2x + 5a^2 + 10ab + 5b^2$;
j) $\frac{1}{9}x^2 - 0,25b^2$.

**6.21** (*). Scomponi in fattori.

a) $8a^3 - \frac{1}{8}b^3$;
b) $4a^3 + 8a^2 - a - 2$;
c) $x^3 - x^4 + 8 - 8x$;
d) $4xy + 4xz - 3ya - 3za - yh - zh$;
e) $x^6 - 81x^2$;
f) $54a^3b - 2b^4$;
g) $-12xyz + 9ya + 6x^3a - 8x^4z$;
h) $y^2 + ay - 6a^2$;
i) $2x^3 + 4x - 3x^2 - 6$;
j) $(x^2 - 7x + 10)^2 - x^2 + 10x - 25$.

**6.22** (*). Scomponi in fattori.

a) $\dfrac{4}{9}a^2 - b^2 + \dfrac{2}{3}a + b$;
b) $x^2 - 6x + 9 - (y^2 - 2y + 1)$;
c) $16a^4x^2 - 8a^2b^2x^2 + b^4x^2$;
d) $4(x-1)^2 - 4y(x-1) + y^2$;
e) $4a^4b - 4a^3b^2 + 6a^3b^3 - 6a^2b^4$;
f) $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$;
g) $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$;
h) $81a^4 - 64a^2b^2$;
i) $4x^3 + 8x^2 + x - 3$;
j) $2a^4b^3c - 8a^2bc^5$.

**6.23** (*). Scomponi in fattori.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$;
b) $20x^3 - 45x$;
c) $18p^3q^2x - 2pq^4x + 18p^3q^2y - 2pq^4y$;
d) $20a^6 - 16a^3c - 25a^4b + 20abc$;
e) $2a^7 - 6a^4x^2 + 6a^4b^2 - 18ab^2x^2$;
f) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$;
g) $3x^5 + 12x^4 - 21x^3 - 66x^2 + 72x$;
h) $32a^3x^2y - 48a^3xy^2 + 4b^3x^2y - 6b^3xy^2$;
i) $x^5 + 3x^4 - xy^4 - 3y^4$;
j) $48a^5bx + 16a^5by - 6a^2b^4x - 2a^2b^4y$.

**6.24** (*). Scomponi in fattori.

a) $x^2(x^4 - 18x^2 + 81) - x^6 + 729$;
b) $x^5 - 2x^2 - x + 2$;
c) $x^8 - y^8 - 2x^6y^2 + 2x^2y^6$;
d) $16ab - 81a^5b^9$;
e) $6x^7 + 2x^6 - 16x^5 + 8x^4$;
f) $x^4 - 4x^2 - 45$;
g) $-3a^7x^2 + 9a^5x^4 - 9a^3x^6 + 3ax^8$;
h) $x^3 - 13x^2 + 35x + 49$;
i) $4ab^3c^2 + 20ab^3 - 3abc^2 - 15ab$;
j) $6a^6b^3 - 12a^4b^5 + 6a^2b^7$.

**6.25** (*). Scomponi in fattori.

a) $y^3 - 5y^2 - 24y$;
b) $x^2 + 4xy - 6x + 4y^2 - 12y + 9$;
c) $2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2$;
d) $x^2 - y^2 + 2ay - a^2$;
e) $(3-a)^2 + (5+a)\cdot(a-3)$;
f) $3x^3 - x - 1 + 3x^2$;
g) $x^3y^2 - x^2y^3 + \dfrac{1}{4}xy^4$;
h) $-27x^6 + 9x^5 - x^4 + \dfrac{x^3}{27}$;
i) $4x^2 - 9y^2 - 6yz^2 - z^4$;
j) $\dfrac{1}{8}a^4b^2 - \dfrac{3}{4}a^3b^3 + \frac{3}{2}a^2b^4 - ab^5$.

**6.26** (*). Scomponi in fattori.

a) $a^2 + 4ab + 4b^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
b) $a^4b - 2a^3b^2 + 4a^3bc + a^2b^3 - 4a^2b^2c + 4a^2bc^2$;
c) $3a^4 - 3a^3x + a^2x^2 - \dfrac{1}{9}ax^3$;

d) $a^3x+4a^2x+4ax$;
e) $a^3b^5-\frac{2}{3}a^2b^6+\frac{1}{9}ab^7$;
f) $a^2-ab-9a+3b+18$;
g) $8ab^2-2a^3$;
h) $a^4-6a^3+3a^2+18a+9-1$;
i) $a^3+3a^2b+a^2+3ab^2+2ab+b^3+b^2$;
j) $\frac{x^7}{3}+x^5+x^3+\frac{x}{3}$.

**6.27 (*).** Scomponi in fattori.

a) $\frac{a^2}{4}+2ab-16b^4+4b^2$;
b) $5a^4x^3-40a^4y^3-45a^2b^2x^3+360a^2b^2y^3$;
c) $-24a^4b^2x^2-72a^4b^2y^2-3ab^5x^2-9ab^5y^2$;
d) $2ax^4y-6bx^4y-2axy^4+6bxy^4$;
e) $640a^3x^2y-960a^3xy^2+10b^3x^2y-15b^3xy^2$;
f) $-4x-3-2(x+1)(16x^2+9+24x)$;
g) $(x-2)+3(x^2-4x+4)-(x+1)(x-2)^2$;
h) $(x-1)^2-(x+2)(x^2-2x+1)-2(x^3-3x^2+3x-1)$;
i) $(3x+6)-5(x^2+4x+4)^2$;
j) $(y-x)^2(3x+2)-2(x-y)^3-2x^2+2y^2$.

**6.28 (*).** Scomponi in fattori.

a) $(-x^2+6x-9)^2-(4x-12)(x+1)$;
b) $x+1-2(x^2+2x+1)+(3x^2+x^3+3x+1)(x-2)$;
c) $36x^2+24xy-48x+4y^2-16y+15$;
d) $x^5-2-x+2x^4$;
e) $6a^3+11a^2+3a$;
f) $3a^4-24ax^3$;
g) $x^2-2x+1$;
h) $x^2+y^2+z^4-2xy+2xz^2-2yz^2$;
i) $a^6+b^9+3a^4b^3+3a^2b^6$;
j) $a^3-6a^2+12a-8$.

**6.29.** Scomponi in fattori.

a) $a^2+b^2-1-2ab$;
b) $a^4+2b-1-b^2$;
c) $-8a^2b+24ab^2-18b^3$;
d) $6a^5-24ab^4$;
e) $a^4+b^4-2a^2b^2$;
f) $x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3$;
g) $x^2-12x+32$;
h) $x^2-8x+15$;
i) $x^4-7x^2-60$;
j) $x^3-5x^2+6x$.

**6.30.** Scomponi in fattori.

a) $4a^2 - 9 - 4b^2 + 12b$;
b) $x^5 - 13x^3 + 36x$;
c) $4a^2 + 4a + 1$;
d) $4x^2y^2 - 4xy + 1$;
e) $x^3 + 1$;
f) $a^2 + 6a + 9$;
g) $12xy - 16y^2$;
h) $2x^3 - 16$;
i) $2x^2 + 4x + 8$;
j) $ax^2 - ay^2$.

**6.31.** Scomponi in fattori.

a) $a^3 - 8 + 12a - 6a^2$;
b) $7t^2 - 28$;
c) $2x^2 + 8 + 8x$;
d) $25 + 9x^2 + 30x$;
e) $z^8 - 2z^4 + 1$;
f) $3k^4 + k^6 + 1 + 3k^2$;
g) $3x^5 - 27xy^4$;
h) $25y^4 - 10y^2 + 1$;
i) $8a^4b - 8a^3b^2 + 12a^3b^3 - 12a^2b^4$;
j) $3a^3x + 3a^3y - 3abx - 3aby$.

**6.32.** Scomponi in fattori.

a) $81a^6b^3 - a^2b^3$;
b) $6abx - 3x + 2aby - y$;
c) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$;
d) $8a^7b - 8a^3b^3 + 12a^6b - 12a^2b^3$;
e) $4a^2x - 4a^2y^2 - 4ab^2x + 4ab^2y^2$;
f) $a^2 + 12a + 36$;
g) $x^8 - y^8 - 2x^6y^2 + 2x^2y^6$;
h) $5x^4 - 5x^2y^4$;
i) $(2x-1)^3 - (3-6x)^2$;
j) $x^4 - 2x^3 + 6x^2y + x^2 - 6xy + 9y^2$.

**6.33.** Scomponi in fattori.

a) $x^2 + 10xy + 25y^2$;
b) $27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$;
c) $64a^9 - 48a^6b^2 + 12a^3b^4 - b^6$;
d) $4a^2x^2 - 4b^2x^2 - 9a^2y^2 + 9b^2y^2$;
e) $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$;
f) $a^7 - a^4b^2 - 4a^3b^2 + 4b^4$;
g) $x^4 + 6x^2 - 40$;
h) $x^5 - 13x^3 + 12x^2$;
i) $32ab - 2a^5b^5$;
j) $24x^4y + 36x^3y^3 + 18x^2y^5 + 3xy^7$.

**6.34.** Scomponi in fattori.

a) $\frac{4}{9}a^4 + \frac{4}{9}a^2b + \frac{b^2}{9}$;
b) $-2a^{10} + 12a^7b - 24a^4b^2 + 16ab^3$;
c) $x^3 - 7x^2 - 25x + 175$;
d) $2ab^6 + 54a^4 + 18a^2b^4 + 54a^3b^2$;
e) $128a^3 - 200a$;
f) $\frac{4}{25} + \frac{4}{5}xy + x^2y^2$;
g) $x4 - 6x^2 - 27$;
h) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x$;
i) $8a^5b^2 - 64a^2b^5$;
j) $4a^2b^5 - 81b$.

**6.35.** Scomponi in fattori.

a) $ax + bx - 3ay - 3by$;
b) $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy$;
c) $81a^4 - b^4$;
d) $3a^5b^3 + 24a^2b^9$;
e) $4x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2$;
f) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
g) $x^2 - 12x + 133$;
h) $3x^5 - 27xy^4$;

i) $25y^4 - 10y^2 + 1$;

j) $\frac{16}{27}x^3 + \frac{8}{3}x^2y + 4xy^2 + 2y^3$.

**6.36.** Scomponi in fattori.

a) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$;
b) $6x^3y - 12x^2y^2 + 6xy^3$;
c) $x^4 + 3x^2 - 28$;
d) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$;
e) $3x^4y^3 + 9x^4 - 9xy^3 - 27x$;
f) $81a^6 - 18a^4b^2 + a^2b^2$;
g) $125 + 75y + 15y^2 + y^3$;
h) $4a^2x^2 - 16a^2y^2 - b^2x^2 + 4b^2y^2$;
i) $x^4 + 2x^2 - 24$;
j) $5x^3 - 17x^2 + 16x - 4$.

**6.37.** Scomponi in fattori.

a) $27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$;
b) $18a^4b - 2b^3$;
c) $x^4 - 9x^2 + 20$;
d) $3a^4b^3 - 6a^3b^3 - 9a^2b^3$;
e) $\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27}$;
f) $4a^5b^2 + 32a^2b^5$;
g) $32a - 50ab^2$;
h) $5x^4y^2 + 5x^4 - 5xy^4 - 5xy^2$;
i) $4y^2 - 12y + 9$;
j) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}ax + \frac{1}{9}a^2$.

**6.38.** Scomponi in fattori.

a) $\frac{8}{27}x^3 - 2x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{27}{8}$;
b) $\frac{1}{9}a^6 + 9a^2 - 2a^4$;
c) $5x^4 - 5x^3y^2 - 5x^2y + 5xy^3$;
d) $-8a^3 + 12a^2x^2 - 6ax^4 + x^6$;
e) $x^2 + 14x - 32$;
f) $\frac{4}{49}x^2y^2 - \frac{4}{7}xyz + z^2$;
g) $1 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^6$;
h) $2b^6c - 8c^3$;
i) $16a^4x^2 - 8a^2b^2x^2 + b^4x^2$;
j) $4x^3 + 7x^2 - 14x + 3$.

**6.39.** Scomponi in fattori.

a) $x^4 - 4x^2 - 45$;
b) $3x^3 + x^2 - 8x + 4$;
c) $4a^2 - 9 - 4b^2 + 12b$;
d) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$;
e) $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy$;
f) $x^6 - 81x^2 + x - 3$;
g) $x^6 - y^6 + x^3 + y^3$;
h) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
i) $50a^4b^3 - 2b^3$;
j) $16x^3 - 72x^2 + 108x - 54$.

**6.40.** Scomponi in fattori.

a) $625a^4 - b^4$;
b) $12ax^2 + 12axy + 3ay^2$;
c) $x^4 + 5x^2 - 36$;
d) $-4x^7 + 16x^6 + 28x^5 - 88x^4 - 96x^3$;
e) $\frac{1}{9}x^6 - 2x^4 + 9x^2$;
f) $a^4 + 4a^2 - 32$;
g) $4x^3 + 7x^2 - 14x + 3$;
h) $2ax^4y - 8bx^4y - 2axy^4 + 8bxy^4$;
i) $36ab - 49a^3b^3$;
j) $\frac{4}{25}a^4 + \frac{25}{9}b^2 - \frac{4}{3}a^2b$.

**6.41.** Scomponi in fattori.

a) $t^5 - z^5$;
b) $3x^2 + 6x + 6$;
c) $t^6 - 2t^3 + 1$;
d) $tx + x^2 + y^2 + ty + 2xy$;
e) $12m^3 + 9m^5 - 3m^7$;
f) $a^2b - 25b + a^2 - 25$;
g) $2ab - b^2 + 3 \cdot (b - 2a)^2$;
h) $x^6 - y^6$;
i) $3k^3 - k^2 + k + 5$;
j) $y^6 + y^3 - 2$.

**6.42.** Scomponi in fattori.

a) $a^8 - 1$;
b) $32a^4b^3 - 2b^3$;
c) $x^6 - 8a^3 + 12a^2x^2 - 6ax^4$;
d) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
e) $9y^2 + 6y + 1$;
f) $9a^3 - 9$;
g) $a^3 + 4a - 2a^2 - 3$;
h) $3a + 2a^3 - 7a^2$;
i) $50a^3b^2 - 8a^5$;
j) $20ab^2c + 8abc + 2abc^2 + 2a^2bc^2 + 2a^2b^2c$.

**6.43.** Scomponi in fattori.

a) $ab^4 - \frac{1}{3}a^2b^2 - b^6 + \frac{1}{27}a^3$;
b) $2xy + 16 - x^2 - y^2$;
c) $(a+2)\left(a^3-8\right) + \left(a^3+8\right)(a-2)$;
d) $(x-y)^2 + 2(x-y)(3a+b) + (3a+b)^2$;
e) $x^6 - 27 + 26x^3$;
f) $4y^2 - 12x^2y + 25x^2y^2 - 20xy^2 + 9x^4 + 30x^3y$;
g) $\frac{1}{8} - 8x^3y^3 + 6x^2y^2 + \frac{3}{2}xy$;
h) $4xy(a-3b) + 2xy^2a - 6xy^2b - 2x^2y(3b-a)$;
i) $x^2 - 4x - 5xy + x^2y + 6y + 4$;
j) $x^6 - 8 - 7x^3$.

**6.44 (*).** Scomponi in fattori.

a) $x^{a+1} - 5x^a - 4x^{a-2}$;
b) $x^{n^2-1} + 2x^{n^2+2} + x^{n^2}(x-3)$;
c) $x^{4n+1} - x^{3n+1}y^n + 2x^ny^{4n} - 2y^{5n}$;
d) $x^{n+2} + 3x^ny^{2n} - x^2y^3 - 3y^{3+2n}$;
e) $x^ay^b + x^a - y^b - 1$;
f) $x^{2n+1}y^{h+1} - 2x^{2n+1} - y^{h+1} + 2$;
g) $x^{a+4} - 3x^{a+2}y^a + x^2y^2 - 3y^{2+a}$.

### 6.5.3 Risposte

**6.9** a) $(x+1)(2x-5)$, b) $(y+z)(3y-5)$, e) $(x-3)(2x+3)$.

**6.13** a) $(x+1)(x+3)(x-3)$, b) $(m-1)(m+1)(m+2)$, c) $(a+1)(a-2)(a+2)$, d) $(a+1)(3a-2)$, e) $(a-2)(3a+1)(2a+3)$, f) $(x-1)(x-2)^2$, g) $(t+2)(t-2)(3t-1)$, h) $(x-3)(x-1)(x+2)(3x+7)$, i) $(y+2)(y-2)\left(y^2+y+1\right)$, j) $(t+2)(t-4)\left(t^2+2t+4\right)$.

**6.14** a) $(x+2)(x+3)(x+5)\left(2x^2-4x+3\right)$, b) $(x+2)(x-3)(x-1)\left(x^2+x+3\right)$, c) $(x-1)^2(x+2)^2$, d) $(a+1)(a-2)(a+3)(a^2+a+1)$, e) $(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x-3)$, f) $(2x-1)(3x-2)$, g) $(3x-2)\left(x^2+x+1\right)$, h) $(2x+1)\left(x^2+1\right)$, i) $(3x-1)\left(x^2+3\right)$.

**6.15** a) $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$, b) $(x^n-1)(2x^n+3)$, c) $(x-a)\left(x^2-2a\right)$.

**6.19** a) $(x+y)(x-y+2)$, b) $5\left(\frac{1}{2}+x^2y\right)^2$, c) $(y-1)(y-3)$, d) $(y+1)(3-y)$, e) $(x-1)(4x-y)$, f) $\frac{1}{3}(a+b)(a-b)$, g) $(x+1)(3x+k)$, h) $x(x-1)(x-3)$, i) $(x-2)(4x+1)$, j) $6(x-2y)^2$.

**6.20** a) $(x-2)(x-a)$, b) $(x+4)(2x-3)$, c) $\left(\frac{1}{4}a-2b^2\right)^2$, d) $a(9-4ab)(9+4ab)$, e) $(a-15)(a+5)$, f) $(a+b)(x-3y)$, g) $(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)$, h) $\frac{1}{100}y\left(3x^2y^2+2\right)\left(3x^2y^2-2\right)$, i) $(a+b)^2(5-x)$, j) $\frac{1}{36}(2x+3b)(2x-3b)$.

**6.21** a) $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)\left(4a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)$, b) $(a+2)(2a+1)(2a-1)$, c) $(1-x)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$, d) $(y+z)(4x-3a-h)$, e) $x^2(x+3)(x-3)\left(x^2+9\right)$, f) $2b(3a-b)\left(9a^2+3ab+b^2\right)$, g) $(3a-4xz)\left(2x^3+3y\right)$, h) $(y-2a)(y+3a)$, i) $\left(x^2+2\right)(2x-3)$, j) $(x-5)^2(x-1)(x-3)$.

**6.22** a) $\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b+1\right)$, b) $(x-4+y)(x-2-y)$, c) $x^2(2a-b)^2(2a+b)^2$, d) $(2x-2-y)^2$, e) $2a^2b(2a+3b^2)(a-b)$, f) $(x-1)(2x-1)(4x-1)$, g) $x(x-2)(x+3)(x-4)$, h) $a^2(9a-8b)(9a+8b)$, i) $(2x+3)(2x-1)(x+1)$, j) $2a^2bc(ab-2c^2)(ab+2c^2)$.

**6.23** a) $(x-1)(x+2)(x+1)$, b) $5x(2x-3)(2x+3)$, c) $2pq^2(3p-q)(3p+q)(x+y)$, d) $a(4a^2-5b)(5a^3-4c)$, e) $2a(a^3+3b^2)(a^3-3x^2)$, f) $(x-2y)^3$, g) $3x(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$, h) $2xy(2a+b)(2x-3y)(4a^2-2ab+b^2)$, i) $(x+3)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$, j) $2a^2b(2a-b)(3x+y)(4a^2+2ab+b^2)$.

**6.24** a) $-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)$, b) $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+2)$, c) $(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)$, d) $ab(2-3ab^2)(2+3ab^2)(4+9a^2b^4)$, e) $2x^4(x-1)(x+2)(3x-2)$, f) $(x-3)(x+3)(x^2+5)$, g) $3ax^2(x-a)^3(x+a)^3$, h) $(x+1)(x-7)^2$, i) $ab(4b^2-3)(c^2+5)$, j) $6a^2b^3(a-b)^2(a+b)^2$.

**6.25** a) $y(y+3)(y-8)$, b) $(x+2y-3)^2$, c) $2(x^2+1)(x-1)^2$, d) $(x-a+y)(x+a-y)$, e) $2(a-3)(a+1)$, f) $(3x^2-1)(x+1)$, g) $xy^2(x-\frac{1}{2}y)^2$, h) $x^3\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3$, i) $(2x+3y+z^2)(2x-3y-z^2)$, j) $\frac{1}{8}ab^2(a-2b)^3$.

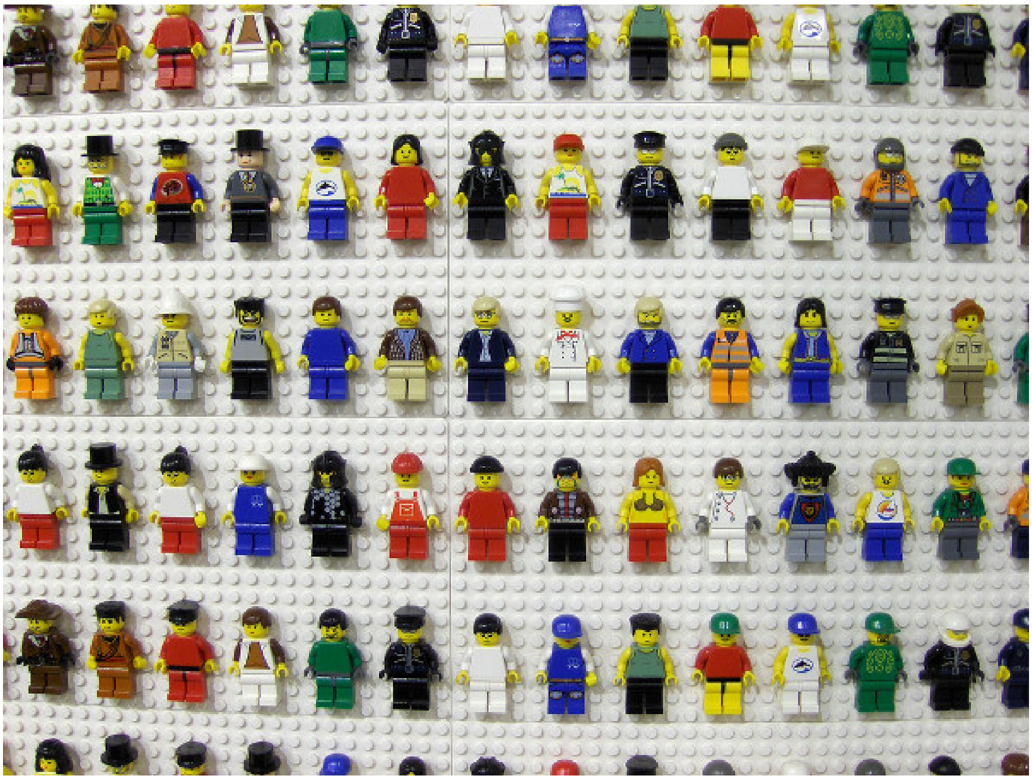
**6.26** a) $(a+2b+x-y)(a+2b-x+y)$, b) $a^2b(a-b+2c)^2$, c) $3a\left(a-\frac{1}{3}x\right)^3$, d) $ax(a+2)^2$, e) $ab^5\left(ab-\frac{1}{3}b^2\right)^2$, f) $(a-3)(a-b-6)$, g) $-2a(a+2b)(a-2b)$, h) $(a-4)(a+1)(a^2-3a-2)$, i) $(a+b)^2(a+b+1)$, j) $\frac{1}{3}x(x^2+1)^3$.

**6.27** a) $\left(\frac{1}{2}a+2b-4b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2b+4b^2\right)$, b) $5a^2(a-3b)(a+3b)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$, c) $-3ab^2(2a+b)(x^2+3y^2)(4a^2-2ab+b^2)$, d) $2xy(a-3b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$, e) $5xy(4a+b)(2x-3y)(16a^2-4ab+b^2)$, f) $-(4x+3)(8x^2+14x+7)$, g) $(x-1)(x-2)(3-x)$, h) $(x-1)^2(1-3x)$, i) $-(2+x)(5x^3+30x^2+60x+37)$, j) $(x-y)(x^2+xy-4y-2y^2)$.

**6.28** a) $(x-3)(x^3-9x^2+23x-31)$, b) $(x+1)(x^3-5x-3)$, c) $(6x+2y-3)(6x+2y-5)$, d) $(x+2)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$, e) $a(3a+1)(2a+3)$, f) $3a(a-2x)\left(a^2+2ax+4x^2\right)$.

**6.44** a) $x^{a-2}(x^3-5x^2-4)$, b) $x^{n^2-1}(2x-1)(x^2+x-1)$, c) $(x^n-y^n)(x^{3n+1}+2y^{4n})$, d) $(x^n-y^3)(x^2+3y^{2n})$, e) $(x^a-1)(y^b+1)$, f) $(x^{2n+1}-1)(y^{1+h}-2)$, g) $(x^{2+a}+y^2)(x^2-3y^a)$.

# Geometria analitica II



"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

# 7 Rette piano cartesiano

## 7.1 Rette e equazioni

Abbiamo visto che tutte le equazioni del tipo: $ax + b = 0$ hanno una soluzione se $a \neq 0$. Ma sulle equazioni lineari (di primo grado) con due incognite, cosa possiamo dire? Consideriamo l'equazione: $3x + 2y - 6 = 0$ ha una soluzione? Ma prima ancora, cosa significa *una* soluzione per questa equazione? La soluzione per una equazione in due incognite non è un numero, ma una coppia di numeri il primo da mettere al posto della $x$ e il secondo da mettere al posto della $y$ per rendere vera l'uguaglianza. Possiamo quindi precisare la seguente definizione:

**Definizione 7.1.** La soluzione di un'equazione a due incognite è la coppia ordinata di numeri che sostituiti ordinatamente alle incognite rendono vera l'uguaglianza.

Si possono trovare molte soluzione di questa equazione, due sono semplici da trovare: $(0;3)$ e $(2;0)$. Si possono verificare facilmente:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$$

Ne esistono altre?

| | |
|---|---|
| ... | ... |
| ... | ... |
| ... | ... |
| ... | ... |
| $(0;\ 3)$ | $3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$ |
| $(2;\ 0)$ | $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$ |
| $(4;\ -3)$ | $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 6 = 0$ |
| $(6;\ -6)$ | $3 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) - 6 = 0$ |
| $(8;\ -9)$ | $3 \cdot 8 + 2 \cdot (-9) - 6 = 0$ |
| $(10;\ -12)$ | $3 \cdot 10 + 2 \cdot (-12) - 6 = 0$ |

FIGURA 7.1: Soluzioni equazione.

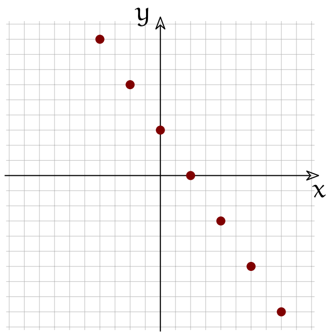



FIGURA 7.2: I corrispondenti punti nel piano.

Sapresti individuare la regola con la quale ho costruito le soluzioni? Sapresti aggiungere altre soluzioni che precedono quelle trovate da me?

In generale una equazione lineare in due incognite ha infinite soluzioni che sono coppie di numeri. Ma abbiamo già visto che una coppia di numeri rappresenta un punto nel piano cartesiano quindi ogni soluzione rappresenta un punto del piano vedi figura 7.2.

Possiamo osservare che i punti sono tutti allineati, ma cosa succede *tra* due punti? Per renderci più agevole il calcolo modifichiamo l'equazione di partenza ottenendo una equazione equivalente del tipo: $y = \dots$:

$$3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Possiamo costruire una tabella inserendo nella prima colonna dei valori $x$ scelti da noi e nella seconda i corrispondenti valori di $y$ calcolati, magari con l'uso della calcolatrice. Poi riportiamo questi valori in un piano cartesiano.

| x | y |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 0,5 | 2,25 |
| 1 | 1,5 |
| 1,5 | 0,75 |
| 2 | 0 |

FIGURA 7.3: Altre soluzioni.

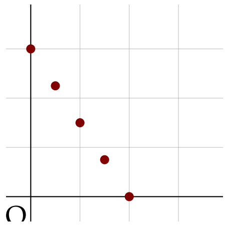



FIGURA 7.4: Altri punti.

Tra due punti calcolati possiamo inserirne quanti vogliamo, ma saranno sempre allineati con gli altri.

Si può dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione sono punti allineati e che tutti i punti che sono allineati con due qualunque di quella retta hanno coordinate che sono soluzioni di quell'equazione.

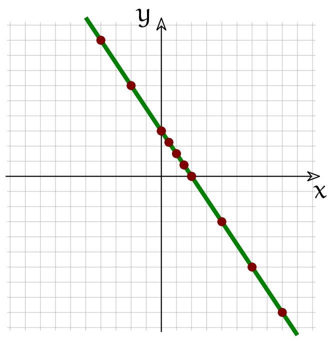



FIGURA 7.5: Retta di equazione: $3x + 2y - 6 = 0$.

I matematici dicono che c'è una *corrispondenza biunivoca* tra le soluzioni di quell'equazione e i punti di quella retta per cui dicono che quella equazione è l'*equazione della retta* e che quella retta è il *grafico dell'equazione*.

## 7.2 Equazioni della retta

Nel paragrafo precedente abbiamo scritto l'equazione della retta in due modi diversi. A questi due modi di scrivere l'equazione sono stati dati dei nomi:

- $3x + 2y - 6 = 0$: equazione implicita;
- $y = -\frac{3}{2}x + 3$: equazione esplicita.

In generale un'equazione implicita è un'equazione nella forma:

$$ax + by + c = 0$$

e un'equazione esplicita è un'equazione nella forma:

$$y = mx + q$$

dove $a,\ b,\ c,\ m,\ q$ sono dei *parametri* numerici mentre $x,\ y$ sono delle variabili.

- $x$ è la variabile a cui diamo noi dei valori e si chiama variabile *indipendente*;
- $y$ è la variabile il cui valore viene calcolato e si chiama variabile *dipendente*.

Cosa succede se nell'equazione implicita $a$ o $b$ valgono zero? Otteniamo delle equazioni senza la $x$ o senza la $y$. Possiamo osservare che anche le equazioni di primo grado con una sola variabile rappresentano delle rette:

- la retta $s$ di equazione $y = -2$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a $-2$ e qualunque ascissa;
- la retta $t$ di equazione $y = 3$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ordinata uguale a 3 e qualunque ascissa;
- la retta $q$ di equazione $x = -4$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a $-4$ e qualunque ordinata;
- la retta $r$ di equazione $x = 1$ è l'insieme dei punti del piano che hanno l'ascissa uguale a 1 e qualunque ordinata.

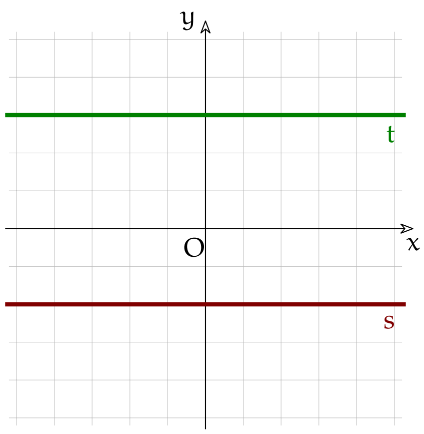



FIGURA 7.6: Rette parallele all'asse x.

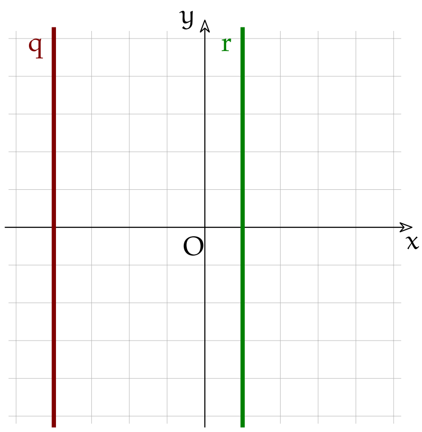



FIGURA 7.7: Rette parallele all'asse y.

Vedi le figure:7.6 e 7.7

In conclusione l'equazione $ax + by + c = 0$ al variare dei parametri $a$, $b$, $c$, rappresenta tutte le rette del piano.

## 7.3 Come disegnare le rette

Quando vogliamo disegnare una retta partendo dalla sua equazione, possiamo applicare la seguente procedura:

**Procedura 7.1.** *Per disegnare una retta:*

a ) *ricava l'equazione esplicita* $y = mx + q$*;*
b ) *riempi una tabella con alcuni valori di* $x$ *scelti da te e i corrispondenti valori di* $y$ *calcolati;*
c ) *per ogni coppia* $(x;\ y)$*, disegna un punto sul piano cartesiano;*
d ) *disegna una retta che passi per quei punti.*

Consideriamo un altro esempio.

**Procedura 7.2.** *disegna la retta che ha per equazione:* $x + 2y + 6 = 0$*:*

a ) *l'equazione esplicita è* $y = -\frac{1}{2}x - 3$*;*
b ) *Nel calcolo, ogni valore di* $x$ *dovrà essere diviso per due, quindi, per* $x$ *scegli valori pari che sono più comodi, costruisci la tabella e calcola i corrispondenti valori di* $y$*, vedi figura 7.8;*
c ) *disegna nel piano cartesiano i punti che ci stanno;*
d ) *disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 7.9.*

| x | y |
|---|---|
| -6 | -6 |
| -4 | -5 |
| -2 | -4 |
| 0 | -3 |
| 2 | -2 |
| 4 | -1 |
| 6 | -0 |

FIGURA 7.8: Tabella.

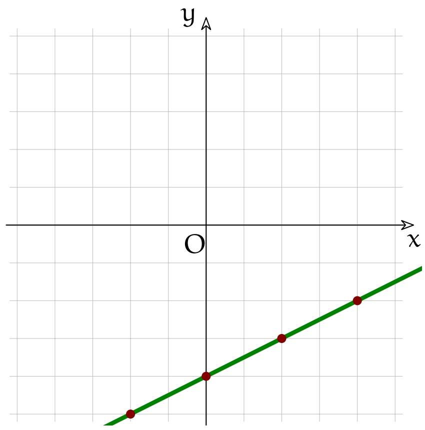



FIGURA 7.9: Disegno di una retta.

Ma ho proprio bisogno di tutti quei punti? Per individuare una retta bastano 2 punti quindi noi ne useremo... 3! In questo modo se i punti non appariranno allineati sapremo che abbiamo commesso un errore o nel calcolo o nel disegno. Un punto ci serve come controllo (come l'ultimo carattere del codice fiscale).

## 7.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

Prima di procedere dobbiamo procurarci un po' di esempi su cui ragionare. Disegna, in un piano cartesiano, le seguenti rette:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$;
b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$;
c) $y = -3x + 2$;
d) $y = 2x + 2$;
e) $y = \frac{4}{3}x + 2$;
f) $y = \frac{1}{3}x + 2$;

Disegna in un altro piano cartesiano queste altre rette:

a) $y = \frac{1}{2}x - 6$;
b) $y = \frac{1}{2}x - 4$;
c) $y = \frac{1}{2}x - 1$;
d) $y = \frac{1}{2}x$;
e) $y = \frac{1}{2}x + 2$;
f) $y = \frac{1}{2}x + 5$;

Confrontando cosa cambia e cosa resta uguale nei due gruppi di equazioni e di rette possiamo concludere che nell'equazione $y = mx + q$:

- il coefficiente $q$ indica il punto in cui la retta interseca l'asse $y$ e viene anche detto *intercetta* o *termine noto*;
- il coefficiente $m$ è legato alla *pendenza* della retta e viene anche detto *coefficiente angolare*;

### 7.4.1 Il coefficiente angolare

Sul coefficiente angolare possiamo fare alcune osservazioni:

1. se è positivo la retta è crescente;
2. se è negativo la retta è decrescente;
3. se non è né positivo né negativo la retta non è né crescente né decrescente, è costante;
4. più si avvicina a zero più la retta si avvicina all'orizzontale;
5. più si allontana da zero, sia in positivo (crescendo) sia in negativo (decrescendo), più la retta si avvicina alla verticale;
6. non esiste alcun coefficiente angolare che produca una retta verticale.

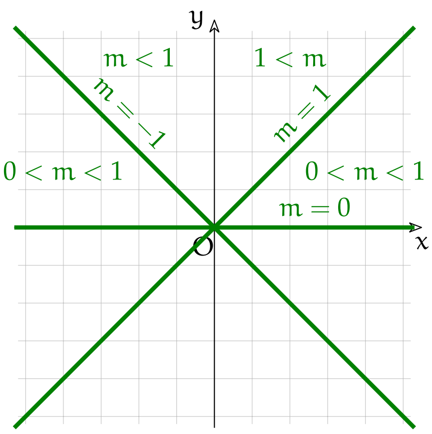



FIGURA 7.10: Coefficienti angolari.

Se consideriamo una retta, ad es. $y = \frac{3}{2}x - 2$ e alcuni suoi punti ad es. $A(-3;\ -4)$, $B(-1;\ -1)$, $C(1;\ 2)$, $D(-3;\ 5)$, possiamo osservare che il rapporto tra gli incrementi delle ordinate e delle ascisse, cioè l'aumento dell'ordinata diviso l'aumento dell'ascissa, è sempre lo stesso vedi figura: 7.12.

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = m$$
$$\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = m$$

FIGURA 7.11: Tre rapporti incrementali sulla stessa retta.

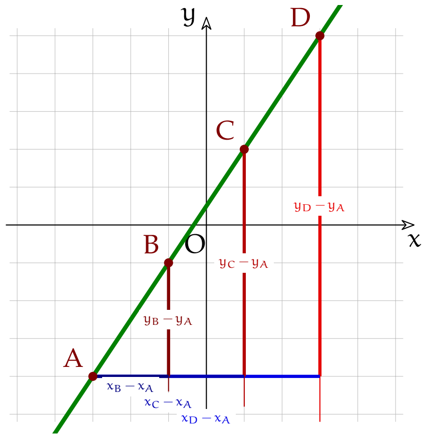



FIGURA 7.12: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In generale, dati due punti qualunque di una retta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

### 7.4.2 Disegno rapido

L'ultima osservazione ci permette di usare un metodo rapido per disegnare le rette, un metodo applicabile quando il coefficiente angolare è una frazione e l'intercetta un numero intero (la maggior parte degli esercizi propone rette di questo tipo). Questo metodo ci mette in grado di disegnare una retta in 10 secondi circa. Per ottenere questi tempi deve permetterci di disegnare la retta senza farci fare calcoli, perché il nostro cervello non è adatto a fare calcoli.

**Procedura 7.3.** *Disegna la retta che ha per equazione:* $y = mx + q$:

a ) *individua:* $q$, $\Delta x$ *e* $\Delta y$;
b ) *disegna sull'asse* $y$ *il punto di ordinata* $q$;
c ) *a partire da questo punto conta* $\Delta x$ *quadretti verso destra e* $\Delta y$ *quadretti verso l'alto segna questo punto;*
d ) *ripeti l'operazione c) per trovare altri punti sia a destra sia a sinistra dell'asse* $y$.
e ) *disegna la retta che passa per quei punti, vedi figura 7.14.*

## 7.5 Retta per due punti

Più sopra abbiamo ricordato che per due punti passa una sola retta. In quale modo possiamo trovare l'equazione della retta che passa per due punti assegnati?

$$r:\ y = -\frac{2}{3}x + 4$$
$$q = 4$$
$$\Delta x = 3$$
$$\Delta y = -2$$
(andare verso l'alto di $-2$ significa...)

FIGURA 7.13: Elementi da individuare.

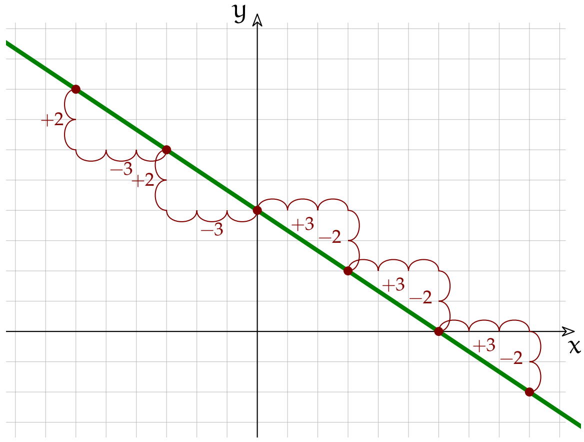



FIGURA 7.14: Metodo rapido.

**Procedura 7.4.** *Calcola l'equazione della retta passante per i punti A e B:*

a ) *Conoscendo i due punti non è difficile calcolare il coefficiente angolare:* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$*;*
b ) *poi resta da calcolare l'intercetta e per questo possiamo applicare la condizione di passaggio per un punto:* $y_A = mx_A + q \Leftarrow q = y_A - mx_A$.

---

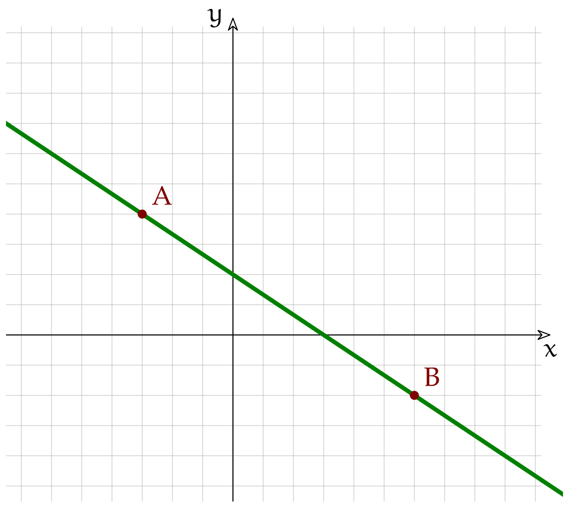



FIGURA 7.15: Equazione di una retta.

**Esempio 7.1.** Calcola l'equazione della retta passante per $A(-3;\ 4)$ e $B(6;\ -2)$ (figura: 7.15).

Per prima cosa disegna i punti e la retta. È facile prevedere che il coefficiente angolare dovrà essere negativo e che l'intercetta dovrà valere all'incirca due.

Calcoliamo il coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{6-(-3)} = \frac{-2-4}{6+3} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Per trovare $q$ e imponiamo che la retta di cui conosciamo $m$ passi per $A$ (si ottiene lo stesso risultato imponendo il passaggio per $B$):

$$y_A = -\frac{2}{3}x_A + q \Leftarrow q = y_A + \frac{2}{3}x_A q = 4 + \frac{2}{3}(-3)q = 4 - 2 = 2$$

L'equazione della retta è quindi:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(Come sospettavamo).

---

Esiste anche una formula molto comoda che fornisce direttamente l'equazione di una retta passante per due punti senza dover calcolare prima $m$ e poi $q$. La formula è:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

---

**Esempio 7.2.** Calcola, usando la formuletta, l'equazione della retta passante per gli stessi due punti.

---

## 7.6 Rette parallele e perpendicolari

Se abbiamo capito il significato di coefficiente angolare, non è difficile, guardando l'equazione di due rette dire se sono parallele. Nel seguente elenco evidenzia con colori diversi le rette parallele:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$;
b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$;
c) $y = 3x + 2$;
d) $y = \frac{4}{6}x + 3$;
e) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$;
f) $y = -\frac{1}{2}x + 3$;
g) $y = -\frac{2}{3}x + 7$;
h) $y = \frac{6}{9}x + 2$;
i) $-3x + 9y = 0$;
j) $2x - 4y + 2 = 0$;
k) $10x + 15y + 2$;
l) $3x - y + 7 = 0$;

**Definizione 7.2.** Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Per le rette perpendicolari il problema è più complicato. Partiamo da disegnare la retta $r$ di equazione $y = \frac{4}{5}x$ poi ci procuriamo un oggetto dotato di un angolo retto e disegniamo la retta $s$ perpendicolare a $r$ nel punto $(0;\ 0)$. Dobbiamo disegnare con la massima precisione.

Possiamo osservare innanzitutto che se la retta precedente era crescente, la perpendicolare sarà decrescente e viceversa. In questo caso il coefficiente angolare di $s$ sarà negativo. Se abbiamo fatto un buon lavoro con il disegno dovremmo trovare che, partendo dal punto in cui $r$ interseca l'asse $y$, il prossimo punto in cui la perpendicolare passa per l'incrocio dei quadretti è $(4;\ -5)$. Il coefficiente angolare di $s$ è quindi: $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

**Definizione 7.3.** Due rette sono perpendicolari se e solo se il coefficiente angolare di una è l'*antireciproco* del coefficiente angolare dell'altra.

---

**Esempio 7.3.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta $s$ parallela a $r$ passante per $P(-4;\ 3)$.

**Esempio 7.4.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, data la retta $r:\ y = \frac{4}{5}x$, calcola l'equazione della retta $n$ perpendicolare a $r$ passante per $P(-4;\ 3)$.

---

## 7.7 Fasci di rette

L'equazione parametrica: $y - y_P = m(x - x_P)$ al variare del parametro $m$ rappresenta senz'altro una retta perché è un'equazione di primo grado nelle due incognite $x$ e $y$. Senz'altro questa retta passa per il punto $P$, infatti se al posto di $x$ e di $y$ sostituisco rispettivamente: $x_P$ e $y_P$ l'uguaglianza è verificata:

$$y_P - y_P = m(x_P - x_P) \Leftarrow 0 = m \cdot 0$$

Dunque $y - y_P = m(x - x_P)$ è l'equazione di una generica retta passante per $P$. Al variare di $m$ ottengo quasi tutte le rette passanti per $P$... Perché *quasi* tutte?

---

**Esempio 7.5.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(3;\ 2)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta parallela alla retta passante per i punti $A(-4;\ 1)$ e $B(3;\ -1)$.

**Esempio 7.6.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, scrivi l'equazione del fascio di rete passanti per il punto $P(-23;\ 1)$. Tra tutte queste calcola l'equazione della retta perpendicolare alla retta passante per i punti $A(3;\ 4)$ e $B(5;\ -2)$.

---

## 7.8 Distanza punto retta

Ricordiamo che la distanza tra un punto e una retta è la lunghezza del segmento di perpendicolare compreso tra il punto e la retta.

**Procedura 7.5.** *Per trovare la distanza del punto $P$ dalla retta $r$,* basta*:*

*a ) calcolare l'equazione della retta $s$ perpendicolare a $r$ passante per $P$;*
*b ) trovare l'intersezione $I$ tra le due rette $r$ e $s$;*
*c ) calcolare la distanza tra i punti $P$ e $I$.*

Fortunatamente qualche matematico è riuscito a sintetizzare tutto questo procedimento in un'unica formula:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il numeratore è ottenuto partendo dall'equazione implicita della retta sostituendo le variabili con le coordinate del punto $P$.

---

**Esempio 7.7.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(-1;\ 5)$ e $r:\ y = \frac{1}{3}x - 2$.

**Esempio 7.8.** Dopo aver riportato su un piano cartesiano i dati dell'esercizio, calcola la distanza tra $P(4;\,-3)$ e $r:\ y=\frac{-1}{5}x+5$,

---

## 7.9 Intersezione di rette

Ritorniamo dove eravamo partiti: i punti di una rette sono tutti e soli quei punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione. Se due rette hanno un punto in comune questo significa che le coordinate di quel punto sono soluzione di entrambe le equazioni. Trovare le coordinate del punto che due rette hanno in comune significa trovare le soluzioni comuni alle due equazioni.

---

**Esempio 7.9.** Disegna le due rette $r:\ y=-\frac{1}{3}x+3$ e $s:\ y=\frac{4}{3}x-2$ individua graficamente l'intersezione e verifica che le sue coordinate sono soluzioni di entrambe le equazioni.

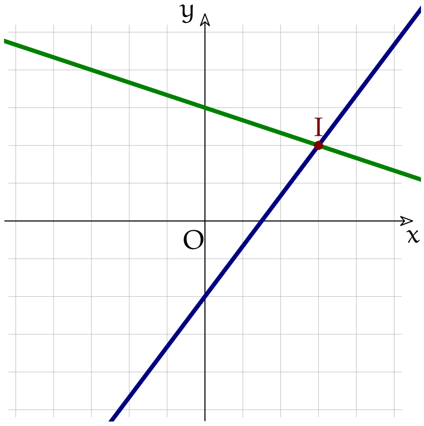



FIGURA 7.16: Intersezione di due rette.

$$y=-\tfrac{1}{3}x+3$$
$$2=-\tfrac{1}{3}3+3=-1+3=2$$
$$y=\tfrac{4}{3}x-2$$
$$2=\tfrac{4}{3}3-2=4-2=2$$

FIGURA 7.17: Verifica dell'intersezione.

---

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano nel punto $I(3;\,2)$. Sostituendo 3 alla $x$ e 2 alla $y$ nella prima equazione si ottiene:

$y=-\frac{1}{3}x+3$

$2=-\frac{1}{3}3+3=-1+3=2$

e nella seconda si ottiene:

$y=\frac{4}{3}x-2$

$2=\frac{4}{3}3-2=4-2=2$

Ovviamente il metodo appena utilizzato non è generale: come facciamo a trovare le coordinate esatte se l'intersezione non cade esattamente sul vertice di un quadretto? Rovesciamo il problema: per individuare il punto cerchiamo i due numeri che risolvono entrambe le equazioni, quei due numeri sono le coordinate dell'intersezione delle rette.

In matematica per indicare che due frasi devono essere contemporaneamente vere si usa il simbolo di una grande parentesi graffa aperta che le racchiuda e l'insieme di più equazioni che devono essere vere contemporaneamente viene chiamato sistema. Risolvere un sistema significa trovare quei numeri che messi al posto delle incognite rendono vere tutte le uguaglianza.

Alla soluzione dei sistemi è dedicato tutto il prossimo capitolo, ma possiamo intanto anticipare uno dei trucchi che useremo: se nella prima equazione c'è scritto che y è uguale a un'espressione, nella seconda equazione, al posto di y possiamo scrivere quella espressione. Vediamo questo procedimento con un esempio.

---

**Esempio 7.10.** Disegna le due rette $r:\ y = \frac{3}{2}x + 2$ e $s:\ y = \frac{2}{3}x - 1$ calcola le coordinate dell'intersezione e verifica di aver ottenuto una soluzione credibile.

$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{2}{3}x - 1$

$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -1 - 2$

$\frac{5}{6}x = -3$

$x = -\frac{18}{5} = 3,6$

$y = \frac{2}{3}(-\frac{18}{5}) - 1$

$y = -\frac{12}{5} - 1 = -\frac{17}{5} = 3,4$

FIGURA 7.18: Calcolo dell'intersezione.

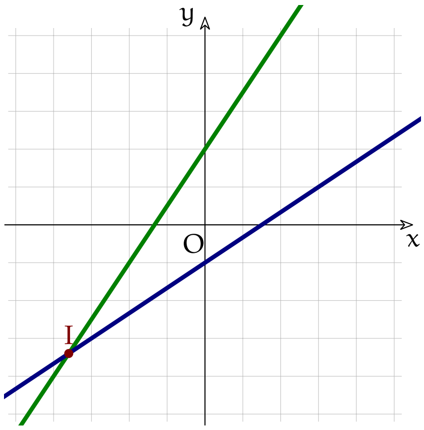



FIGURA 7.19: Intersezione di due rette.

---

Dopo aver disegnato le due rette si vede immediatamente che si intersecano circa nel punto $I(3;\ 2)$. Risolviamo il sistema:

$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

La prima equazione ci dice che $y$ è equivalente a $\frac{3}{2}x + 3$ quindi, nella seconda equazione al posto di $y$ scriviamo: $\frac{3}{2}x + 3$ otteniamo così un'equazione che contiene una sola incognita, l'ascissa dell'intersezione:

$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{2}{3}x - 1$

$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = -1 - 2$

$\frac{5}{6}x = -3$

$x = -\frac{18}{5} = 3,6$

E sostituendo questo valore in una delle due equazioni troviamo anche il valore dell'ordinata dell'intersezione:

$y = \frac{2}{3}(-\frac{18}{5}) - 1$

$y = -\frac{12}{5} - 1 = -\frac{17}{5} = 3,4$

## 7.10 Esercizi

### 7.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 7.1 Rette e equazioni

**7.1.** Individua quale tra i seguenti punti appartiene alla retta.

a ) $y = \frac{3}{2}x + \frac{33}{2}$; $(-5;9); (4;-10); (4;-9); (5;-9); (-6;9); (5;-10)$
b ) $y = -\frac{13}{2}x - 37$; $(3;10); (-4;-11); (-5;-12); (4;10); (-5;-11); (-4;-12)$
c ) $y = \frac{3}{7}x + \frac{72}{7}$; $(-11;6); (10;-7); (-10;5); (-11;5); (-10;6); (10;-6)$
d ) $y = \frac{2}{15}x - \frac{2}{5}$; $(-12;-2); (11;1); (-13;-3); (11;2); (12;1); (12;2)$
e ) $y = -\frac{13}{5}x + \frac{32}{5}$; $(-1;9); (1;-9); (-2;9); (0;-9); (0;-10); (1;-10)$
f ) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$; $(-9;3); (-9;4); (-8;4); (8;-5); (7;-5); (8;-4)$
g ) $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$; $(5;2); (-6;-2); (-5;-3); (4;2); (-5;-2); (-6;-3)$
h ) $y = \frac{4}{3}x - 3$; $(5;5); (-7;-5); (6;5); (-7;-6); (5;4); (-6;-6)$
i ) $y = -5x + 49$; $(-9;-10); (-8;-10); (7;8); (8;8); (-9;-9); (8;9)$
j ) $y = \frac{2}{9}x + \frac{49}{9}$; $(-11;3); (10;-3); (-11;2); (11;-3); (-12;3); (10;-4)$
k ) $y = \frac{8}{3}x + \frac{56}{3}$; $(4;-8); (3;-8); (-4;7); (-5;7); (4;-9); (-4;8)$
l ) $x = -9$; $(-10;-9); (-10;-8); (-9;-8); (8;7); (8;8); (9;8)$
m ) $y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$; $(-2;8); (0;-9); (-1;7); (-2;7); (-1;8); (0;-8)$
n ) $y = 3x + 10$; $(4;4); (5;4); (-5;-6); (-6;-5); (4;5); (-5;-5)$
o ) $y = \frac{3}{17}x - \frac{135}{17}$; $(-12;5); (-12;6); (10;-6); (11;-6); (-11;5); (11;-7)$
p ) $y = \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}$; $(-2;-2); (-1;-2); (0;1); (1;2); (-1;-3); (0;2)$
q ) $y = \frac{3}{10}x + \frac{19}{5}$; $(-7;2); (-6;2); (-7;1); (5;-2); (-6;1); (6;-2)$
r ) $y = \frac{4}{7}x - \frac{20}{7}$; $(-2;-5); (2;4); (1;3); (-2;-4); (2;3); (-3;-4)$
s ) $y = \frac{1}{12}x - \frac{109}{12}$; $(-2;8); (0;-10); (1;-10); (-1;9); (-1;8); (1;-9)$
t ) $y = -\frac{17}{11}x + \frac{76}{11}$; $(-3;9); (1;-11); (-2;9); (2;-10); (-3;10); (-2;10)$

#### 7.2 Equazioni della retta

**7.2.** Riconosci quali delle seguenti è l'equazione di una retta:

a ) $y = -3x + 4$
b ) $y^2 = x + 3$
c ) $y^3 = -x + y^3 - 2$
d ) $(x+2)(x-2) = (x+3)^2$
e ) $(x+y)(x-y) + (y-5)^2 = (x+4)^2$
f ) $0,1x + 0,2y = 0,3$
g ) $x^2 - y^2 = 0$
h ) $y + 4x = 5$
i ) $5x - 4y + 3 = 0$
j ) $(x+3)^2 - (y+2)^2 = 2x - 2y$
k ) $y = 0$
l ) $y = 2$
m ) $x = y$
n ) $0x + 0y = 7$
o ) $x^2 - (x+2)^2 = 7(x-y)$

**7.3.** Trasforma le equazioni implicite in equazioni esplicite.

a ) $-1x-11y-110=0$
b ) $-8x-2y-20=0$
c ) $-9x=0$
d ) $8x+y-7=0$
e ) $-2x-6y-54=0$
f ) $-6x-9y-27=0$
g ) $-7x-8y-64=0$
h ) $4x-5y-5=0$
i ) $7x-y-9=0$
j ) $4x+7y+14=0$
k ) $-7x+6y+0=0$
l ) $-5x+10y-50=0$
m ) $x=0$
n ) $6x+4y-4=0$
o ) $6x-11y+99=0$
p ) $11x-8y-40=0$
q ) $x=-7$
r ) $-4x-9y+36=0$
s ) $-9x-6y-6=0$
t ) $-7x+4y-40=0$
u ) $8x+4y-12=0$

**7.4.** Trasforma le equazioni esplicite in equazioni implicite.

a ) $y=\frac{2}{5}x+2$
b ) $y=\frac{10}{11}x-6$
c ) $y=-\frac{5}{3}x+10$
d ) $y=\frac{1}{3}x-3$
e ) $y=-x-5$
f ) $x=0$
g ) $y=\frac{8}{7}x+8$
h ) $y=\frac{1}{11}x+9$
i ) $y=-\frac{3}{10}x-7$
j ) $y=-\frac{1}{3}x-7$
k ) $y=-11x+8$
l ) $y=-\frac{5}{11}x+10$
m ) $y=-8$
n ) $y=-\frac{3}{5}x-6$
o ) $y=1$
p ) $y=-\frac{9}{5}x-9$
q ) $y=8x$
r ) $y=\frac{2}{5}x+7$
s ) $y=-\frac{11}{10}x+2$
t ) $y=-\frac{1}{2}x+8$
u ) $y=-\frac{3}{5}x+1$

### 7.3 Come disegnare le rette

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

**7.5.** a ) $y=\frac{6}{5}x+7$ b ) $y=\frac{11}{10}x-6$ c ) $y=-\frac{6}{11}x+11$

**7.6.** a ) $y=3x+12$ b ) $y=-3$ c ) $y=\frac{9}{5}x-2$

**7.7.** a ) $y=-\frac{5}{9}x+6$ b ) $y=2x-9$ c ) $y=\frac{9}{7}x+12$

**7.8.** a ) $x=0$ b ) $y=-\frac{10}{3}x-7$ c ) $y=-\frac{12}{11}x-11$

**7.9.** a ) $y=\frac{8}{3}x-6$ b ) $y=3x+10$ c ) $y=\frac{3}{5}x+3$

**7.10.** a ) $y=7x+5$ b ) $y=5x+4$ c ) $y=0$

**7.11.** a ) $y=\frac{10}{7}x-10$ b ) $y=-\frac{2}{5}x+4$ c ) $x=5$

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani calcolandone prima, in una tabella, tre punti.

**7.12.** a) $2x-10y-30=0$ b) $4x+10y-40=0$ c) $-3x+y+0=0$

**7.13.** a) $11x-3y-12=0$ b) $7x=0$ c) $-10x-2y-16=0$

**7.14.** a) $-7x-4y-4=0$ b) $9x+7y+42=0$ c) $-8x+y+9=0$

**7.15.** a) $10x-y+9=0$ b) $6x-8y-48=0$ c) $-7x-y-11=0$

**7.16.** a) $4x+4y+36=0$ b) $-5x-8y-48=0$ c) $-7x=0$

**7.17.** a) $-7x+7y+63=0$ b) $7x+6y+30=0$ c) $-11x-y+3=0$

**7.18.** a) $-5x+5y-45=0$ b) $8x-y+11=0$ c) $5x+6y-24=0$

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

**7.19.** a) $y=-\frac{1}{3}x-4$ b) $y=x-8$ c) $y=-\frac{2}{5}x-2$

**7.20.** a) $y=-\frac{1}{2}x+11$ b) $y=-\frac{9}{11}x-6$ c) $y=7x-7$

**7.21.** a) $y=\frac{5}{6}x+3$ b) $y=2x-6$ c) $y=-x+1$

**7.22.** a) $y=\frac{9}{2}x-4$ b) $y=\frac{11}{4}x-3$ c) $y=-\frac{2}{5}x-5$

**7.23.** a) $y=-\frac{9}{10}x-11$ b) $y=-3x+12$ c) $y=-\frac{2}{3}x+12$

**7.24.** a) $y=1$ b) $y=\frac{1}{8}x+3$ c) $y=\frac{10}{3}x-4$

**7.25.** a) $y=-2$ b) $y=x+12$ c) $y=2x-7$

### 7.4 Coefficienti dell'equazione esplicita

Disegna i seguenti gruppi di rette in diversi piani cartesiani usando il metodo rapido.

**7.26.** a) $8x-2y-18=0$ b) $-5x+6y-18=0$ c) $9x-45=0$

**7.27.** a) $-7x+8y+80=0$ b) $2y+18=0$ c) $-4x+6y+12=0$

**7.28.** a) $-7x-6y+12=0$ b) $-6x-4y+20=0$ c) $-4x+y+6=0$

**7.29.** a) $10x-11y=0$ b) $-5y+15=0$ c) $3x+11y+0=0$

**7.30.** a) $-5x+5y+50=0$ b) $-2x+7=0$ c) $6x-5y+30=0$

**7.31.** a) $-8x-y+12=0$ b) $-4x+11y-11=0$ c) $-2x+7y-84=0$

**7.32.** a) $-12x-7y=0$ b) $8x-10y-50=0$ c) $5x-10y-30=0$

### 7.5 Retta per due punti

**7.33.** Calcola l'equazione della retta: AB.

a) $A=(3;2);\ B=(8;8)$ $[y=\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}]$
b) $A=(-6;7);\ B=(-11;6)$ $[y=\frac{1}{5}x+\frac{41}{5}]$
c) $A=(-9;1);\ B=(9;4)$ $[y=\frac{1}{6}x+\frac{5}{2}]$
d) $A=(0;-12);\ B=(-10;11)$ $[y=-\frac{23}{10}x-12]$
e) $A=(-5;1);\ B=(4;-2)$ $[y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}]$
f) $A=(-3;-4);\ B=(4;-7)$ $[y=-\frac{3}{7}x-\frac{37}{7}]$
g) $A=(6;-7);\ B=(-1;-9)$ $[y=\frac{2}{7}x-\frac{61}{7}]$
h) $A=(-1;3);\ B=(-7;-4)$ $[y=\frac{7}{6}x+\frac{25}{6}]$
i) $A=(10;1);\ B=(-11;-10)$ $[y=\frac{11}{21}x-\frac{89}{21}]$
j) $A=(-8;-6);\ B=(-1;-11)$ $[y=-\frac{5}{7}x-\frac{82}{7}]$
k) $A=(-4;9);\ B=(3;6)$ $[y=-\frac{3}{7}x+\frac{51}{7}]$
l) $A=(1;8);\ B=(-1;-11)$ $[y=\frac{19}{2}x-\frac{3}{2}]$
m) $A=(-6;1);\ B=(-12;6)$ $[y=-\frac{5}{6}x-4]$
n) $A=(4;11);\ B=(2;-9)$ $[y=10x-29]$
o) $A=(-10;-5);\ B=(4;-10)$ $[y=-\frac{5}{14}x-\frac{60}{7}]$
p) $A=(10;-6);\ B=(-12;7)$ $[y=-\frac{13}{22}x-\frac{1}{11}]$
q) $A=(-6;-5);\ B=(-4;-3)$ $[y=x+1]$
r) $A=(-9;9);\ B=(9;10)$ $[y=\frac{1}{18}x+\frac{19}{2}]$
s) $A=(4;-5);\ B=(-10;11)$ $[y=-\frac{8}{7}x-\frac{3}{7}]$
t) $A=(-4;8);\ B=(-6;2)$ $[y=3x+20]$

## 7.6 Rette parallele e perpendicolari

**7.34.** Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C.

a ) $A = (10;7)$; $B = (-9;-10)$; $C = (3;-12)$
b ) $A = (-1;6)$; $B = (-5;6)$; $C = (-4;-5)$
c ) $A = (-7;-2)$; $B = (-9;-6)$; $C = (5;-12)$
d ) $A = (-3;0)$; $B = (-4;-4)$; $C = (-9;-9)$
e ) $A = (4;-3)$; $B = (-10;9)$; $C = (8;6)$
f ) $A = (4;11)$; $B = (-12;-11)$; $C = (9;5)$
g ) $A = (6;-2)$; $B = (-12;-7)$; $C = (10;-8)$
h ) $A = (-4;4)$; $B = (10;-10)$; $C = (11;-1)$
i ) $A = (-3;-10)$; $B = (9;8)$; $C = (8;-9)$
j ) $A = (7;-12)$; $B = (6;-4)$; $C = (-11;-3)$
k ) $A = (0;0)$; $B = (-8;-3)$; $C = (4;11)$
l ) $A = (-2;-2)$; $B = (7;-7)$; $C = (4;8)$
m ) $A = (-7;-9)$; $B = (-4;8)$; $C = (4;10)$
n ) $A = (-8;-5)$; $B = (11;11)$; $C = (9;5)$
o ) $A = (11;-7)$; $B = (-12;5)$; $C = (-4;-7)$
p ) $A = (11;3)$; $B = (-1;-4)$; $C = (-10;-1)$
q ) $A = (5;0)$; $B = (6;11)$; $C = (3;-1)$
r ) $A = (-7;8)$; $B = (-7;4)$; $C = (8;-8)$
s ) $A = (7;5)$; $B = (-4;2)$; $C = (-6;-5)$
t ) $A = (7;-5)$; $B = (2;-12)$; $C = (-7;0)$

## 7.7 Fasci di rette

**7.35.** Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e le rette parallela e perpendicolare passanti per C. poi calcolane le equazioni.

a ) $A = (-5;3)$; $B = (6;-1)$; $C = (-3;2)$ $[y = -\frac{4}{11}x + \frac{13}{11};\ y = -\frac{4}{11}x + \frac{34}{11};\ y = \frac{11}{4}x - \frac{25}{4}]$
b ) $A = (-4;10)$; $B = (-5;7)$; $C = (4;2)$ $[y = 3x + 22;\ y = 3x + 14;\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}]$
c ) $A = (11;-1)$; $B = (-11;2)$; $C = (-10;6)$ $[y = -\frac{3}{22}x + \frac{1}{2};\ y = -\frac{3}{22}x + \frac{81}{11};\ y = \frac{22}{3}x - \frac{202}{3}]$
d ) $A = (8;10)$; $B = (-1;0)$; $C = (-3;7)$ $[y = \frac{10}{9}x + \frac{10}{9};\ y = \frac{10}{9}x + \frac{11}{3};\ y = -\frac{9}{10}x + \frac{97}{10}]$
e ) $A = (-8;3)$; $B = (9;-4)$; $C = (-12;-10)$ $[y = -\frac{7}{17}x - \frac{5}{17};\ y = -\frac{7}{17}x - \frac{86}{17};\ y = \frac{17}{7}x - \frac{274}{7}]$
f ) $A = (7;4)$; $B = (10;2)$; $C = (-4;-8)$ $[y = -\frac{2}{3}x + \frac{26}{3};\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{16}{3};\ y = \frac{3}{2}x - 14]$
g ) $A = (8;7)$; $B = (-11;7)$; $C = (9;10)$ $[y = 7;\ y = 10;\ x = 9]$
h ) $A = (-4;2)$; $B = (-3;-9)$; $C = (5;-2)$ $[y = -11x - 42;\ y = -11x - 57;\ y = \frac{1}{11}x - \frac{17}{11}]$
i ) $A = (9;-10)$; $B = (-4;3)$; $C = (5;2)$ $[y = -x - 1;\ y = -x - 3;\ y = x + 7]$
j ) $A = (-5;-12)$; $B = (4;11)$; $C = (11;-6)$ $[y = \frac{23}{9}x + \frac{7}{9};\ y = \frac{23}{9}x + \frac{199}{9};\ y = -\frac{9}{23}x - \frac{237}{23}]$
k ) $A = (0;3)$; $B = (-2;-7)$; $C = (-2;-6)$ $[y = 5x + 3;\ y = 5x - 16;\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{28}{5}]$
l ) $A = (-10;-12)$; $B = (10;9)$; $C = (0;4)$ $[y = \frac{21}{20}x - \frac{3}{2};\ y = \frac{21}{20}x + 4;\ y = -\frac{20}{21}x + 4]$
m ) $A = (10;-7)$; $B = (10;-4)$; $C = (-10;-1)$ $[x = 10;\ x = -10;\ y = -1]$
n ) $A = (9;11)$; $B = (-4;9)$; $C = (5;-5)$ $[y = \frac{2}{13}x + \frac{125}{13};\ y = \frac{2}{13}x - \frac{55}{13};\ y = -\frac{13}{2}x - \frac{75}{2}]$
o ) $A = (6;1)$; $B = (3;4)$; $C = (10;-3)$ $[y = -x + 7;\ y = -x - 13;\ y = x + 7]$
p ) $A = (4;9)$; $B = (5;2)$; $C = (6;-4)$ $[y = -7x + 37;\ y = -7x - 46;\ y = \frac{1}{7}x - \frac{22}{7}]$
q ) $A = (3;0)$; $B = (-8;-6)$; $C = (2;-9)$ $[y = \frac{6}{11}x - \frac{18}{11};\ y = \frac{6}{11}x - \frac{87}{11};\ y = -\frac{11}{6}x - \frac{38}{3}]$

r) $A = (0;4)$; $B = (-5;-9)$; $C = (-1;4)$ $[y = \frac{13}{5}x + 4;\ y = \frac{13}{5}x + \frac{7}{5};\ y = -\frac{5}{13}x + \frac{57}{13}]$
s) $A = (8;3)$; $B = (-5;-2)$; $C = (-10;11)$ $[y = \frac{5}{13}x - \frac{1}{13};\ y = \frac{5}{13}x + \frac{93}{13};\ y = -\frac{13}{5}x + 37]$
t) $A = (-3;-4)$; $B = (2;-1)$; $C = (7;-5)$ $[y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5};\ y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5};\ y = -\frac{5}{3}x - \frac{50}{3}]$

### 7.8 Distanza punto retta

**7.36.** Calcola la distanza tra il punto P e la retta r.

a) $P = (11;-7)$; $r:\ -6x + 7y + 21 = 0$ $[\frac{94}{\sqrt{85}} \approx 10.2]$
b) $P = (-10;10)$; $r:\ 3x + 10y + 10 = 0$ $[\frac{80}{\sqrt{109}} \approx 7.663]$
c) $P = (8;-1)$; $r:\ -12x - 10y + 40 = 0$ $[\frac{46}{\sqrt{244}} \approx 2.945]$
d) $P = (-5;-11)$; $r:\ -6x + 0 = 0$ $[\frac{30}{\sqrt{36}} \approx 5.0]$
e) $P = (-1;-4)$; $r:\ -3x + 9y - 81 = 0$ $[\frac{114}{\sqrt{90}} \approx 12.02]$
f) $P = (-3;0)$; $r:\ 9x - 6y + 72 = 0$ $[\frac{45}{\sqrt{117}} \approx 4.16]$
g) $P = (-10;-7)$; $r:\ 10x - 9y + 27 = 0$ $[\frac{10}{\sqrt{181}} \approx 0.7433]$
h) $P = (4;0)$; $r:\ -9x + 4y + 44 = 0$ $[\frac{8}{\sqrt{97}} \approx 0.8123]$
i) $P = (-5;8)$; $r:\ 10x - 3y - 27 = 0$ $[\frac{101}{\sqrt{109}} \approx 9.674]$
j) $P = (-11;0)$; $r:\ 9x + 11y - 33 = 0$ $[\frac{132}{\sqrt{202}} \approx 9.287]$
k) $P = (-9;-10)$; $r:\ 2x + 4y + 24 = 0$ $[\frac{34}{\sqrt{20}} \approx 7.603]$
l) $P = (5;7)$; $r:\ 3x + 1y + 8 = 0$ $[\frac{30}{\sqrt{10}} \approx 9.487]$
m) $P = (8;7)$; $r:\ -10x + 6y + 54 = 0$ $[\frac{16}{\sqrt{136}} \approx 1.372]$
n) $P = (-2;-6)$; $r:\ -2x - 6y - 6 = 0$ $[\frac{34}{\sqrt{40}} \approx 5.376]$
o) $P = (-12;9)$; $r:\ -1x + 9y - 63 = 0$ $[\frac{30}{\sqrt{82}} \approx 3.313]$
p) $P = (-6;4)$; $r:\ -11x + 10y - 70 = 0$ $[\frac{36}{\sqrt{221}} \approx 2.422]$
q) $P = (-6;-3)$; $r:\ -3y + 33 = 0$ $[\frac{42}{\sqrt{9}} \approx 14.0]$
r) $P = (7;5)$; $r:\ -2x - 7y - 35 = 0$ $[\frac{84}{\sqrt{53}} \approx 11.54]$
s) $P = (-5;-6)$; $r:\ -10x + 7y + 63 = 0$ $[\frac{71}{\sqrt{149}} \approx 5.817]$
t) $P = (-6;11)$; $r:\ 9x + 5y + 55 = 0$ $[\frac{56}{\sqrt{106}} \approx 5.439]$

**7.37.** Calcola la distanza tra il punto P e la retta r.

a) $P = (-2;-10)$; $r:\ y = -\frac{1}{9}x - 11$ $[\frac{7}{\sqrt{82}} \approx 0.773]$
b) $P = (7;-9)$; $r:\ y = \frac{2}{11}x + 1$ $[\frac{124}{\sqrt{125}} \approx 11.09]$
c) $P = (6;-2)$; $r:\ y = -\frac{3}{4}x - 1$ $[\frac{28}{\sqrt{100}} \approx 2.8]$
d) $P = (-1;-7)$; $r:\ y = -\frac{2}{5}x - 6$ $[\frac{7}{\sqrt{29}} \approx 1.3]$
e) $P = (-4;0)$; $r:\ y = -x + 7$ $[\frac{33}{\sqrt{18}} \approx 7.778]$
f) $P = (11;9)$; $r:\ y = \frac{10}{11}x + 2$ $[\frac{33}{\sqrt{221}} \approx 2.22]$
g) $P = (8;0)$; $r:\ y = -\frac{1}{10}x - 6$ $[\frac{68}{\sqrt{101}} \approx 6.766]$
h) $P = (-8;-4)$; $r:\ y = -\frac{9}{10}x - 6$ $[\frac{52}{\sqrt{181}} \approx 3.865]$
i) $P = (2;0)$; $r:\ y = -\frac{6}{5}x + 2$ $[\frac{2}{\sqrt{61}} \approx 0.2561]$

j) $P=(9;7);\ r:\ y=\frac{1}{2}x+2$ [$\frac{4}{\sqrt{80}}\approx 0.4472$]

k) $P=(-3;1);\ r:\ y=\frac{2}{7}x+2$ [$\frac{1}{\sqrt{53}}\approx 0.1374$]

l) $P=(1;6);\ r:\ y=\frac{6}{5}x+3$ [$\frac{9}{\sqrt{61}}\approx 1.152$]

m) $P=(3;-3);\ r:\ y=-\frac{11}{12}x+9$ [$\frac{111}{\sqrt{265}}\approx 6.819$]

n) $P=(-11;-7);\ r:\ y=\frac{3}{4}x-6$ [$\frac{29}{\sqrt{25}}\approx 5.8$]

o) $P=(1;5);\ r:\ y=-\frac{6}{5}x-9$ [$\frac{152}{\sqrt{244}}\approx 9.731$]

p) $P=(5;3);\ r:\ y=-\frac{5}{11}x-11$ [$\frac{179}{\sqrt{146}}\approx 14.81$]

q) $P=(-1;10);\ r:\ y=2x-11$ [$\frac{23}{\sqrt{5}}\approx 10.29$]

r) $P=(-4;-11);\ r:\ y=\frac{3}{4}x+6$ [$\frac{56}{\sqrt{25}}\approx 11.2$]

s) $P=(-8;10);\ r:\ y=-\frac{2}{9}x+4$ [$\frac{38}{\sqrt{85}}\approx 4.122$]

t) $P=(-10;-7);\ r:\ y=\frac{7}{4}x$ [$\frac{42}{\sqrt{65}}\approx 5.209$]

**7.38.** Per ciascuna delle seguenti terne di punti disegna la retta AB e calcola la sua equazione. Calcola la lunghezza del segmento AB, la distanza del punto C dalla retta AB e l'area del triangolo ABC.

a) $A=(-4;10);\ B=(-3;0);\ C=(3;-9)$ [$-10x-30;\ \sqrt{101};\ \frac{51}{\sqrt{101}};\ 25.5$]

b) $A=(8;11);\ B=(6;-7);\ C=(7;-7)$ [$9x-61;\ \sqrt{328};\ \frac{9}{\sqrt{82}};\ 9$]

c) $A=(11;2);\ B=(2;7);\ C=(11;-1)$ [$-\frac{5}{9}x+\frac{73}{9};\ \sqrt{106};\ \frac{27}{\sqrt{106}};\ 13.5$]

d) $A=(-5;9);\ B=(-8;4);\ C=(9;-5)$ [$\frac{5}{3}x+\frac{52}{3};\ \sqrt{34};\ \frac{112}{\sqrt{34}};\ 56$]

e) $A=(6;-8);\ B=(-10;-6);\ C=(4;-10)$ [$-\frac{1}{8}x-\frac{29}{4};\ \sqrt{260};\ \frac{18}{\sqrt{65}};\ 18$]

f) $A=(3;-6);\ B=(-5;-2);\ C=(10;-11)$ [$-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2};\ \sqrt{80};\ \frac{3}{\sqrt{5}};\ 6$]

g) $A=(1;-2);\ B=(3;-11);\ C=(7;-2)$ [$-\frac{9}{2}x+\frac{5}{2};\ \sqrt{85};\ \frac{54}{\sqrt{85}};\ 27$]

h) $A=(-6;9);\ B=(11;11);\ C=(1;4)$ [$\frac{2}{17}x+\frac{165}{17};\ \sqrt{293};\ \frac{99}{\sqrt{293}};\ 49.5$]

i) $A=(2;1);\ B=(6;1);\ C=(-6;-7)$ [$1;\ \sqrt{16};\ \frac{8}{\sqrt{1}};\ 16.0$]

j) $A=(1;-4);\ B=(-6;-10);\ C=(7;7)$ [$\frac{6}{7}x-\frac{34}{7};\ \sqrt{85};\ \frac{41}{\sqrt{85}};\ 20.5$]

k) $A=(11;-8);\ B=(-8;9);\ C=(0;-8)$ [$-\frac{17}{19}x+\frac{35}{19};\ \sqrt{650};\ \frac{187}{\sqrt{650}};\ 93.5$]

l) $A=(7;-1);\ B=(-3;-12);\ C=(-11;-11)$ [$\frac{11}{10}x-\frac{87}{10};\ \sqrt{221};\ \frac{98}{\sqrt{221}};\ 49$]

m) $A=(-7;-10);\ B=(9;-6);\ C=(-8;-3)$ [$\frac{1}{4}x-\frac{33}{4};\ \sqrt{272};\ \frac{29}{\sqrt{17}};\ 58$]

n) $A=(-11;0);\ B=(4;-2);\ C=(11;5)$ [$-\frac{2}{15}x-\frac{22}{15};\ \sqrt{229};\ \frac{119}{\sqrt{229}};\ 59.5$]

o) $A=(-12;-1);\ B=(11;7);\ C=(-3;-1)$ [$\frac{8}{23}x+\frac{73}{23};\ \sqrt{593};\ \frac{72}{\sqrt{593}};\ 36$]

p) $A=(-10;11);\ B=(9;-5);\ C=(-12;2)$ [$-\frac{16}{19}x+\frac{49}{19};\ \sqrt{617};\ \frac{203}{\sqrt{617}};\ 101.5$]

q) $A=(6;-12);\ B=(-4;6);\ C=(10;-8)$ [$-\frac{9}{5}x-\frac{6}{5};\ \sqrt{424};\ \frac{56}{\sqrt{106}};\ 56$]

r) $A=(9;-10);\ B=(0;-6);\ C=(-5;-2)$ [$-\frac{4}{9}x-6;\ \sqrt{97};\ \frac{16}{\sqrt{97}};\ 8$]

s) $A=(3;-11);\ B=(-6;4);\ C=(6;2)$ [$-\frac{5}{3}x-6;\ \sqrt{306};\ \frac{54}{\sqrt{34}};\ 81$]

t) $A=(3;-9);\ B=(-8;0);\ C=(-9;9)$ [$-\frac{9}{11}x-\frac{72}{11};\ \sqrt{202};\ \frac{90}{\sqrt{202}};\ 45$]

**7.39.** Disegna le due rette, individua le coordinate dell'intersezione, verifica che queste sono soluzioni di entrambe le equazioni.

a) $r:\ y = 4x - 8;\quad s:\ y = -\frac{1}{4}x + 9$
b) $r:\ y = \frac{5}{8}x - 4;\quad s:\ y = \frac{1}{4}x - 7$
c) $r:\ y = -\frac{20}{3}x + 9;\quad s:\ y = -\frac{17}{3}x + 6$
d) $r:\ y = 1; s:\ y = 3x - 11$
e) $r:\ y = -\frac{5}{2}x - 4;\quad s:\ y = -8x + 7$
f) $r:\ y = 4x - 3;\quad s:\ y = \frac{17}{3}x - 8$
g) $r:\ y = 4x;\quad s:\ y = 16x - 12$
h) $r:\ y = \frac{10}{11}x - 11;\quad s:\ y = -\frac{5}{11}x + 4$
i) $r:\ y = \frac{1}{2}x + 7;\quad s:\ y = \frac{11}{4}x - 11$
j) $r:\ y = \frac{3}{2}x + 7;\quad s:\ y = 4$
k) $r:\ y = 9;\quad s:\ y = \frac{10}{11}x - 1$
l) $r:\ y = \frac{5}{4}x - 11;\quad s:\ y = \frac{11}{8}x - 12$
m) $r:\ y = \frac{9}{8}x;\quad s:\ y = -\frac{1}{4}x + 11$
n) $r:\ y = \frac{9}{4}x + 6;\quad s:\ y = \frac{5}{2}x + 8$
o) $r:\ y = -\frac{4}{5}x - 10;\quad s:\ y = \frac{3}{10}x + 1$
p) $r:\ y = 2x + 9;\quad s:\ y = \frac{17}{9}x + 8$
q) $r:\ x = 0;\quad s:\ x = 0$
r) $r:\ y = \frac{9}{5}x - 7;\quad s:\ y = \frac{11}{10}x$
s) $r:\ y = -\frac{2}{3}x;\quad s:\ y = -\frac{7}{9}x + 1$
t) $r:\ y = \frac{1}{9}x - 11;\quad s:\ y = \frac{1}{9}x - 11$

**7.40.** Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r:\ y = -\frac{3}{11}x - 6; s:\ y = -\frac{11}{8}x - 6$ $[(0;\ 6)]$
b) $r:\ y = \frac{5}{7}x - 1; s:\ y = \frac{1}{5}x - 7$ $[(\frac{35}{3};\ \frac{28}{3})]$
c) $r:\ y = \frac{5}{12}x + 6; s:\ y = -\frac{6}{7}x - 8$ $[(\frac{1176}{107};\ -\frac{152}{107})]$
d) $r:\ y = -\frac{11}{2}x + 1; s:\ y = -\frac{5}{2}x + 6$ $[(\frac{5}{3};\ -\frac{61}{6})]$
e) $r:\ y = 11x - 8; s:\ y = -\frac{7}{11}x - 1$ $[(-\frac{77}{128};\ \frac{177}{128})]$
f) $r:\ y = 4; s:\ y = \frac{6}{7}x$ $[(-\frac{14}{3};\ -4)]$
g) $r:\ y = \frac{5}{2}x - 11; s:\ y = -\frac{11}{7}x + 9$ $[(-\frac{280}{57};\ -\frac{73}{57})]$
h) $r:\ y = -\frac{9}{2}x - 5; s:\ y = \frac{5}{6}x + 11$ $[(3;\ -\frac{17}{2})]$
i) $r:\ y = \frac{7}{9}x + 1; s:\ y = \frac{8}{3}x + 12$ $[(\frac{99}{17};\ \frac{60}{17})]$
j) $r:\ y = -\frac{1}{3}x + 2; s:\ y = 2x + 12$ $[(\frac{30}{7};\ -\frac{24}{7})]$
k) $r:\ y = -7x + 1; s:\ y = -5x + 11$ $[(5;\ -36)]$
l) $r:\ y = 6x - 5; s:\ y = 8x - 1$ $[(2;\ 17)]$
m) $r:\ y = 3x + 11; s:\ y = -\frac{7}{2}x + 1$ $[(\frac{20}{13};\ -\frac{83}{13})]$
n) $r:\ y = \frac{2}{9}x - 4; s:\ y = \frac{1}{3}x - 4$ $[(0;\ 4)]$
o) $r:\ y = -\frac{2}{5}x - 9; s:\ y = \frac{4}{5}x + 7$ $[(\frac{40}{3};\ \frac{11}{3})]$
p) $r:\ y = \frac{12}{7}x + 7; s:\ y = \frac{1}{9}x$ $[(\frac{441}{101};\ \frac{49}{101})]$
q) $r:\ y = 2x + 8; s:\ y = \frac{1}{2}x - 9$ $[(\frac{34}{3};\ \frac{44}{3})]$
r) $r:\ y = -9x; s:\ y = -\frac{11}{10}x + 5$ $[(\frac{50}{79};\ -\frac{450}{79})]$
s) $r:\ y = \frac{5}{8}x - 10; s:\ y = -\frac{1}{5}x - 2$ $[(-\frac{320}{33};\ \frac{130}{33})]$
t) $r:\ y = -\frac{8}{11}x + 4; s:\ y = -x + 4$ $[(0;\ -4)]$

**7.41.** Disegna le due rette e calcola le coordinate dell'intersezione.

a) $r:\ 4x + 7y - 63 = 0; s:\ -9x - 10y + 110 = 0$ $[(-\frac{140}{23};\ -\frac{127}{23})]$
b) $r:\ -7x + 0 = 0; s:\ -6x + 6y + 60 = 0$ $[(0;\ 10)]$
c) $r:\ 8x + 0 = 0; s:\ -10x - 12y + 72 = 0$ $[(0;\ -6)]$
d) $r:\ -12x - 10y - 60 = 0; s:\ 6x - 5y + 10 = 0$ $[(\frac{10}{3};\ 2)]$
e) $r:\ 4x - 8y + 24 = 0; s:\ -1x + 10y + 50 = 0$ $[(20;\ 7)]$
f) $r:\ -9x + 2y - 2 = 0; s:\ -1x + 10y + 30 = 0$ $[(\frac{10}{11};\ \frac{34}{11})]$
g) $r:\ 7x + 0 = 0; s:\ -3x + 10y - 20 = 0$ $[(0;\ -2)]$

h) $r: -1x - 12y + 12 = 0; s: -2y + 18 = 0$ [(96; −9)]
i) $r: -1x + 3y + 30 = 0; s: 11x - 9y - 72 = 0$ $[(\frac{9}{4}; \frac{43}{4})]$
j) $r: 11x - 1y + 11 = 0; s: -7x - 8y - 8 = 0$ $[(\frac{96}{95}; \frac{11}{95})]$
k) $r: -6x - 10y + 30 = 0; s: 5x + 9y - 45 = 0$ [(45; −30)]
l) $r: 7x - 9y + 63 = 0; s: -2x - 12y - 120 = 0$ [(18; 7)]
m) $r: -10x + 9y + 72 = 0; s: 7x + 1y + 6 = 0$ $[(-\frac{18}{73}; \frac{564}{73})]$
n) $r: -5x + 2y + 12 = 0; s: -7x - 4y - 24 = 0$ [(0; 6)]
o) $r: -10x - 10y - 40 = 0; s: -10x - 4y - 20 = 0$ $[(\frac{2}{3}; \frac{10}{3})]$
p) $r: -11y - 99 = 0; s: -10x + 1y + 5 = 0$ $[(\frac{2}{5}; 9)]$
q) $r: 8x - 7y - 77 = 0; s: 5x - 9y - 99 = 0$ [(0; 11)]
r) $r: 9x + 9y + 54 = 0; s: 10x + 3y + 33 = 0$ $[(\frac{15}{7}; \frac{27}{7})]$
s) $r: -1x + 10y - 100 = 0; s: -6y + 66 = 0$ [(−10; −11)]
t) $r: -11x - 9y + 0 = 0; s: -6x - 5y + 10 = 0$ [(90; −110)]

### 7.10.2 Esercizi riepilogativi

**7.42.** Determina il circocentro, l'ortocentro, il baricentro, il perimetro e l'area del triangolo avente per vertici i punti $A(-1; -1)$, $B(2; -1)$, $C(0; 3)$.

**7.43.** Determina la proiezione ortogonale del punto $P(-1; -4)$ sulla retta $y = -\frac{1}{5}x - 1$.

**7.44.** Dati i tre punti $A(1; 3)$, $B(-1; 6)$, $C(-4; 4)$ determina il punto $D$ in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ risulti essere un quadrato. (Suggerimento: ci sono due metodi per risolvere l'esercizio, uno è molto veloce...)

**7.45.** Verifica che il triangolo di vertici $A(3; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-4; 3)$ è rettangolo e calcola l'area. [10]

**7.46.** Nel fascio di rette di centro $A(-2; 1)$ determinare la retta $r$ perpendicolare alla retta di equazione $2x - 2y - 3 = 0$ [x + y + 1 = 0]

**7.47.** Nel fascio di rette parallele a $y = -2x$ determinare la retta $r$ passante per $A(0; -3)$. [2x + y + 3 = 0]

**7.48.** Dati i tre vertici di un triangolo $A(5; 0)$; $B(1; 2)$ e $C(-3; 2)$, scriverne le equazioni dei lati. $[x + 2y - 5 = 0; x + 4y - 5 = 0; y = 2]$

**7.49.** Scrivere l'equazione di una retta passante per $A(4; 2)$ e per il punto comune alle rette $r: x + y = 3$ e $s: x - y + 1 = 0$. $[y = 2]$

**7.50.** Scrivere l'equazione della retta congiungente il punto d'intersezione delle rette $a: x + y = 3$ e $b: x - y + 1 = 0$, con quello d'intersezione delle rette $c: x - y = 1$ e $d$ $x = -1$. $[y = 2x]$

**7.51.** Scrivere l'equazione della retta passante per $A(-5; -1)$ parallela alla retta congiungente l'origine delle coordinate con $B(1; 2)$. $[2x - y + 9 = 0]$

**7.52.** La retta passante per $A(2; 3)$ e $B(-1; -6)$ e quella per $C(6; -1)$ e $D(-3; 2)$ come sono fra loro? [perpendicolari]

# Trasformazioni geometriche nel piano 8

## 8.1 Caratteri generali

Nei prossimi capitoli studieremo alcune trasformazioni geometriche nel piano.
Delle trasformazioni cercheremo di capire:

1. se cambiano la forma o le dimensioni delle figure che trasformano;
2. se esistono delle figure che non si modificano nella trasformazione, cioè se la trasformazione ha degli elementi uniti;
3. alcune trasformazioni particolari;
4. le equazioni della trasformazione.

In questo testo propongo l'uso del linguaggio di programmazione Python con la libreria per la geometria interattiva `pyig`. Basta ricopiare i programmi che sono scritti per avere un ambiente interattivo da esplorare. Ovviamente la parte più divertente è apportare modifiche e variazioni, dopo aver verificato il funzionamento di quelli originali. In questo modo si possono esplorare anche le potenzialità del linguaggio.

Prima di affrontare questi argomenti è bene aver seguito il percorso proposto nel capitolo sull'informatica relativo all'uso della geometria interattiva.

Nulla vieta che le attività proposte in questo capitolo siano eseguite con un qualunque altro software di geometria.

### 8.1.1 Strumenti di `pyig`

Per esplorare le trasformazioni nel piano useremo i seguenti strumenti della geometria interattiva con Python:

- `Point(x, y)` crea un punto con date coordinate.
- `Line(p0, p1)` crea una retta passante per `p0` e `p1`.
- `Parallel(retta, punto)` crea una retta parallela a `retta` passante per `punto`.
- `Orthogonal(retta, punto)` crea una retta perpendicolare a `retta` passante per `punto`.
- `PointOn(oggetto, parametro)` crea un punto fissato su oggetto nella posizione definita da parametro.
- `Segment(p0, p1)` crea un segmento di estremi `p0` e `p1`.
- `MidPoint(segmento)` crea il punto medio di segmento.

- `ConstrainedPoint(object, parameter)` crea un punto vincolato a oggetto nella posizione iniziale definita da parametro.
- `Polygon(vertici)` crea un poligono data una sequenza di punti.
- `Circle(centro, punto)` crea una circonferenza di centro `centro`, passante per `punto`.
- `<poligono>.vertices` contiene la lista dei vertici del poligono.
- `<segmento>.length()` restituisce la lunghezza di un segmento.
- `<oggetto>.coords()` restituisce le coordinate di oggetto.
- `VarText(x, y, stringa, variabili)` crea un testo variabile nella posizione `x`, `y`.

Se ci sono dei dubbi sul loro significato conviene dare un'occhiata alla parte sull'informatica o al manuale di `pygraph`.

## 8.2 Traslazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una traslazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una traslazione.
3. Cosa dice l'algebra sulle traslazioni.

### 8.2.1 Definizione

Nella geometria euclidea, una traslazione è una trasformazione che sposta, di una distanza fissa, tutti i punti nella stessa direzione.

In altre parole, dato un vettore, diremo che un punto P' è il traslato del punto P se il segmento `PP'` ha la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del vettore.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e un vettore, costruisce il traslato del punto rispetto al vettore. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = traslapunto(p_0, traslazione)
```

Ovviamente `p_0` e `traslazione` dovranno essere rispettivamente un punto e un vettore creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al traslato di `p_0` della quantità indicata da `vettore`. Un frammento completo di programma potrebbe essere:

```
# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A, il suo traslato
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
```

La funzione `traslapunto(punto, traslazione)` dovrà:

1. Creare una retta invisibile parallela a `traslazione` passante per `punto`.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione +1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una nostra cartella, con il nome `trasla01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la data, il tuo nome e un titolo (ad esempio: `Traslazioni: proprietà`).

Scrivi ora un programma che disegni un vettore, un punto e il suo traslato.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato e il vettore AA'
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve rimanere sempre il traslato di `A` secondo il vettore dato. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

### 8.2.2 Proprietà

Crea il vettore `AA'`, con spessore 1. Esegui il programma e muovi il punto `A`: cosa puoi dire del segmento `AA'`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci ora un nuovo punto `B`, il suo traslato `B'` e il vettore `BB'` (spessore 1).

Costruisci i segmenti `AB` e `A'B'` (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di `AB` e `A'B'` usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB` e prova a dimostrarla.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo traslato `P'`:

```
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color='green', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6, color='green', name="P'")
```

Muovi il punto `P`, cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un nuovo punto `C` il suo simmetrico `C'`, costruisci il poligono `ABC` e il poligono `A'B'C'`. Cosa si può concludere circa i triangoli `ABC` e `A'B'C'`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo `ABC` e del suo trasformato `A'B'C'`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- La traslazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La traslazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo traslato appartiene al traslato del segmento.
- Il programma completo:

```
# Traslazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
```

```
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo punto traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")
v_a = ig.Vector(a_0, a_1, width=1)

# Punto B, B', il vettore BB' e il punto medio
b_0 = ig.Point(-7, 0, width=6, name="B")
b_1 = traslapunto(b_0, trasl, width=6, name="A'")
v_b = ig.Vector(b_0, b_1, width=1)

# Segmento AB e A'B'
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                          color='olive drab', name="P")
p_1 = traslapunto(p_0, trasl, width=6,
                  color='olive drab', name="P'")

# Punto C, C' e i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(1, 5, width=6, name="B")
c_1 = traslapunto(c_0, trasl, width=6, name="A'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4,
           color='violet', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

### 8.2.3 Elementi uniti

Un elemento unito è un oggetto geometrico che viene trasformato in se stesso da una trasformazione.

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `trasla02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `traslapunto(punto, traslazione, **kargs)` che restituisce il traslato di un punto. Nel programma principale crea un punto e il suo traslato. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Traslazioni: elementi uniti

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
trasl = ig.Vector(ig.Point(-13, 10, width=6),
                  ig.Point(-4, 12, width=6), name='t')

# Punto A e il suo traslato
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
a_1 = traslapunto(a_0, trasl, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sono pochi gli elementi uniti in una traslazione, solo le rette parallele al vettore traslazione. Crea:

- una retta con uno spessore maggiore passante per `A` e parallela al vettore traslazione.
- una retta con uno spessore minore e di un altro colore passante per `A'` e parallela al vettore traslazione.

Qualunque sia la traslazione e qualunque sia il punto `A`, ottieni due rette sovrapposte: cioè `r'` coincide con `r`.

**Riassumendo**

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una traslazione, sono elementi uniti solo:
  - le rette . . . . . . . . . . . . . . .

### 8.2.4 Equazioni delle traslazioni

Un vettore è completamente determinato dalla differenza delle coordinate tra il punto iniziale e il punto finale di un segmento orientato.

Avvia una nuova finestra di editor e salvarla con il nome: `trasla03_equazioni.py`. In questa finestra ricopia il seguente programma:

```
# Traslazioni: equazioni

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def traslapunto(punto, traslazione, **kargs):
    """Restituisce il punto traslato di traslazione."""
    parallela = ig.Parallel(traslazione, punto, False)
    return ig.PointOn(parallela, +1, **kargs)

# Programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il vettore traslazione
v = ig.Vector(ig.Point(0, 0, width=6),
              ig.Point(4, 3, width=6), name='t')

# Quattro punti
a_0 = ig.Point(-5, 6, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(3, 6, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(-6, -7, width=6, name="C")
d_0 = ig.Point(7, -4, width=6, name="D")

# Lista con quattro punti
punti = [a_0, b_0, c_0, d_0]

# Vettore v applicato a tutti i punti
for punto in punti:
    v_p = ig.Vector(punto, v)

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, correggi eventuali errori. Quanti vettori vedi?

Il programma produce complessivamente cinque segmenti orientati, ma questi rappresentano un solo vettore.

È un po' come le cinque frazioni seguenti:

$$\frac{9}{15}; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{18}{30}; \quad \frac{6}{10}; \quad \frac{30}{50};$$

rappresentano un solo numero razionale.

Nel programma principale crea un punto `P(5, 5)`, il suo traslato e aggiungi alcune istruzioni che visualizzino le componenti del vettore `v` e le coordinate del punto `P` e `P'`:

```
# Relazione tra componenti della traslazione e
# coordinate del punto traslato
p_0 = ig.Point(5, 5, width=6, name="P")
p_1 = traslapunto(a_0, v, width=6, name="P'")

ig.VarText(-7, -10, "v = {}", v.components())
ig.VarText(-7, -11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(-7, -12, "P' = {}", p_1.coords())
```

Modifica il vettore `v` e completa la seguente tabella lasciando fisso il punto `P(5, 5)`:

| traslazione | simmetrico rispetto asse x |
|---|---|
| v (4; 3) | P'(. . . . . ; . . . . .) |
| v (1; -4) | P'(. . . . . ; . . . . .) |
| v (. . ; . . ) | P'(x_p . . . ; y_p . . .) |
| v (a; b) | P'(. . . . . ; . . . . .) |

Nella traslazione di componenti `(a, b)`: l'ascissa del generico punto `P'` traslato di `P` è . . . . . . . . . . . . . . . ; l'ordinata del generico punto `P'`, è . . . . . . . . . . . . . . . .

La traslazione si può tradurre nel sistema di equazioni: $\tau \begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

**Riassumendo**

➡ L'equazione della traslazione di vettore `v(a; b)` è:

$$\tau \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

**Prova tu**

Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una traslazione è
2. In una traslazione figure corrispondenti sono
3. In una traslazione sono unite
4. Le equazioni della traslazione di componenti `(a; b)` è:

## 8.3 Simmetria assiale

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una simmetria assiale e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una simmetria assiale.
3. Cosa sono gli assi di simmetria in un poligono.
4. Cosa dice l'algebra sulle simmetrie assiali.

### 8.3.1 Definizione

Una simmetria assiale di asse `asse` è una trasformazione che manda un punto `P` in un punto `P'` appartenente alla retta perpendicolare all'asse di simmetria in modo tale che la distanza di `P` dall'asse sia uguale alla distanza di `P'` dall'asse.

In altre parole, un punto P' è simmetrico del punto `P` rispetto alla retta `asse` se il segmento `PP'` è perpendicolare a `asse` e `asse` taglia a metà il segmento `PP'`.

La funzione principale che realizzeremo è quella che, dato un punto e una retta, costruisce il simmetrico del punto rispetto alla retta. Si dovrà poterla chiamare in questo modo:

```
p_1 = simmpunto(p_0, asse)
```

Ovviamente `p_0` e `asse` dovranno essere rispettivamente un punto e una retta creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al simmetrico di `p_0` rispetto a `asse`.

La funzione `simmpunto(punto, asse)` dovrà:

1. Creare una retta invisibile ortogonale a `asse` passante per `punto`.
2. Creare su questa retta un punto fisso nella posizione -1.
3. Dare come risultato questo punto.

Una possibile soluzione:

```
def simmpunto(punto, asse):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, False)
    puntosimmetrico = ig.PointOn(perpendicolare, -1)
    return puntosimmetrico
```

La funzione proposta nel programma a fine capitolo è un po' più concisa e, in più, usa una particolare sintassi di Python che permette di passare un numero variabile di parametri definiti per chiave.

In questo modo si possono effettuare chiamate di questo tipo:

```
a_1 = simmpunto(a_0, asse, name="A'")
b_1 = simmpunto(a_0, asse, name="B'", color="navy")
c_1 = simmpunto(a_0, asse, name="C'", width=7)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome `simass01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# data
# autore
# Simmetrie assiali

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
```

```
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo punto simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve rimanere sempre simmetrico di `A`. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle simmetrie assiali.

### 8.3.2 Proprietà

Crea il segmento `AA'`, con spessore 1, e costruisci il punto medio `M`. Esegui il programma e muovi il punto `A`: cosa puoi dire del segmento `AA'` e del suo punto medio?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci ora un nuovo punto `B` dalla stessa parte di `A` e il suo simmetrico `B'` rispetto alla retta `asse`, costruisci il segmento `BB'` (spessore 1) e il suo punto medio chiamandolo `N`. Puoi prevedere il comportamento di `N`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci i segmenti `AB` e `A'B'` (di un colore diverso dagli altri oggetti realizzati). Visualizza le misure di `AB` e `A'B'` usando la classe VarText:

```
ab = ig.Segment(a, b, width=6, color='violet')
a1b1 = ig.Segment(a1, b1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())
```

Muovi i punti base, cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB`. Aggiungi i due segmenti: `MB` e `MB'` e prova a dimostrarla.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo simmetrico `P'`:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color='olive drab', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color='olive drab', name="P'")
```

Muovi il punto P, cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un nuovo punto C dalla stessa parte di A e B rispetto a asse e il suo simmetrico C', costruisci il poligono ABC, e il poligono A'B'C'. Cosa si può concludere circa i triangoli ABC e A'B'C'?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo ABC e del suo trasformato A'B'C'?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- La simmetria assiale è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.
- La simmetria assiale inverte il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo simmetrico appartiene al simmetrico del segmento.
- Il programma completo:

```
# Simmetrie assiali: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(-3, -12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, il suo simmetrico
a_0 = ig.Point(-3, 9, width=6, name="A")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")
# Il segmento AA' e il punto medio
sa =ig.Segment(a_0, a_1, width=1)
m = ig.MidPoint(sa, width=6, color='red', name="M")

# Punto B, il suo punto simmetrico
b_0 = ig.Point(-7, 3, width=6, name="B")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B'")
# Il segmento BB' e il punto medio
```

```
    sb =ig.Segment(b_0, b_1, width=1)
    n = ig.MidPoint(sb, width=6, color='red', name="N")

    # Segmento AB e A'B'
    ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
    a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
    ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
    ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", ab.length())
    mb =ig.Segment(m, b_0, width=1)
    mb1 =ig.Segment(m, b_1, width=1)

    # P vincolato alla retta AB
    p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
                              color='olive drab', name="P")
    p_11 = simmpunto(p_0, asse, width=6,
                     color='olive drab', name="P'")

    # Punto C, il suo punto simmetrico, i triangoli ABC e A'B'C'
    c_0 = ig.Point(-10, 5, width=6, name="B")
    c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B'")
    ig.Polygon((a_0, b_0, c_0),
               width=4, color='violet', intcolor='gold')
    ig.Polygon((a_1, b_1, c_1),
               width=4, color='violet', intcolor='gold')

    # attivazione della finestra grafica
    ip.mainloop()
```

### 8.3.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simmass02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `simmpunto(punto, asse, **kags)` che restituisce il simmetrico di un punto rispetto a una retta. Nel programma principale crea tre punti e i loro simmetrici. Il programma dovrebbe assomigliare a:

```
# Simmetrie assiali: elementi uniti

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def simmpunto(punto, asse, **kags):
    """Restituisce il simmetrico di punto rispetto a asse."""
    perpendicolare = ig.Orthogonal(asse, punto, visible=False)
    return ig.PointOn(perpendicolare, -1, **kags)

# programma principale
```

```
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
asse = ig.Line(ig.Point(−3, −12, width=6),
               ig.Point(2, 10, width=6), name='asse')

# Punto A, B, C e i loro simmetrici A', B', C'
a_0 = ig.Point(−3, 9, width=6, name="A")
b_0 = ig.Point(−7, 3, width=6, name="B")
c_0 = ig.Point(−9, 6, width=6, name="C")
a_1 = simmpunto(a_0, asse, width=6, name="A'")
b_1 = simmpunto(b_0, asse, width=6, name="B'")
c_1 = simmpunto(c_0, asse, width=6, name="B'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, se tutto funziona puoi iniziare l'esplorazione degli elementi uniti della simmetria assiale.

Sposta uno dei punti sulla retta `asse`. Cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

In una trasformazione geometrica un punto viene detto *unito* se, trasformato, corrisponde a se stesso. Puoi concludere che:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

In generale, in una trasformazione geometrica, una figura viene detta *unita* quando è trasformata in se stessa (anche se non ogni suo punto è unito).

Un segmento che ha gli estremi su `asse` è . . . . . . . . . . . . . . . . rispetto alla simmetria e è costituito da . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un triangolo `ABC` e il suo simmetrico `A'B'C'`. Muovi i punti `ABC` in modo che il triangolo simmetrico si sovrapponga al triangolo `A'B'C'`. Come deve essere il triangolo `ABC` per essere unito rispetto alla simmetria?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci e descrivi altri elementi uniti rispetto alla simmetria.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una simmetria assiale sono elementi uniti:
  - i punti . . . . . . . . . . . . . . .

- i segmenti . . . . . . . . . . . . . . .
- le rette . . . . . . . . . . . . . . .
- le circonferenze . . . . . . . . . . . . . . .
- i triangoli . . . . . . . . . . . . . . .
- i poligoni . . . . . . . . . . . . . . .

### 8.3.4 Poligoni simmetrici

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simass03_poligoni.py`. Scrivi la solita funzione `simmpunto`.

Scrivi una funzione che, dati `centro`, `vertice` e `numlati`, costruisca il poligono regolare. Lo schema potrebbe essere:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circonferenza su cui sono disposti i vertici non visibile
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    # crea la lista dei vertici che contiene quello dato come argomento
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Scrivi la funzione che, dati `poligono` e `asse`, costruisca il poligono simmetrico. Lo schema potrebbe essere:

```
def simmpoli(poligono, asse, **params):
    """Restituisce il simmetrico di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici del poligono simmetrico
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il simmetrico e
    # aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
```

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- crea il punto O di coordinate (6, 3);
- l'asse passante per quel punto e il punto (6, 7);
- il triangolo equilatero di centro O e passante per (4, 3), usa la funzione `polreg`;
- il simmetrico del triangolo (usa la funzione `simmpoli`).

Una figura è simmetrica rispetto ad un *asse* se resta unita nella simmetria.

Agendo con il mouse, muovi la retta `asse` facendo in modo che il triangolo trasformato si sovrapponga al triangolo originale.

Sono tre e sono quelle in cui l'asse passa per . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ripeti le operazioni precedenti disegnando un quadrato nel secondo quadrante, un pentagono regolare nel terzo e un esagono regolare nel quarto, sempre con un asse di simmetria passante per il centro. Cosa puoi osservare?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- Una figura si dice simmetrica se esiste una simmetria che la trasforma in se stessa.
- Una figura può avere più assi di simmetria.
- I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria quante sono i lati del poligono.
- La funzione `polreg(centro, vertice, numlati, **kargs)` può essere realizzata in questo modo:

```
def polreg(centro, vertice, numlati, **kargs):
    """Restituisce un poligono regolare
       dati il centro un vertice e il numero di lati."""
    # crea la circ. su cui sono disposti i vertici non visibile
    circ = ig.Circle(centro, vertice, visible=False)
    # calcola la lunghezza dell'arco tra due vertici consecutivi
    arco=2./numlati
    # crea la lista dei vertici che contiene l'argomento vertice
    vertici=[vertice]
    # aggiungi alla lista dei vertici tutti gli altri
    for cont in range(1, numlati):
        vertici.append(ig.PointOn(circ, cont*arco))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici, **kargs)
```

- La funzione `simmpoli(poligono, asse, **kargs)` può essere realizzata in questo modo:

```
def simmpoli(poligono, asse, **kargs):
    """Restituisce il simm. di un poligono rispetto a asse."""
    # crea una lista vuota che conterra' i vertici
    # del poligono simmetrico
    vertici_simm=[]
    # per ogni vertice del poligono originale, calcola il
    # simmetrico e aggiungilo alla lista dei vertici simmetrici
    for vertice in poligono.vertices:
        vertici_simm.append(simmpunto(vertice, asse))
    # restituisci il poligono costruito con questi vertici
    return ig.Polygon(vertici_simm, **kargs)
```

### 8.3.5 Equazioni di alcune simmetrie assiali

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `simmas04_equazioni.py`. Scrivi la solita funzione `simmpunto`.

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- una retta x sovrapposta all'asse x;
- una retta y sovrapposta all'asse y;
- un punto `P` e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P'` simmetrico di `P` rispetto all'asse x e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P''` simmetrico di `P` rispetto all'asse y e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto P in varie posizioni e completa la seguente tabella:

| punto | simmetrico rispetto asse x | simmetrico rispetto asse y |
|---|---|---|
| A (-4; 3) | A'(. . . . . ; . . . . .) | A''(. . . . . ; . . . . .) |
| B (1; -4) | B'(. . . . . ; . . . . .) | B''(. . . . . ; . . . . .) |
| C (. . ; . . ) | C'(. . . . . ; . . . . .) | C''(. . . . . ; . . . . .) |
| P (x; y) | P'(. . . . . ; . . . . .) | P''(. . . . . ; . . . . .) |

Nella simmetria rispetto all'asse delle `x`: l'ascissa del generico punto P' simmetrico di `P` è . . . . . . . . . . . . . . . . all'ascissa di `P`; l'ordinata del generico punto `P'`, è . . . . . . . . . . . . . all'ordinata di `P`.

La simmetria rispetto all'asse x si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=0}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Nella simmetria rispetto all'asse delle y:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La simmetria rispetto all'asse y si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=0}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica il programma in modo che gli assi di simmetria coincidano con le bisettrici dei quadranti, muovi il punto P e completa la seguente tabella:

| punto | simm. bis. I quadrante | simm. bis. II quadrante |
|---|---|---|
| A (-7; 3) | A'(. . . . . ; . . . . .) | A''(. . . . . ; . . . . .) |
| B (5; -2) | B'(. . . . . ; . . . . .) | B''(. . . . . ; . . . . .) |
| C (. . ; . . ) | C'(. . . . . ; . . . . .) | C''(. . . . . ; . . . . .) |
| P (x; y) | P'(. . . . . ; . . . . .) | P''(. . . . . ; . . . . .) |

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante: l'ascissa del generico punto `P'`, simmetrico di `P` è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . `P`; l'ordinata del generico punto `P'`, è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Nella simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=-x}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

Modifica la funzione test in modo che gli assi di simmetria siano le rette di equazioni: $x = 3$ e $y = 4$. Muovi il punto P e completa la seguente tabella:

| punto | simm. x = 3 | simm. bis. y = 4 |
|---|---|---|
| A (-6; 3) | A′(. . . . . ; . . . . .) | A′′(. . . . . ; . . . . .) |
| B (4; -2) | B′(. . . . . ; . . . . .) | B′′(. . . . . ; . . . . .) |
| C (. . ; . . ) | C′(. . . . . ; . . . . .) | C′′(. . . . . ; . . . . .) |
| P (x; y) | P′(. . . . . ; . . . . .) | P′′(. . . . . ; . . . . .) |

Nella simmetria rispetto alla retta x=3: l'ascissa del generico punto P′, simmetrico di P è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . P; l'ordinata del generico punto P′, è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La simmetria rispetto alla retta x=3 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=3}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta x=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{x=k}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nella simmetria rispetto alla retta y=4

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La simmetria rispetto alla retta y=4 si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=4}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

In generale la simmetria rispetto alla retta y=k si può tradurre nel sistema di equazioni: $\sigma_{y=k}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

L'equazione di questa simmetria funziona anche se k=0? Cosa puoi osservare?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- Certe simmetrie assiali possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.
  - $\sigma_{y=0}\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
  - $\sigma_{x=0}\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
  - $\sigma_{y=x}\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
  - $\sigma_{y=-x}\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$
  - $\sigma_{x=k}\begin{cases} x' = -x + 2k \\ y' = y \end{cases}$

$$\sigma_{y=k} \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

**Prova tu**

Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una simmetria assiale (s.a.) è
2. In una s.a. figure corrispondenti sono
3. In una s.a.:
   a) sono punti uniti
   b) sono rette unite
   c) sono segmenti uniti
   d) esiste una retta formata da tutti punti uniti, è:
4. I poligoni regolari hanno tanti assi di simmetria ...
5. Assi di simmetria...
   a) il cerchio ha
   b) il rettangolo ha
   c) il rombo ha
   d) il triangolo isoscele ha
   e) il trapezio isoscele ha
   f) Un parallelogramma che non sia rombo o rettangolo
6. Le equazioni della s.a.
   a) rispetto all'asse x
   b) rispetto all'asse y
   c) rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
   d) rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante

## 8.4 Rotazione

In questo capitolo si affrontano i seguenti argomenti:

1. Cos'è una rotazione e quali sono le sue proprietà.
2. Cosa sono gli elementi uniti in una rotazione.
3. Cosa sono le rotazione di un poligono regolare.
4. Cosa dice l'algebra sulle rotazioni.

### 8.4.1 Definizione

Una rotazione rispetto a un centro `O` è una trasformazione che fa ruotare attorno a `O`, ogni punto del piano di uno stesso angolo,

Una rotazione è determinata dal centro e dall'angolo.

La funzione principale è quella che dato un *punto*, un *centro* e un *angolo* costruisce la rotazione del punto. Per cui:

```
p_1 = RuotaPunto(punto, centro, angolo)
```

Ovviamente `punto`, `centro` e `angolo` dovranno essere rispettivamente il punto da trasformare, il centro di rotazione e l'angolo di rotazione creati precedentemente. Dopo la chiamata, `p_1` conterrà il riferimento al punto immagine di `p_0` nella rotazione.

La funzione `RuotaPunto(punto, centro, ang)` dovrà:

1. creare una semiretta invisibile passante per `centro` e `p_0`;
2. su questa semiretta riportare l'angolo;
3. intersecare questa semiretta con una circonferenza centrata in `centro` e passante per `p_0`;
4. dare come risultato questa intersezione.

Una possibile soluzione:

```
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)
```

Avviato IDLE crea una nuova finestra (menu-File-New window) e salvala, in una tua cartella, con il nome `rota01_proprieta.py`. Inizia questo programma con un'intestazione adeguata: alcuni commenti che contengano la *data*, il tuo *nome* e un *titolo*.

Il programma potrà assomigliare a questo:

```
# Rotazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)
```

```
# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo l'asse di simmetria
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e il suo punto ruotato
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A'")

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

Esegui il programma, muovi i punti base, il punto `A'` deve corrispondere al punto `A` nella rotazione. Se tutto funziona sei pronto per esplorare le caratteristiche delle rotazioni.

### 8.4.2 Proprietà

Cambia l'angolo di rotazione, cosa avviene quando è di 360°?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Quando l'angolo di rotazione è un multiplo di 360° la rotazione diventa una particolare trasformazione: l'*identità*.

Costruisci ora un nuovo punto `B` e `B'`, il suo trasformato nella rotazione. Poi crea i segmenti `AB` e `A'B'` e visualizzane la misura. Puoi formulare la congettura: `A'B'` è congruente ad `AB`. Prova a dimostrarla.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un punto `P` vincolato al segmento `AB` e il suo simmetrico `P'`:

```
p = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6, color='olive drab', name="P")
p1 = simmpunto(p, asse, width=6, color='olive drab', name="P'")
```

Muovi il punto `P`, cosa osservi?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Costruisci un nuovo punto `C` e `C'`, costruisci il poligono `ABC`, e il poligono `A'B'C'`. Cosa si può concludere circa i triangoli `ABC` e `A'B'C'`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cosa puoi dire sull'orientamento dei vertici del triangolo `ABC` e del suo trasformato `A'B'C'`?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- ➡ La rotazione è una trasformazione geometrica che trasforma segmenti in segmenti congruenti, perciò è una *isometria*.

- La rotazione mantiene il verso dei poligoni.
- Se un punto appartiene ad un segmento, il suo ruotato appartiene al ruotato del segmento.
- Il programma completo:

```
# Rotazioni: proprieta'

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, width=1)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(width=1)
    circ = ig.Circle(centro, punto, width=1)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# # Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(-3, -2, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, width=6),
                  ig.Point(-10, 10, width=6),
                  ig.Point(-6, 12, width=6), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto A e A'
a_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="A")
a_1 = ruotapunto(a_0, centro, angolo, width=6, name="A'")

# Punto B e B'
b_0 = ig.Point(7, 3, width=6, name="B")
b_1 = ruotapunto(b_0, centro, angolo, width=6, name="B'")

# I segmenti AB, A'B' e le loro misure
ab =ig.Segment(a_0, b_0, width=6, color='violet')
a1b1 =ig.Segment(a_1, b_1, width=6, color='violet')
ig.VarText(-7, -7, "AB = {}", ab.length())
ig.VarText(-7, -8, "A'B' = {}", a1b1.length())

# P vincolato alla retta AB
p_0 = ig.ConstrainedPoint(ab, .3, width=6,
```

```
                              color='olive drab', name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6,
                        color='olive drab', name="P'")

# Punto C, C', i triangoli ABC e A'B'C'
c_0 = ig.Point(-1, 1, width=6, name="B")
c_1 = ruotapunto(c_0, centro, angolo, width=6, name="C'")
ig.Polygon((a_0, b_0, c_0), width=4, color='navy', intcolor='gold')
ig.Polygon((a_1, b_1, c_1), width=4, color='navy', intcolor='gold')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

### 8.4.3 Elementi uniti

Avvia un nuovo programma e salvalo con il nome: `rota02_elementiuniti.py` e scrivi funzione `ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs)` che restituisce il corrispondente di un punto nella rotazione. Questa volta fa le linee di costruzione invisibili.

Quali sono gli elementi uniti di una rotazione?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

- In una trasformazione un elemento si dice unito se viene trasformato in se stesso.
- In una rotazione sono elementi uniti:
  - il punto . . . . . . . . . . . . . . .
  - le circonferenze . . . . . . . . . . . . . . .

### 8.4.4 Equazioni di alcune rotazioni

Avvia un nuovo programma e salvarlo con il nome: `rota03_equazioni.py`. Scrivi la solita funzione `ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs)`.

Nel programma principale crea:

- un piano interattivo;
- il centro di rotazione nell'origine degli assi;
- l'angolo di rotazione di 90°;
- un punto `P` e visualizza le sue coordinate;
- il punto `P'` e visualizza le sue coordinate;
- muovi il punto `P` in varie posizioni e completa la seguente tabella:

| punto P | punto P’ |
|---|---|
| P (-4; 3) | A’(. . . . . ; . . . . .) |
| P (1; -4) | B’(. . . . . ; . . . . .) |
| P (. . ; . . ) | C’(. . . . . ; . . . . .) |
| P (x; y) | P’(. . . . . ; . . . . .) |

Nella rotazione di 90° con centro nell’origine degli assi: l’ascissa del generico punto `P'` è . . . . . . . . . . . . . . . ; l’ordinata del generico punto `P'`, è . . . . . . . . . . . . . .

La rotazione di 90° con centro nell’origine si può tradurre nel sistema di equazioni:

$$\rho_{90}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

In modo analogo esplora le rotazioni di 180°, 270° e 360°.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Riassumendo**

➡ il programma per studiare le rotazioni di 90° può essere fatto così:

```
# Rotazioni: equazioni della rotazione

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# funzioni
def ruotapunto(punto, centro, angolo, **kargs):
    """Restituisce la rotazione di punto dati centro e angolo."""
    lato_0 = ig.Ray(centro, punto, visible=False)
    ang = ig.Angle(punto, centro, angolo)
    lato_1 = ang.side1(visible=False)
    circ = ig.Circle(centro, punto, visible=False)
    return ig.Intersection(circ, lato_1, 1, **kargs)

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo il centro e l'angolo di rotazione
centro = ig.Point(0, 0, width=6, name='O')
angolo = ig.Angle(ig.Point(-5, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 10, visible=False),
                  ig.Point(-10, 12, visible=False), name='alfa')
angolo.side0(width=1)
angolo.side1(width=1)

# Punto P e P' e le loro coordinate
p_0 = ig.Point(6, -1, width=6, name="P")
p_1 = ruotapunto(p_0, centro, angolo, width=6, name="P'")
ig.VarText(-7, -11, "P = {}", p_0.coords())
ig.VarText(-7, -12, "P' = {}", p_1.coords())
```

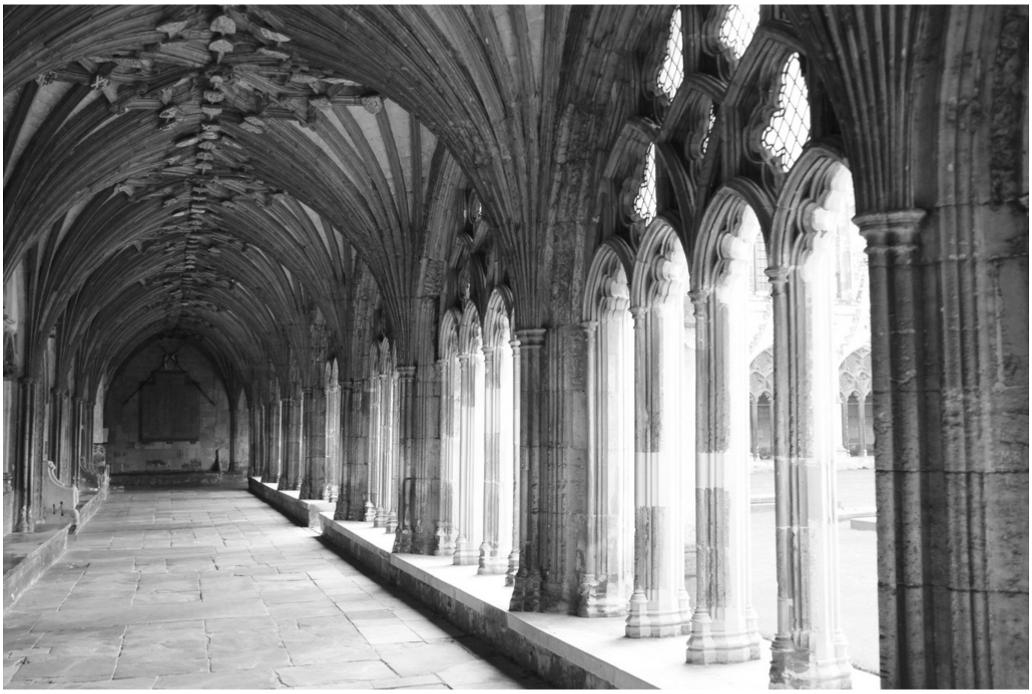
```
# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

- Certe rotazioni possono essere tradotte con un sistema di equazioni abbastanza semplice.
  - $\rho_{90}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{180}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{270}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$
  - $\rho_{360}\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$

**Prova tu**
Sul quaderno completa le seguenti frasi.

1. Una rotazione è
2. In una rotazione figure corrispondenti sono
3. In una rotazione:
   a) sono punti uniti
   b) sono circonferenze unite
4. Le equazioni di alcune rotazioni sono:

# Relazioni e funzioni III



"Canterbury Cathedral"
Foto di Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705/

# Disequazioni 9

## 9.1 Disuguaglianze chiuse e aperte

Consideriamo le seguenti proposizioni:

a) 5 è minore di 12;
b) $48 - 90$ è maggiore di 30;
c) il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero;
d) sommando ad un numero la sua metà si ottiene un numero minore o uguale a 1.

Esse possono essere tradotte in linguaggio matematico usando i simboli $>$ (maggiore), $<$ (minore), $\geqslant$ (maggiore o uguale), $\leqslant$ (minore o uguale) e precisamente:

a) $5 < 12$; b) $48 - 90 > 30$; c) $x^2 \geqslant 0$; d) $x + \frac{1}{2}x \leqslant 1$.

Le formule che contengono variabili si dicono aperte; quelle che contengono solo numeri si dicono chiuse. Quindi a) e b) sono formule chiuse; c) e d) sono formule aperte.

**Definizione 9.1.** Chiamiamo *disuguaglianza* una formula chiusa costruita con uno dei predicati: $<$ (essere minore); $>$ (essere maggiore); $\leqslant$ (essere minore o uguale); $\geqslant$ (essere maggiore o uguale).

Di essa sappiamo subito stabilire il valore di verità, quando è stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate.

**Definizione 9.2.** Chiamiamo *disequazione* una formula aperta, definita in $\mathbb{R}$ e costruita con uno dei seguenti predicati: $<$ (essere minore); $>$ (essere maggiore); $\leqslant$ (essere minore o uguale); $\geqslant$ (essere maggiore o uguale).

Analogamente a quanto detto per le equazioni, chiamiamo *incognite* le variabili che compaiono nella disequazione, *primo membro* e *secondo membro* le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza.

---

**Esempio 9.1.** Disuguaglianze vere e false.

a) in $\mathbb{N}$, la formula $5 > 0$ è una disuguaglianza: vera;
b) in $\mathbb{Z}$, la formula $-6 > -4$ è una disuguaglianza: falsa;
c) la formula $5x > 0$ è una disequazione; quando all'incognita sostituiamo un numero essa si trasforma in una disuguaglianza e solo allora possiamo stabilirne il valore di verità. Nel caso proposto è vera se sostituiamo alla variabile un qualunque numero positivo, falsa se sostituiamo zero o un numero negativo.

**Definizione 9.3.** Chiamiamo *soluzione* di una disequazione l'insieme dei valori che sostituiti all'incognita rendono vera la disuguaglianza.

Mentre le soluzioni di un'equazione determinata sono dei valori isolati, dei numeri, le soluzioni delle disequazioni sono degli intervalli di numeri. Ad esempio una disequazione può essere verificata per tutti i numeri positivi, oppure per tutti i numeri compresi tra $-5$ e $+4,72$.

I numeri li conosciamo bene, sappiamo come rappresentarli, gli intervalli un po' meno. Prima di affrontare il nuovo argomento, vediamo dunque come rappresentare gli intervalli.

## 9.2 Intervalli sulla retta reale

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: ogni numero reale ha per immagine un punto della retta e viceversa ogni punto della retta è immagine di un numero reale. Un intervallo di numeri può essere messo in corrispondenza con una semiretta o un segmento. Un segmento della retta è l'insieme di tutti i punti della retta compresi tra due punti detti estremi. Un intervallo numerico è l'insieme di tutti i numeri compresi tra due numeri detti estremi dell'intervallo. Ad esempio possiamo considerare tutti i numeri compresi tra $-7$ e $-2$.

❑ **Osservazione** Quando rappresentiamo un intervallo poniamo attenzione di scrivere prima il numero minore poi il maggiore.

"Tutti i numeri compresi tra $-7$ e $-2$" è una frase ambigua. È chiaro che: $-5;\ -4;\ -3;\dots,$ ma anche: $-5,2;\ -4,37;\ -2,001;\dots$ appartengono all'intervallo, ma cosa dire di $-7$ e di $-2$? A seconda dei gusti possiamo sostenere che gli estremi appartengono oppure no all'intervallo, non c'è una ragione logica per preferire una o l'altra interpretazione. Quindi i matematici parlano di due tipi di intervalli:

- Intervalli *chiusi*: quelli che comprendono anche gli estremi;
- Intervalli *aperti*: quelli che non comprendono gli estremi.

Possiamo distinguere gli intervalli anche in base ad un'altra caratteristica:

- Intervalli *limitati*: formati dai numeri compresi tra due numeri;
- Intervalli *illimitati*: formati dai numeri minori (o maggiori) di un dato numero.

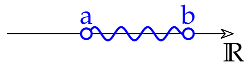
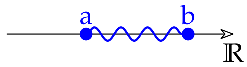
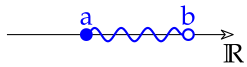
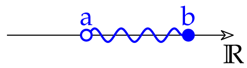
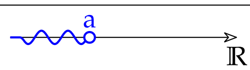
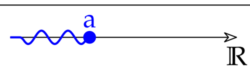
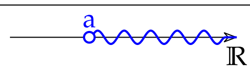
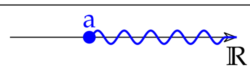
Possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 9.4.** Si chiama *intervallo* di un insieme ordinato, un sottoinsieme che contiene tutti gli elementi compresi tra due valori detti *estremi*. Questi valori possono appartenere oppure non appartenere all'intervallo.

La situazione non è semplice, perché in un intervallo potrebbe essere compreso un estremo e non l'altro quindi possiamo avere intervalli aperti/chiusi a destra o a sinistra. Non solo, ma un intervallo potrebbe avere un inizio e poi continuare all'infinito. Vediamo i vari casi possibili.

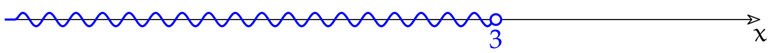
Per quanto riguarda gli intervalli di numeri reali, quelli che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti della retta, possiamo avere i casi presentati nella tabella: 9.1

TABELLA 9.1: Intervalli

| a parole | con i predicati | con le parentesi | sulla retta |
|---|---|---|---|
| i numeri compresi tra $a$ e $b$ estremi esclusi | $a < x < b$ | $(a;\ b)$ o $]a;\ b[$ |  |
| i numeri compresi tra $a$ e $b$ estremi inclusi | $a \leqslant x \leqslant b$ | $[a;\ b]$ |  |
| i numeri compresi tra $a$ e $b$, $a$ incluso, $b$ escluso | $a \leqslant x < b$ | $[a;\ b)$ o $[a;\ b[$ |  |
| i numeri compresi tra $a$ e $b$, $a$ escluso, $b$ incluso | $a < x \leqslant b$ | $(a;\ b]$ o $]a;\ b]$ |  |
| i numeri fino ad $a$, $a$ escluso | $x < a$ | $(-\infty;\ a)$ o $]-\infty;\ a[$ |  |
| i numeri fino ad $a$, $a$ incluso | $x \leqslant a$ | $(-\infty;\ a]$ o $]-\infty;\ a]$ |  |
| i numeri da $a$ in poi, $a$ escluso | $x > a$ o $a < x$ | $(a;\ -\infty)$ o $]a;\ -\infty[$ |  |
| i numeri da $a$ in poi, $a$ incluso | $x \geqslant a$ o $a \leqslant x$ | $[a;\ -\infty)$ o $[a;\ -\infty[$ |  |

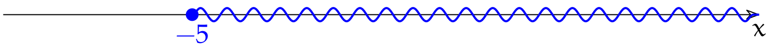
**Esempio 9.2.** $H = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$ intervallo illimitato inferiormente $H = ]-\infty;\ 3) = (-\infty;\ 3)$.

L'insieme $H$ è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il punto immagine del numero 3, esclusa l'origine della semiretta. Nella figura questi punti sono evidenziati e per mettere in evidenza che l'origine della semiretta non appartiene all'insieme abbiamo messo un pallino vuoto sul punto.



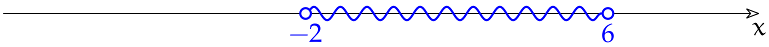
**Esempio 9.3.** $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant -5\}$ intervallo illimitato superiormente chiuso a sinistra $\mathbb{P} = [-5;\ +\infty[ = [-5;\ +\infty)$.

Segniamo sulla retta r il punto immagine di $-5$; l'insieme $\mathbb{P}$ è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono $-5$, compreso lo stesso $-5$. Nel disegno, la semiretta dei punti che appartengono a $\mathbb{P}$ è stata disegnata con una linea più spessa, per indicare che il punto $-5$ appartiene all'intervallo abbiamo messo un pallino pieno sul punto.



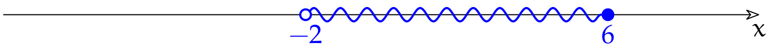

**Esempio 9.4.** $D = \{x \in \mathbb{R}/-2 < x < 6\}$ intervallo limitato aperto $D = ]-2;\ 6[ = (-2;\ 6)$.

Segniamo sulla retta reale i punti immagine degli estremi del segmento, $-2$ e $6$. L'insieme D è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti. Nel disegno il segmento è stato disegnato con una linea più spessa, i due estremi del segmento sono esclusi, pertanto su ciascuno di essi abbiamo messo un pallino vuoto.



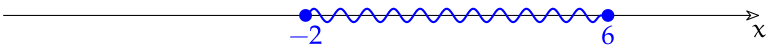

**Esempio 9.5.** $T = \{x \in \mathbb{R}/-2 < x \leqslant 6\}$ intervallo limitato chiuso a destra $T = ]-2;\ 6] = (-2;\ 6]$.

Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'insieme T è chiuso a destra, ossia è incluso nell'intervallo anche il 6, è escluso invece il punto $-2$.



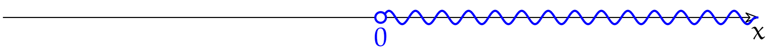

**Esempio 9.6.** $S = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leqslant x \leqslant 6\}$ intervallo chiuso e limitato $S = [2;\ 6]$.

Il segmento che rappresenta l'insieme S contiene tutti e due i suoi estremi:

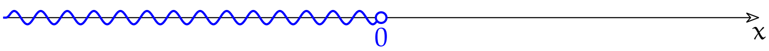



**Esempio 9.7.** Altri particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono:

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\} = ]0;\ \infty[$. Semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri positivi:




- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\} = ]-\infty;\ 0[$. Semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri reali negativi:




Il punto 0 non appartiene a nessuna delle due semirette; il numero zero non appartiene né a $\mathbb{R}^+$ né a $\mathbb{R}^-$: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

- $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant 0\} = [0;\ \infty[$;
- $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R}/x \leqslant 0\} = ]-\infty;\ 0]$.

## 9.3 Segno di un binomio di primo grado

Prima di affrontare lo studio delle disequazioni è importante capire come studiare il segno di un'espressione contenente una variabile. In questo modo, le disequazioni si ridurranno ad una applicazione dello studio del segno. Studiare il segno di un'espressione che contiene la variabile $x$, vuol dire stabilire per quali valori della variabile l'espressione è positiva e per quali valori è negativa. Come esempio possiamo studiare i valori che assumono i due binomi $f(x) = -4x + 4$ e $g(x) = 3x + 6$ al variare di $x$:

TABELLA 9.2: Valori di un polinomio

| $x$ | $f(x) = -4x + 4$ | $g(x) = 3x + 6$ |
|---|---|---|
| -4 | 20 | -6 |
| -3 | 16 | -3 |
| -2 | 12 | 0 |
| -1 | 8 | 3 |
| 0 | 4 | 6 |
| 1 | 0 | 9 |
| 2 | -4 | 12 |
| 3 | -8 | 15 |
| 4 | -12 | 18 |
| 5 | -16 | 21 |

Si può osservare che il primo binomio è sempre positivo finché $x$ è più piccolo di 1, quando $x$ vale proprio 1 il binomio vale 0, quando $x$ è maggiore di 1 il binomio assume un valore negativo. Il secondo binomio ha un comportamento diverso. Finché $x$ si mantiene minore di $-2$ è negativo, quando $x$ vale $-2$ il binomio vale 0, quando $x$ supera il valore $-2$ il binomio diventa positivo.

In realtà noi abbiamo verificato solo un piccolissimo insieme di valori, ma l'andamento regolare dei risultati dovrebbe convincerci che i segni rimangono immutati anche per valori molto diversi da quelli testati.

Il grafico della funzione $y = f(x)$, dove $f(x)$ è il polinomio, è una retta. In corrispondenza dei valori positivi del polinomio, la retta si trova al di sopra dell'asse $x$ (tratto blu), quando invece il polinomio assume valori negativi, la retta si trova sotto all'asse $x$ (tratto rosso).

Così i due polinomi possono essere associati alle funzioni: $f(x) = -4x + 4$ e $g(x) = \frac{3}{2}x + 3$ che hanno le seguenti rappresentazioni nel piano cartesiano:

Disegnare una retta nel piano cartesiano è un'abilità molto utile da possedere, ma per il nostro problema si può tracciare il grafico in modo molto approssimato: sono due gli aspetti che dobbiamo riportare nel grafico:

- lo zero del polinomio, cioè il punto in cui la retta interseca l'asse $x$;
- la pendenza della retta: cioè se la retta è crescente o decrescente.

Si capisce facilmente se la retta è crescente o decrescente guardando la sua equazione infatti le rette *crescenti* hanno il coefficiente della $x$ *positivo*, mentre le rette *decrescenti* hanno il coefficiente della $x$ *negativo*. Quindi i grafici possono essere tracciati semplicemente in questo modo:

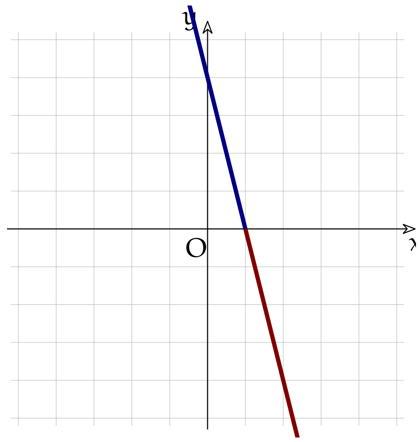



FIGURA 9.1: Retta $f(x) = -4x + 4$

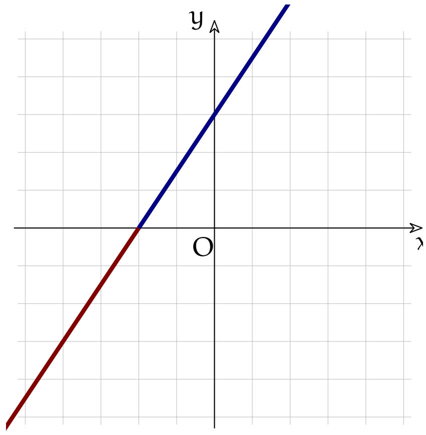



FIGURA 9.2: Retta $g(x) = \frac{3}{2}x + 3$

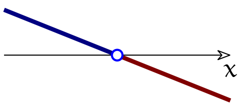



FIGURA 9.3: Retta $f(x) = -4x + 4$

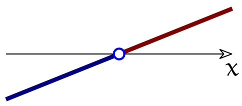



FIGURA 9.4: Retta $g(x) = \frac{3}{2}x + 3$

Su questi ultimi grafici si possono aggiungere le informazioni che interessano lo studio del segno:

- il valore della $x$ che rende uguale a 0 il polinomio;
- l'intervallo dell'asse $x$ per il quale il polinomio è positivo;
- l'intervallo dell'asse $x$ per il quale il polinomio è negativo.

Riassumendo, per studiare il segno di un binomio di primo grado dobbiamo:

**Procedura 9.1.** *Studio del segno di un binomio di primo grado:*

a ) *calcolare lo zero del polinomio risolvendo un'equazione associata al polinomio;*
b ) *disegnare il grafico della funzione associata al polinomio, tenendo conto se la retta è crescente o decrescente.*
c ) *riportare su questo grafico lo zero del polinomio e segnare con un "+" i tratti positivi (quelli sopra l'asse delle $x$) e con un "-" i tratti negativi (quelli nei quali la retta è tracciata sotto l'asse delle $x$).*

Sempre riferendoci agli esempi precedenti:

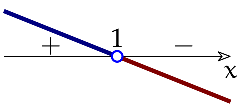



FIGURA 9.5: Segno di $f(x) = -4x + 4$

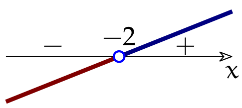
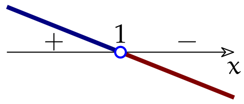



FIGURA 9.6: Segno di $g(x) = \frac{3}{2}x + 3$

Riassumendo, lo studio del segno del binomio di primo grado: $-4x+4$, si riduce a svolgere questi due passi:

1. Equazione Associata: $-4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$
2. Funzione Associata: $y=-4x+4 \quad \rightarrow$ 


## 9.4 Segno di un prodotto

Imparato come studiare il segno di un binomio di primo grado possiamo incominciare a complicare le cose... Se dobbiamo studiare il segno di un trinomio di secondo grado, possiamo seguire un procedimento formato da questi 3 passi:

**Procedura 9.2.** *Studio del segno del prodotto di polinomi di primo grado:*

*a ) scomporre in fattori il polinomio;*
*b ) studiare il segno di ogni singolo fattore;*
*c ) applicare la regola dei segni.*

Per quanto riguarda i primi due punti seguiamo le indicazioni precedenti, il terzo lo si risolve con un grafo in cui riportiamo tre assi, due per i segni dei fattori e uno per il segno del prodotto.

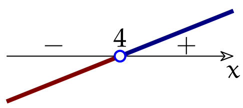
Costruiamo una tabella con tanti assi $x$ quanti sono i fattori, tante linee verticali quanti sono i diversi zeri dei polinomi calcolati. Intestiamo ogni riga verticale con il valore di uno zero del polinomio stando ben attenti di riportarli in ordine crescente e intestiamo ogni spazio orizzontale con l'indicazione del fattore di cui vogliamo riportare il segno. Tracciamo un tondino in corrispondenza degli zeri dei polinomi e riportiamo i segni già studiati precedentemente. Sopra al terzo asse $x$ riportiamo il segno del prodotto ottenuto seguendo la solita regola: un prodotto è positivo se i fattori negativi sono in numero pari ( $0, 2, \dots$ ), è negativo se i fattori negativi sono in numero dispari, è nullo se almeno un fattore è nullo.

---

**Esempio 9.8.** Applichiamo questo procedimento allo studio del segno del prodotto: $(x-4)(x+2)$

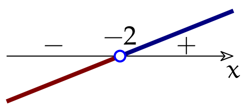
- Studio del segno del primo fattore $F_1$:

  E.A.: $x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=4$

  F.A.: $y=x-4 \quad \rightarrow$ 


- Studio del segno del secondo fattore $F_2$:

  E.A.: $x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

  F.A.: $y=x+2 \quad \rightarrow$ 

- Grafo dei segni:

| | | $-2$ | | $+4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x-4)(x+2)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Possiamo concludere che il prodotto $(x-4)(x+2)$ è:

- positivo per $x < -2$ o per $x > +4$
- nullo per $x = -2$ o per $x = +4$
- negativo per $x > -2$ e $x < +4$

## 9.5 Segno di un quoziente

Dato che la regola del segno del prodotto è uguale alla regola del segno del quoziente si può utilizzare un metodo simile a quello presentato sopra anche per studiare il segno di quozienti di polinomi.

C'è un'unica *piccola* differenza: perché si possa calcolare una frazione, il suo denominatore deve essere diverso da zero. Quindi gli zeri del denominatore sono dei valori di $x$ che non possiamo mai accettare. Per ricordarci di questo, nel grafo dei segni, li indichiamo con una crocetta invece che con un cerchietto.

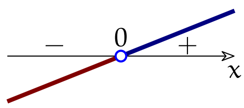
**Esempio 9.9.** Applichiamo questo procedimento allo studio del segno della frazione:

$$\frac{x(1-2x)(1+2x)}{(x-2)(x+5)}$$

Chiamiamo: $N_1$, $N_2$ e $N_3$ i fattori che si trovano al numeratore e: $D_1$ e $D_2$ i fattori che si trovano al denominatore.

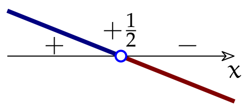
- Studio del segno del fattore $N_1$:

  E.A.: $x = 0 \Rightarrow x = 0$;

  F.A.: $y = x \quad \to$ 


- Studio del segno del fattore $N_2$:

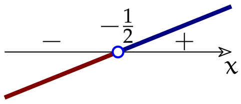
  E.A.: $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$;

  F.A.: $y = -2x + 1 \quad \to$ 

- Studio del segno del fattore $N_3$:

  E.A.: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$;

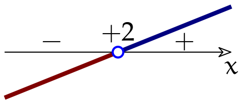
  F.A.: $y=2x+1 \quad \rightarrow$




- Studio del segno del fattore $D_1$:

  E.A.: $x-2=0 \Rightarrow x=2$;

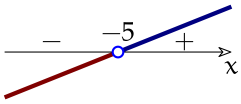
  F.A.: $y=x-2 \quad \rightarrow$




- Studio del segno del fattore $D_2$:

  E.A.: $x+5=0 \Rightarrow x=-5$;

  F.A.: $y=x+5 \quad \rightarrow$




- Applichiamo la regola dei segni ricordandoci di segnare con una "X" gli zeri del denominatore:

| | | $-5$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | − | | − | | − | 0 | + | | + | | + |
| $-2x+1$ | + | | + | | + | | + | 0 | − | | − |
| $2x+1$ | − | | − | 0 | + | | + | | + | | + |
| $x-2$ | − | × | + | | + | | + | | + | | + |
| $x+5$ | − | | − | | − | | − | | − | × | + |
| $f(x)$ | + | × | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | × | − |

---

Possiamo concludere che la frazione $\frac{x(1-2x)(1+2x)}{(x-2)(x+5)}$ è:

- positiva per tutti i valori di $x$ minori di $-5$;
- non definita per $x=-5$;
- negativa per tutti i valori di $x$ compresi tra $-5$ e $-\frac{1}{2}$;
- zero per $x=-\frac{1}{2}$;
- positiva per tutti i valori di $x$ compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $0$;
- zero per $x=0$;
- negativa per tutti i valori di $x$ compresi tra $0$ e $\frac{1}{2}$;
- zero per $x=\frac{1}{2}$;
- positiva per tutti i valori di $x$ compresi tra $\frac{1}{2}$ e $2$;

- non definita per $x = 2$;
- negativa per tutti i valori di $x$ maggiori di 2.

O in simboli:
$x \in \mathbb{R} - \{-5;\ 2\}$ (insieme di esistenza)

$$\begin{array}{lcccccccc}
f(x) & > & 0 & \Leftrightarrow & x < -5 & \vee & -\frac{1}{2} < x < 0 & \vee & \frac{1}{2} < x < 2 \\
f(x) & = & 0 & \Leftrightarrow & x = -\frac{1}{2} & \vee & x = 0 & \vee & x = \frac{1}{2} \\
f(x) & < & 0 & \Leftrightarrow & -5 < x < -\frac{1}{2} & \vee & 0 < x < \frac{1}{2} & \vee & x > 2
\end{array}$$

## 9.6 Disequazioni numeriche

### 9.6.1 Principi di equivalenza delle disequazioni

Per lavorare sulle disequazioni si ricorre a due principi, che derivano direttamente dalle proprietà delle disuguaglianze.
Stabiliamo innanzitutto la seguente definizione:

**Definizione 9.5.** Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Stabilito questo, possiamo formulare due principi di equivalenza simili a quelli validi per le equazioni

**Principio 9.3** (I principio)**.** *Addizionando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione una stessa espressione (definita per qualunque valore attribuito all'incognita), si ottiene una disequazione equivalente alla data.*

Regola pratica: questo principio ci permette di "spostare" un addendo da un membro all'altro cambiandogli segno o di "eliminare" da entrambi i membri gli addendi uguali.

**Principio 9.4** (II principio)**.** *Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per una stessa espressione definita e positiva, si ottiene una disequazione equivalente alla data. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per una stessa espressione definita e negativa, e cambiando il verso della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente alla data.*

Ora si può osservare che il primo principio è semplice e esattamente uguale a quello delle equazioni, il secondo invece è insidioso... Per fortuna per risolvere le disequazioni basta usare il primo ed al massimo la prima parte del secondo.

---

**Esempio 9.10.** Consideriamo la disequazione: $3x + 2 > 5x - 4$.

- sommiamo ad entrambi i membri l'espressione: $-5x + 4$
- la disequazione di partenza è diventata: $-2x + 6 > 0$ e il primo principio ci assicura che le soluzioni di questa disequazione sono tutte e sole le soluzioni della disequazione di partenza.

---

Chiamiamo disequazione scritta in forma *normale* (o *canonica*) la disequazione trasformata in modo da avere il secondo membro uguale a zero.

### 9.6.2 Soluzione di una disequazione lineare

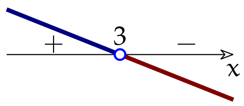
Usando il primo principio si può sempre scrivere una qualunque disequazione lineare in forma normale. A questo punto è facile studiare il segno del polinomio che si trova a primo membro e quindi risolvere la disequazione.

---

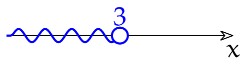
**Esempio 9.11.** Riprendiamo la disequazione precedente: $-2x+6>0$.

- Studio del segno del polinomio:

  E.A.: $-2x+6=0 \Rightarrow x=3$;

  F.A.: $y=-2x+6 \rightarrow$ 


- Quindi i valori di $x$ che rendono positivo il binomio sono quelli che si trovano a sinistra di 3 cioè quelli minori di 3.

  rappresentazione grafica: 


  rappresentazione con i predicati: $x<3$;

  rappresentazione con le parentesi: $]-\infty;3[$.

---

Riassumendo:

**Procedura 9.5.** *Per risolvere una disequazione:*

*a ) scrivere la disequazione in forma normale;*
*b ) studiare il segno dell'espressione a sinistra del predicato;*
*c ) rappresentare, con i diversi metodi visti, gli intervalli che risolvono la disequazione.*

### 9.6.3 Un caso particolare

A volte nel risolvere una disequazione ci imbattiamo in un'equazione associata impossibile. La prima reazione istintiva è quella di pensare che se l'E.A. è impossibile lo sarà anche la disequazione, ma non è così! Se l'E.A. è impossibile ciò significa che la retta non interseca l'asse $x$, cioè è parallela all'asse $x$. In questo caso tutti i valori della funzione staranno dalla stessa parte dell'asse cioè saranno tutti positivi o tutti negativi. Vediamo qualche esempio.

---

**Esempio 9.12.** $\frac{1}{2}(x+5)-x>\frac{1}{2}(3-x)$. Il mcm è 2, positivo; moltiplichiamo ambo i membri per 2; svolgiamo i calcoli:

$$2\left[\frac{1}{2}(x+5)-x\right]>2\left[\frac{1}{2}(3-x)\right] \Rightarrow x+5-2x>3-x \Rightarrow -x+5>3-x.$$

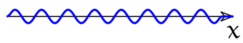
La forma canonica è $0x+2>0$ che si riduce alla disuguaglianza $0>-2$ vera per qualunque $x$ reale: $\mathrm{I.S.}=\mathbb{R}$.

- Studio del segno del polinomio:

  E.A.: $0x + 2 = 0 \Rightarrow$ equazione impossibile;

  F.A.: $y = 0x + 2 \rightarrow$ 


- Quindi per ogni valore di $x$ il polinomio è sempre positivo.

  rappresentazione grafica: 


  rappresentazione con i predicati: $\mathbb{R}$;

  rappresentazione con le parentesi: $]-\infty; +\infty[$.

**Esempio 9.13.** $(x+2)^2 - 4(x+1) < x^2 - 1$. Svolgiamo i calcoli ed eliminiamo i monomi simili:

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 < x^2 - 1 \Rightarrow \ 0x + 1 < 0,$$

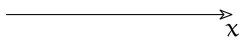
che è la disuguaglianza $0 < -1$ falsa per qualunque $x$ reale: $\text{I. S.} = \emptyset$.

- Studio del segno del polinomio:

  E.A.: $0x + 1 = 0 \Rightarrow$ equazione impossibile;

  F.A.: $y = 0x + 1 \rightarrow$ 


- Quindi per ogni valore di $x$ il polinomio è sempre positivo. Ma a noi servono i valori di $x$ che rendono il polinomio negativo quindi…

  rappresentazione grafica: 


  rappresentazione con i simboli: $\emptyset$.

---

### 9.6.4 Soluzione di una disequazione fratta

Possiamo risolvere le disequazioni fratte utilizzando ciò che abbiamo imparato sullo studio del segno di una frazione.

**Procedura 9.6.** *Per risolvere una disequazione fratta:*

*a ) spostare tutti i termini a primo membro e sommarli in modo da ottenere una sola frazione e a secondo membro solo lo zero;*
*b ) studiare il segno della frazione;*
*c ) rappresentare, con i diversi metodi visti, gli intervalli che risolvono la disequazione.*

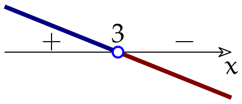
---

**Esempio 9.14.** Riferendoci all'esercizio precedente: $\frac{-3x+4}{x+2} \leqslant -1$.

- scrivere l'equazione in forma normale: $\frac{-3x+4}{x+2} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{-3x+4}{x+2} + 1 \leqslant 0$
  $\frac{-3x+4+x+2}{x+2} \leqslant 0 \rightarrow \frac{-2x+6}{x+2} \leqslant 0$

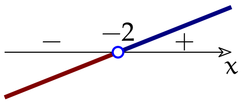
- Segno del numeratore:

  E.A.: $-2x+6=0 \Rightarrow x=3$;

  F.A.: $y=-2x+6 \rightarrow$ 
  

- Segno del denominatore:

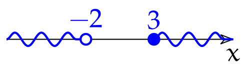
  E.A.: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$;

  F.A.: $y=x+2 \rightarrow$ 
  

- Con la regola dei segni calcolo il segno della frazione

| | | $-2$ | | $+3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+4$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $x$ |
| $x+2$ | $-$ | $\times$ | $+$ | | $+$ | $x$ |
| $f(x)$ | $-$ | $\times$ | $+$ | $0$ | $-$ | $x$ |

- Quindi i valori di $x$ che rendono vera la disequazione, cioè i valori che rendono $f(x)$ negativo, sono quelli che si trovano a sinistra di $-2$ oppure che si trovano a destra di $+3$.

  rappresentazione grafica: 
  

  rappresentazione con i predicati: $x<-2 \vee x \geqslant 3$;

  rappresentazione con le parentesi: $]-\infty;-2[\quad\cup\quad]3;\infty[$.

---

❑ **Osservazione** Per comodità (o per pigrizia), d'ora in poi riuniremo in un unico grafo lo studio dei segni e la rappresentazione grafica della soluzione:

| | | $-2$ | | $+3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+4$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $x$ |
| $x+2$ | $-$ | $\times$ | $+$ | | $+$ | $x$ |
| $f(x)$ | $-$ | $\times$ | $+$ | $0$ | $-$ | $x$ |

Stiamo ben attenti ai simboli che stiamo utilizzando:
○ sta per: *zero accettabile*
× sta per: *zero non accettabile*
∘ sta per: *estremo escluso*
• sta per: *estremo incluso*

In particolare stiamo attenti a non confondere il primo segno con il terzo che, pur assomigliandosi, hanno significato completamente diverso.

### 9.6.5 Sistema di disequazioni

In alcune situazioni occorre risolvere contemporaneamente più disequazioni. Vediamo un problema.

**Problema 9.15.** Il doppio di un numero reale positivo diminuito di 1 non supera la sua metà aumentata di 2. Qual è il numero?

Incognita del problema è il numero reale che indichiamo con $x$. Di esso sappiamo che deve essere positivo, quindi $x > 0$ e che deve verificare la condizione $2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 2$

Le due disequazioni devono verificarsi contemporaneamente quindi il problema può essere formalizzato con un *sistema di disequazioni*:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$$

Scriviamo in forma normale anche la seconda disequazione e risolviamola:

$d_2 : 4x - 2 \leqslant x + 4 \quad \Rightarrow \quad 3x - 6 \leqslant 0$

Possiamo vedere che la soluzione dell'E.A. è 2 il grafico della F.A. è una retta crescente quindi la soluzione è l'insieme di numeri minori o uguali a 2.

Dobbiamo ora determinare $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2$ che è l'insieme dei numeri positivi minori di 2.

---

**Esempio 9.16.** *Risolvere un sistema di disequazioni* significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle due disequazioni, cioè che le verificano entrambe.

La soluzione di un sistema di disequazioni è l'insieme dei valori della variabile $x$ per i quali sono verificate tutte le disequazioni. La soluzione di un sistema è l'intersezione tra le soluzioni di tutte le disequazioni.

Se indichiamo con $\mathrm{I.S.}_1$ e $\mathrm{I.S.}_2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato dall'intersezione $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2$.

Quindi per risolvere un sistema di disequazioni prima si risolvono una alla volta tutte le disequazioni che lo compongono, poi si opera l'intersezione tra tutte le soluzioni. Iniziamo con un esempio semplice:

Risolviamo il seguente sistema:

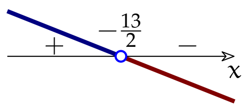
$$\begin{cases} 2(x - 5) \leqslant 3 + 4x \\ 6x - 4 < -3x - 2 \end{cases}$$

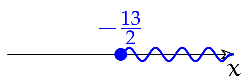
➡ Per prima cosa scriviamo il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} 2x - 10 - 3 - 4x \leqslant 0 \\ 6x - 4 + 3x + 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x - 13 \leqslant 0 & (1) \\ 9x - 2 < 0 & (2) \end{cases}$$

➡ Soluzione della prima disequazione:

E.A.: $-2x - 13 = 0 \Rightarrow x = -\frac{13}{2}$;

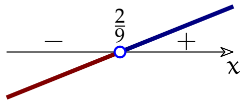
F.A.: $y = -2x - 13 \rightarrow$ 


Soluzione di: $-2x - 13 \leqslant 0$ 

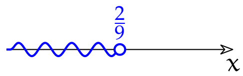
- Soluzione della seconda disequazione:

  E.A.: $9x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$;

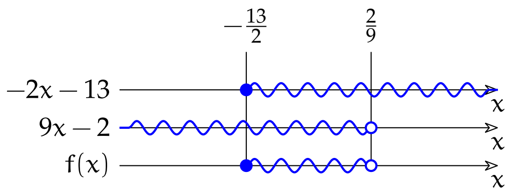
  F.A.: $y = 9x - 2 \rightarrow$




  Soluzione di: $9x - 2 < 0$




- A questo punto dobbiamo solo eseguire l'intersezione tra i due intervalli che rappresentano le soluzioni delle due disequazioni, per farlo possiamo utilizzare uno schema nel quale riportiamo i due assi con le due soluzioni più un terzo nel quale evidenziamo gli intervalli che sono comuni ai due precedenti:




- rappresentazione con i predicati: $-\frac{13}{2} \leqslant x < \frac{2}{9}$;
- rappresentazione con le parentesi: $\left[-\frac{13}{2};\ \frac{2}{9}\right[$.

---

❑ **Osservazione** Consideriamo questo schema e quello usato nello studio del segno del prodotto, pur essendo formati entrambi da assi orizzontali e da linee verticali i due schemi sono completamente diversi: nel primo riportiamo dei segni ed eseguiamo il prodotto di segni, nel secondo riportiamo degli intervalli e eseguiamo l'intersezione tra insiemi.

### 9.6.6 Soluzione di una disequazione letterale

Qualunque sia una disequazione letterale di primo grado nella variabile $x$ può sempre essere scritta, utilizzando il primo principio di equivalenza e un po' di calcoli, come:
$Ax + B > 0$
Alcune osservazioni sulla formula precedente:

- il predicato può essere uno di questi: $>$, $<$, $\leqslant$, $\geqslant$.
- A e B sono espressioni letterali contenenti cioè dei parametri.

Partiamo da un esempio e cerchiamo di seguire il metodo già usato:
$k\,(x-1) \leqslant k\,(k-x) + x$
Innanzitutto la scriviamo in forma normale:
$kx - k \leqslant k^2 - kx + x$
$kx - k - k^2 + kx - x \leqslant 0$
$2kx - x - k^2 - k \leqslant 0$
$(2k-1)\,x - k^2 - k \leqslant 0$

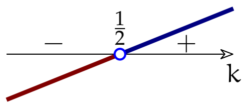
A questo punto si può vedere che il metodo utilizzato fin qui non può più essere seguito pedissequamente; infatti se non conosciamo il valore di $k$, non possiamo dire se il coefficiente della $x$ è negativo, nullo o positivo.

- se $2k-1$ è minore di zero la funzione associata è decrescente;
- se $2k-1$ è uguale a zero, l'equazione associata non ha soluzione;
- se $2k-1$ è maggiore di zero la funzione associata è crescente.

Ma il valore dell'espressione $2k-1$ dipende dal valore del parametro $k$.

Quindi dobbiamo sospendere la soluzione della disequazione iniziale per dedicarci allo studio del segno del coefficiente della $x$.

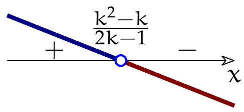
Applicando la solita tecnica otteniamo:

- Equazione Associata: $2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$
- Funzione Associata: $y=2k-1 \rightarrow$ 


Ora possiamo studiare i 3 casi che si ottengono a seconda che il parametro $k$ renda il coefficiente della $x$ negativo, uguale a zero o positivo:

1. Se $k<\frac{1}{2} \Rightarrow 2k-1<0$

   E.A.: $(2k-1)x-k^2-k=0 \Rightarrow x=\frac{k^2-k}{2k-1}$

   F.A.: $y=(2k-1)x-k^2-k \rightarrow$ 

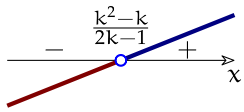

2. Se $k=\frac{1}{2} \Rightarrow 0x-\frac{3}{4}\leqslant 0$

   E.A.: $0x-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow$ "Impossibile"

   F.A.: $y=(2k-1)x-k^2-k \rightarrow$ 


3. Se $k>\frac{1}{2} \Rightarrow 2k-1>0$

   E.A.: $(2k-1)x-k^2-k=0 \rightarrow x=\frac{k^2-k}{2k-1}$

   F.A.: $y=(2k-1)x-k^2-k \rightarrow$ 


La soluzione della disequazione letterale è:

- Se $k<\frac{1}{2} \rightarrow x\leqslant\frac{k^2-k}{2k-1}$
- Se $k=\frac{1}{2} \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

➡ Se $k > \frac{1}{2} \to x \geqslant \frac{k^2-k}{2k-1}$

Riassumendo possiamo seguire questo metodo:

**Procedura 9.7.** *Per risolvere una disequazione letterale:*

*a ) scrivere la disequazione in forma normale;*
*b ) studiare il segno del coefficiente della $x$;*
*c ) risolvere le tre disequazioni che si ottengono a seconda il segno precedente sia minore, uguale o maggiore di zero.*

### 9.6.7 Problemi con le disequazioni

**Problema 9.17** (Tariffe telefoniche)**.** Sto analizzando due proposte di compagnie telefoniche per poi stipulare il contratto più conveniente per le mie esigenze. La compagnia $T_1$ prevede una spesa fissa di 5 centesimi di scatto alla risposta da sommare alla spesa di 1 centesimo per ogni minuto di telefonata. La compagnia $T_2$ non prevede spesa per lo scatto alla risposta, ma per ogni minuto di telefonata la spesa è di 2 centesimi. Dopo quanti minuti di telefonata la seconda tariffa è più conveniente della prima?

*Soluzione* Indichiamo con $x$ la durata in minuti di una telefonata e con $t_1$ e $t_2$ rispettivamente la spesa con la prima e la seconda compagnia:

$$t_1 = (5 + 1 \cdot x) \text{ centesimi}; \quad t_2 = (2 \cdot x) \text{ centesimi}.$$

La $t_2$ sarà più conveniente di $t_1$ se $2 \cdot x < 5 + x$.

Il problema è formalizzato con una disequazione nell'incognita $x$, di primo grado. Dobbiamo trovare l'I. S..

Risolvendo la disequazione si ottiene: $2 \cdot x - x < 5 \Rightarrow x < 5\text{min}$.

Conclusione: se le mie telefonate durano meno di 5 minuti allora mi conviene il contratto con $T_2$, altrimenti se faccio telefonate più lunghe di 5 minuti mi conviene $T_1$. Le due tariffe sono uguali se la telefonata dura esattamente 5 minuti.

♦

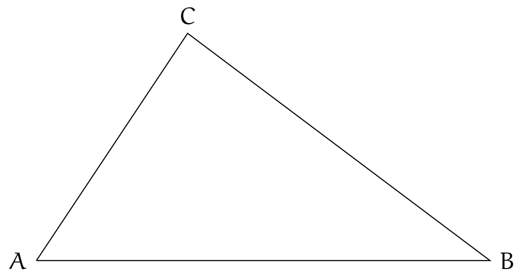
**Problema 9.18** (L'abbonamento)**.** Su un tragitto ferroviario, il biglietto costa 8,25 euro. L'abbonamento mensile costa 67,30 euro. Qual è il numero minimo di viaggi che occorre effettuare in un mese perché l'abbonamento sia più conveniente?

*Soluzione* Indichiamo con $x$ il numero di viaggi. Il costo del biglietto di $x$ viaggi è $8,25 \cdot x$. L'abbonamento è più conveniente quando $8,25 \cdot x > 67,30$ da cui $x > \frac{67,30}{8,25}$ e quindi $x > 8,16$. In conclusione se si fanno 8 viaggi in un mese conviene acquistare i biglietti singoli, da 9 viaggi in poi conviene l'abbonamento.

♦

**Problema 9.19.** In un triangolo il lato maggiore misura 13m, gli altri due lati differiscono tra di loro di 2m. Come si deve scegliere il lato minore affinché il perimetro non superi i 100m?

*Dati*: $\overline{AB} = 13$m, $\overline{BC} - \overline{AC} = 2$m. Riferendoci alla figura, $AC$ è il lato minore; indichiamo con $x$ la sua misura.




*Obiettivo*: determinare $x$ in modo che $2p \leqslant 100$.

*Soluzione* $\overline{AC} = x; \overline{BC} = 2 + x; \overline{AB} = 13$ con $x > 0$.

L'obiettivo in linguaggio matematico si scrive: $x + (2 + x) + 13 \leqslant 100$.

Per la "disuguaglianza triangolare" si deve avere $13 < x + (2 + x)$. Il problema è formalizzato dal sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + (x + 2) + 13 \leqslant 100 \\ 13 < x + (x + 2) \end{cases},$$

Risolvendo ciascuna disequazione si ottiene

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant \dfrac{85}{2} \\ x > \dfrac{11}{2} \end{cases}.$$

A questo punto basta risolvere il sistema di disequazioni.

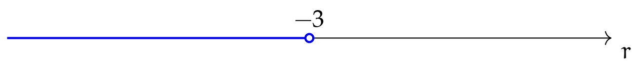
♦

## 9.7 Esercizi

### 9.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

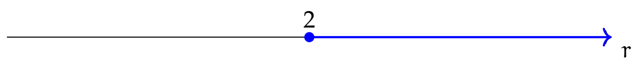
#### 9.2 Intervalli sulla retta reale

**9.1.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.




A $x < -3$ B $x > -3$ C $x \leqslant -3$ D $x \leqslant -3$

**9.2.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.




A $x < 2$ B $x > 2$ C $x \geqslant 2$ D $x \leqslant 2$

**9.3.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.


A $x < +2$ B $x > -2$ C $-2 \leqslant x \leqslant 2$ D $-2 < x < 2$

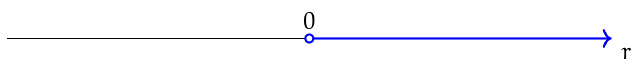
**9.4.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.


A $x < 5; x > 3$ B $3 > x \geqslant 5$ C $3 \leqslant x < 5$ D $3 < x \leqslant 5$

**9.5.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.


A $\mathbb{R}^- - \{-1\}$ B $-1 \geqslant x \geqslant 0$ C $-1 \leqslant x \leqslant 0$ D $0 < x < -1$

**9.6.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.




A $x > 0$ B $x > -\infty$ C $x \leqslant 0$ D $0 < x \leqslant 0$

**9.7.** Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.


A $x \geqslant 1; x < 2$ B $1 \leqslant x < 2$ C $x \leqslant 1$ e $x > 2$ D $2 \geqslant 1$

## 9.6 Disequazioni numeriche

**9.8.** Completa la seguente tabella indicando con una crocetta il tipo di disuguaglianza o disequazione:

| Proposizione | Disuguaglianza Vera | Disuguaglianza Falsa | Disequazione |
|---|---|---|---|
| Il doppio di un numero reale è minore del suo triplo aumentato di 1: | | | |
| La somma del quadrato di 4 con 3 è maggiore della somma del quadrato di 3 con 4: | | | |
| Il quadrato della somma di 4 con 3 è minore o uguale a 49: | | | |
| In $\mathbb{Z}: (5+8)-(2)^4 > 0$: | | | |
| $-x^2 > 0$: | | | |
| $(x+6)^2 \cdot (1-9) \cdot (x+3-9) < 0$: | | | |

**9.9.** Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni.

a) $x-2>0$;
b) $x+5>0$;
c) $x-4>0$;
d) $x-5 \geqslant 0$;
e) $x+3 \leqslant 0$;
f) $x>0$;
g) $x \geqslant 0$;
h) $-1 \leqslant x$;
i) $3>x$.

**9.10 (*).** Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $3-x>x$;
b) $2x>3$;
c) $3x \leqslant 4$;
d) $5x \geqslant -4$;
e) $x^2+x^4+10>0$;
f) $x^2+x^4+100<0$;
g) $-x+3>0$;
h) $-x-3 \leqslant 0$.

**9.11 (*).** Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $3+2x \geqslant 3x+2$;
b) $5x-4 \geqslant 6x-4$;
c) $-3x+2 \geqslant -x-8$;
d) $4x+4 \geqslant 2(2x+8)$;
e) $4x+4 \geqslant 2(2x+1)$;
f) $4x+4 \geqslant 2(2x+2)$;
g) $4x+4<2(2x+3)$;
h) $4x+4>2(2x+2)$.

**9.12 (*).** Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $4x+4<2(2x+2)$;
b) $x^2+4>3$;
c) $x^2+3<-1$;
d) $-3x-8 \geqslant 2$;
e) $-3x>0$;
f) $-3x \leqslant 0$;
g) $-3x+5 \geqslant 0$;
h) $-3x-8 \geqslant 0$.

**9.13** (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a ) $4x + 4 \geqslant 3\left(x + \frac{4}{3}\right)$;
b ) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant 1$;
c ) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant 0$;
d ) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant \dfrac{2}{3}$;
e ) $-\dfrac{2}{3}x \leqslant \dfrac{1}{9}$;
f ) $-\dfrac{2}{3}x \leqslant 9$;
g ) $\dfrac{x+5}{2} > -\dfrac{1}{5}$;
h ) $x^2 + 1 \geqslant \dfrac{x^2 + 4x - 1}{2} + 3x$.

**9.14** (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a ) $x + \dfrac{1}{2} < \dfrac{(x+3)}{3} - 1$;
b ) $\dfrac{(x+5)}{3} + 3 + 2\dfrac{(x-1)}{3} \leqslant x + 4$;
c ) $(x+3)^2 \geqslant (x-2)(x+2)$;
d ) $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4} < 5\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}\right)$;
e ) $1 - (2x-4)^2 > -x \cdot (4x+1) + 2$;
f ) $(x+1)^2 \geqslant (x-1)^2$;
g ) $\dfrac{3}{2} \cdot (x+1) - \dfrac{1}{3} \cdot (1-x) < x + 2$;
h ) $\dfrac{x + 0,25}{2} < 1,75 + 0,25x$.

**9.15** (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a ) $\dfrac{1}{2}\left(3x - \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3}(1+x)(1-x) + 3\left(\dfrac{1}{3}x - 1\right)^2 \geqslant 0$;
b ) $3\dfrac{(x+1)}{2} - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{1}{9} > -5x + \dfrac{1}{2}$;
c ) $\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) + x - \dfrac{1}{2} > x\dfrac{(x-1)}{4} + \dfrac{5x-6}{4}$;
d ) $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{1}{3}\right) > \dfrac{x - \frac{1}{2}}{3} + \dfrac{x - \frac{1}{3}}{2}$.

**9.16** (*). Sommando un numero con il doppio del suo successivo si deve ottenere un numero maggiore di 17. Quali numeri verificano questa condizione?

**9.17** (*). Sommando due numeri pari consecutivi si deve ottenere un numero che non supera la metà del numero più grande. Quali valori può assumere il primo numero pari?

**9.18** (*). Il noleggio di una automobile costa € 55,00 al giorno, più € 0,085 per ogni chilometro percorso. Qual è il massimo di chilometri da percorrere giornalmente, per spendere non più di € 80,00 al giorno?

**9.19.** In una fabbrica, per produrre una certa merce, si ha una spesa fissa settimanale di € 413, ed un costo di produzione di € 2,00 per ogni kg di merce. Sapendo che la merce viene venduta a € 4,00 al kg, determinare la quantità minima da produrre alla settimana perché l'impresa non sia in perdita.

**9.20** (*). Per telefonare in alcuni paesi esteri, una compagnia telefonica propone due alternative di contratto:

a ) € 1,20 per il primo minuto di conversazione, € 0,90 per ogni minuto successivo;
b ) € 1,00 per ogni minuto di conversazione.

Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la seconda alternativa?

**9.21 (*).** Il prezzo di un abbonamento mensile ferroviario è di € 125,00. Sapendo che il prezzo di un singolo biglietto sulla stessa tratta è di € 9,50, trovare il numero minimo di viaggi per cui l'abbonamento mensile risulta conveniente, e rappresentare grafica-mente la soluzione.

**9.22.** Al circolo tennis i soci pagano € 12 a ora di gioco, i non soci pagano € 15. Sapendo che la tessera annuale costa € 150, dopo quante partite all'anno conviene fare la tessera di socio?

**9.23 (*).** In montagna l'abbonamento per due settimane allo skipass costa € 220 mentre il biglietto giornaliero costa € 20. Andando a sciare ogni giorno, dopo quanti giorni conviene fare l'abbonamento?

**9.24 (*).** Marco ha preso alle prime tre prove di matematica i seguenti voti: 5; 5,5; 4,5. Quanto deve prendere alla quarta e ultima prova per avere almeno 6 di media?

**9.25.** Per produrre un tipo di frullatore un'azienda ha dei costi fissi per € 12 000 a settimana e riesce a produrre 850 frullatori a settimana, ognuno dei quali ha un costo di produzione pari a € 34. L'azienda concorrente riesce a vendere un frullatore analogo a € 79. A quanto devono essere venduti i frullatori in modo che l'azienda abbia un utile e che il prezzo di vendita non sia superiore a quello del prodotto concorrente?

**9.26 (*).** Per noleggiare un'auto una compagnia propone un'auto di tipo citycar al costo di € 0,20 per km percorso e una quota fissa giornaliera di € 15,00, un'auto di tipo economy al costo di € 0,15 per km e una quota fissa giornaliera di € 20,00. Dovendo noleggiare l'auto per 3 giorni quanti km occorre fare perché sia più conveniente l'auto di tipo economy?

**9.27.** Alle 9.00 di mattina sono in autostrada e devo raggiungere una città che dista 740km entro le 17.00 poiché ho un appuntamento di lavoro. Prevedendo una sosta di mezzora per mangiare un panino, a quale velocità devo viaggiare per arrivare in orario?

**9.28 (*).** Quanto deve essere lungo il lato di un triangolo equilatero il cui perimetro deve superare di 900cm il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato di 10cm?

**9.29 (*).** I lati di un triangolo sono tali che il secondo è doppio del primo e il terzo è più lungo del secondo di 3cm. Se il perimetro deve essere compreso tra 10cm e 20cm, tra quali valori può variare il lato più piccolo?

**9.30 (*).** In un triangolo isoscele l'angolo alla base deve essere minore della metà dell'angolo al vertice. Tra quali valori deve essere compresa la misura dell'angolo alla base?

**9.31 (*).** Un trapezio rettangolo l'altezza che è il triplo della base minore, mentre la base maggiore è 5 volte la base minore. Se il perimetro del trapezio non deve superare i 100m, quali valori può assumere la lunghezza dell'altezza del trapezio?

**9.32 (*).** Un rettangolo ha le dimensioni una doppia dell'altra. Si sa che il perimetro non deve superare 600m e che l'area non deve essere inferiore a 200m$^2$. Tra quali valori possono variare le dimensioni del rettangolo?

### 9.6.5 Sistema di disequazioni

**9.33.** Sulla retta reale rappresenta l'insieme soluzione $S_1$ dell'equazione:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot(5x+3)=2+\frac{2}{3}\cdot(x+1)$$

e l'insieme soluzione $S_2$ della disequazione:

$$\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1-x}{4}\right) \geqslant 3 - \frac{6-2x}{3} - \frac{x}{2}.$$

È vero che $S_1 \subset S_2$?

**9.34 (*).** Determina i numeri reali che verificano il sistema: $\begin{cases} x^2 \leqslant 0 \\ 2-3x \geqslant 0 \end{cases}$.

**9.35.** L'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} (x+3)^3 - (x+3)\cdot(9x-2) > x^3+27 \\ \dfrac{x+5}{3} + 3 + \dfrac{2\cdot(x-1)}{3} < x+1 \end{cases}$ è:

- [A] $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$
- [B] $\{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$
- [C] $\{x \in \mathbb{R} / x < -3\}$
- [D] $\text{I. S.} = \emptyset$
- [E] $\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

**9.36.** Attribuire il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) il quadrato di un numero reale è sempre positivo;
b) l'insieme complementare di $A = \{x \in \mathbb{R} / x > -8\}$ è $B = \{x \in \mathbb{R} / x < -8\}$;
c) il monomio $-6x^3y^2$ assume valore positivo per tutte le coppie dell'insieme $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
d) nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi il sistema $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 8x < 0 \end{cases}$ non ha soluzione;
e) l'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$ rappresenta l'I. S. del sistema $\begin{cases} 1+2x < 0 \\ \dfrac{x+3}{2} \leqslant x+1 \end{cases}$.

**9.37 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3-x > x \\ 2x > 3 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} 3x \leqslant 4 \\ 5x \geqslant -4 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 2x > 3 \\ 3x \leqslant 4 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 3x-5 < 2 \\ x+7 < -2x \end{cases}$.

**9.38 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3-x \geqslant x-3 \\ -x+3 \geqslant 0 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} -x-3 \leqslant 3 \\ 3+2x \geqslant 3x+2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 2x-1 > 2x \\ 3x+3 \leqslant 3 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 2x+2 < 2x+3 \\ 2(x+3) > 2x+5 \end{cases}$.

**9.39 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ -3x+5 \geqslant 0 \\ -3x \geqslant -2x \end{cases}$;
b) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3}x \leqslant \dfrac{1}{9} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3+2x > 3x+2 \\ 5x-4 \leqslant 6x-4 \\ -3x+2 \geqslant -x-8 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} 4x+4 \geqslant 3\cdot\left(x+\dfrac{4}{3}\right) \\ 4x+4 \geqslant 2\cdot(2x+2) \end{cases}$ .

**9.40 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3(x-1) < 2(x+1) \\ x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+1}{2} > 0 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}(x+3)-1 \\ (x+3)^2 \geqslant (x-2)(x+2) \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} 16(x+1)-2+(x-3)^2 \leqslant (x+5)^2 \\ \dfrac{x+5}{3}+3+2\cdot\dfrac{x-1}{3} \leqslant x+4 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3} > x-1 \\ \dfrac{x-4}{5} < \dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$ .

**9.41 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+x > 3x-2 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6} \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4} < 5\cdot\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}\right) \\ x^2-2x+1 \geqslant 0 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} 3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{2-x}{3}+x-\dfrac{x-1}{3} > 0 \\ \left[1-\dfrac{1}{6}(2x+1)\right]+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 < (x+1)^2+\dfrac{1}{3}(1+2x) \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) > \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) < \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$ .

### 9.6.4 Soluzione di una disequazione fratta

**9.42.** Risolvi le seguenti disequazioni.

a) $(x+3)\cdot\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\right) < 0$ e $\left(-\frac{6}{11}+2x\right)\cdot\left(-x+\frac{9}{2}\right)$;
b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(5x+\frac{1}{5}\right) < 0$ e $\left(-\frac{1}{10}x+2\right)\cdot(-3x+9) \geqslant 0$.

**9.43.** $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x) > 0$.

**9.44 (*).** Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(x+2)(3-x) \leqslant 0$; c) $(3x+2)(2-3x) < 0$;
b) $x(x-2) > 0$; d) $-3x(2-x)(3-x) \geqslant 0$.

**9.45** (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(x+1)(1-x)\left(\frac{1}{2}x-2\right) \geqslant 0$;
b) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$;
c) $x^2-16 \leqslant 0$;
d) $4x^2-2x < 0$.

**9.46** (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^4-81 \geqslant 0$;
b) $x^2+17x+16 \leqslant 0$;
c) $16-x^4 \leqslant 0$;
d) $x^2+2x+1 < 0$.

**9.47** (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^2+6x+9 \geqslant 0$;
b) $x^2-5x+6 < 0$;
c) $x^2+3x-4 \leqslant 0$;
d) $x^3 > x^2$.

**9.48** (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^2(2x^2-x)-(2x^2-x) < 0$;
b) $x^2-2x+1+x(x^2-2x+1) < 0$;
c) $x^3-2x^2-x+2 \geqslant 0$;
d) $x^4+4x^3+3x^2 > 0$.

**9.49** (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(6x^2-24x)(x^2-6x+9) < 0$;
b) $(x^3-8)(x+2) < (2-x)(x^3+8)$;
c) $(2a+1)(a^4-2a^2+1) < 0$;
d) $x^3-6x^2+11 > 1-3x$;
e) $x^6-x^2+x^5-6x^4-x+6 < 0$.

**9.50** (*). Determinare i valori che attribuiti alla variabile $y$ rendono positivi entrambi i polinomi seguenti: $p_1 = y^4-13y^2+36$; $\quad p_2 = y^3-y^2-4y+4$.

**9.51** (*). Determinare i valori di $a$ che rendono $p = a^2+1$ minore di 5.

**9.52** (*). Determina I. S. dei seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0 \\ x^2-7x+10 < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2+3x-18 \geqslant 0 \\ 12x^2+12x+3 > 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 16x^4-1 < 0 \\ 16x^3+8x^2 \geqslant 0 \end{cases}$.

**9.53** (*). Determina I. S. dei seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 49a^2-1 \geqslant 0 \\ 9a^2 < 1 \\ 1-a > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x^2-13x+6 < 0 \\ (2x^2-5x-3)(1-3x) > 0 \\ x^2+7 > 1 \end{cases}$.

**9.54.** Studia il segno della frazione

$$f = \frac{x^3+11x^2+35x+25}{x^2-25}.$$

*Suggerimento*: scomponi in fattori numeratore e denominatore, otterrai

$$f = \frac{(x+5)^2(x+1)}{(x+5)(x-5)}.$$

La frazione assegnata, con la C. E. : $x \neq -5$ e $x \neq 5$, si annulla se $x = -1$; è positiva nell'insieme $A^+ = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -1 \vee x > 5\}$, è negativa in $A^- = \{x \in \mathbb{R} / x < -5 \vee -1 < x < 5\}$.

**9.55** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{x-2}{3x-9}>0$;

b) $\dfrac{3x+12}{(x-4)(6-3x)}\geqslant 0$;

c) $\dfrac{x+2}{x-1}<2$;

d) $\dfrac{4-3x}{6-5x}\geqslant -3$.

**9.56** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{x+8}{x-2}\geqslant 0$;

b) $\dfrac{3x+4}{x^2+1}\geqslant 2$;

c) $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{2}{x-3}\leqslant 0$;

d) $\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{6}{x+9}\geqslant 0$.

**9.57** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{3}{2-x}\leqslant\dfrac{1}{x-4}$;

b) $\dfrac{2}{4x-16}<\dfrac{2-6x}{x^2-8x+16}$;

c) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}-1<\dfrac{3x-3}{6-3x}$;

d) $\dfrac{2}{x-2}>\dfrac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$.

**9.58** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{5}{2x+6}\geqslant\dfrac{5x+4}{x^2+6x+9}$;

b) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}\leqslant 0$;

c) $\dfrac{(x+3)(10x-5)}{x-2}<0$;

d) $\dfrac{4-3x}{x-2}<\dfrac{3x+1}{x-2}$.

**9.59** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{5x-4}{3x-12}\geqslant\dfrac{x-4}{4-x}$;

b) $\dfrac{2-x}{5x-15}\leqslant\dfrac{5x-1}{2x-6}$;

c) $\dfrac{(3x-12)(6-x)}{(24-8x)(36-18x)}\leqslant 0$;

d) $\dfrac{(x-2)(5-2x)}{(5x-15)(24-6x)}\geqslant 0$.

**9.60** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{(x-2)(x+4)(x+1)}{(x-1)(3x-9)(10-2x)}\leqslant 0$;

b) $\dfrac{(5-x)(3x+6)(x+3)}{(4-2x)(x-6)x}\leqslant 0$;

c) $\dfrac{(x-5)(3x-6)(x-3)}{(4-2x)(x+6)x}\leqslant 0$;

d) $\dfrac{(x-3)(x+2)(15+5x)}{x^2-5x+4}\geqslant 0$.

**9.61** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{(x-4)^2(x+3)}{x^2+5x+6}\geqslant 0$;

b) $\dfrac{x}{1-x^2}>\dfrac{1}{2x+2}-\dfrac{2}{4x-4}$;

c) $\dfrac{3-x}{x-2}<\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{2}{x^2+x-6}$;

d) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{3}{2x+2}$.

**9.62** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{3}{2x-1} \leqslant \dfrac{2x^2}{2x^2-x} - \dfrac{x+1}{x}$;

b) $\dfrac{2x^2}{2x^2-x} > 1$;

c) $\dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{x+2}{2x+1} > \dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \leqslant 1$.

**9.63** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{\frac{2}{x+1}}{x^2-1} < 0$;

b) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{4-x}{x+2} \geqslant \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

c) $\dfrac{3}{2x^2-4x-6} - \dfrac{x-2}{3x+3} < \dfrac{x-1}{2x-6}$;

d) $\dfrac{1}{2-2x} \cdot \left(\dfrac{x(x-2)}{x-1} - \dfrac{3}{3-3x}\right) > -1$.

**9.64** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $-\dfrac{2}{27-3x^2} - \dfrac{x+1}{2x-6} + \dfrac{3-2x}{6x-18} < -\dfrac{3}{x^2-9} + 4\dfrac{x-3}{18-2x^2}$;

b) $\dfrac{2}{x^2-3x+2} - \dfrac{x}{x-2} < \dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{1}{3x-x^2-2} + \dfrac{2-x}{4x-4}$;

c) $\dfrac{(x-2)(x+4)(x^2+5x+6)}{(x^2-9)(-4-7x^2)(x^2-6x+8)(x^2+4)} < 0$.

**9.65.** Dopo aver ridotto ai minimi termini la frazione $f = \dfrac{3x^4-2x^3+3x^2-2x}{6x^2-x-7}$, completa;

a) $f > 0$ per $x < -1$ oppure ........................................................

b) $f = 0$ per ..............................................................................

c) $f < 0$ per ..............................................................................

**9.66.** Determinate il segno delle frazioni, dopo averle ridotte ai minimi termini.

$$f_1 = \frac{1-a^2}{2+3a}; \quad f_2 = \frac{a^3-5a^2-3+7a}{9-6a+a^2}; \quad f_3 = \frac{11m-m^2+26a}{(39-3m)(m^2+4m+4)}.$$

**9.67** (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x^2+x} \geqslant 0 \\ x^2-x-6 \geqslant 0 \\ x^2-4 \leqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{9-x^2} > 0 \\ x^2-3x \leqslant 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} < 0 \\ \dfrac{2-x}{5x-15} \leqslant \dfrac{5x-1}{2x-6} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{8-4x} - \dfrac{6}{2x-4} < 0 \\ \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{6}{x^3-8} > 1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right) < \dfrac{x-4}{2-x} \\ \left(\dfrac{2-x}{x^2-6x+9} + \dfrac{2+x}{x^2-9}\right) \cdot \dfrac{x^3-27}{2x} > 0 \end{cases}$.

**9.68 (*).** Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)+3\left(\dfrac{2}{x}+1\right)>\dfrac{13}{2} \\ \dfrac{7+x}{2x}>\dfrac{2-x}{1-2x} \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-x-1}\geqslant 0 \\ \dfrac{4x-1-3x^2}{x^2-4}\leqslant 0 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} x^2-3x+2\leqslant 0 \\ \dfrac{6}{2+x}-\dfrac{x+2}{x-2}>\dfrac{x^2}{4-x^2} \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} x^2+1\leqslant -2x \\ 3x-1<2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ .

**9.69.** Motivare la verità o la falsità delle seguenti proposizioni riferite alle frazioni.

$$f_1=\frac{a^3-81a}{81-a^2},\qquad f_3=\frac{20a-50a^2-2}{4a-20a^2},\qquad f_5=\frac{1-4a^2}{2-8a+8a^2},$$

$$f_2=\frac{7a^2+7}{3+3a^4+6a^2},\qquad f_4=\frac{a^4}{2a^4+a^2},\qquad f_6=\frac{2a^2+a^3+a}{2a^2-a^3-a}.$$

a) $f_1$ per qualunque valore positivo della variabile è negativa $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $f_2$ è definita per qualunque valore attribuito alla variabile $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $f_3$ è positiva nell'insieme I. S. $=\left\{a\in\mathbb{R}/a<0\vee a>\frac{1}{5}\right\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $f_4$ è positiva per qualunque valore reale attribuito alla variabile $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) nell'intervallo $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, $f_5$ non si annulla $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $f_6$ è negativa per qualunque valore dell'insieme $K=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

### 9.7.2 Risposte

**9.10** a) $x<\frac{3}{2}$, b) $x>\frac{3}{2}$, c) $x\leqslant\frac{4}{3}$, d) $x\geqslant-\frac{4}{5}$, e) $\mathbb{R}$, f) $\emptyset$, g) $x<3$, h) $x\geqslant-3$.

**9.11** a) $x\leqslant 1$, b) $x\leqslant 0$, c) $x\leqslant 5$, d) $\emptyset$, e) $\mathbb{R}$, f) $\mathbb{R}$, g) $\mathbb{R}$, h) $\emptyset$.

**9.12** a) $\emptyset$, b) $\mathbb{R}$, c) $\emptyset$, d) $x\leqslant-\frac{10}{3}$, e) $x<0$, f) $x\geqslant 0$, g) $x\leqslant\frac{5}{3}$, h) $x\leqslant-\frac{8}{3}$.

**9.13** a) $x\geqslant 0$, b) $x\leqslant-\frac{3}{4}$, c) $x\leqslant 0$, d) $x\leqslant-\frac{1}{2}$, e) $x\geqslant-\frac{1}{6}$, f) $x\geqslant-\frac{27}{2}$, g) $x>-\frac{27}{5}$, h) $\mathbb{R}$.

**9.14** a) $x<-\frac{3}{4}$, b) $\mathbb{R}$, c) $x\geqslant-\frac{13}{6}$, d) $x>\frac{3}{2}$, e) $x>1$, f) $x\geqslant 0$, g) $\{x\in\mathbb{R}/x<1\}=(-\infty,1)$, h) $x<\frac{13}{2}$.

**9.15** a) $\mathbb{R}$, b) $x>-\frac{10}{111}$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{R}$.

**9.16** $x>5$.

**9.17** $x\leqslant-2/3$.

**9.18** Massimo 294km.

**9.20** Meno di 3 minuti.

**9.21** 14

**9.23** $x>11$.

**9.24** Almeno 9.

**9.26** Più di 300km.

**9.28** $x>310$cm.

**9.29** $\frac{7}{5}\text{cm} < x < \frac{17}{5}\text{cm}$.

**9.30** $0° < \alpha < 45°$.

**9.31** $h \leqslant \frac{150}{7}\text{m}$.

**9.32** Il lato minore tra 10m e 100m, il lato maggiore tra 20m e 200m.

**9.34** $x = 0$.

**9.37** a) $\emptyset$, b) $-\frac{4}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, c) $\emptyset$, d) $x < -\frac{7}{3}$.

**9.38** a) $x \leqslant 3$, b) $-6 \leqslant x \leqslant 1$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{R}$.

**9.39** a) $x < 0$, b) $\emptyset$, c) $0 \leqslant x < 1$, d) $x \geqslant 0$.

**9.40** a) $0 < x < 5$, b) $\mathbb{R}$, c) $-\frac{13}{6} \leqslant x < -\frac{3}{4}$, d) $-\frac{17}{7} < x < 6$.

**9.41** a) $x \geqslant 2$, b) $x > \frac{3}{2}$, c) $x > \frac{9}{10}$, d) $x > \frac{1}{2}$.

**9.44** a) $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 3$, b) $x < 0 \vee x > 2$, c) $x < -\frac{2}{3} \vee x > \frac{2}{3}$, d) $x \geqslant 0 \vee 2 \leqslant x \leqslant 3$.

**9.45** a) $x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x \leqslant 4$, b) $1 < x < 2 \vee 3 < x < 4$, c) $-4 \leqslant x \leqslant 4$, d) $0 < x < \frac{1}{2}$.

**9.46** a) $x \leqslant -3 \vee x \geqslant 3$, b) $-16 \leqslant x \leqslant -1$, c) $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$, d) $\emptyset$.

**9.47** a) $\mathbb{R}$, b) $2 < x < 3$, c) $-4 \leqslant x \leqslant 1$, d) $x > 1$.

**9.48** a) $-1 < x < 0 \vee \frac{1}{2} < x < 1$, b) $x < -1$, c) $-1 \leqslant x \leqslant 1 \vee x \geqslant 2$, d) $x < -3 \vee x > -1 \wedge x \neq 0$.

**9.49** a) $0 < x < 4 \wedge x \neq 3$, b) $-2 < x < 2$, c) $a < -\frac{1}{2} \wedge a \neq -1$, d) $-1 < x < 2 \vee x > 5$, e) $-3 < x < -1 \vee 1 < x < 2$.

**9.50** $-2 < y < 1 \vee y > 3$.

**9.51** $-2 < a < 2$.

**9.52** a) $3 \leqslant x < 5$, b) $x \leqslant -6 \vee x \geqslant 3$, c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

**9.53** a) $-\frac{1}{3} < a \leqslant -\frac{1}{7} \vee \frac{1}{7} \leqslant a < \frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2} < x < 3$.

**9.55** a) $x < 2 \vee x > 3$, b) $x \leqslant -4 \vee 2 < x < 4$, c) $x < 1 \vee x > 4$, d) $x < \frac{6}{5} \vee x \geqslant \frac{11}{9}$.

**9.56** a) $x \leqslant -8 \vee x > 2$, b) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, c) $x < -4 \vee \frac{2}{3} \leqslant x < 3$, d) $-45 \leqslant x < -9 \vee x > -3$.

**9.57** a) $2 < x \leqslant \frac{7}{2} \vee x > 4$, b) $x < \frac{8}{13}$, c) $x < 2 \vee 2 < x < \frac{5}{2}$, d) $x < -3 \vee x > 2$.

**9.58** a) $x \leqslant \frac{7}{5} \wedge x \neq -3$, b) $-1 < x \leqslant 1$, c) $x < -3 \vee \frac{1}{2} < x < 2$, d) $x < \frac{1}{2} \vee x > 2$.

**9.59** a) $x \leqslant 2 \vee x > 4$, b) $x \leqslant \frac{1}{3} \vee x > 3$, c) $x < 2 \vee 3 < x \leqslant 4 \vee x \geqslant 6$, d) $x \leqslant 2 \vee \frac{5}{2} \leqslant x < 3 \vee x > 4$.

**9.60** a) $x \leqslant -4 \vee -1 \leqslant x < 1 \vee 2 \leqslant x < 3 \vee x > 5$, b) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \vee 0 < x < 2 \vee 5 \leqslant x < 6$, c) $x < -6 \vee 0 < x \leqslant 3 \vee x \geqslant 5$ con $x \neq 2$, d) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \vee 1 < x \leqslant 3 \vee x > 4$.

**9.61** a) $x > -2$, b) $x < -1$, c) $x < -3 \vee -1 < x < 2 \vee x > \frac{5}{2}$, d) $x \leqslant -6 \vee -2 < x < -1$.

**9.62** a) $x < 0 \vee \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$, b) $x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$, c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{10} \vee x > \frac{1}{2}$, d) $x < 4 \wedge x \neq 3$.

**9.63** a) $x < -1 \vee -1 < x < 1$, b) $x < -2 \vee x \geqslant \frac{5}{2}$, c) $x < -1 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3$, d) $\mathbb{R} - \{1\}$.

**9.64** a) $x < -3 \vee x > 3$, b) $x < 0 \vee 1 < x < \frac{12}{7} \vee x > 2$,
c) $x < -4 \vee -2 < x < 3 \vee x > 4$ con $x \neq 2$.

**9.67** a) $\{x \in \mathbb{R} / x = -2\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x < 3$ con $x \neq 2\}$, c) $,x < -2$ d) $x > 2$,
e) $1 < x < 3 \wedge x \neq 2$.

**9.68** a) $0 < x < \frac{7}{17} \vee \frac{1}{2} < x < 2$, b) $x < -2 \vee \frac{1}{3} \leqslant x < 1 \vee x \geqslant 3$,
c) $1 \leqslant x < 2$, d) $\emptyset$.

# Sistemi di equazioni 10

## 10.1 Equazione lineare in due incognite

**Definizione 10.1.** Una equazione di primo grado in due incognite si chiama *equazione lineare*.

**Problema 10.1.** Determinare due numeri naturali la cui somma sia 16.

*Soluzione* L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con $x$ e $y$ i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x + y = 16$, equazione in due incognite, di primo grado.

Determiniamo l'Insieme Soluzione del problema proposto. L'obiettivo è trovare $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $x + y = 16$. Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella seguente.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 17 coppie di numeri naturali sopra elencate. Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 16. In simboli scriviamo $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tali che $x + y = 16$.

Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7; +23)$ è soluzione del problema perché sostituendo a $x$ il valore $-7$ e a $y$ il valore $+23$ si ha $(-7) + (+23) = 16$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+23; -7)$ è soluzione del problema perché $(+23) + (-7) = 16$.

Se attribuiamo un valore arbitrario a $x$, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 16 il valore di $x$: $y = 16 - x$.

Completa tu:

- se $x = -3$ allora $y = 16 - (-3) = \ldots\ldots$ e la coppia $(\ldots; \ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \frac{3}{2}$ allora $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema. E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita $x$ valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y = 16 - x$.

Se $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 16 - \sqrt{2}$, la coppia $\left(\sqrt{2}; 16 - \sqrt{2}\right)$ è soluzione dell'equazione.

Completa:

- se $x = -2\sqrt{3}+1$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- se $x = 16 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

♦

**Definizione 10.2.** Si chiama *Insieme Soluzione* (I. S.) di un'equazione di primo grado in due incognite, l'*insieme delle coppie ordinate* di *numeri reali* che sostituiti rispettivamente a $x$ e a $y$ rendono vera l'uguaglianza.

✍ *Esercizi proposti:* 10.1, 10.2, 10.3

### 10.1.1 Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

---

**Esempio 10.2.** Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y - x + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x; y)$ di numeri tali che $3y - x + 1 = 0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1; 0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

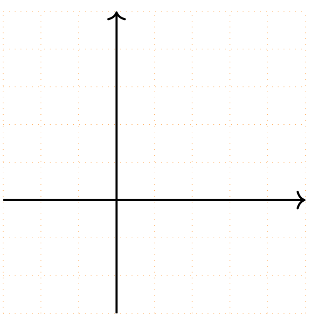
Fissiamo l'attenzione sull'incognita $y$, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola $y$, ricaviamo $y$ come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y - x + 1 = 0 \Rightarrow 3y = x - 1 \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Al variare di $x$ in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata. Prova a determinarne alcune:

| x | y | coppia |
|---|---|---|
| 0 | ...... | (0;......) |
| 1 | ...... | (1;......) |
| −1 | ...... | (−1;......) |

In verità non possiamo trovare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.



La formula

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. La formula $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ si chiama *equazione esplicita della retta*.

**Esempio 10.3.** Risolvi graficamente l'equazione $y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

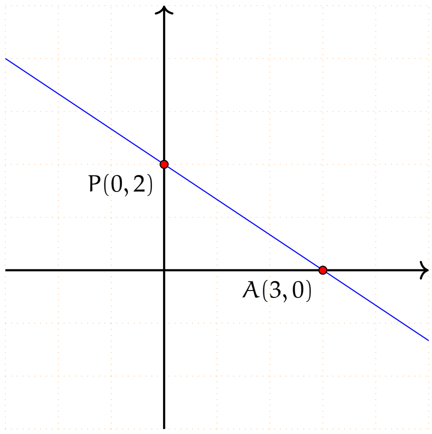
Troviamo l'equazione esplicita della retta:

$$y + \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse $y$: $q = 2$, quindi $P(0;2)$ è un punto della retta.

Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se $x = 3$ allora $y = 0$, quindi $A(3;0)$ è un punto della retta.

Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie $(x;y)$, coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.




---

✍ *Esercizi proposti:* 10.4, 10.5, 10.6

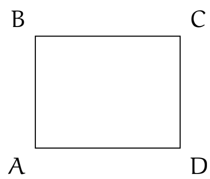
## 10.2 Definizione di sistema di equazioni

**Problema 10.4.** Nel rettangolo $ABCD$, la somma del doppio di $AB$ con la metà di $BC$ è di 98m; aumentando $AB$ di 3m e $BC$ di 2m il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in $m^2$ del rettangolo.

*Dati*:

$$2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = 98\text{m},$$
$$2(\overline{AB} + 3\text{m} + \overline{BC} + 2\text{m}) = 180\text{m}.$$

*Obiettivo*: Area




*Soluzione* Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni Area $= \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = y$ otteniamo le due equazioni:

$$2x + \frac{1}{2}y = 98; \quad 2(x + 3 + y + 2) = 180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

♦

**Definizione 10.3.** Si definisce *sistema di equazioni* l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene raggruppando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

**Definizione 10.4.** L'Insieme Soluzione (I. S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

**Definizione 10.5.** Si chiama *grado di un sistema* il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama *sistema lineare*.

La *forma normale o canonica* di un sistema lineare è:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}, \text{ con } a, b, c, a_1, b_1, c_1 \text{ numeri reali.}$$

Il problema 10.4 si formalizza dunque con il sistema:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2(x + 3 + y + 2) = 180 \end{cases},$$

composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2x + 2y = 170 \end{cases}.$$

### 10.2.1 Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La *forma canonica* di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

con $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ numeri reali.

---

**Esempio 10.5.** Scrivere in forma canonica il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - (y + 2x)^2 = x + 1 - y(4x + y - 1) \\ \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+3}{3} = 0 \end{cases}.$$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 4x^2 - 4xy = x + 1 - 4xy - y^2 + y \\ 3x - 6 + 2y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

che è la forma canonica cercata.

---

### 10.2.2 Metodo di sostituzione

*Risolvere il sistema* significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.

Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'Insieme Soluzione, cominciamo dal *metodo di sostituzione*.

---

**Esempio 10.6.** $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

**Passo I** scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita. Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita $y$.

$$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}.$$

**Passo II** sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale. Nel nostro esempio abbiamo

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2(2+3x)=7 \end{cases}.$$

**Passo III** svolgiamo i calcoli nella seconda equazione. Nel nostro esempio abbiamo

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases}.$$

**Passo IV** risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile. Nel nostro esempio, ricaviamo $x$ dalla seconda equazione

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ x=-11 \end{cases}.$$

**Passo V** sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata e avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione. Nel nostro esempio

$$\begin{cases} y=2+3x \\ x=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-31 \\ x=-11 \end{cases}.$$

**Passo VI** possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio $\mathrm{I.S.} = \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è *determinato*, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

**Esempio 10.7.** $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ y\left(1+\frac{2}{5}\right)-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$.

a ) Il sistema non si presenta nella forma canonica. Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica:

$$\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases};$$

b ) ricaviamo $x$ dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases};$$

c ) abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di $x$ con facilità e senza frazioni. Sostituiamo nella prima equazione al posto di $x$ l'espressione trovata:

$$\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases};$$

d ) risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita $y$:

$$\begin{cases} -3y=-47 \\ x=15-7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{47}{3} \\ x=15-7y \end{cases};$$

e ) sostituiamo il valore di $y$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y=\frac{47}{3} \\ x=15-7\left(\frac{47}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{284}{3} \\ y=\frac{47}{3} \end{cases}.$$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni:

$$\mathrm{I.S.}=\left\{\left(-\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)\right\}.$$

In conclusione, il sistema è *determinato*; la coppia ordinata $\left(-\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)$ verifica le due equazioni del sistema.

**Esempio 10.8.** $\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases}$.

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre le C. E. e individuare il Dominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà C. E. : $y \neq 0$ e $x \neq 0$ per cui $D = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$.

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y} - 1 \\ 5x+4y+19 = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases}.$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4(2x-1) = -19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 15x = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(-1) - 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.7, 10.8, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.15

### 10.2.3 Metodo del confronto

---

**Esempio 10.9.** $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$.

**Passo I** ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita. Nel nostro esempio ricaviamo la $y$ contemporaneamente da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ y = \dfrac{5x - 7}{2} \end{cases}.$$

**Passo II** poiché il primo membro delle equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una incognita. Nell'esempio $2 + 3x = \frac{5x-7}{2}$.

**Passo III** risolviamo l'equazione trovata e determiniamo il valore di una delle due incognite. Nel nostro esempio $4 + 6x = 5x - 7 \Rightarrow x = -11$.

**Passo IV** si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita. Nel nostro esempio:

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = 2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -31 \end{cases}.$$

**Passo V** possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio: I. S. $= \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.16, 10.17, 10.18, 10.19

### 10.2.4 Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A = B$ e $C = D$ possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A + C = B + D$.

$$\begin{cases} A = B \\ insC = D \end{cases} \Rightarrow A + C = B + D.$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

---

**Esempio 10.10.** $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x - 5y) + (2x + 5y) = 1 - 4$. I termini in $y$ si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

---

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'. Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.

Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l'incognita $x$ appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

---

**Esempio 10.11.** $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}$.

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per $-3$, otteniamo:

$$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 25y = 5 \\ -15x + 12y = 12 \end{cases};$$

sommando membro a membro abbiamo

$$(15x - 25y) + (-15x + 12y) = 5 + 12 \Rightarrow -13y = 17 \Rightarrow y = -\frac{17}{13}.$$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qualsiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita o ripetere il procedimento per l'altra incognita moltiplicando come segue:

$$\begin{matrix} +4 \\ -5 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 20y = 4 \\ -25x + 20y = 20 \end{cases}.$$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x = 24 \Rightarrow x = -\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13}; -\frac{17}{13}\right)$.

---

### Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ con $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ numeri reali.

**Passo I** per eliminare $y$ moltiplichiamo la prima per $b_1$ e la seconda per $-b$:

$$\begin{cases} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ -a_1bx - bb_1y = -bc_1 \end{cases}.$$

**Passo II** sommiamo le due equazioni:

$$ab_1x - a_1bx = cb_1 - bc_1 \Rightarrow (ab_1 - a_1b)x = cb_1 - bc_1.$$

**Passo III** ricaviamo l'incognita $x$:

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b}, \text{ con } ab_1 - a_1b \neq 0.$$

**Passo IV** per eliminare $x$ moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per $a$:

$$\begin{cases} -aa_1x + ba_1y = -a_1c \\ aa_1x + ab_1y = ac_1 \end{cases}$$

**Passo V** sommiamo le due equazioni

$$-a_1by + ab_1y = -a_1c + ac_1 \Rightarrow (ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c.$$

**Passo VI** ricaviamo l'incognita $y$:

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}, \text{ con } ab_1 - a_1b \neq 0.$$

La soluzione è

$$\left(\frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b}; \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}\right), \text{ con } ab_1 - a_1b \neq 0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 10.20, 10.21, 10.22, 10.23

### 10.2.5 Metodo di Cramer

**Definizione 10.6.** Si chiama *matrice del sistema lineare* di due equazioni in due incognite la tabella

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama *determinante della matrice* il numero reale

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1$$

ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\left( \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1 b}; \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} \right), \text{con } ab_1 - a_1 b \neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un *sistema lineare* è *determinato*, ammette cioè una sola coppia soluzione *se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero*.

✍ *Esercizi proposti:* 10.24, 10.25

La regola di Cramer [1] ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

a ) D il determinante della matrice del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1;$$

b ) $D_x$ il determinante della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti.

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1$$

c ) $D_y$ il determinante della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti.

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1$$

Se $D \neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x = \frac{D_x}{D}; \; y = \frac{D_y}{D}.$$

[1] Dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752).

---

**Esempio 10.12.** $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$.

Calcoliamo i determinanti.

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \Rightarrow D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot 4=-6-12=-18.$$

Poiché $D\neq 0$ il sistema è determinato.

$$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \Rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-3\cdot 2=-12-6=-18,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1 \Rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 4=4-16=-12.$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-18}=1;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.26, 10.27, 10.28, 10.29, 10.30

### 10.2.6 Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1;$$
$$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1;$$
$$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1:$$

- se $D\neq 0$ il sistema è *determinato*, esiste una sola coppia soluzione $x=\frac{D_x}{D}; y=\frac{D_y}{D}$;
- se $D=0$ si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è *indeterminato*, ogni coppia di numeri reali che verifica un'equazione, verifica anche l'altra;
  - 2° caso: se $D_x\neq 0$ e $D_y\neq 0$ il sistema è *impossibile*, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $\text{I. S.}=\emptyset$.

---

**Esempio 10.13.** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)+3\cdot(4)=-6+12=6\neq 0;$$

il sistema è determinato.

**Esempio 10.14.** $\begin{cases} 8x - 6y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) + 6 \cdot (4) = -24 + 24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-6) \cdot 1 = -6 + 6 = 0;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$$

Il sistema è indeterminato.

**Esempio 10.15.** $\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 = -3 + 12 = +9;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 16 - 4 = 12.$$

Il sistema è impossibile.

---

Osserviamo che se $D = 0$ si ha

$$a \cdot b_1 - b \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a \cdot b_1 = b \cdot a_1 \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi $D_x = 0$ si ha

$$c \cdot b_1 - b \cdot c_1 = 0 \Rightarrow c \cdot b_1 = b \cdot c_1 \Rightarrow \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x \neq 0$, cioè

$$\frac{c}{c_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

il sistema è impossibile.

✍ *Esercizi proposti:* 10.31, 10.32, 10.33, 10.34, 10.35, 10.36, 10.37, 10.38

### 10.2.7 Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

| Concetto algebrico | Concetto geometrico |
|---|---|
| Coppia ordinata di numeri reali | Punto del piano dotato di riferimento cartesiano |
| Equazione lineare | Retta |
| Coppia soluzione dell'equazione $ax + by + c = 0$ | Punto della retta di equazione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ |

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

**Problema 10.16.** Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

*Soluzione* Indichiamo con $x$ e $y$ i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni: $x + y = 6$ e $2x + \frac{1}{2}y = 6$.

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

**Il punto di vista algebrico** La coppia di numeri reali $x$ e $y$ che risolve il problema è quella che risolve il sistema

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + \dfrac{1}{2}y = 6 \end{cases}.$$

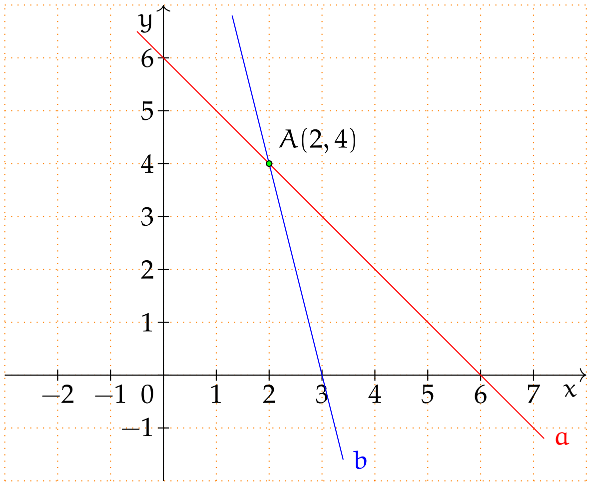
Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene $x = 2$ e $y = 4$.

**Il punto di vista geometrico** Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi rappresenta il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema. La retta $a$ è quella di equazione $x + y = 6$, che passa per i punti $(6, 0)$ e $(0, 6)$.

La retta $b$ è quella di equazione $2x + \frac{1}{2}y = 6$, che passa per i punti $(3, 0)$ e $(0, 12)$.

Il punto $A(2, 4)$ è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.




♦

**Esempio 10.17.** $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + y + 6 = 5(x - y) \end{cases}$.

**Il punto di vista algebrico** Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + y + 6 = 5(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + y + 6 = 5x - 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -4x + 6y = -6 \end{cases}.$$

Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; \frac{b}{b_1} = \frac{-3}{+6} = -\frac{1}{2},$$

mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1} = \frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: I. S. $= \emptyset$.

**Il punto di vista geometrico** Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}.$$

Le due rette (figura 10.1) hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della $x$ e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele. Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, il sistema è impossibile: I. S. $= \emptyset$.

**Esempio 10.18.** $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ y + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x \end{cases}$.

**Il punto di vista algebrico** Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$.

Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie $(x, y)$ che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda.

**Il punto di vista geometrico** Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale (figura 10.2) le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. È semplice rendersi conto che le due rette coincidono; tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell'altra: $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$.

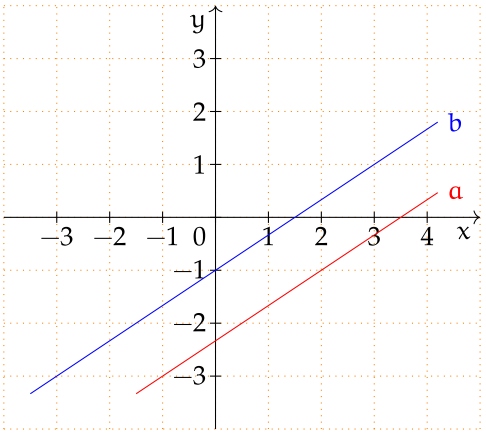



FIGURA 10.1: Esempio 23.17

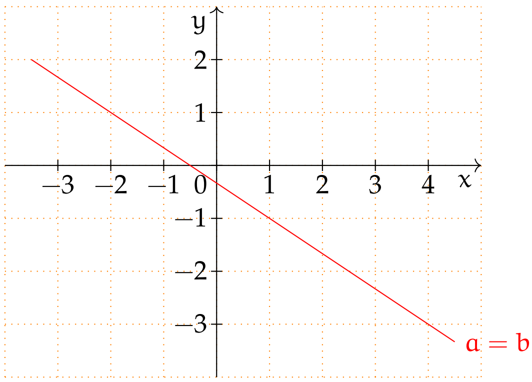



FIGURA 10.2: Esempio 23.18

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.39, 10.40, 10.41, 10.42, 10.43

## 10.3 Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-2} = \frac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

**Definizione 10.7.** Si chiama *sistema fratto o frazionario* il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

**Definizione 10.8.** Si chiama *Dominio* (D) o *Insieme di Definizione* (ID) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

**Esempio 10.19.** $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$.

**Passo I** Scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il mcm.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \Rightarrow \text{mcm} = (x+1)(y-2).$$

**Passo II** Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio del sistema:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{D} = \text{I. S.} = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|x \neq -1 \text{ e } y \neq 2\}.$$

**Passo III** Riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y = 11 \\ 11x+15y = 6 \end{cases}$.

**Passo IV** Risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\frac{123}{152}; \frac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

**Esempio 10.20.** $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x} = 3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1} = 7 \end{cases}$.

**Passo I** Per la prima equazione si ha mcm $= x$; per la seconda mcm $= y-1$.

**Passo II** Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \rightarrow \text{D} = \text{I. S.} = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \neq 0 \text{ e } y \neq 1\}.$$

**Passo III** Riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases} 3x+y-1 = 3x \\ 2x+3y = 7y-7 \end{cases}$.

**Passo IV** Determiniamo la forma canonica: $\begin{cases} y-1 = 0 \\ 2x-4y = -7 \end{cases}$.

**Passo V** Determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ che non accettabile poiché contraddice la C. E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile I. S. $= \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 10.44, 10.45, 10.46, 10.47, 10.48, 10.49

## 10.4 Sistemi letterali

**Definizione 10.9.** Si chiama *sistema letterale* il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con $x$ e $y$, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione.

### Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

**Esempio 10.21.** $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$.

È un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.

Per *discussione del sistema letterale* s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato. Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

**Passo I** Calcoliamo il determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4a+2.$$

**Passo II** Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $4a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0-\frac{1}{2}$. Se $a \neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.

**Passo III** Calcoliamo i determinanti $D_x$ e $D_y$ per trovare la coppia soluzione.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(a-1); \quad D_y = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix} = 2a^2.$$

Quindi $x = \frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}$ e $y = \frac{2a^2}{4a+2}$.

**Passo IV** Il determinante è nullo se $a = -\frac{1}{2}$; poiché per questo valore di $a$ i determinanti $D_x$ e $D_y$ sono diversi da zero si ha che per $a = -\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

| Condizioni sul parametro | Insieme Soluzione | Sistema |
|---|---|---|
| $a \neq -\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}; \frac{2a^2}{4a+2}\right)$ | determinato |
| $a = -\frac{1}{2}$ | $\emptyset$ | impossibile |

### Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

---

**Esempio 10.22.** $\begin{cases} \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a-x}{a-1} = a \\ \dfrac{x+2a}{a} - 3 = \dfrac{y}{2} - a \end{cases}$.

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme $\mathbb{R}$ quei valori che annullano il denominatore. Se $a = 1$ oppure $a = 0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema. Con le condizioni di esistenza C. E. : $a \neq 1$ e $a \neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x + (a-1)y = 2a^2 + a \\ 2x - ay = 2a - 2a^2 \end{cases}$

**Passo I** Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} 3 & a-1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 2 - 5a$.

**Passo II** Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2 - 5a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{2}{5}$ Se $a \neq \frac{2}{5}$ il sistema è determinato.

**Passo III** Calcoliamo i determinanti $D_x$ e $D_y$ per trovare la coppia soluzione

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a^2 + a & a-1 \\ 2a - 2a^2 & -a \end{vmatrix} = a \cdot (2a - 5); \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2a^2 + a \\ 2 & 2a - 2a^2 \end{vmatrix} = 2a \cdot (2 - 5a).$$

Quindi $x = \frac{a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ e $y = \frac{2a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ e semplificando $(a; 2a)$.

**Passo IV** Il determinante è nullo se $a = \frac{2}{5}$; poiché anche i determinanti $D_x$ e $D_y$ si annullano si ha per $a = \frac{2}{5}$ sistema indeterminato.

Riassumendo si ha:

| Condizioni sul parametro | Insieme Soluzione | Sistema |
|---|---|---|
| $a = 0 \vee a = 1$ | $\emptyset$ | privo di significato |
| $a \neq \frac{2}{5}$ e $a \neq 1$ e $a \neq 0$ | $\{(a; 2a)\}$ | determinato |
| $a = \frac{2}{5}$ | $\{\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - \frac{3}{5}y = \frac{18}{25}\}$ | indeterminato |

---

### Il sistema è frazionario

---

**Esempio 10.23.** $\begin{cases} \frac{y-a}{x} = \frac{2}{a} \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita $x$. Se $a = 0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato. Per poter procedere alla ricerca dell'Insieme Soluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza:

$$\text{C. E.} : a \neq 0. \tag{10.1}$$

Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \neq 0\}. \tag{10.2}$$

**Passo I** Portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x + ay = a^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ con $a \neq 0$ e $x \neq 0$.

**Passo II** Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a = -(2 + a)$.

**Passo III** Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$. Se $a \neq -2$ il sistema è determinato.

**Passo IV** calcoliamo i determinanti $D_x$ e $D_y$ per trovare la coppia soluzione

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot (a - 1); \quad D_y = \begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a^2 = -(2 + a^2).$$

Quindi $x = -\frac{a \cdot (a-1)}{2+a}$ e $y = \frac{a^2+2}{2+a}$ è la coppia soluzione accettabile se $x = -\frac{a \cdot (a-1)}{2+a} \neq 0$ per quanto stabilito in 10.2; essendo $a \neq 0$ per la 10.1 la coppia soluzione è accettabile se $a \neq 1$.

**Passo V** il determinante D è nullo se $a = -2$; essendo i determinanti $D_x$ e $D_y$ diversi da zero si ha: se $a = -2$ il sistema è impossibile. Riassumendo si ha:

| Parametro | Incognite | Insieme Soluzione | Sistema |
|---|---|---|---|
| | $x \neq 0$ | | |
| $a = 0$ | | | privo di significato |
| $a \neq 2, a \neq 0$ | | $\left(-\frac{a \cdot (a-1)}{2+a}; \frac{a^2+2}{2+a}\right)$ | determinato |
| $a \neq -2$ e $a \neq 0$ e $a \neq 1$ | | accettabile | |
| $a = -2$ | | | impossibile |

✍ *Esercizi proposti:* 10.50, 10.51, 10.52, 10.53, 10.54, 10.55, 10.56

## 10.5 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

**Problema 10.24.** Determinare tre numeri reali $x, y, z$ (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità.

*Soluzione* Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

a ) il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo: $2x = -y$;
b ) la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla: $x - 3z = 0$;
c ) la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità: $y + z = x + 4$.

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x = -y \\ x - 3z = 0 \\ y + z = x + 4 \end{cases}.$$

Si può ricavare la $y$ dalla prima equazione e sostituire nelle altre due:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -2x + z = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -3x + z = 4 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $x$ in funzione di $z$ e sostituiamo il valore di $x$ nell'ultima equazione

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3(3z) + z = 4 \end{cases}.$$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita e sostituiamo il valore ottenuto di $z$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ z = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{4}{9} \end{cases}.$$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di $x$ nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

♦

---

**Esempio 10.25.** $\begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}.$

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x + 4y = 12$ Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza: $3(x + 3y + z) + x + y = 3 \cdot 5 + 3 = 4x + 10y = 18$. Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite $x$ e $y$: $\begin{cases} 4x + 4y = 12 \\ 4x + 10y = 18 \end{cases}.$

Moltiplichiamo la seconda equazione per $-1$ e sommiamo le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y+4x+4y=-18+12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -6y=-6 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

La terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.57, 10.58, 10.59, 10.60, 10.61, 10.62, 10.63

## 10.6 Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni sistemi possono essere ricondotti a sistemi lineari per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

---

**Esempio 10.26.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{y}=-1 \end{cases}$.

Con la seguente sostituzione di variabili

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=\dfrac{1}{y} \end{cases}, \tag{10.3}$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}.$$

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione:

$$\begin{cases} 2u+4v=6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro abbiamo $4u=5$ dalla quale possiamo determinare $u=\frac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita $v$ moltiplichiamo la prima equazione per $-2$, otteniamo

$$\begin{cases} -2u-4v=-6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$-8v=-7 \Rightarrow v=\frac{7}{8}.$$

Avendo trovato i valori delle incognite $u$ e $v$ possiamo ricavare $x$ e $y$ sostituiendo con i valori trovati nella 10.3:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{8}{7} \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 10.64, 10.65, 10.66

## 10.7 Esercizi

### 10.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 10.1 Equazione lineare in due incognite

**10.1.** Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $x+2y-1=0$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-1$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | | $2{,}25$ | |
| $y$ | $0$ | | | $-1$ | | $\frac{3}{4}$ | $2$ | | $1{,}5$ |

**10.2.** Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $3x-2y=5$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $0$ | $1$ | | $\frac{1}{6}$ | | | $-\sqrt{2}$ | $0{,}25$ |
| $y$ | $0$ | | | $-1$ | | $\frac{3}{4}$ | $\sqrt{2}$ | | |

**10.3.** Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $3x-2\sqrt{2}y=0$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $0$ | | | $\frac{1}{6}$ | | $\sqrt{2}$ |
| $y$ | $0$ | | $1$ | $-1$ | | $\sqrt{2}$ | |

**10.4.** Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite.

a) $2x-2y+3=0$;

b) $-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{5}{2}y+1=0$;

c) $-2y+3=0$;

d) $x+2y+\dfrac{7}{4}=0$.

**10.5.** Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite.

a) $-2x+4y-1=0$;

b) $2y+\dfrac{2}{3}x+6=0$;

c) $\sqrt{2}x+\sqrt{6}y=0$;

d) $\sqrt{3}y+\sqrt{6}=-x$.

**10.6.** Stabilisci quali coppie appartengono all'Insieme Soluzione dell'equazione.

a) $5x+7y-1=0$ $\quad\left(-\frac{7}{5};0\right), \left(-\frac{1}{5};-1\right), \left(0;\frac{1}{7}\right), \left(\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right)$;

b) $-x+\dfrac{3}{4}y-\dfrac{4}{3}=0$ $\quad(0;-1), \left(\frac{1}{12};\frac{7}{9}\right), \left(-\frac{4}{3};0\right), (-3;4)$;

c) $-x-y+\sqrt{2}=0$ $\quad\left(\sqrt{2};0\right), \left(0;-\sqrt{2}\right), \left(1+\sqrt{2};-1\right), \left(1;-1-\sqrt{2}\right)$.

**10.7.** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases}$.

**10.8 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=x \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$.

**10.9 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4y - 6x = -2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 4y - 1 = 3 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + 1 = -\dfrac{x}{6} - 1 \end{cases}$.

**10.10 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$.

**10.11 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} \dfrac{x - 4y}{3} = x - 5y \\ x - 2 = 6y + 4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{y^2 - 4x + 2}{5} = \dfrac{2y^2 - x}{10} - 1 \\ x = -2y + 8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x - \dfrac{3}{4}(2y - 1) = \dfrac{13}{4}(x + 1) \\ \dfrac{x + 1}{4} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1 + y}{2} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{y - x - 1}{2} + x - y + 1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

**10.12 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} y - \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{4} = 0 \\ \dfrac{2x + 1}{1 - x} + \dfrac{2 + y}{y - 1} = -1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3\left(\dfrac{x}{6} + 3y\right) = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{6}x = 5 - \dfrac{6x + 10}{4} \\ 2(x - 2) - 3x = 40 - 6\left(y - \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2\dfrac{y}{3} + x + 1 = 0 \\ \dfrac{y + 1}{2} + \dfrac{x - 1}{3} + 1 = 0 \end{cases}$.

**10.13 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} (x - 2)^2 + y = (x + 1)(x - y) + (3 - y)(2 - x) \\ \dfrac{x}{4} - 2y = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y - \dfrac{3-2x}{3} = \dfrac{x-y}{3} + 1 \\ \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5}{4} = y + \dfrac{2-3x}{4} \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ kx + (k+1)y + 1 = 0 \end{cases}$ .

**10.14.** Risolvere il sistema che formalizza il problema 23.4:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2x + 3y = 170 \end{cases},$$

e concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

**10.15.** Determinare due numeri reali $x$ e $y$ tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

**10.16** (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} x = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ .

**10.17** (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ .

**10.18** (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y - \dfrac{3x-4}{2} = 1 - \dfrac{y}{4} \\ 2y - 2x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - y + \dfrac{1}{3} = 0 \\ x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{6}x = 5 - \dfrac{6x+10}{8} \\ 8(x-2) + 3x = 40 - 6\left(y - \dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y = \dfrac{x+3}{3} \end{cases}$ ;

e) $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ x + y = k - 1 \end{cases}$ .

**10.19.** In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168m e la differenza tra la metà della base e $1/13$ del lato è 28m. Indicata con $x$ la misura della base e con $y$ quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

**10.20** (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+y=1+y \\ 4x+y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$.

**10.21** (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=3 \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$.

**10.22** (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$;

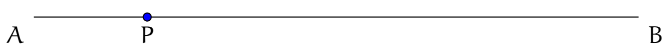
b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ \\ 2x+y=3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{4}{3}x-\frac{4y-x}{2}+\frac{35}{12}-\frac{x+y}{4}=0 \\ \frac{3(x+y)}{2}-\frac{1}{2}(5x-y)=\frac{1}{3}(11-4x+y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+ay+a=0 \\ 2x-ay+a=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2ax+2y-1=0 \\ ax+y=3 \end{cases}$.

**10.23.** Il segmento $AB$ misura 80cm; il punto $P$ lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.




**10.24.** Stabilire se è determinato il sistema:

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)-3(x-2)=2(x-y+3)+x^2 \\ x(x+y-3)+y(4-x)=x^2-4x+y \end{cases}.$$

**10.25.** Verificare che il determinante della matrice del sistema è nullo:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{7}{4}y=10^5 \\ \\ 6x-7y=5^{10} \end{cases}.$$

**10.26** (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$.

**10.27** (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y-\dfrac{2}{3}y=2 \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{y}{5}-\dfrac{x}{2}=10 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4-2x=\dfrac{3}{2}(y-1) \\ \dfrac{2x+3y}{2}=\dfrac{7+2x}{2} \end{cases}$.

**10.28** (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=+2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$.

**10.29** (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax+ay=3a^2 \\ x-2y=-3a \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x-2y=8k \\ x-y=3k \end{cases}$.

**10.30.** Risolvi col metodo di Cramer il sistema

$$\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \dfrac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}.$$

Cosa osservi?

**10.31.** Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}y=-2 \\ \dfrac{5}{4}x-\dfrac{15}{4}y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

**10.32.** Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} \frac{1}{7}x - \frac{4}{5}y = 0 \\ \frac{5}{4}x - 7y = \frac{19}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -40x + 12y = -3 \\ 17x - 2y = 100 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$.

**10.33.** Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} -x + 3y = -\frac{8}{15} \\ 5x - 15y = \frac{2^3}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{y}{2} + 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

**10.34.** La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

**10.35.** Stabilisci per quale valore di $a$ il sistema $\begin{cases} ax + y = -2 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$ è determinato. Se $a = -\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

**10.36.** Perché se $a = \frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x + ay = 2a \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ è indeterminato?

**10.37.** Per quale valore di $k$ è impossibile il sistema?

$$\begin{cases} 2x - 3ky = 2k \\ x - ky = 2k \end{cases}.$$

**10.38.** Per quale valore di $k$ è indeterminato il sistema?

$$\begin{cases} (k-2)x + 3y = 6 \\ (k-1)x + 4y = 8 \end{cases}.$$

**10.39 (*).** Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ 2y = 2x - 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$.

**10.40 (*).** Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=+2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

**10.41** (*). Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

**10.42.** Vero o falso?

a) Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette? [V] [F]
b) Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione? [V] [F]
c) Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono? [V] [F]

**10.43.** Completa:

- se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
- se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
- se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## 10.3 Sistemi fratti

**10.44** (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{4y+x}{5x}=1 \\ \dfrac{x+y}{2x-y}=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2+3\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x} \\ 3\dfrac{x}{y}-1=\dfrac{-2}{y} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=\dfrac{4x-9}{12} \\ \dfrac{y+2}{y-1}+\dfrac{1+2x}{1-x}+1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{y}{2x-1}=-1 \\ 2\dfrac{x}{y-1}=1 \end{cases}$.

**10.45** (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3\dfrac{x}{y}-\dfrac{7}{y}=1 \\ 2\dfrac{y}{x}+\dfrac{5}{x}=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{9y}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3y} \\ 9\dfrac{y}{2x}-1-\dfrac{3}{x}=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2\dfrac{x}{3y}-\dfrac{1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2-\dfrac{y}{2}-2}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+\dfrac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$.

**10.46 (*).** Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}-\dfrac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{\dfrac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \dfrac{x}{\dfrac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{x-y}=\dfrac{1}{y-x} \\ x=2y-10 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y+3}=1 \\ \dfrac{5}{y+3}=\dfrac{6}{2-x}-4 \end{cases}$.

**10.47 (*).** Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}+\dfrac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ y\left(\dfrac{x}{y}+3\right)=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{y(y-x-1)}{y+1}+x-y+1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{3x-7y+1}{4x^2-9y^2}=\dfrac{4}{18y^2-8x^2} \\ \dfrac{4(1-3x)^2}{2}-y=\dfrac{(12x-5)(6x-y)}{4}+3xy+2 \end{cases}$.

**10.48 (*).** Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{x-2y}-\dfrac{3y-1}{x+5y}=\dfrac{2(x^2+2xy)-(3y-2)^2}{x^2+3xy-10y^2} \\ x+y=-19 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3y+1}+\dfrac{xy-y}{x-3y-1}=\dfrac{x^2-3xy+x^2y-3xy^2+3y^2}{x^2+9y^2-6xy-1} \\ \dfrac{x-3}{5y-1}-\dfrac{y-3}{1+5y}=\dfrac{x+5y^2-5xy+2}{1-25y^2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x^2-xy-2y^2}-\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x+y}=-9 \end{cases}$;

d ) $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ \dfrac{y+1}{x-1} + \dfrac{3-y}{5x-5} - \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases}$.

**10.49.** Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a ) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{y+2}{y-2} \\ \dfrac{3x-1}{3x-2} = \dfrac{1+y}{y-2} \end{cases}$;

b ) $\begin{cases} \dfrac{2}{5x-y} = \dfrac{-3}{5y-x} \\ \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{2x+y-1}{3y-4x} \end{cases}$;

c ) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{6}}{2\left(y+2\sqrt{2}\right)} = 0 \end{cases}$;

d ) $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1} = 2 \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1} = -2 \end{cases}$;

e ) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{3}{y-3} \\ \dfrac{1}{y+3} = \dfrac{-1}{2-x} \end{cases}$.

### 10.4 Sistemi letterali

**10.50 (*).** Risolvere e discutere il seguente sistema. Per quali valori di $a$ la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi?

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ \dfrac{x}{2a} + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

**10.51.** Perché se il seguente sistema è determinato la coppia soluzione è accettabile?

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1} = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

**10.52.** Nel seguente sistema è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a > 2$?

$$\begin{cases} \dfrac{a-x}{a^2} + a + \dfrac{y-2a}{a+1} = -1 \\ 2y = x \end{cases}.$$

**10.53.** Spiegate perché non esiste alcun valore di $a$ per cui la coppia $(0; 2)$ appartenga a I. S. del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1} = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

**10.54** (*). Nel seguente sistema determinate i valori da attribuire al parametro $a$ affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi.

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y-a}{3} = \frac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}.$$

**10.55** (*). Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+6ky=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}=x^2-3x+y-2 \\ \frac{x^2-4xy+3y^2}{3y-x}=k \end{cases}$; d) $\begin{cases} kx-8y=4 \\ 2x-4ky=3 \end{cases}$.

**10.56** (*). Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 4x-k^2y=k \\ kx-4ky=-3k \end{cases}$; c) $\begin{cases} (k-1)x+(1-k)y=0 \\ (2-2k)x+y=-1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} kx-4ky=-6 \\ kx-k^2y=0 \end{cases}$;

## 10.5 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

**10.57** (*). Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y=2 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-2y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3y+6z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$;

**10.58** (*). Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$.

**10.59 (*).** Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ ; e) $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ ; f) $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ .

**10.60.** Quale condizione deve soddisfare il parametro $a$ affinché il sistema seguente non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad $a$ il valore 2.

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases} .$$

**10.61.** Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile:

$$\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases} .$$

**10.62.** Verifica se il sistema è indeterminato:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases} .$$

**10.63.** Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di $x, y, z$ ottenuti risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases} .$$

## 10.6 Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

**10.64 (*).** Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}=-4 \\ \dfrac{2}{3x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$ ; sostituire $u=\frac{1}{x}; v=\frac{1}{y}$.

b) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ ; sostituire $u=x^2; v=y^2$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=1 \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}=2 \end{cases}$ ; sostituire $u=\frac{1}{x+y}; v=\ldots$.

**10.65** (*). Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x}-\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=-3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{y-1}=3 \end{cases}$ .

**10.66** (*). Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-3 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ 2x^3-y^3=-6 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2-3y^2=12 \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=2 \\ \dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$ .

### 10.7.2 Esercizi riepilogativi

Gli esercizi indicati con (†) sono tratti da *Matematica* 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V. Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pg. 53; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei professori che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

**10.67** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ ;

d) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$ .

**10.68** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 7x-2y=4 \\ 8x-6y=9 \end{cases}$.

**10.69** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x-2y=5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x-2x=7 \\ -x-2y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

**10.70** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-2y=-\dfrac{1}{6} \\ -y-\dfrac{2}{3}y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{2}y-1=0 \\ 3x-\dfrac{1}{5}y+\dfrac{3}{2}=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-\dfrac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}y+3x=y \\ x-\dfrac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$.

**10.71** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 5y+\dfrac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-3y=\dfrac{1}{2} \\ 3(y-2)+x=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$.

**10.72** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+3y+2=0 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{11}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=1 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y=1 \end{cases}$.

**10.73 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = -\frac{3}{10} \\ -25x + 5y = 6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

**10.74 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3) - y = \frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{3}{2}(y-2) + x = 6\left(x + \frac{1}{3}\right) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 10x - 5y = 26 \\ x + 5y = -\frac{42}{5} \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{x+4y}{6} - 3 = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$.

**10.75 (*).** Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 3(x-4) = -\frac{4y}{5} \\ 7(x+y) + 8\left(x - \frac{3y}{8} - 2\right) = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{2}{5}(y - x - 1) = \frac{y-x}{3} - \frac{2}{5} \\ (x-y)^2 - x(x-2y) = x + y(y-1) \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x - 3(x-y) = -1 + 3y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{6} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} (y+2)(y-3) - (y-2)^2 + (x+1)^2 = (x+3)(x-3) - \frac{1}{2} \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right) - (y-1)^2 + 2x + 3 = \frac{3}{4} \end{cases}$.

**10.76** (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{2}-y+5}{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = x - \dfrac{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}{2} \\ -x - \dfrac{\frac{y}{3}-x}{2} = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+\dfrac{y}{4}-3x = \dfrac{(2x+1)^2}{4} - \dfrac{y}{2} \\ (y-1)^2 = -8x+y^2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x+1}{2}-y}{2} = y-20x \\ x-\dfrac{y}{4} = \dfrac{x-y}{6} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{4y-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} = x-2y \\ x = 3y \end{cases}$.

**10.77.** Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

**10.78** (*). Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6.

**10.79** (*). Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due.

**10.80** (*). Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del minore aumentato di 1/4 del maggiore, mentre la loro differenza è uguale a 9.

**10.81** (*). Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49.

**10.82** (*). Determina tre lati sapendo che il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato.

**10.83** (*). Determina un numero di due cifre sapendo che la cifrà delle diecine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente.

**10.84** (*). Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifre è 12.

**10.85** (†). Determina due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12.

**10.86** (*, †). Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale.

**10.87** (†). Determinare la frazione che diventa uguale a 5/6 aumentando i suoi termini di 2 e diventa 1/2 se i suoi termini diminuiscono di 2.

**10.88** (*, †). La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi.

**10.89** (*, †). Un numero naturale diviso per 3 dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziente.

**10.90** (*). Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa€ 180 e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: «Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici». Giulia ribatte: «se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io». Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia?

**10.91.** A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati € 216 per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano € 1, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano € 1,5, gli adulti pagano € 3. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

**10.92.** Da un cartone quadrato di lato 12cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è $33,6$cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

**10.93 (*).** Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono € $4,60$, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono € $6,90$. È possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto?

**10.94 (*).** Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto?

**10.95 (*).** Un cicloturista percorre 218km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe?

**10.96 (*).** In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto?

**10.97.** Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

**10.98.** Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha € 5 in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

**10.99.** Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

**10.100 (*).** In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In totale le ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio.

**10.101.** Un vasetto di marmellata pesa 780g. Quando nel vasetto rimane metà marmellata, il vasetto pesa 420g. Quanto pesa il vasetto vuoto?

**10.102 (*).** Una gelateria prepara per la giornata di Ferragosto 30kg di gelato. Vende i coni da due palline a € 1,50 e i coni da tre palline a € 2,00. Si sa che da 2kg di gelato si fanno 25 palline di gelato. A fine giornata ha venduto tutto il gelato e ha incassato € 272,50. Quanti coni da due palline ha venduto?

**10.103 (Prove Invalsi 2004-2005).** Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre e il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Determina l'età di Marco e di Luca.

**10.104 (Giochi d'autunno 2010, Centro Pristem).** Oggi Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni hanno attualmente i due?

**10.105** (Giochi di Archimede, 2008)**.** Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 euro. Con grande generosità però gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo?

**10.106** (*)**.** Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano € 1,50; cornetto e succo di frutta costano € 1,80, caffè e succo di frutta costano € 1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta?

**10.107** (†)**.** Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute?

**10.108** (*, †)**.** Nella città di Nonfumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i $2/3$ delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono i $9/16$ delle latterie. Dall'anno scorso a quest'anno il numero cimplessivo dei negozi di Non fumo è rimasto lo stesso. Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo?

**10.109.** Un rettangolo di perimetro 80cm ha la base che è i $2/3$ dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

**10.110** (*)**.** Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72cm. La base minore è i $3/4$ della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei $2/3$ della base minore con i $3/2$ della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio.

**10.111** (*)**.** Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto $3/2$. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16cm.

**10.112.** In un triangolo rettangolo i $3/4$ dell'angolo acuto maggiore sono pari ai $24/13$ dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli.

**10.113** (*)**.** In un triangolo, un angolo supera di $16°$ un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai $29/16$ della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo.

**10.114.** In un rettangolo di perimetro 120cm, la base è $2/3$ dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo.

**10.115.** Determina le misure dei tre lati $x$, $y$, $z$ di un triangolo sapendo che il perimetro è 53cm. Inoltre la misura $z$ differisce di 19cm dalla somma delle altre due misure e che la misura $x$ differisce di 11cm dalla differenza tra $y$ e $z$.

**10.116** (*)**.** Aumentando la base di un rettangolo di 5cm e l'altezza di 12cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120cm che è più lungo di 12cm del perimetro del rettangolo iniziale.

**10.117** (*)**.** In un triangolo isoscele di perimetro 64cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo.

**10.118** (*)**.** Un segmento $AB$ di 23cm viene diviso da un suo punto $P$ in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minore aumentato di 20cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso $AB$ dal punto $P$.

### 10.7.3 Risposte

**10.8** a) $(1;0)$, b) $(-2;-2)$, c) $(0;1)$, d) $(0;1)$.

**10.9** a) $(4;5)$, b) indeterminato, c) $(1;-1)$, d) $(-4;2)$.

**10.10** a) indeterminato, b) $(4;5)$, c) impossibile, d) indeterminato.

**10.11** a) $(-66;-12)$, b) $(2;3)$, d) $(0;0)$.

**10.12** a) $\left(-\frac{9}{8};-\frac{9}{8}\right)$, b) $\left(\frac{28}{17};\frac{6}{17}\right)$, d) $(1;-3)$.

**10.13** a) $\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$, c) $\left(\frac{1}{6};\frac{35}{24}\right)$.

**10.16** a) $(0;0)$, b) $(2;-1)$, c) $(2;1)$, d) $(-1;-3)$.

**10.17** a) impossibile, c) impossibile, d) indeterminato.

**10.18** a) $\left(\frac{2}{3};0\right)$, b) $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$, c) $(3;4)$, d) $(0;1)$.

**10.20** a) $(0;0)$, b) $(0;1)$, c) $\left(\frac{1}{2};0\right)$, d) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

**10.21** a) $(1;1)$, b) $(1;1)$, c) $\left(\frac{35}{12};\frac{19}{12}\right)$, d) $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$.

**10.22** a) $(-11;-31)$, b) $(1;1)$, c) $(1;2)$.

**10.26** a) $(2;0)$, b) $\left(\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right)$, c) $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$, d) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

**10.27** a) $(21,-12)$, b) $\left(-\frac{240}{19};\frac{350}{19}\right)$, c) $\left(\frac{34}{37};\frac{16}{37}\right)$, d) $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.

**10.28** a) $(-1;0)$, b) $\left(\frac{1}{2};-1\right)$, c) $\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)$, d) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$.

**10.29** a) impossibile, b) indeterminato, c) $(a;2a)$, d) $(2k;-k)$.

**10.39** a) rette parallele, sistema impossibile, b) $(-3;-8)$, c) rette identiche, indeterminato, d) $(2;2)$.

**10.40** a) $(-1;0)$, b) $(2;0)$, c) $(-1;0)$, d) rette parallele, impossibile.

**10.41** a) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, b) $(1;1)$, c) $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$.

**10.44** a) indeterminato, b) $(3;3)$, c) $(-\frac{5}{11};\frac{7}{11}$, d) impossibile.

**10.45** a) $\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$, b) $(-1;-1)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

**10.46** a) $(39;-38)$, b) $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$, c) $(-6;2)$, d) $(-2;-5)$.

**10.47** a) $\left(-\frac{9}{8};-\frac{9}{8}\right)$, b) $(1;1)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{3}{17};\frac{6}{17}\right)$.

**10.48** a) $(-18;-1)$, b) $\left(\frac{7}{4};\frac{1}{2}\right)$, c) $(2;-1)$.

**10.50** $a > 0$.

**10.54** $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

**10.55** a) $a \neq 0 \to (a;1)$, b) determinato per $k \neq 14$, $k \neq \frac{6}{7}$ con soluzioni $\left(\frac{k-6}{4};\frac{5k-6}{4}\right)$; se $k = 14 \vee k = \frac{6}{7}$ impossibile, c) determinato $\forall k$ con soluzioni $\left(\frac{12k}{6k^2+1};\frac{2}{6k^2+1}\right)$, d) determinato per $k \neq -2$, $k \neq 2$ con soluzioni $\left(\frac{4k-6}{k^2-4};\frac{8-3k}{4(k^2-4)}\right)$; se $k = -2 \vee k = 2$ impossibile.

**10.56** a) Determinato per $k \neq -4$, $k \neq 4$, $k \neq 0$ con soluzioni $\left(\frac{3k^2+4k}{16-k^2};\frac{k+12}{16-k^2}\right)$; se $k = -4 \vee k = 4$ impossibile; se $k = 0$ indeterminato con soluzioni tipo $(0;t)$ con $t \in \mathbb{R}$,

b) determinato per $k \neq 0, k \neq 4$con soluzioni $\left(\frac{6}{4-k}; \frac{6}{k(4-k)}\right)$; se $k = 0 \vee k = 4$ impossibile, c) determinato per $k \neq 1, k \neq \frac{3}{2}$ con soluzioni $\left(\frac{1}{2k-3}; \frac{1}{2k-3}\right)$; se $k = \frac{3}{2}$ impossibile; se $k = 1$ indeterminato con soluzioni del tipo $(t; -1)$.

**10.57** a) $(0; -2; 3)$, b) $\left(3; \frac{8}{9}; \frac{1}{9}\right)$, c) $(1; 1; 0)$, d) $(-21, -7, 12)$, e) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{14}\right)$, f) $(-5; 6; 4)$.

**10.58** a) $(2; 0; 0)$, b) $(1; 1; 1)$, c) $(0; -1; 0)$, d) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, e) $\left(\frac{9}{31}; \frac{17}{31}; -\frac{5}{31}\right)$, f) $\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{30}; \frac{1}{30}\right)$.

**10.59** a) $(5; 3; 2)$, b) $\left(-\frac{60}{43}; -\frac{53}{43}; \frac{47}{43}\right)$, c) $\left(\frac{10}{3}; -3; \frac{1}{3}\right)$, d) $(6; 11; -8)$, e) $\left(-5; -\frac{33}{4}; -\frac{21}{2}\right)$, f) $\left(-\frac{5}{2}; 6; \frac{11}{3}\right)$.

**10.64** a) $\left(-\frac{1}{27}; \frac{2}{19}\right)$, b) $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$, c) $\left(\frac{55}{9}; -\frac{44}{9}\right)$.

**10.65** a) $\left(\frac{7}{6}; 14\right)$, b) $(1; 1)$, c) $(2; -1)$, d) $\left(-\frac{1}{4}; -2\right)$.

**10.66** a) $\left(1; -\frac{5}{8}; -\frac{5}{7}\right)$, b) $(1; 2)$, c) $\emptyset$, d) $(1; 1; 1)$, $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$; $(-1; 1; -1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; -1; -1)$.

**10.67** a) $(0; 1)$, b) $(-1; -1)$, c) $\left(\frac{7}{5}; \frac{6}{5}\right)$, d) $\left(\frac{5}{17}; -\frac{9}{17}\right)$.

**10.68** a) $(1; 1)$, b) $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, c) $\left(\frac{7}{19}; \frac{1}{19}\right)$, d) $\left(\frac{3}{13}; -\frac{31}{26}\right)$.

**10.69** a) $\left(\frac{22}{13}; \frac{7}{13}\right)$, b) $\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, c) $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, d) $\left(\frac{7}{3}; -\frac{11}{12}\right)$.

**10.70** a) $\left(-\frac{59}{20}; -\frac{9}{10}\right)$, b) indeterminato, c) $\left(-\frac{123}{266}; \frac{75}{133}\right)$, d) $(-30; -54)$.

**10.71** a) Impossibile, b) $(-1; 2)$, c) $\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{9}\right)$, d) $(2; -3)$.

**10.72** a) $(1; 2)$, b) $(3; -1)$, c) $(2; 1)$, d) $(1; 1)$.

**10.73** a) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, b) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

**10.74** a) $\emptyset$, b) $\left(\frac{8}{5}; -2\right)$, c) $\left(-\frac{50}{47}; -\frac{10}{47}\right)$, d) $(2; 4)$.

**10.75** a) impossibile, c) $(1; -2)$, d) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

**10.76** a) $\left(-\frac{92}{27}; \frac{38}{9}\right)$, b) $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$, c) $\left(-\frac{1}{21}; -\frac{10}{21}\right)$, d) $\left(\frac{27}{26}; \frac{9}{26}\right.$.

**10.78** $(18; 18)$.

**10.79** $18,75; 21,75; 40,5$.

**10.80** $(27; 36)$.

**10.81** $(26; 31)$.

**10.82** (12m, 13m, 25m).

**10.83** 63.

**10.84** 75.

**10.86** 84.

**10.88** $(35; 30)$.

**10.89** $(70; 118; 23)$.

**10.90** $(108; 144)$.

**10.93** Indeterminato.

**10.94** €0,7 e €0,9.

**10.95** 60km; 72km; 86km.

**10.96** 27; 16.

**10.100** 30 auto; 20 camion; 12 moto.

**10.102** 135.

**10.106** € 11,90.

**10.108** 30.

**10.110** $\frac{288}{23}$cm; $\frac{216}{23}$cm.

**10.111** 1536cm$^2$.

**10.113** 24°; 40°; 116°.

**10.116** Impossibile.

**10.117** 16cm; 24cm.

**10.118** 7cm; 16cm.

# Relazioni 11

## 11.1 Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o "Giove ruota intorno alla Terra" sono considerate *proposizioni* perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.

Non sono proposizioni in senso matematico "Cosa stai studiando?", "domani pioverà!", "$x$ è un numero primo": infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l'ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a $x$, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.

Ogni proposizione è formata da un *predicato* (verbo) e dai suoi *argomenti* (cose o persone alle quali il verbo si riferisce).

Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

| Soggetto | Predicato | Complemento |
|---|---|---|
| 19 | è maggiore di | 5 |
| Giove | ruota attorno alla | Terra |

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce. In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il *soggetto* e il *complemento*) in altre ad un solo argomento: ad esempio, il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

**Definizione 11.1.** Si dice *predicato binario* un predicato che si riferisce a due argomenti.

## 11.2 Relazioni in un insieme

Il termine *relazione* entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", "domani consegnerò la relazione di fisica". Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.

Dal punto di vista matematico diamo la seguente definizione.

**Definizione 11.2.** Si dice *relazione* in un insieme $A$ un predicato binario che lega due elementi dell'insieme.

**Esempio 11.1.** Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme $A$:

| | | |
|---|---|---|
| 30 è multiplo di 6; | 30 è multiplo di 5; | 9 è multiplo di 9; |
| 9 è multiplo di 3; | 3 è multiplo di 3; | 30 è multiplo di 30. |
| 30 è multiplo di 3; | 5 è multiplo di 5; | |
| 6 è multiplo di 3; | 6 è multiplo di 6; | |

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme $A$ una relazione matematica. Esso tuttavia non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

---

Se chiamiamo con $\mathfrak{R}$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare sinteticamente che la proposizione avente come soggetto $a$, come complemento $b$ e come predicato $\mathfrak{R}$, scriviamo $a\mathfrak{R}b$ e diremo sinteticamente che $a$ *è in relazione con* $b$.

---

**Esempio 11.2.** Con riferimento all'esempio precedente si ha: $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$, $\mathfrak{R}$: "essere multiplo di". Allora scriviamo: per qualunque $a$ e $b$ appartenenti ad $A$, $a\mathfrak{R}b$ se e solo se $a$ è multiplo di $b$, in particolare:

$$30\mathfrak{R}\,6;\quad 9\mathfrak{R}\,3;\quad 30\mathfrak{R}\,3;\quad 6\mathfrak{R}\,3;\quad 30\mathfrak{R}\,5;\quad 3\mathfrak{R}\,3;\quad 5\mathfrak{R}\,5;\quad 6\mathfrak{R}\,6;\quad 9\mathfrak{R}\,9;\quad 30\mathfrak{R}\,30.$$

---

Abbiamo così formato un insieme di *coppie ordinate* di elementi tra loro in relazione: $30\mathfrak{R}\,5$ può anche essere indicata con $(30, 5)$.

**Definizione 11.3.** Chiamiamo *insieme della relazione* (in simboli $G_{\mathfrak{R}}$) l'insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un sottoinsieme del prodotto cartesiano dell'insieme $A$ con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_{\mathfrak{R}} = \{(a, b) \in A \times A / a\mathfrak{R}b\}$.

### 11.2.1 Grafico di una relazione

Dal momento che una relazione in un insieme $Y$ determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano $Y \times Y$ è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano. Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un *grafico cartesiano*.

### 11.2.2 Matrice o tabella di una relazione

Nella figura 11.1 è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto) indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia $(D, 5)$ indica la cella annerita.

### 11.2.3 Grafo di una relazione

**Definizione 11.4.** Un *grafo* è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

---

**Esempio 11.3.** Nel diagramma di Eulero-Venn (figura 11.2) dell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ rappresentiamo la relazione $\Re$ = "essere multiplo di" collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizione vere.

Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una freccia all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un *anello* o *cappio* per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento $a$ dell'insieme $A$ la proposizione: "$a$ è multiplo di $a$".

---

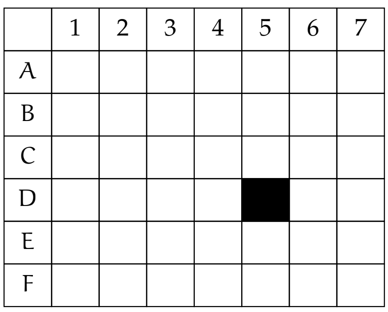



FIGURA 11.1: Griglia della battaglia navale.

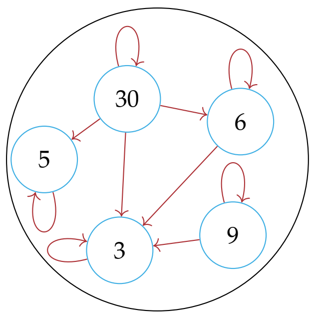



FIGURA 11.2: L'insieme A.

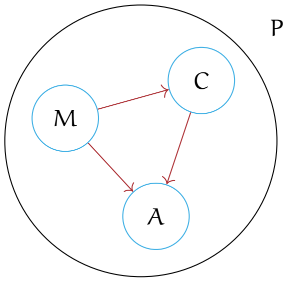



FIGURA 11.3: Proprietà antiriflessiva.

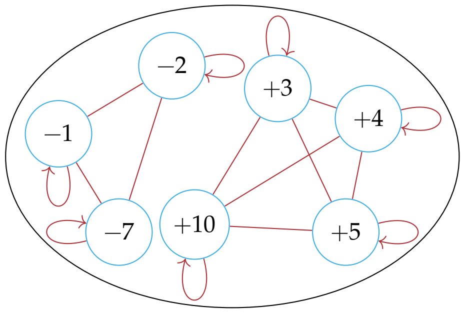



FIGURA 11.4: Proprietà simmetrica.

## 11.3 Proprietà delle relazioni

### 11.3.1 Proprietà riflessiva

**Esempio 11.4.** Nell'insieme $T = \{7, 8, 12, 34, 100\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore di". Puoi osservare che ogni numero è divisore di se stesso, cioè ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso. Una relazione di questo tipo si dice che gode della *proprietà riflessiva*. Osserva, però, che nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali la relazione "essere divisibile per" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

**Definizione 11.5.** Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà riflessiva* quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia per qualunque $x$ dell'insieme A si ha $x\mathfrak{R}x$.

### 11.3.2 Proprietà antiriflessiva

**Esempio 11.5.** Nell'insieme delle persone $P = \{\text{Marco, Antonio, Carlo}\}$ è data la relazione $\mathfrak{R}$: "essere più alto" rappresentata con la figura 11.3. Puoi notare che nessun elemento è in relazione con se stesso. In effetti nessuno può "essere più alto" di se stesso.

**Definizione 11.6.** Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà antiriflessiva* quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia per nessun elemento $x$ di A si ha $x\mathfrak{R}x$.

### 11.3.3 Proprietà simmetrica

**Esempio 11.6.** Nella figura 11.4 è rappresentata la relazione $\mathfrak{R}$: "essere concorde con" nell'insieme dei numeri $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$. Per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Per questa relazione si può osservare che se un elemento dell'insieme è in relazione con un altro allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo: $-1\mathfrak{R}-7$, ma anche $-7\mathfrak{R}-1$; $+3\mathfrak{R}+5$, ma anche $+5\mathfrak{R}+3$ e così via.

**Definizione 11.7.** Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme $A$ gode della *proprietà simmetrica* quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e complemento; ossia per qualunque $x$ e $y$ appartenenti all'insieme $A$ se vale $x\mathfrak{R}y$ allora vale anche $y\mathfrak{R}x$.

### 11.3.4 Proprietà antisimmetrica

**Esempio 11.7.** Il diagramma di Venn, nella figura 11.5, rappresenta un insieme $U$ e alcuni suoi sottoinsiemi.

Consideriamo ora l'insieme di insiemi $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ e la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme proprio di": completa il grafo della relazione.

Certamente nel completare il grafo (figura 11.6) non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

**Definizione 11.8.** Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme $A$ gode della *proprietà antisimmetrica* quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia per qualunque $x$ e $y$ dell'insieme $A$ se $x \neq y$ e se $x\mathfrak{R}y$ non è vero che $y\mathfrak{R}x$.

### 11.3.5 Proprietà transitiva

**Esempio 11.8.** Nel grafo (figura 11.7) è rappresentata una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme $T$. Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di ($a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c$) segue la verità di $a\mathfrak{R}c$. Analizzando gli altri elementi, possiamo osservare che essendo vera ($e\mathfrak{R}f$ e $f\mathfrak{R}g$) è vera anche $e\mathfrak{R}g$; inoltre si ha che essendo vera ($n\mathfrak{R}m$ e $m\mathfrak{R}t$) è vera anche $n\mathfrak{R}t$.

**Definizione 11.9.** Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme $A$ gode della *proprietà transitiva* quando se $a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c$ allora risulta anche $a\mathfrak{R}c$, con $a$, $b$, $c$ elementi qualsiasi dell'insieme $A$.

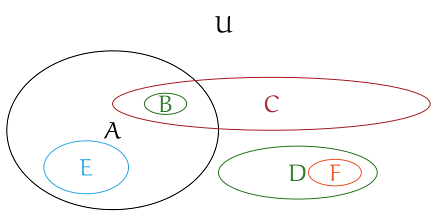



FIGURA 11.5: L'insieme U.

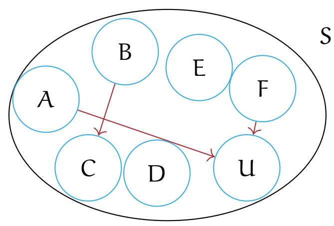



FIGURA 11.6: L'insieme S.

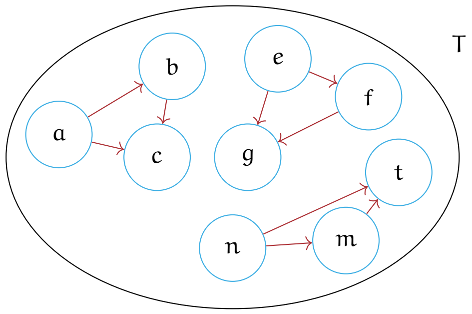



FIGURA 11.7: L'insieme T.

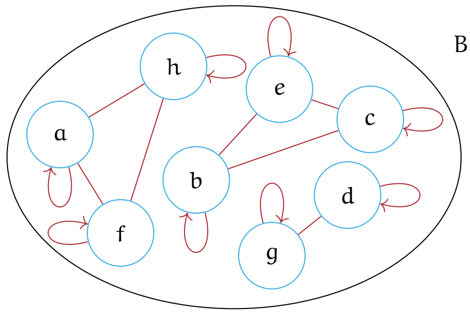



FIGURA 11.8: L'insieme B.

## 11.4 Relazioni di equivalenza

---

**Esempio 11.9.** Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

| Relazione | Insieme | Proprietà |
|---|---|---|
| Avere lo stesso perimetro | poligoni | [Ri][Si][Tr] |
| Essere fratello di | persone | [Ri][Si][Tr] |
| Essere figlio di | persone | [Ri][Si][Tr] |
| Essere più alto di | persone | [Ri][Si][Tr] |
| Avere gli angoli rispettivamente congruenti | triangoli | [Ri][Si][Tr] |
| Iniziare con la stessa lettera | parole | [Ri][Si][Tr] |
| Giocare nella stessa squadra | calciatori | [Ri][Si][Tr] |
| $(a, b)R(x, y)$ se e solo se $a + b = x + y$ | $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ | [Ri][Si][Tr] |

*Svolgimento*: La prima relazione gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti:

- "il poligono $p$ ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (*proprietà riflessiva*);
- "il poligono $p_1$ ha lo stesso perimetro del poligono $p_2$" implica la verità della proposizione "il poligono $p_2$ ha lo stesso perimetro di $p_1$", qualunque siano i due poligoni $p_1$ e $p_2$ (*proprietà simmetrica*);
- se "il poligono $p_1$ ha lo stesso perimetro di $p_2$" e "$p_2$ ha lo stesso perimetro di $p_3$" allora si ha anche che "$p_1$ ha lo stesso perimetro di $p_3$", qualunque siano i poligoni $p_1$, $p_2$, $p_3$ (*proprietà transitiva*).

Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

---

**Definizione 11.10.** Chiamiamo *relazione d'equivalenza* la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

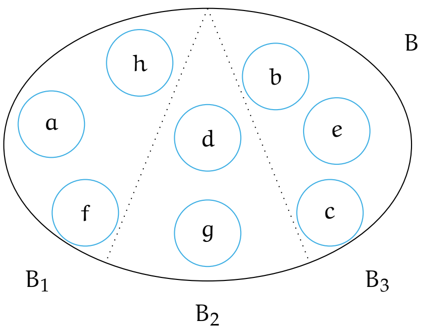



FIGURA 11.9: I sottoinsiemi dell'insieme B.

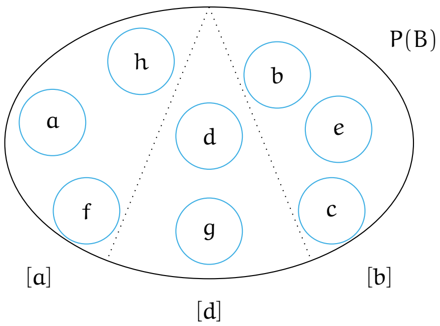



FIGURA 11.10: La partizione dell'insieme B in classi d'equivalenza.

---

**Esempio 11.10.** Dato l'insieme $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e la relazione rappresentata dal grafo (figura 11.8) costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:

- *ripeti*;
- scegliamo a caso un elemento di B;
- formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;
- *finché* non abbiamo esaurito tutti gli elementi.

*Svolgimento*:

- scegliamo l'elemento $a$, formiamo il sottoinsieme avente come elementi $a$, $h$, $f$ che con $a$ sono in relazione: $B_1 = \{a, h, f\}$. Gli elementi di B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti;
- scegliamo $g$ e formiamo il sottoinsieme $B_2$ avente come elementi $g$ e $d$, l'unico che con esso è in relazione: $B_2 = \{g, d\}$. Gli elementi dell'insieme B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti;
- scegliamo $c$ e formiamo il sottoinsieme $B_3$ avente come elementi $c$, $e$, $b$ che con esso sono in relazione: $B_3 = \{c, e, b\}$.

Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato. Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme B (figura 11.9), che hanno queste particolari caratteristiche:

- nessuno è vuoto;
- a due a due sono disgiunti;
- la loro unione è l'insieme B.

---

Premettiamo le definizioni:

**Definizione 11.11.** Determinare una *partizione di un insieme* $X$ significa suddividere l'insieme stesso in un numero di sottoinsiemi $X_1, X_2, \dots, X_n$, detti *classi*, tali che

a ) nessun sottoinsieme è vuoto,
b ) a due a due sono disgiunti,
c ) la loro unione è l'insieme $X$.

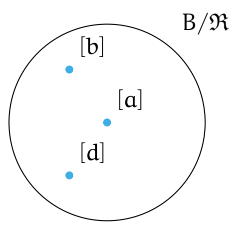
La *partizione* di $X$ è l'insieme i cui elementi sono le classi $X_1, X_2, \dots, X_n$, e viene indicato con $P(X) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

**Definizione 11.12.** Quando in un insieme $A$ è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama *classe d'equivalenza* ogni sottoinsieme di $A$ contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare una *partizione dell'insieme* $A$ *in classi d'equivalenza* ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di $B$ indicati con $[a], [b], [d]$; la partizione dell'insieme $B$ in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn nella figura 11.10.

**Definizione 11.13.** Si chiama *insieme quoziente* di un insieme $A$ rispetto a una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione $\mathfrak{R}$. L'insieme quoziente si indica con il simbolo $A/\mathfrak{R}$.

Nel caso dell'esempio precedente si passa all'insieme quoziente $B/\mathfrak{R}$ del seguente diagramma di Eulero-Venn:




❑ **Osservazione** Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$ in un insieme $A$, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi:

$$\text{insieme } A \to \text{ partizione } P(A) \to \text{ insieme quoziente } A/\mathfrak{R}.$$

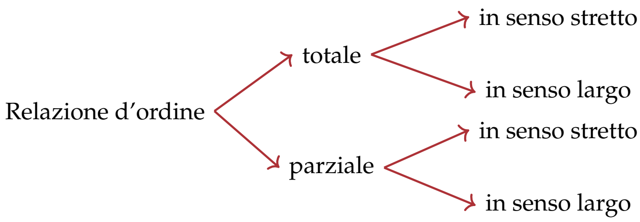
## 11.5 Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili.

Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

**Definizione 11.14.** Una relazione $\mathfrak{R}$, introdotta in un insieme $A$, si chiama *relazione d'ordine* se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:




Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 11.15.** Data una relazione $\mathfrak{R}$ d'ordine in un insieme $A$, due elementi distinti $x$ e $y$ sono *confrontabili* se rispetto ad $\mathfrak{R}$ si ha $x\mathfrak{R}y$ oppure $y\mathfrak{R}x$.

---

**Esempio 11.11.** In base al diagramma di Eulero-Venn nella figura 11.5 introduciamo nell'insieme di insiemi $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme di".

Ricordiamo che, dati due insiemi $X$ e $Y$, $X$ è *sottoinsieme* di $Y$ quando ogni elemento di $X$ appartiene a $Y$; in simboli $X \subseteq Y$ e si legge $X$ è contenuto in $Y$ o $X$ è uguale a $Y$.

Vogliamo studiare le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$:

a ) poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che $\mathfrak{R}$ è riflessiva;
b ) se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ allora $Y \not\subseteq X$ quindi $\mathfrak{R}$ è una relazione antisimmetrica;
c ) se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$ quindi $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva.

Inoltre è evidente che esistono almeno due elementi dell'insieme $S$ che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio $A \not\subseteq D$ e $D \not\subseteq A$, ossia $A$ e $D$ non sono confrontabili.

**Esempio 11.12.** Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell'esempio precedente e introduciamo nell'insieme $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme proprio di". Studiamo le proprietà di questa relazione:

➡ cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente? ...
➡ sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva? ...
➡ esistono elementi di $S$ non confrontabili? ...

---

**Definizione 11.16.** Una relazione d'ordine si dice *parziale* quando almeno due elementi non sono confrontabili.

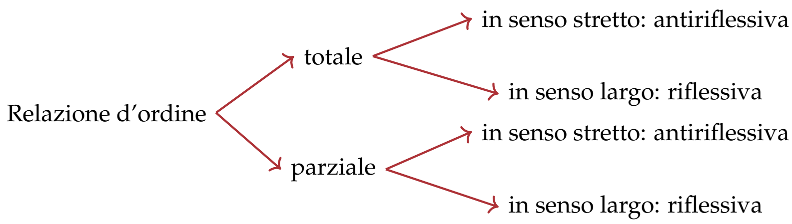
**Definizione 11.17.** Si dice relazione d'ordine parziale *in senso largo* quando la relazione gode della proprietà riflessiva.

**Definizione 11.18.** Si dice relazione d'ordine parziale *in senso stretto* quando la relazione gode della proprietà antiriflessiva.

**Definizione 11.19.** Una relazione d'ordine si dice *totale* quando due qualsiasi elementi possono essre messi in relazione, cioè sono confrontabili.

**Definizione 11.20.** Si dice relazione d'ordine totale *in senso largo* quando la relazione gode della proprietà riflessiva.

**Definizione 11.21.** Si dice relazione d'ordine totale *in senso stretto* quando la relazione gode della proprietà antiriflessiva.



## 11.6 Esercizi

### 11.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 11.1 Proposizioni e predicati

**11.1.** Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce:

| Proposizioni | Predicato | Argomenti |
|---|---|---|
| 7 è divisore di 14 | essere divisore di | 7, 14 |
| 11 è maggiore di 10 | essere maggiore di | |
| 5 è numero primo | | |
| Andrea frequenta la stessa palestra di Marco | | |
| Marta è moglie di Piero | | |
| Paolo è padre di Marco | | |

#### 11.2 Relazioni in un insieme

**11.2.** Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ considera il predicato "essere minore di"; con esso forma proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di $A$.

a) $p_1$: 9 è minore di 30;
b) $p_2$: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
c) $p_3$: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**11.3.** Nell'insieme $A$ rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn (figura 11.11) introduciamo il predicato $\mathfrak{R}$:"avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

*Traccia di soluzione*: Per costruire l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque $a$ e $b$ appartenenti ad $A$, $a\mathfrak{R}b$ se e solo se "$a$ ha una sola lettera diversa da $b$", ad esempio prete $\mathfrak{R}$ prese.

**11.4.** Nell'insieme C ={Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

**11.5.** Nell'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "$x$ ha lo stesso numero di sillabe di $y$". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

**11.6.** Nell'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere consecutivi". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

**11.7.** Considera l'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$, completa la rappresentazione grafica (figura 11.12) dell'insieme $S \times S$, evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "$x$ ha lo stesso numero di sillabe di $y$".

**11.8.** Considera l'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$; fai la rappresentazione grafica dell'insieme $F \times F$ e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "essere consecutivi".

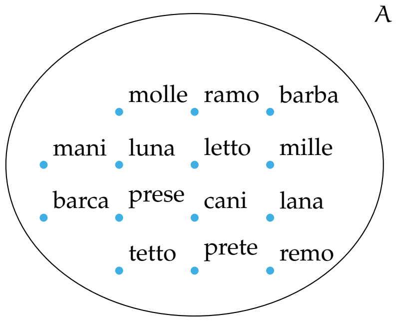



FIGURA 11.11: Esercizio 11.3.

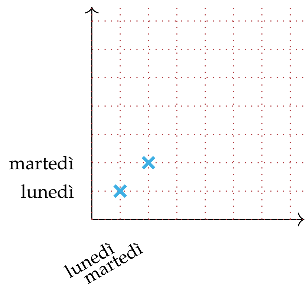



FIGURA 11.12: Esercizio 11.7.

**11.9.** Considera nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "$x$ è concorde con $y$". Costruiamo una tabella a doppia entrata (figura 11.13)) riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme $A$. Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

- se $a\mathfrak{R}b$ metti 1 nella cella $(a, b)$;
- altrimenti metti 0 nella cella $(a, b)$.

Prosegui tu seguendo l'esempio.

❑ **Osservazione** Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\mathfrak{R}$ è completamente rappresentata.

La tabella costruita si chiama *matrice della relazione*. Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

**11.10.** Nell'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "$x$ ha lo stesso numero di sillabe di $y$". Rappresenta la relazione con una matrice.

**11.11.** Assegnato il predicato $\mathfrak{R}$: "essere divisibile per" introdotto nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$, rappresenta con una matrice la relazione $\mathfrak{R}$.

| | −1 | +3 | −7 | +5 | −2 | +4 | +10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | | | | | | |
| +3 | | | | | | | |
| −7 | | | | | | | |
| +5 | | | 0 | | | | |
| −2 | | | | | | | |
| +4 | | | | | | | |
| +10 | | | | | | | |

FIGURA 11.13: Esercizio 11.9.

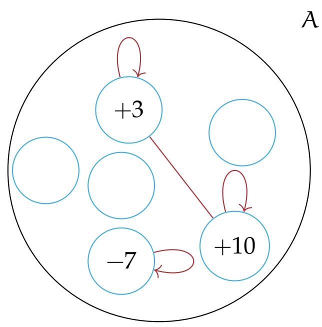



FIGURA 11.14: Esercizio 11.12.

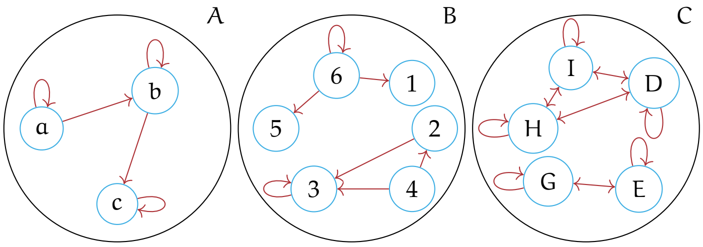



FIGURA 11.15: Esercizio 11.14.

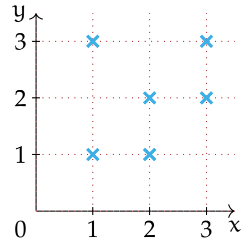



FIGURA 11.16: Esercizio 11.18.

**11.12.** Completa la rappresentazione (figura 11.14)) con frecce della relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "$x$ è concorde con $y$" nell'insieme $A$ $=\{-1,\ +3,\ -7,\ +5,\ -2,\ +4,\ +10\}$.

**11.13.** Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è introdotto il predicato $\mathfrak{R}$: "essere il doppio"; costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

**11.14.** Sono assegnati i grafi di tre relazioni $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ introdotte in altrettanti insiemi $A$, $B$, $C$ (figura 11.15); deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

**11.15.** Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme $C$ degli alunni della tua classe.

**11.16.** Nell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} / 21 < x < 40\}$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "la somma delle cifre di $x$ è uguale alla somma delle cifre di $y$". Costruisci $G_{\mathfrak{R}}$ e rappresenta la relazione con una matrice.

**11.17.** Scegli la risposta corretta: Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme $A$ determina:

a ) un sottoinsieme di $A$;
b ) l'insieme $A \times A$;
c ) un insieme di coppie;
d ) un grafico cartesiano;
e ) un sottoinsieme di $A \times A$.

**11.18.** Rappresenta con un grafo la relazione $\mathfrak{R}$ rappresentata nel grafico cartesiano della figura 11.16.

## 11.3 Proprietà delle relazioni

**11.19.** Quali relazioni sono riflessive?

| Insieme | Relazione | È riflessiva? |
|---|---|---|
| Numeri naturali | essere divisibile per | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Libri che hai in cartella | avere lo stesso numero di pagine | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Rette del piano | essere perpendicolare a | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Rette del piano | essere parallela a | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Poligoni | avere lo stesso numero di lati | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Città della Lombardia | terminare con la stessa vocale | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |
| Parole italiane | essere il plurale di | $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$ |

**11.20.** Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

| Insieme | Relazione | È antiriflessiva? |
|---|---|---|
| Numeri naturali | essere multiplo di | Sì No |
| Rette del piano | essere perpendicolare a | Sì No |
| Poligoni | avere lo stesso perimetro | Sì No |
| Città del Piemonte | avere più abitanti di | Sì No |
| Parole italiane | essere il femminile di | Sì No |
| Fiumi italiani | essere affluente | Sì No |
| Persone | essere figlio di | Sì No |

**11.21.** Riconosci le relazioni simmetriche:

| Insieme | Relazione | È simmetrica? |
|---|---|---|
| Città d'Italia | appartenere alla stessa regione | Sì No |
| Rette del piano | essere perpendicolari | Sì No |
| Solidi | avere lo stesso volume | Sì No |
| Persone | essere il padre di | Sì No |
| Persone | essere fratello o sorella di | Sì No |
| Numeri naturali | avere lo stesso numero di cifre di | Sì No |
| Fiumi d'Europa | essere affluente | Sì No |
| Numeri interi | essere il quadrato di | Sì No |

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio $+25$ è il quadrato di $+5$), non è vero che $+5$ è il quadrato di $+25$.

**11.22.** Riconosci le relazioni antisimmetriche:

| Insieme | Relazione | È antisimmetrica? |
|---|---|---|
| Numeri naturali | essere divisibile per | Sì No |
| Rette del piano | essere perpendicolare a | Sì No |
| Poligoni | avere lo stesso perimetro | Sì No |
| Angoli | essere complementare a | Sì No |
| Città del Lazio | essere nella stessa provincia di | Sì No |

**11.23.** Verifica se, nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta $\mathfrak{R}$ con un grafo:

a ) da $18\mathfrak{R}\,50$ e $50\mathfrak{R}\ldots$ segue $\ldots\mathfrak{R}\ldots$;
b ) da $\ldots\mathfrak{R}\,555$ e $\ldots\mathfrak{R}\,267$ segue $\ldots\mathfrak{R}\ldots$

**11.24.** Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

| Insieme | Relazione | È transitiva? |
|---|---|---|
| Numeri naturali | essere multiplo di | Sì No |
| Regioni d'Italia | essere più a nord di | Sì No |
| Numeri interi | essere minore di | Sì No |
| Rette del piano | essere perpendicolari | Sì No |
| Persone | essere padre di | Sì No |
| Stati d'Europa | confinare con | Sì No |

**11.25.** Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N}/0 \leqslant x \leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

| operazione | $0:4$ | $1:4$ | $2:4$ | | $12:4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| resto | 0 | 1 | | | 0 |

Introduciamo in H la relazione $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\mathfrak{R}$ introdotta nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è una relazione transitiva?

**11.26.** Completa il grafo (figura 11.17) in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva.

**11.27.** Indica la risposta corretta:

a ) se una relazione è simmetrica, all'insieme $G_\mathfrak{R}$ appartengono le coppie del tipo $(a, b)$ e $(b, a)$;
b ) il grafico cartesiano è un modo per rappresentare una relazione;
c ) la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente;
d ) la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente;
e ) se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica;
f ) se $(x, y) \in G_\mathfrak{R}$ e $(y, z) \in G_\mathfrak{R}$ qualche volta si ha $(x, z) \in G_\mathfrak{R}$;
g ) se $(x, y) \in G_\mathfrak{R}$ si ha sempre $(y, x) \in G_\mathfrak{R}$;
h ) una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento;
i ) una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A;
j ) una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$.

**11.28.** Con riferimento al grafico cartesiano disegnato nella figura 11.18, quale è vera?

a ) nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio;
b ) la relazione è antisimmetrica;
c ) la relazione è transitiva;
d ) l'insieme $G_\mathfrak{R}$ è costituito dalle coppie $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$.

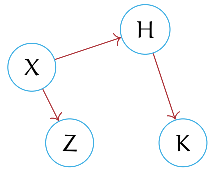



FIGURA 11.17: Esercizio 11.26.

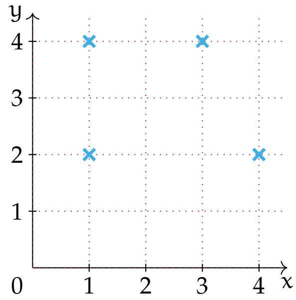



FIGURA 11.18: Esercizio 11.28.

**11.29.** Quali proprietà verificano le seguenti relazioni?

R = riflessiva; AR = antiriflessiva; S = simmetrica; AS = antisimmetrica; T = transitiva

| Insieme | Relazione | Proprietà |
|---|---|---|
| Poligoni del piano | avere lo stesso numero di lati | R AR S AS T |
| Numeri naturali | avere lo stesso numero di cifre | R AR S AS T |
| Numeri naturali | essere minore di | R AR S AS T |
| Numeri naturali | essere divisibile per | R AR S AS T |
| $A = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x \leqslant 5\}$ | essere multiplo di | R AR S AS T |

## 11.4 Relazioni di equivalenza

**11.30.** Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

| Relazione | Insieme | È d'equivalenza? |
|---|---|---|
| Essere multiplo | numeri naturali | V F |
| Avere lo stesso numero di sillabe | parole italiane | V F |
| Essere minore | interi relativi | V F |
| Vincere | squadre di calcio | V F |
| Avere lo stesso numero di angoli | poligoni | V F |
| Essere il plurale | parole italiane | V F |
| Essere il cubo | numeri italiani | V F |

**11.31.** Analizza i grafi nella figura 11.19 e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:

- nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché .......
- nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà . . . , il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà . . . , infine terne di elementi godono della proprietà . . . In conclusione ........................
- la relazione del caso 3 non gode della proprietà ........., pertanto .........
- nel caso 4 sussistono le proprietà . . . e . . . , ma non la proprietà . . . pertanto la

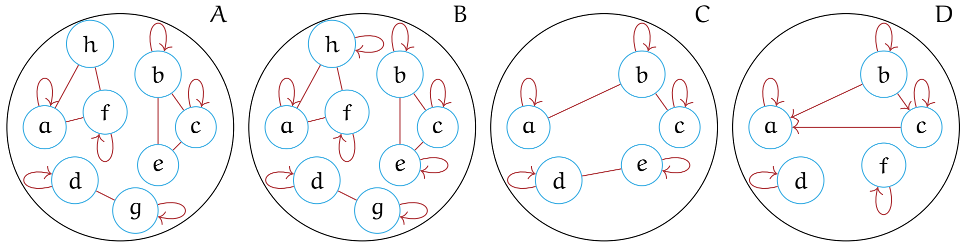



FIGURA 11.19: Esercizio 11.31

relazione ..............................

**11.32.** Fissa l'attenzione sulla relazione $\mathfrak{R}$: "frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme S degli alunni iscritti nella tua scuola. Verifica che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione $P(S)$ in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente $S/\mathfrak{R}$.

**11.33.** Studia in $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- da quanti elementi è costituito l'insieme $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$?
- qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

**11.34.** Considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme $\mathbb{N}$ e studiane le proprietà.

- è una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$.
- quante classi d'equivalenza hai formato?
- puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in $\mathbb{N}$ dell'insieme dei numeri dispari".

**11.35.** Considera l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x \leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi: $A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$; $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$; $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$; $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

a) Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn;
b) si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme A?
c) è vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
d) quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

**11.36.** Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ ha le stesse cifre di $y$".

**11.37.** Nell'insieme C degli alunni della tua classe verifica se la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se il cognome di $x$ ha la stessa lettera iniziale del cognome di $y$" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme C e l'insieme quoziente $C/\mathfrak{R}$.

**11.38.** Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e

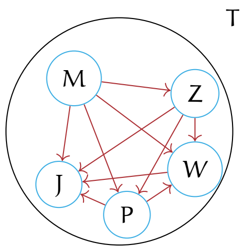



FIGURA 11.20: Esercizio 11.44.

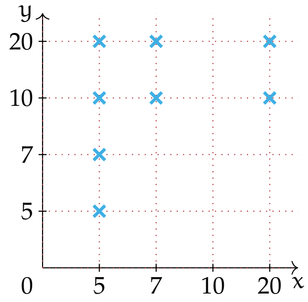



FIGURA 11.21: Esercizio 11.46.

solo se $x$ e $y$ hanno almeno tre lettere in comune". Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

**11.39.** Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ e $y$ hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individua quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivalenza [1] e [10].

**11.40.** Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x+y$ è dispari" è una relazione di equivalenza.

**11.41.** Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ e $y$ hanno almeno 3 lettere in comune" è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

**11.42.** Sia $S$ un insieme non vuoto in cui è definita una relazione $\mathfrak{R}$ riflessiva e transitiva; in $S$ si definisca la relazione $\sharp$ ponendo, per ogni $x$, $y$ appartenenti a $X$, $x\sharp y$ se e solo se $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}x$. Verificare che $\sharp$ è relazione di equivalenza in $X$.

## 11.5 Relazioni di ordine

**11.43.** Nell'insieme $M = \{1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6\}$ viene introdotta la relazione $\mathfrak{R}$ così definita: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $y-x$ appartiene a $\mathbb{N}$". La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

**11.44.** È assegnata la relazione R nell'insieme T, rappresentata col grafo (figura 11.20). Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- la relazione è riflessiva?
- la relazione è antisimmetrica?
- la relazione è transitiva?
- due elementi distinti sono sempre confrontabili?

Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell'insieme T è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva. Infine scelti due elementi qualsiasi dell'insieme T, essi sono sempre confrontabili.

**11.45.** Verifica che la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore" introdotta nell'insieme $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

**11.46.** Perché la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con il grafico cartesiano riportato nella figura 11.21, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.

**11.47.** Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se l'altezza di $x$ non supera l'altezza di $y$". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

**11.48.** Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisibile" è una relazione d'ordine? Se lo è di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto.

**11.49.** Nell'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$ la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

**11.50.** Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?

**11.51.** L'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ di una relazione introdotta nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ è $G_{\mathfrak{R}} = \{(a, a); (a, b); (b, b); (d, d); (c, d); (d, e); (e, e)\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera

a ) $\mathfrak{R}$ è una relazione antiriflessiva
b ) $\mathfrak{R}$ è una relazione solo antisimmetrica
c ) $\mathfrak{R}$ è una relazione riflessiva
d ) $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva e antisimmetrica

**11.52.** La relazione $\mathfrak{R}$: "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

**11.53.** I tre sottoinsiemi $A_1 = \{36, 135, 432\}$; $A_2 = \{65\}$; $A_3 = \{66, 3522, 93, 435\}$ dell'insieme $A = \{36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522\}$ costituiscono una partizione dell'insieme $A$? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? $A_1$, $A_2$, $A_3$ sono classi d'equivalenza?

**11.54.** Nell'insieme $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x \cdot y$ è un numero dispari" è d'equivalenza?

**11.55.** La relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ sta nella stessa nazione di $y$" nell'insieme $K = \{$Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione$\}$ è d'equivalenza? Costruisci $A/\mathfrak{R}$.

**11.56.** Verifica se la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme $A = \{\square, \lozenge, \infty, \nabla\}$ e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$.

| | $\square$ | $\lozenge$ | $\infty$ | $\nabla$ |
|---|---|---|---|---|
| $\square$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\lozenge$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\infty$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\nabla$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

**11.57.** In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- 1° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- 2° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- 3° giorno: A vince contro C; B vince contro D

Il 4° giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

**11.58.** Associa a ciascun grafo (figura 11.22) la corretta relazione d'ordine:

a ) d'ordine totale largo;
b ) d'ordine totale stretto;

c ) d'ordine parziale largo;
d ) d'ordine parziale stretto.

**11.59.** Nell'insieme di tutti gli iscritti a Facebook determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se il numero di amici di $x$ supera il numero di amici di $y$". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

**11.60.** Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ ha più lettere di $y$" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

**11.61.** Nell'insieme dei numeri naturali, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x$ ha un numero di cifre maggiore del numero di cifre di $y$" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

**11.62.** Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare il modello della figura 11.23, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore. Come si può risolvere il problema? [Risposta: 3 colori]

*Traccia di soluzione*: Nell'insieme $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ studia la relazione $\mathfrak{R}$: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.

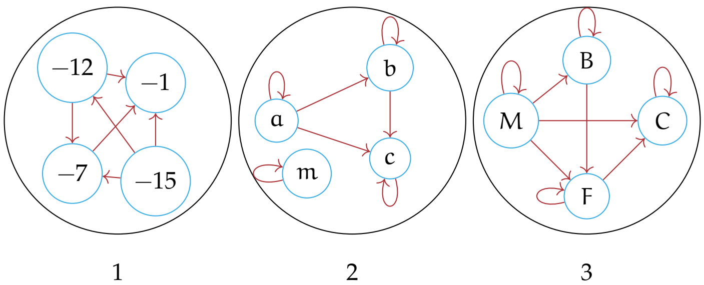



FIGURA 11.22: Esercizio 11.57.

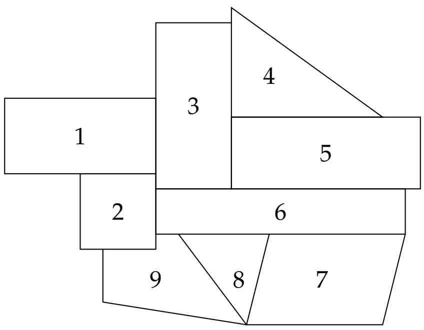



FIGURA 11.23: Esercizio 11.61.

# Funzioni 12

## 12.1 Funzioni o applicazioni

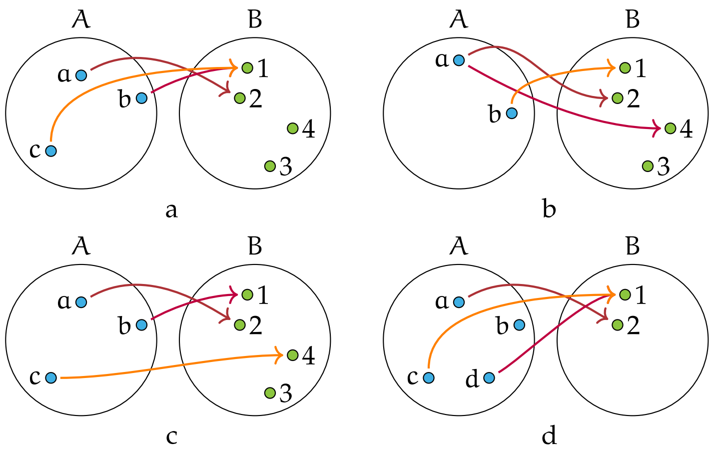
Diamo la seguente definizione

**Definizione 12.1.** Una corrispondenza univoca tra due insiemi $A$ e $B$ non vuoti si chiama *funzione o applicazione* di $A$ in $B$, se e solo se il dominio coincide con $A$ : $\mathcal{D} = \text{I. D.} = A$.

In altre parole ogni elemento di $A$ è in corrispondenza con un solo elemento di $B$.

---

**Esempio 12.1.** Analizziamo le corrispondenze rappresentate con grafico sagittale:




La corrispondenza di figura a rappresenta una funzione.

La corrispondenza di figura b non rappresenta una funzione perché l'elemento $a$ di $A$ è in corrispondenza con due elementi di $B$, il 2 e il 4, quindi non è una corrispondenza univoca.

La corrispondenza della figura c rappresenta una funzione.

La corrispondenza della figura d non è una funzione perché il dominio non coincide con l'insieme $A$.

---

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi $A$ e $B$ sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera $f$ e si intende la legge che *associa ad ogni elemento* $x$ *di* $A$ *uno e uno solo elemento* $y$ *di* $B$.

Per indicare la legge che fa passare dall'insieme $A$ all'insieme $B$ usiamo la scrittura

$$f : A \to B, \text{ oppure } A \xrightarrow{f} B$$

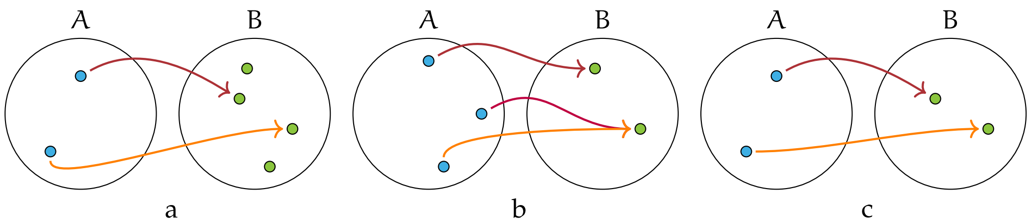
**Definizione 12.2.** L'elemento $y$ di $B$, corrispondente di un elemento $x$ del dominio, viene detto *immagine di* $x$ *nella funzione* $f$ e si scrive $y = f(x)$ che si legge "$y$ *uguale effe di* $x$".

Il sottoinsieme proprio o improprio di $B$ formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del dominio si chiama *codominio o insieme immagine* e si scrive $\mathcal{C} = \text{IM.} = f(\mathcal{D})$. Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di $B$ è immagine di un elemento del dominio per cui $\mathcal{C} \subseteq B$.

### 12.1.1 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

---

**Esempio 12.2.** Nella figure sottostanti sono rappresentate alcune funzioni:




In figura a si ha $\text{IM.} \subset B$ elementi distinti del dominio $A$ hanno immagini distinte in $B$.

In figura b si ha $\text{IM.} = B$ ma elementi distinti di $A$ hanno la stessa immagine in $B$.

In figura b si ha $\text{IM.} = B$ ed elementi distinti del dominio $A$ hanno immagini distinte in $B$.

---

I tre esempi illustrano tre tipi diversi di funzioni:

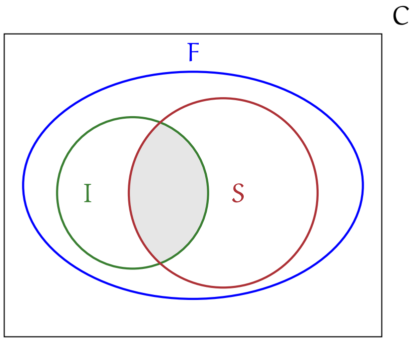
**Definizione 12.3.** Si dice *iniettiva* una funzione per la quale elementi distinti del dominio hanno immagini distinte in $B$: per *qualunque* $x_1, x_2$ di $A$ con $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Definizione 12.4.** Si dice *suriettiva* una funzione in cui $\text{IM.} = B$.

**Definizione 12.5.** Si dice *biunivoca o biiettiva* una funzione che sia *contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Pertanto in figura a è rappresentata una funzione iniettiva, in figura b una funzione suriettiva e in figura c una funzione biunivoca.

### 12.1.2 Diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze




Legenda

| | |
|---|---|
| C | insieme delle corrispondenze |
| F | insieme delle funzioni |
| S | insieme delle funzioni suriettive |
| I | insieme delle funzioni iniettive |
| $I \cap S$ | insieme delle funzioni biunivoche |

## 12.2 Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione $f$ può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento $x$ del dominio si chiama *variabile indipendente*; il corrispondente elemento $y = f(x)$ si chiama *variabile dipendente*.

---

**Esempio 12.3.** Consideriamo la corrispondenza **K**: "essere il valore assoluto di" tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza *non è una funzione* in quanto *non è* una corrispondenza *univoca*: un elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dalla figura 12.1.

**Esempio 12.4.** Consideriamo la corrispondenza **K** che *associa ad ogni numero razionale il suo quadrato*. Essa è una funzione di dominio $\mathbb{Q}$: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame *non* è *iniettiva*, come rappresentato dalla figura 12.2.

L'immagine $y$ di ogni $x$ appartenente a $\mathbb{Q}$ è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula $f : y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme immagine o codominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$: il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure $-25$,

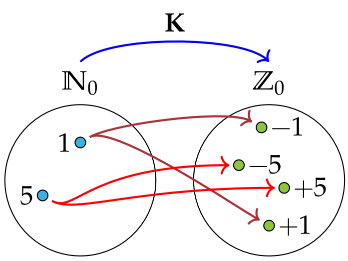



FIGURA 12.1: Esempio 12.3.

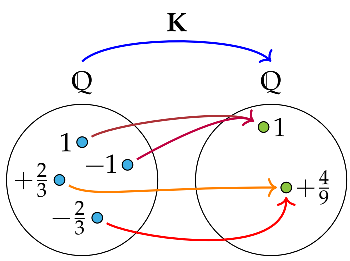



FIGURA 12.2: Esempio 12.4.

razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi IM. $\subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

**Esempio 12.5.** Analizziamo la corrispondenza che associa *ad ogni intero* il suo valore assoluto.

Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme $\mathbb{Z}$, pertanto è una funzione: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ rappresentata in forma analitica con $y = |x|$ con $x \in \mathbb{Z}$ e $y = f(x) \in \mathbb{N}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{Z}$ | 0 | +1 | −1 | −2 | +2 | +3 | −3 | ... |
| $y \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | ... |

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del dominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

**Esempio 12.6.** È assegnata la funzione $f : x \in N \to (x-2) \in \mathbb{Z}$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale $x$ il numero intero ottenuto sottraendo 2 da $x$. L'espressione analitica della funzione è $f : y = x - 2$. La legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $(x-2) \in \mathbb{Z}$ | −2 | −1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | ... |

Ogni elemento dell'insieme $\mathbb{N}$ trova il corrispondente in $\mathbb{Z}$; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è *iniettiva*; il codominio o insieme immagine è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Z}$ e precisamente $\mathcal{C} = \text{IM} = \{y \in \mathbb{Z} / y \geqslant -2\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

**Esempio 12.7.** Analizziamo la corrispondenza: $f_1 : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in N$ e costruiamo la relativa tabella:

Vediamo che nella corrispondenza assegnata né 0 né 1 hanno l'immagine.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $(x-2) \in \mathbb{N}$ | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |

Fissiamo allora come dominio un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e precisamente $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$, in questo modo possiamo procedere nell'analisi della funzione $f_1 : y = x - 2$.

**Esempio 12.8.** Consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni numero razionale il suo inverso (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale $x$ significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se $x$ è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su $\mathbb{Q}$ e fissiamo $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{Q}_0$. La corrispondenza è una funzione tra $\mathbb{Q}_0$ e $\mathbb{Q}$. In simboli matematici $f : y = \frac{1}{x}$.

### 12.2.1 Funzioni inverse

È assegnata la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta mediante le istruzioni

$$\boxed{\text{prendi } x \in \mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\text{moltiplica per } 2} \longrightarrow \boxed{\text{aggiungi } 1} \longrightarrow \boxed{\text{scrivi } y}$$

La forma algebrica è $y = 2 \cdot x + 1$; essa è definita per qualunque numero reale e l'insieme immagine coincide con il codominio.

Scelto arbitrariamente un valore per la variabile indipendente come $x = -2$ otteniamo la sua immagine $y = -3$, risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni.

Preso ora $y = 4$, elemento dell'insieme immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Il problema si formalizza in questo modo: "per quale valore di $x$ aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4?"

Le due questioni sono rappresentate nel diagramma di Eulero-Venn (figura 12.3) e percorrendo le istruzioni con le operazioni inverse otteniamo il valore di $x$ sottraendo 1 al valore dato per $y$ e dividendo il risultato per 2. Le nuove istruzioni da eseguire sono:

$$\boxed{\text{da } y \text{ togli } 1} \longrightarrow \boxed{\text{dividi per } 2} \longrightarrow \boxed{\text{scrivi } x}$$

In formula $x = (y - 1) : 2$.

La funzione così ottenuta si chiama *funzione inversa* di $f(x)$ e si scrive $f^{-1}$.

Poiché la funzione assegnata è iniettiva, ci rendiamo subito conto che per ogni $y$ dell'insieme immagine possiamo determinare la controimmagine (cioè l'unico valore di $x$ tale che $f(x) = y$).

**Definizione 12.6.** Per *funzione inversa* di una funzione iniettiva $y = f(x)$ si intende quella funzione che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento dell'insieme immagine di $f(x)$. Il simbolo della funzione inversa è $f^{-1}$.

Osserviamo che $\mathcal{D}\left(f^{-1}\right) = \text{IM.}(f)$ e $\text{IM.}\left(f^{-1}\right) = \mathcal{D}(f)$.

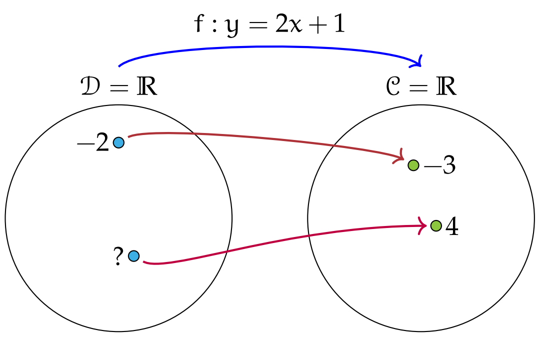


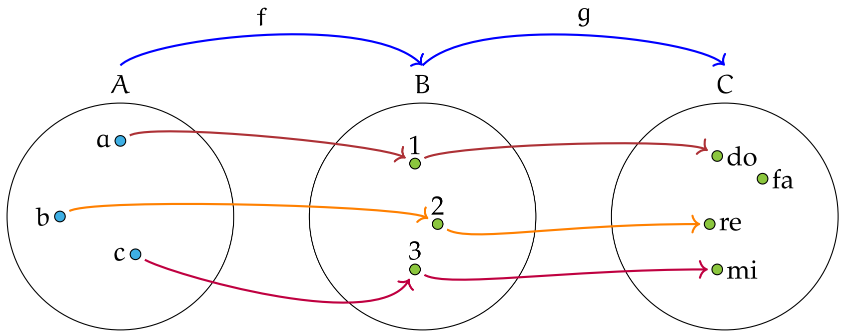

FIGURA 12.3: Funzioni inverse.

## 12.3 Funzioni composte

Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ è possibile definire la funzione composta

$$g \circ f : A \to C$$

che a un elemento $a$ di $A$ associa prima l'elemento $b = f(a)$ e poi l'elemento $c = g(b)$, in un'unica formula si può scrivere $g(f(a)) = c$.




---

**Esempio 12.9.** Data la funzione $f(x) = 2x$ e la funzione $g(x) = x + 1$, determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione $f$ che raddoppia il valore di $x$. Al valore ottenuto, che è $2x$, si applica la $g$ che fa aumentare di 1. Pertanto la funzione composta raddoppia $x$ e poi aggiunge 1. L'espressione è $g(f(x)) = 2x + 1$.

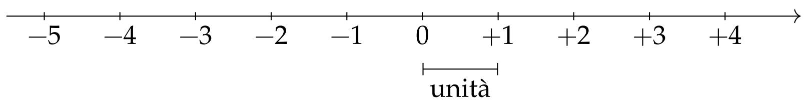
---

Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti la funzione $f(g(x))$ si ottiene facendo agire prima la $g(x)$ che aumenta di 1 il valore della variabile e poi la $f(x)$ che raddoppia il valore della variabile; allora $f(g(x)) = 2(x + 1)$.

## 12.4 La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma *non tutti i punti* della semiretta *sono immagine* di un numero naturale: la *corrispondenza non è biunivoca*.

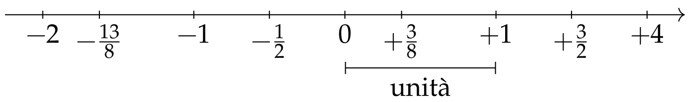
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ come dominio e i punti di una retta orientata come codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma *non tutti i punti* della retta *sono immagine* di un numero intero: l'insieme immagine non coincide con il codominio e la *corrispondenza non è biunivoca*.

Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono due *insiemi discreti*.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante.




L'insieme $\mathbb{Q}$ rispetto agli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ presenta un'altra caratteristica: è *denso*, cioè tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali. Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$ si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene $q = \frac{15}{16}$ che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come si può verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16. Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{15}{16}\right) = \frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di $q$. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.


Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e i punti della retta. Invece, no! Nel capitolo sull'introduzione ai numeri reali abbiamo visto che benché l'insieme $\mathbb{Q}$ sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.

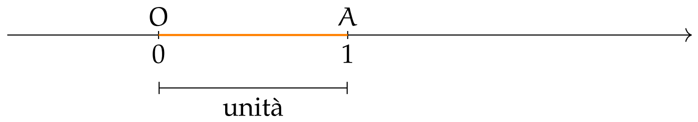
L'insieme che si ottiene dall'unione dell'insieme $\mathbb{Q}$ con l'insieme $\mathbb{J}$ degli irrazionali è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, cui Cantor attribuì cardinalità $\aleph_1$. La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

**Definizione 12.7.** Si chiama *ascissa di un punto* sulla retta reale il numero reale $\alpha$ che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

---

**Esempio 12.10.** Determinare l'immagine del numero reale $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ sulla retta reale.

Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.




Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale $\sqrt{2}$, che è la diagonale del quadrato di lato l'unità. Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura. Il punto B è l'immagine del numero $\alpha$, scriviamo $B(\alpha)$.


---

**Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$.**

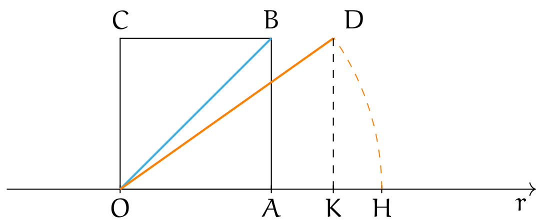
Nella figura è segnato il punto K immagine del numero $\sqrt{2}$; sulla perpendicolare alla retta r nel punto K prendiamo il segmento $KD = OA$ e congiungiamo D con O. Per il teorema di Pitagora sul triangolo OKD si ha

$$\overline{OD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{OA}^2$$

e passando alle misure

$$\overline{OD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \overline{OD} = \sqrt{3}.$$

Puntando il compasso in O con raggio OD tracciamo l'arco che incontra la retta r in H immagine del numero irrazionale $\sqrt{3}$.




Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo $\sqrt{n}$.

Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro" (figura 12.4), permette di ottenere i segmenti di misura $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$. Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura $\sqrt{2}$. Sulla perpendicolare in C ad AC si prende il segmento CD di misura 1: applicando il teorema di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo $\overline{AD} = \sqrt{3}$. Ripetiamo la costruzione dal vertice D e otteniamo il triangolo rettangolo ADE la cui ipotenusa è $\overline{AE} = \sqrt{4}$ e poi $\overline{AF} = \sqrt{5}$ e così via.

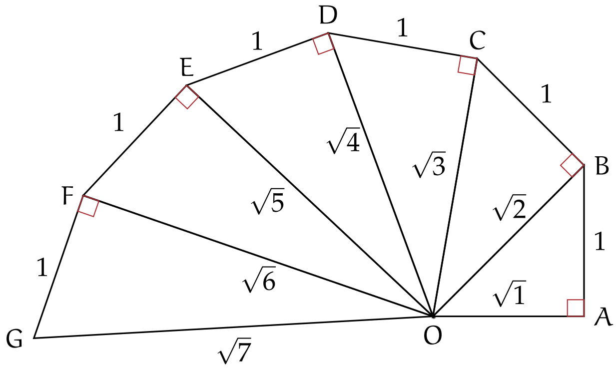



FIGURA 12.4: La spirale di Teodoro.

## 12.5 Il grafico di una funzione

Ricordiamo le seguente definizione.

**Definizione 12.8.** Una funzione $f$ è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento $x$ (variabile indipendente) del dominio associa uno e un solo valore $y$ della variabile dipendente.

L'elemento $y$, corrispondente di un elemento $x$ del dominio, viene detto *immagine di* $x$ nella funzione $f$ e si scrive $y = f(x)$ che si legge *y uguale effe di x*.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per dominio e codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- con *linguaggio comune*, purché in modo preciso e inequivocabile: esempio: La funzione $f$ "associa ad ogni numero razionale il suo triplo";
- attraverso un *algoritmo* (figura 12.5), cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita);
- mediante una *tabella*:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $0$ | $3$ | $7$ | $10$ |
| $y$ | $-6$ | $0$ | $9$ | $21$ | $30$ |

- con una *formula* che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente. Per esempio: $y = 3x$.

---

**Esempio 12.11.** Traccia su un piano quadrettato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come dominio e codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | | $1/2$ | $2$ | $-3$ | |
| $y$ | | $2$ | | | | $5$ |

Ogni coppia $(x; y)$ determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

---

**Definizione 12.9.** Si chiama *grafico di una funzione* l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

❑ **Osservazione** I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

### 12.5.1 Funzione di proporzionalità diretta

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $-1$ | $1/2$ | 2 | $-3$ | $-5/2$ |
| $y$ | 0 | 2 | $-1$ | $-4$ | 6 | 5 |
| $y/x$ | | | | | | |

Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente $y$ e la variabile indipendente $x$. Cosa osservi? Completa: $\frac{y}{x} =$.................................

**Definizione 12.10.** Una funzione in cui risulta *costante e diverso da zero il rapporto* tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità diretta*. In simboli, $y$ direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una *retta passante per l'origine*; la costante $k$ si chiama *coefficiente angolare* della retta.

Nella figura 12.6 è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle $x$ un angolo $\alpha$ ; la costante $k$ ci dà informazioni su tale angolo.

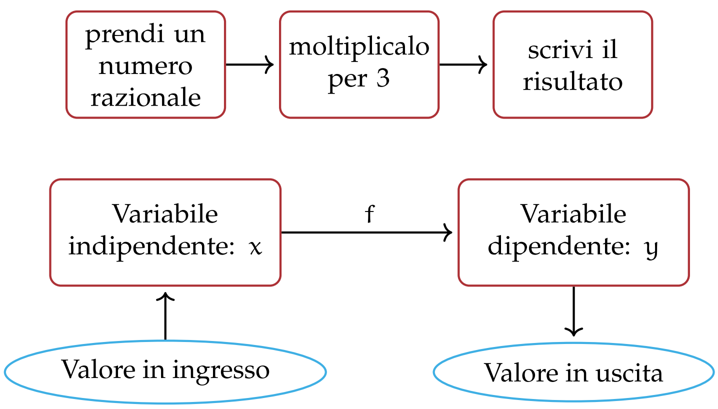



FIGURA 12.5: Funzione numerica espressa tramite un algoritmo.

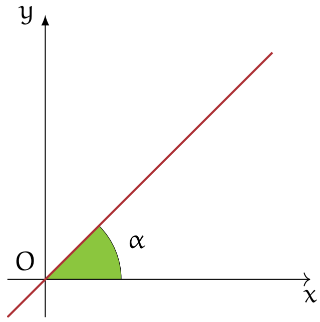



FIGURA 12.6: Coefficiente angolare di una funzione.

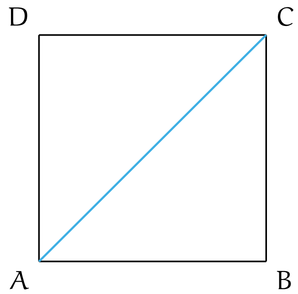



FIGURA 12.7: Il quadrato $ABCD$ del problema 12.12.

In particolare se la costante di proporzionalità è *positiva*, l'angolo $\alpha$ è *acuto*, se la costante è *negativa* allora l'angolo $\alpha$ è *ottuso*. Se $k = 1$ l'angolo è di 45° e la retta è la bisettrice.

**Problema 12.12.** Nel quadrato $ABCD$ (figura 12.7) il cui lato misura $x$, determinare il perimetro e la diagonale.

*Soluzione* Abbiamo i dati: $\overline{AB} = x$ con $x > 0$ e l'obiettivo: $2p$, $\overline{AC}$.

$2p = 4 \cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato. Indicato con $y$ il perimetro scriviamo $y = 4x$, funzione di proporzionalità diretta con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, coefficiente $k = 4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 12.8).

Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$\overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}.$$

Indicando con $y$ la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2} \cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 12.9).

♦

### 12.5.2 La funzione costante

La figura 12.10 rappresenta una funzione in cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme IM. $= \{2\}$.

**Definizione 12.11.** Si chiama *funzione costante* la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale.

Formula: $y = 2$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $0$ | $-3$ | $1$ | $2$ |
| $y$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ | |

Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse $x$, figura 12.11) Osserviamo che se $k$ è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I e II quadrante); se $k$ è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III e IV quadrante); se $k = 0$ allora la retta coincide con l'asse $x$ delle ascisse.

### 12.5.3 La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:

prendi un numero reale $x$ → raddopia il valore scelto → sottrai 1 al valore trovato → scrivi $y$ (il risultato)

Completa:

- la funzione data si esprime con linguaggio comune: "la differenza tra . . . . . . . . . . . . . . "; 
- la formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è $y =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $0$ | |
| $y$ | | | $0$ |

Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Rispondi: i punti trovati sono allineati? la funzione è una proporzionalità diretta?

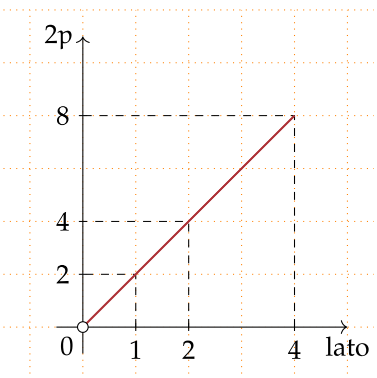



FIGURA 12.8: Il perimetro 2p in funzione del lato.

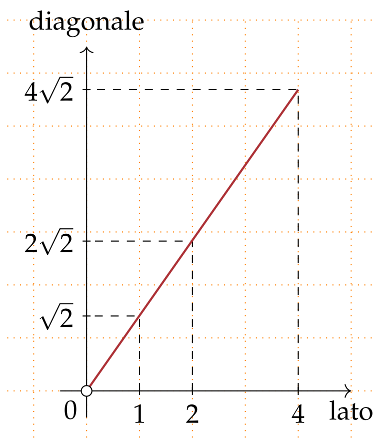



FIGURA 12.9: La diagonale in funzione del lato.

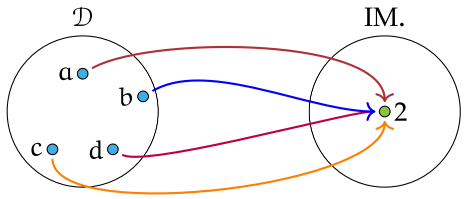



FIGURA 12.10: Funzione con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e IM. $= \{2\}$.

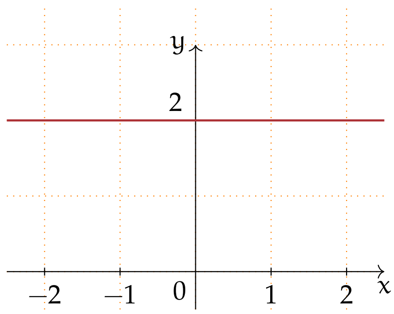
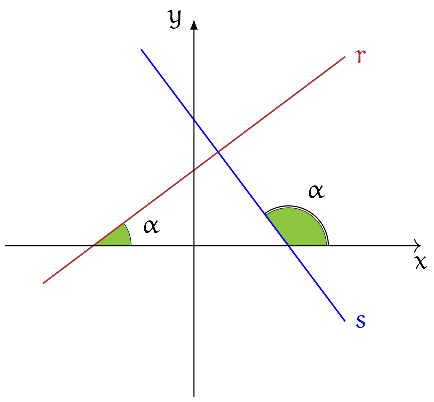


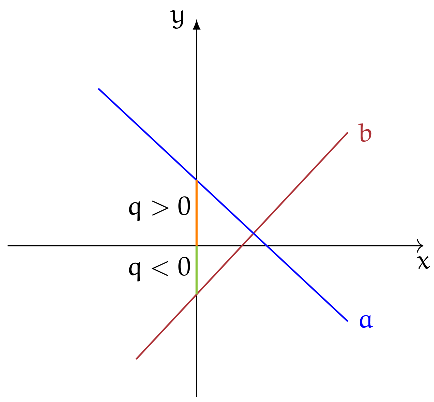

FIGURA 12.11: Funzione costante.

**Definizione 12.12.** Una funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ il cui grafico è una retta si dicono *funzioni lineari*.

**Significato dei coefficienti $m$ e $q$ nella funzione lineare $y = mx + q$**

- Se $m = 0$ la funzione è $y = q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse $x$;
- se $m \neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse;
- se $m > 0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m < 0$ l'angolo è ottuso;
- se $q = 0$ la funzione è $y = ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine;
- se $q \neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse $y$).




❍ **Conclusione** la funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

---

**Esempio 12.13.** Riferendoti ai grafici precedenti, completa con uno dei segni $>$, $<$, $=$.

- nella formula della funzione avente $r$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente $s$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente $a$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente $b$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$.

---

Assegnata una tabella di corrispondenza è possibile determinare la formula della funzione lineare.

---

**Esempio 12.14.** Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2/3$ |
| $y$ | $-8$ | $-5$ | $-2$ | $1$ | $0$ |

*Procedura risolutiva*: segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x; y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (il rapporto $y/x$ non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di $m$ (coefficiente angolare) e di $q$. Dalla tabella individuo il valore $q = -2$, infatti per $x = 0$ si ha $y = -2$. Per determinare $m$, sommo 2 a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta $y = 3x$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2/3$ |
| $y$ | $-6$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $2$ |

Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y = 3x - 2$. Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di $q$.

---

### 12.5.4 La funzione di proporzionalità inversa

**Problema 12.15.** La base e l'altezza di un rettangolo $ABCD$ misurano rispettivamente 3cm e 4cm. Determina la sua area.

*Soluzione* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

♦

Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato? Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati. Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare *tutti* i rettangoli equivalenti a quello assegnato?

*Generalizziamo*: i lati $x$ e $y$ di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $6$ | $8$ | $10$ | $1/3$ | $4/3$ |
| $y$ | $2$ | $3/2$ | $6/5$ | $36$ | $9$ |

Osserviamo che se fissiamo il valore di $x$ il lato $y$ vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella. Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché . . . . . . . . . Ti sembrano allineati?

**Definizione 12.13.** Una funzione in cui *il prodotto* tra la variabile dipendente e la variabile indipendente risulta *costante e diverso da zero* si chiama *funzione di proporzionalità inversa*. In simboli: $y$ inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \dfrac{k}{x}$.

Il grafico di una funzione di *proporzionalità inversa* è una curva chiamata *iperbole*.

Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante $k$.

**Caso** $k > 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili $x$ e $y$ sono senz'altro concordi; al numero positivo $x$ corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo $x$ corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

---

**Esempio 12.16.** Rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$. Per far questo assegniamo a $x$ alcuni valori, positivi e negativi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-1$ | $-1/2$ | $1$ | $4$ | $1/2$ | $3$ |
| $y$ | $-2/3$ | $-2$ | $-4$ | $2$ | $1/2$ | $4$ | $2/3$ |

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di $x$ potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2). Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\text{IM.} = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 12.12) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel I e III quadrante.

---

**Caso** $k < 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili $x$ e $y$ sono senz'altro discordi; al numero positivo $x$ corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo $x$ corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

---

**Esempio 12.17.** Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$. Per far questo assegniamo a $x$ alcuni valori, positivi e negativi.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-1/2$ | $1$ | $2$ | $1/2$ | $3/2$ |
| $y$ | $1/4$ | $1/2$ | $1$ | $-1/2$ | $-1/4$ | $-1$ | $-1/3$ |

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di $x$ potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, ma in questo caso è $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\text{IM.} = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 12.13) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel II e IV quadrante.

### 12.5.5 La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costante, una funzione lineare, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa, oppure nessuno di questi tipi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1/2$ | $0$ | $2$ | $3$ | $3/2$ |
| $y$ | $4$ | $1$ | $1/4$ | $0$ | $4$ | $9$ | $9/4$ |

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, la tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato. Il dominio di tale funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, mentre l'immagine è IM. $= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. La formula in cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è, $y = x^2$. Costruiamo il suo grafico (figura 12.14), utilizzando i punti della tabella.

**Definizione 12.14.** Una funzione in cui risulta *costante e diverso da zero il rapporto* tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità quadratica*. In simboli: $y$ proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x^2$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata *parabola*. Il punto $O(0;0)$ si chiama vertice della parabola.

### 12.5.6 Funzione lineare a tratti

**Problema 12.18.** La ditta "Farvit" produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10Kg; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

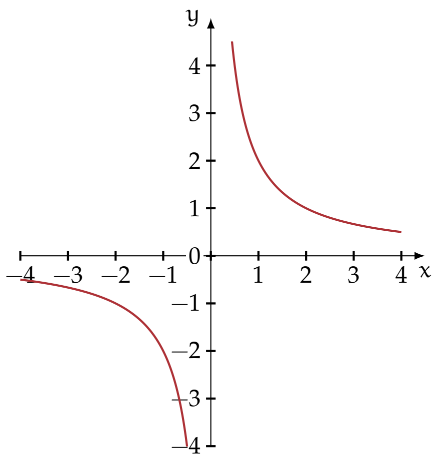



FIGURA 12.12: La funzione $y = \frac{2}{x}$.

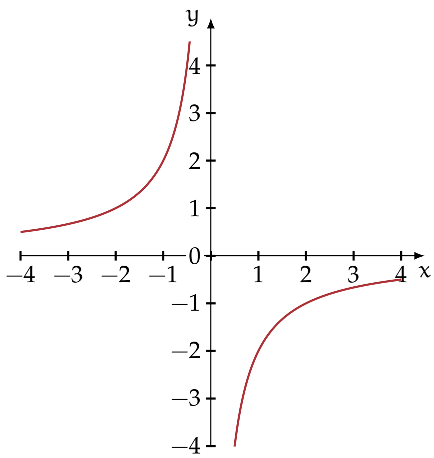



FIGURA 12.13: La funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

| Peso | Costo |
|---|---|
| peso $\leqslant$ 4Kg | $1,5 \cdot$ peso |
| 4Kg $<$ peso $\leqslant$ 8Kg | $0,5 \cdot$ peso $+ 4$€ |
| 8Kg $<$ peso $\leqslant$ 10Kg | 12€ |

*Soluzione* Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico (figura 12.15).

Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8Kg; il punto D è l'estremo di un segmento aperto a sinistra. Per un peso di 8, 1Kg il costo è di 10€. Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.

Qual è il costo di una confezione di 3Kg? Costo = . . . . . . . . . Segnate il punto corrispondente sul grafico. Il punto E cosa rappresenta? . . . . . . . . . Stabilite dominio e codominio della funzione Costo.

♦

**Definizione 12.15.** Diciamo che una funzione è *definita per casi* quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

---

**Esempio 12.19.** È assegnata la funzione $f(x) = \begin{cases} f_1: \quad y = 1 - x \text{ con } x \leqslant 0 \\ f_2: \quad y = 1 \text{ con } x > 0 \end{cases}$ tracciate il suo grafico.

**Passo I** individuiamo il dominio che risulta dall'unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$.

**Passo II** $f_1$ è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: $A(0;1)$ e $B(-1;2)$; $f_2$ è una funzione costante.

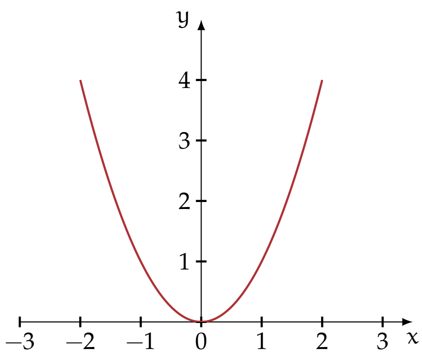



FIGURA 12.14: La funzione $y = x^2$.

**Passo III** tracciamo il grafico (figura 12.16) che risulta formato dall'unione di due semirette aventi la stessa origine $A(0;1)$.

**Esempio 12.20.** Seguendo i passi dell'esempio precedente, dopo aver determinato il dominio, tracciare il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} y = 1 \text{ se } x > 0 \\ y = 0 \text{ se } x = 0 \\ y = -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ e calcolare l'ordinata dei suoi punti $A$ e $B$ sapendo che $x_A = 34$ e $x_B = -5$.

---

❑ **Osservazione** I grafici dei due esempi precedenti hanno una notevole differenza: le due semirette del primo esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette del secondo esempio hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è *continua* nel dominio, nel secondo caso che è *discontinua*.

### 12.5.7 Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} y = x \text{ se } x \geqslant\ 0 \\ y = -x \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta $y = x$ e su di essa evidenziamo la semiretta $b$ avente l'origine in $O$ i cui punti appartengono al primo quadrante; analogamente tracciamo la retta $y = -x$ e su di essa evidenziamo la semiretta $a$ avente l'origine in $O$ i cui punti appartengono al secondo quadrante. Nella figura 12.17 sono rappresentati i passi descritti e nella figura 12.18 il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate.

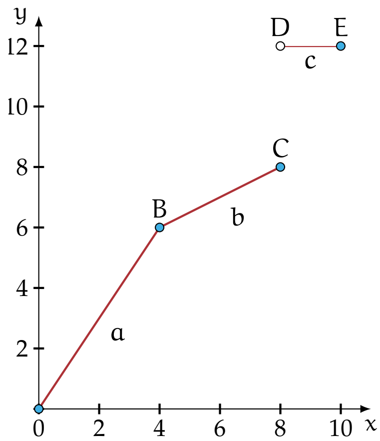



FIGURA 12.15: Problema 12.18.

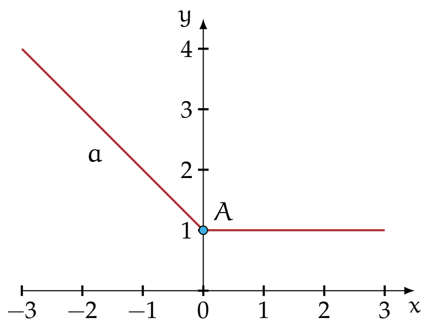



FIGURA 12.16: Esempio 12.19.

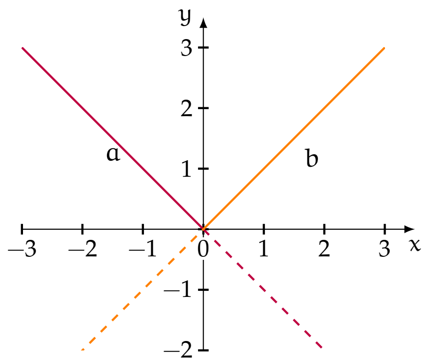



FIGURA 12.17: Metodo per ottenere il grafico della funzione di valore assoluto.

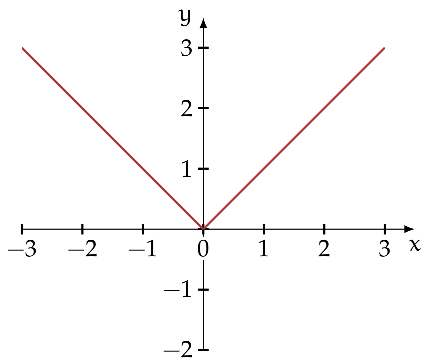



FIGURA 12.18: La funzione valore assoluto.

❍ **Conclusione** il grafico della funzione valore assoluto di equazione $y = |x|$ è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano. La funzione è continua, è nulla per $x = 0$ e positiva per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, il codominio è $\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R} / y \geqslant 0\}$.

## 12.6 Esercizi

### 12.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 12.1 Funzioni o applicazioni

**12.1.** Per le funzioni rappresentate nell'esempio 12.1, completa:

- figura a: $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \dots\dots\dots\dots\dots$; $\mathcal{C} = \text{IM.} = \dots\dots\dots\dots\dots$; $f(a) = \dots\dots\dots\dots\dots$;
- figura c: $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$; $\mathcal{C} = \text{IM.} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$; $f(\dots) = 4$.

**12.2.** È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?

a ) Completa: $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$;
b ) è vero che IM. ={ città d'Italia}?
c ) completa f(Liguria)=$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$; $f(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$ =Cagliari?

**12.3.** Assegnati gli insiemi $A$ ={mare, ruspa, fegato, generale} e $B$ ={1,2,3,4,5,6,7,8,9} la corrispondenza che associa ad ogni elemento di $A$ il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?

a ) Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme immagine;
b ) quale relazione sussiste tra $B$ e IM.?

**12.4.** Quali tra le seguenti corrispondenze sono funzioni?

| Dominio | Codominio | Corrispondenza |
|---|---|---|
| libri | autori | a ogni libro associa l'autore |
| canzoni | cantanti | a ogni canzone associa il cantante |
| portoni di una via | numeri | a ogni portone associa il numero civico |
| computer | sistemi operativi | a ogni computer associa il S.O. installato |

**12.5.** Si è ammessi alla facoltà $U$ se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il punteggio ottenuto è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

**12.6.** Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

#### 12.2 Funzioni tra insiemi numerici

**12.7.** Nella corrispondenza che associa ad ogni intero il suo valore assoluto (esempio 12.5), è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: $f(\dots\dots) = 45$. L'osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva? Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

**12.8.** Data la funzione $y = x - 2$ con dominio $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ e codomino $\mathbb{N}$ completa l'analisi dell'esempio 12.7

a) elementi diversi del dominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è *iniettiva*; si ha anche $\mathcal{C} = \text{IM.} = \mathbb{N}$ e pertanto la funzione è *suriettiva*, quindi ..................... ;
b) preso $y = 8$ sapresti trovare l'elemento del dominio di cui è immagine? ............. ;

**12.9.** Stabilisci se la funzione $f: y = \frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme immagine c'è lo zero? Completate $\mathcal{C} = \text{IM.} = \ldots$ Completate la tabella

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{Q}_0$ | $-2$ | $-7/8$ | $+1$ | | | | $-1$ | |
| $y \in \mathbb{Q}_0$ | | | | $+1/3$ | $-12/5$ | $-7/8$ | | $-1$ |

**12.10.** Consideriamo la funzione f che associa ad ogni numero razionale il suo triplo.

$Q \xrightarrow{f} Q$; la sua espressione in forma analitica è $f: y = \ldots\ldots\ldots$

$\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{Q}$; possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

$\mathcal{C} = \text{IM.} = \mathbb{Q}$; infatti per ogni numero razionale $y$ c'è un numero razionale $x$ di cui $y$ è il triplo, basta dividere $y$ per 3.

a) qual è l'immagine di 0? ............................................................
b) quale elemento del dominio ha per immagine 5? ......................................
c) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? ............................
d) è vero che $-1$ è immagine di $-3$? ..................................................
e) la funzione è iniettiva?
f) la funzione è biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

**12.11.** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme immagine e stabilire se la funzione è iniettiva o suriettiva.

a) $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \quad x \to 2x;$
b) $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \quad x \to x^2;$
c) $y: \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad x \to \frac{1}{x};$
d) $y: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; \quad x \to 2x;$
e) $y: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; \quad x \to \frac{1}{x}.$

**12.12.** Per ciascuna delle funzioni elencate in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, riempite le colonne della tabella.

| $y = f(x)$ | $f(x)$ è iniettiva? | $x = f^{-1}(y)$ |
|---|---|---|
| $y = 2x$ | | |
| $y = x + 2$ | | |
| $y = 2x - 2$ | | |
| $y = x^2$ | | |
| $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ | | |
| $y = \sqrt{2} \cdot x$ | | |

**12.13.** Assegnata la funzione lineare $f: y = m \cdot x + q$, essendo una funzione iniettiva la sua inversa è: ..........................................................................

**12.14.** Date le funzioni $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$ che hanno per dominio rispettivamente $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leqslant x \leqslant 3\}$. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

## 12.4 La retta e gli insiemi numerici

**12.15.** Determina sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali: $\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta = -\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; $\lambda = \sqrt{3} - 3$.

**12.16.** Verifica che il numero $\chi = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega = \sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

**12.17.** Stabilisci il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

## 12.5 Il grafico di una funzione

**12.18.** Per ognuna delle seguenti funzioni compila una tabella di valori e rappresentala in un piano cartesiano.

$$f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = \frac{1}{2}x; \quad f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = -x \quad f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = 2-3x$$

**12.19.** Esprimi con linguaggio comune la funzione $f_1$ dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a ) qual è l'immagine di 0? $y = \ldots\ldots;$
b ) quale elemento del dominio ha per immagine 5? $x = \ldots\ldots;$
c ) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? Perché?
d ) è vero che $-1$ è immagine di $-2$? Perché?

**12.20.** Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni il coefficiente angolare $k$, tracciane il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a ) $f_1 : y = \frac{1}{2}x$;
b ) $f_2 : y = x$;
c ) $f_3 : y = \frac{4}{3}x$;
d ) $f_4 : y = \frac{3}{5}x$;
e ) $f_5 : y = 5x$;
f ) $f_6 : y = -\frac{1}{2}x$;
g ) $f_7 : y = -x$;
h ) $f_8 : y = -\frac{3}{4}x$.

**12.21.** Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni dell'esercizio precedente. Evidenzia con un colore diverso la funzione $f_2$, calcola poi il coefficiente angolare $k$ compilando la seguente tabella:

| f | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| k | | | | | |

*Cancella i termini errati* nella seguente analisi: "Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle $x$ un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la $f_2$; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la $f_2$".

**12.22.** Ripeti l'esercizio precedente per le altre tre funzioni, evidenziando la funzione $f_7$; costruisci l'analoga tabella e *cancella i termini errati* nella seguente analisi: "Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle $x$ un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di $-1$ stanno sopra/sotto la $f_7$; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di $-1$ stanno sopra/sotto la $f_7$".

**12.23.** Se $x$ rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

**12.24.** Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2m?

**12.25.** Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni: $y = -2$; $y = 6$; $y = 0$; $y = -1$; $y = 3$.

**12.26.** Traccia nel riferimento cartesiano la funzione $y = 1$ e $y = -3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y = 2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

**12.27.** Le due funzioni $f_1$ e $f_2$ di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione $y = -2$ un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $x$ | $-2$ | 0 | 3 | $-1$ |
| | $y$ | 2 | 0 | $-3$ | 1 |
| $f_2$ | $x$ | 1 | 0 | 3 | $-2$ |
| | $y$ | 4 | 0 | 12 | $-8$ |

**12.28.** Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1 : y = 2x$, $f_2 : y = -\frac{1}{2}x$, $f_3 : y = 2$ e indica con $A$ e $B$ rispettivamente i punti di intersezione di $f_1$ con $f_3$ e di $f_2$ con $f_3$. Considera il triangolo $AOB$ ($O$ è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo $AOB$? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 : y - 4$ e indica con $C$ e $D$ rispettivamente i punti di intersezione di $f_1$ con $f_4$ e di $f_2$ con $f_4$. Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$.

**12.29.** Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$, $f_2 : y = -x - \frac{3}{4}$, $f_3 : y = 6x - 6$. Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

**12.30.** Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-3/2$ | 0 | 3 | 6 |
| $y$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 2 | 4 |

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?
Scrivi la formula $y = \dots\dots\dots$
Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-3/2$ | 0 | 3 | 6 |
| $y$ | | | $-2$ | | |

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \dots\dots\dots$
Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare?

**12.31.** La tabella individua coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $x$ | $5$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $1$ |
| | $y$ | $-2$ | $4$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
| $f_2$ | $x$ | $-4$ | $-4/3$ | $0$ | $-1/3$ | $4/3$ |
| | $y$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $3/4$ | $2$ |
| $f_3$ | $x$ | $-6$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $1$ |
| | $y$ | $-11/3$ | $-1/3$ | $1/3$ | $7/3$ | $1$ |

**12.32.** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1 : y = -\frac{3}{2x}$;
b) $f_2 : y = \frac{1}{x}$;
c) $f_3 : y = \frac{5}{x}$;
d) $f_4 : y = \frac{-3}{x}$;
e) $f_5 : y = -\frac{1}{x}$;
f) $f_6 : y = -\frac{2}{5x}$.

**12.33.** Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva $\gamma : y = -\frac{1}{2x}$ e le rette $r_1 : y = 2$ e $r_2 : y = -2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1 = r_1 \cap \gamma$ e $A_2 = r_2 \cap \gamma$.

**12.34.** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1 : y = -x^2$;
b) $f_2 : y = x^2$;
c) $f_3 : y = -\frac{1}{2}x^2$;
d) $f_4 : y = -\frac{5}{2}x^2$;
e) $f_5 : y = \frac{3}{4}x^2$;
f) $f_6 : y = \frac{7}{3}x^2$.

**12.35.** Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando.

a) se $k > 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . . . . . . .;
b) se $k < 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . . . . . . .;
c) se $k > 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . . . . . . .;
d) se $0 < k < 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . . . . . . .;
e) se $k < -1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . . . . . . .;
f) se $-1 < k < 0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . . . . . . ..

**12.36.** Determina la distanza del punto di ascissa $x = -2$ della parabola $y = 3x^2$ dal suo vertice.

**12.37.** Sono assegnate le funzioni $f_1 : y = (-x)^2$ e $f_2 : y = -x^2$ di proporzionalità quadratica. Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione. Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune. Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico. Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

**12.38.** Completa la seguente tabella:

| Funzione | In linguaggio comune | Formula | Tipo |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | Associa ad ogni $x$ reale il valore $-2/3$ | | |
| $f_2$ | Associa ad ogni $x$ reale il triplo del suo quadrato | | |
| $f_3$ | | $y = -5x^2$ | |
| $f_4$ | Associa ad ogni $x$ reale il suo doppio aumentato di $3/2$ | | |
| $f_5$ | Associa ad ogni $x$ reale $\neq 0$ l'opposto del suo reciproco | | |
| $f_3$ | | $y = -5x$ | |

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate. Per quale/i è vero che per qualunque $x$ del dominio è IM. $= \mathbb{R}$?

**12.39.** Il rettangolo $ABCD$ ha il lato $AB$ triplo del lato $BC$. Indica $\overline{BC} = x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di $x$. $2p = \dots\dots\dots$ Spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro. Determina ora l'area in funzione di $x$, Area $= \dots\dots\dots$; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

**12.40.** Il triangolo rettangolo $ABC$, retto in $A$ ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB} = x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$.

Determina in funzione di $x$ l'area del triangolo. Area $= \dots\dots\dots$ rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale. Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di $20\text{cm}^2$.

Calcola in funzione di $x$ il perimetro del triangolo: $2p = \dots\dots\dots$, rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di $x$.

**12.41.** Nel triangolo isoscele $ABC$ il lato obliquo $AB$ è doppio della base $BC$; indica $\overline{BC} = x$ e determina in funzione di $x$ il perimetro del triangolo. $2p = \dots\dots\dots$ Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.

Se il perimetro è 120cm, quanto misurano i lati del triangolo? Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

**12.42.** Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} y = -1 \text{ se } x > 1 \\ y = 2x \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases} .$$

**12.43.** Traccia il grafico della funzione $y = |x + 1|$.

**12.44.** Un caseificio vende mozzarelle a € 4,50 al chilo ai clienti che acquistano fino 10kg di mozzarella, per i clienti che fanno acquisti superiori ai 10kg vende a € 4,00 al kg per la parte che eccede i 10kg e per i primi 10kg vende sempre a € 4,50. Per i clienti dei grandi supermercati che acquistano quantità superiori a 100kg vende a € 3,50 al kg. Codifica con opportune formule la funzione costo:

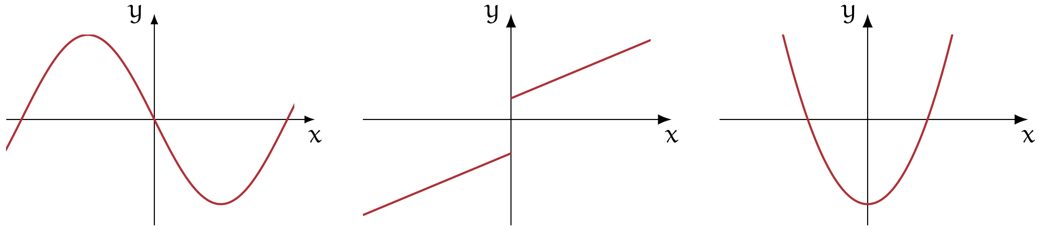
$$\begin{cases} \dots\dots\dots \text{ se } x \leqslant 10 \\ \dots\dots\dots \text{ se } 10 < x \leqslant 100 \\ \dots\dots\dots \text{ se } x > 100 \end{cases} .$$

Determina il costo dei seguenti ordini:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kg | 3,5 | 11,8 | 78 | 120 | | | |
| euro | | | | | 360 | 57 | 35 |

Rappresenta graficamente la funzione.

**12.45.** Dal grafico della funzione stabilisci insieme di definizione $\mathcal{D}$, insieme immagine IM., verifica se la funzione è iniettiva, suriettiva o biettiva.


y
x
y
x
y
x

# Dati e previsioni IV

"Our life is on dice"
Foto di matsuyuki
http://www.flickr.com/photos/matsuyuki/201651074//

# La probabilità 13

## 13.1 Gli eventi

L'esito del lancio di una moneta o di un dado, l'esito di un'estrazione del lotto, il sesso di un nascituro, la durata di una lampadina o di un computer sono esempi di fenomeni la cui realizzazione non può essere prevista con certezza; per questo vengono detti eventi casuali o aleatori (dal latino alea, dado). Spesso è necessario prendere decisioni in condizioni di incertezza: in quale università proseguire gli studi, decidere se fare il vaccino contro l'influenza, scommettere sulla vincita di una squadra, sull'uscita di una sequenza di numeri al gioco del Lotto. E' quindi fondamentale nei confronti di un fenomeno dall'esito incerto, poter identificare quali sono gli eventi che si possono verificare ed inoltre riuscire ad esprimere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di tali eventi.

Quali sono gli eventi possibili per un dato fenomeno aleatorio? Supponiamo di lanciare un dado e di essere interessati alla faccia che si presenta dopo aver effettuato il lancio. Il lancio del dado rappresenta l'esperimento oggetto del nostro studio, l'uscita del numero 4 o l'uscita di un numero dispari sono detti *eventi aleatori o casuali*, in quanto sappiamo che si presenterà una delle facce, ma non sappiamo quale.

**Definizione 13.1.** Si chiama *evento casuale* il risultato di un *fenomeno aleatorio*.

Se si considera la proposizione "Oggi farà bel tempo" è evidente che non è chiaro cosa si intende per bel tempo (senza pioggia? senza nuvole? con il sole?) né il luogo a cui ci si riferisce. Sarebbe meglio affermare per esempio "Stamani a Milano ci sarà il sole". È necessario quindi specificare con precisione l'evento che si considera in modo da essere sicuri se l'evento si è verificato o meno.

Nel lancio di un dado sono possibili sei risultati, espressi dai numeri da 1 a 6 e solo uno di essi si realizzerà.

Chiamiamo questi sei risultati *eventi elementari* e indichiamo il loro insieme con $\Omega$ :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

**Definizione 13.2.** Si chiama *spazio degli eventi*, l'insieme di tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato. Tale insieme viene indicato con $\Omega$.

L'insieme $\Omega$ non esaurisce la totalità degli eventi collegati al lancio del dado; non comprende per esempio l'evento $\mathrm{P} =$ Numero pari o l'evento $\mathrm{M} =$ Numero minore di 3. Tuttavia $\Omega$ permette di rappresentare qualsiasi evento come suo particolare sottoinsieme.

**Definizione 13.3.** Si chiama *evento elementare* ogni elemento dell'insieme $\Omega$, mentre *evento composto* un sottoinsieme qualsiasi di $\Omega$.

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte e consideriamo i seguenti eventi: uscita di un asso di cuori, uscita di un re. Qual è la differenza fra questi due eventi? Il primo dei due è un *evento elementare*, mentre l'altro è un evento formato da quattro eventi elementari (tutti i possibili re presenti nel mazzo) e viene detto *evento composto*.

Sono esempi di eventi composti l'uscita di un numero dispari nel lancio di un dado o l'estrazione di due palline rosse da un'urna contenente 3 palline rosse e 7 nere.

Consideriamo ora due eventi che rivestono una particolare importanza: l'uscita del 7 nel lancio di un dado e l'uscita di un numero minore di 7 sempre nel lancio di un dado. È evidente che l'uscita del 7 non si verificherà mai, mentre l'uscita di un numero minore di 7 è sempre verificato.

**Definizione 13.4.** Chiamiamo *evento impossibile*, e lo indicheremo $\emptyset$, un evento che non può verificarsi in alcun caso. Chiamiamo *evento certo* un evento che accade sicuramente e che è costituito dall'insieme di tutti gli eventi elementari di $\Omega$, cioè da tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato.

Gli eventi elementari di un insieme $A$ e gli eventi composti che si possono ottenere con gli eventi elementari di $A$ formano lo *spazio degli eventi* che viene indicato con $\wp(A)$.

Gli eventi sono gli oggetti dello studio della probabilità e in genere si indicano con le lettere maiuscole $A, B, \ldots$ mentre per le operazioni e le relazioni tra eventi si usano i corrispondenti simboli che si sono utilizzati per le operazioni e le relazioni tra insiemi. Molto utile è anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn (figura 13.1).

**Definizione 13.5.** Se $n$ eventi $A, B, \ldots, F$ sono esaustivi cioè $A \cup B \cup \ldots F = \Omega$ e a due a due incompatibili $A \cap B = A \cap C \ldots = B \cap C \ldots = C \cap D \ldots = D \cap E \ldots = E \cap F = \emptyset$) diremo che essi formano una *partizione dello spazio degli eventi*. Gli eventi, identificabili da tutti i possibili sottoinsiemi di $\Omega$, sono dati dall'*insieme delle parti* di $\Omega$ indicato con $\wp(\Omega)$.

Ricordiamo che la cardinalità dell'insieme delle parti cioè il numero degli eventi che si possono formare con gli elementi di $\Omega$ è dato da $card(\wp(\Omega)) = 2^n$, dove $n$ rappresenta il numero degli eventi elementari. Così nel lancio del dado abbiamo $2^6 = 64$ possibili eventi, considerando anche l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento impossibile e l'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ che rappresenta l'evento certo.

## 13.2 Definizioni di probabilità

Nel linguaggio comune l'uso del termine probabilità è abbastanza chiaro e uniforme. Si dice che un certo fatto o evento è più o meno probabile a seconda che ci si aspetti che si verifichi più o meno facilmente.

La probabilità è dunque una misura del grado di fiducia associato al verificarsi di un evento e dipende dalle informazioni che si hanno a disposizione al momento di effettuare la valutazione.

Se diciamo che oggi pioverà con probabilità $0,20 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ intendiamo che siamo disposti a scommettere 20 centesimi per avere 1 euro nel caso che piova e perdere i 20 centesimi della posta nel caso che non piova.

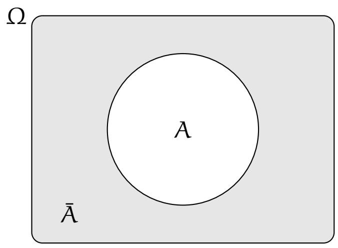



FIGURA 13.1: La *negazione* di un evento A, indicata con Ā, è l'evento che si verifica quando non si verifica A.

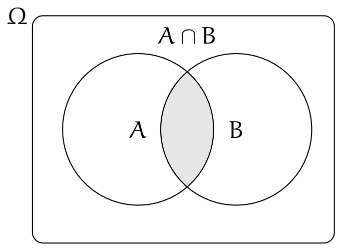



FIGURA 13.2: L'*intersezione* tra gli eventi A e B indicata con $C = A \cap B$ è l'evento che si verifica quando si verificano sia A che B.

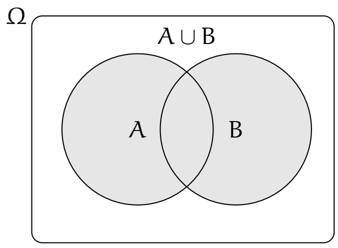



FIGURA 13.3: L'*unione* tra gli eventi A e B indicata con $C = A \cup B$ è l'evento che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi.

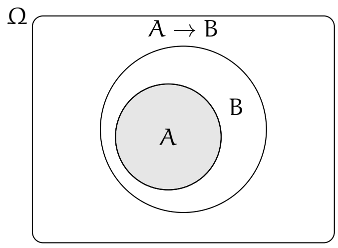



FIGURA 13.4: L'evento A *implica* l'evento B, in simboli $A \subseteq B$, se ogni volta che si verifica A si verifica anche B.

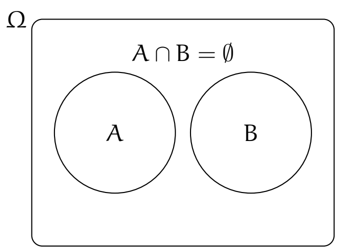



FIGURA 13.5: Due eventi A e B si dicono *incompatibili*, se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

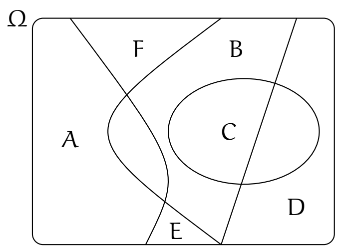



FIGURA 13.6: Due o più eventi si dicono *esaustivi*, se almeno uno di essi si verifica. L'unione di tali eventi coincide con l'insieme Ω.

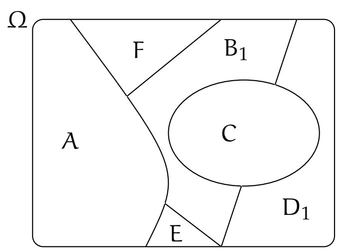



FIGURA 13.7: Un insieme di eventi formato da eventi tra loro incompatibili ed esaustivi, genera una partizione nello spazio degli eventi.

**Definizione 13.6.** La valutazione della probabilità dell'evento $A$ è quel valore $P(A)$ che si ottiene dalla quota $q$ che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita $S$ nel caso si verifichi l'evento. Quindi $P(A) = \frac{q}{S}$.

Per ottenere una valutazione coerente, per valutare quanto siamo disposti a perdere-vincere nella scommessa, dobbiamo immedesimarci nei due ruoli, quello dello scommettitore e quello del banco. Inoltre le somme che scommettiamo devono essere significative per chi procede alla valutazione. Nessun individuo coerente scommetterebbe su un evento impossibile una quota maggiore di 0 qualunque sia la vincita e nessun individuo pagherebbe una vincita per il verificarsi di un evento certo. Da queste considerazioni deduciamo che la misura della probabilità appartiene all'intervallo $[0, 1]$, essendo 0 il valore che corrisponde all'evento impossibile e 1 quello che corrisponde all'evento certo.

**Definizione 13.7.** sulla probabilità
La probabilità di un evento $E$ è un numero reale compreso tra 0 e 1: $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$;
la probabilità dell'evento impossibile è zero $P(\emptyset) = 0$;
la probabilità dell'evento certo è uguale a uno: $P(\Omega) = 1$.

### 13.2.1 La valutazione classica

La valutazione della probabilità a volte si riconduce a semplici giudizi di equiprobabilità: cioè ogni evento elementare dello spazio degli eventi ha la stessa probabilità. Così nel lancio di un dado, nel gioco della tombola, nel gioco delle carte tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità. Quindi se $n$ sono gli eventi elementari la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$.

La probabilità di un evento $E$ è data dal rapporto tra il numero $f$ dei casi favorevoli al verificarsi di $E$ e il numero $n$ di tutti i casi possibili, purché ugualmente possibili. In simboli:

$$P(E) = \frac{f}{n}.$$

Mentre nei giochi di sorte si realizzano le condizioni per calcolare tale probabilità (conoscenza a priori dei casi possibili, di quelli favorevoli e condizione di equiprobabilità) esistono altri eventi casuali per i quali è difficile o impossibile calcolare tale probabilità.

---

**Esempio 13.1.** Se in un sacchetto ho 3 palline rosse e 2 palline gialle qual è la probabilità che estraendo a caso una pallina questa sia rossa?

La probabilità che si estragga una pallina rossa è $p = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$, infatti i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrarre una pallina rossa" sono 3, tante quante sono le palline rosse, i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 5, tante quante palline ci sono nel sacchetto.

**Esempio 13.2.** Da un mazzo di 40 carte napoletane estraiamo una carta. Calcoliamo la probabilità degli eventi:

- ➡ $A$ = esce una carta di spade;
- ➡ $B$ = esce una carta con il numero 12;
- ➡ $C$ = esce una carta con un numero o una figura;
- ➡ $D$ = esce il sette di denari;

- $E$ = esce un asso.

I casi possibili sono 40, dato che il mazzo è formato da 40 carte. Anche qui siamo in presenza di eventi elementari equiprobabili, applichiamo ancora lo schema di valutazione classico

- L'evento A è casuale, infatti i casi favorevoli sono 10, dato che il mazzo ha 10 carte di spade: $P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$;
- l'evento B è impossibile dato che non esiste una carta col numero 12: $P(B) = 0$;
- l'evento C è certo, infatti i casi favorevoli sono 40, dato che il mazzo ha 12 figure e 28 carte con un numero: $P(C) = 1$;
- c'è un solo sette di denari su 40 carte: $P(D) = \frac{1}{40}$;
- nel mazzo di 40 carte ci sono 4 assi: $P(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$;

**Esempio 13.3.** Lanciando in aria 3 monete, quale dei seguenti eventi è più probabile?

- Ottenere su 3 monete testa;
- ottenere su 1 moneta testa e su 2 monete croce.

Per rispondere alla domanda occorre calcolare le probabilità dei due eventi. Applichiamo la definizione classica. Dobbiamo calcolare tutti gli eventi possibili e tutti gli eventi favorevoli. Aiutiamoci con una tabella per elencare tutti i casi.

| prima moneta | seconda moneta | terza moneta |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | C |
| T | C | T |
| T | C | C |
| C | T | T |
| C | T | C |
| C | C | T |
| C | C | C |

I casi possibili sono 8. C'è un solo caso favorevole all'evento "3 volte testa". La probabilità di questo evento è quindi $p = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.

I casi favorevoli all'evento "1 moneta testa e 2 monete croce" sono CCT, CTC, TCC, quindi 3, allora $p = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$. Possiamo concludere che l'evento più probabile è ottenere 1 testa e 2 croci.

---

### 13.2.2 La valutazione sperimentale

Se si considera una successione di eventi dello stesso tipo e che avvengono in condizioni simili come l'uscita di una determinata faccia in un dado truccato, si indica come frequenza relativa $F(E)$ il rapporto tra il numero $\nu$ dei casi in cui si è verificato l'evento e il numero totale delle prove $n$, cioè $F(E) = \dfrac{\nu}{n}$.

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi intorno a un valore ben preciso al crescere del numero delle prove effettuate. Si assume come valutazione della probabilità dell'evento $E$ il valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa dello stesso evento, all'aumentare del numero delle prove ripetute alle stesse condizioni: $P(E) \approx F(E) = \frac{\nu}{n}$. L'errore che si commette diventa sempre più piccolo al crescere di $n$. La valutazione della probabilità così definita si chiama valutazione sperimentale, statistica, a posteriori o frequentista.

Anche l'ambito di applicazione di tale valutazione è limitato in quanto l'ipotesi che sta alla base della definizione è che l'evento a cui si vuole assegnare la probabilità sia pensabile come uno dei possibili risultati di una determinata prova e che tale prova sia ripetibile infinite volte nelle stesse condizioni. Si fa molto uso di questo schema di valutazione per stime della probabilità in campo economico e sanitario.

---

**Esempio 13.4.** In un'azienda alimentare si producono vasetti di marmellata. In uno studio di controllo sono stati evidenziati su 2500 vasetti analizzati 13 con imperfezioni e non idonei al commercio. Si valuti la probabilità dell'evento E="confezioni non idonee al commercio".

Se si considera il campione dei vasetti analizzati significativo rispetto alla produzione complessiva delle confezioni prodotte possiamo considerare la frequenza relativa dell'evento E come misura della probabilità. Quindi $P(E) = F(E) = \frac{13}{2500} = 0,0052$.

**Esempio 13.5.** Qual è la probabilità che un certo guidatore faccia un incidente con la macchina? Quanto deve pagare, come premio, a una compagnia di assicurazioni in modo che, se fa un incidente, la compagnia paghi per intero il danno?

Per rispondere a queste domande le compagnie di assicurazioni sono in grado di stimare, sulla base dei numerosissimi incidenti stradali che si verificano ogni anno, qual è la probabilità che un guidatore provochi un incidente d'auto.

**Esempio 13.6.** Un sacchetto contiene 10 palline, alcune bianche, altre nere. Si estrae a caso, senza guardare nel sacchetto un pallina, si guarda il colore e si rimette il sacchetto nella pallina.

Dopo 100 estrazioni abbiamo contato 78 volte la pallina bianca e 22 la pallina nera. Possiamo allora ipotizzare che nel sacchetto ci siano 8 palline bianche e 2 palline nere.

---

### 13.2.3 La valutazione soggettiva

É la definizione di probabilità che abbiamo dato all'inizio del capitolo: la probabilità dell'evento $A$ è quel valore $p$ che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita unitaria. Se un individuo valuta pari $\frac{1}{4} = 25\%$ la probabilità di un certo evento $E$ vuol dire che è disposto a pagare 25 euro a un ipotetico banco per riceverne 100 nel caso che $E$ si verifichi. Naturalmente la scommessa va accettata anche come banco che deve essere disposto a scommettere il $75\% = 1 - p$ sul fatto che $E$ non si verifichi: $P(E) = \frac{q}{S}$ con $q = 25$ e $S = 100$.

#### Le scommesse

La definizione soggettiva si applica anche alle scommesse. Supponiamo di scommettere sul verificarsi di un evento $E$ a cui attribuiamo probabilità $p$. Stabiliamo inoltre di giocare e quindi perdere $q$ euro nel caso l'evento non si verifichi e di guadagnare $g$ euro nel caso l'evento si verifichi. In genere le scommesse si indicano in questo modo: si mette in rapporto la perdita con il guadagno $\frac{q}{g}$ o anche $q : g$ che si legge $q$ a $g$. In questo caso $q$ e $g$ si chiamano le *poste* o le *messe* del gioco. Che relazione c'è tra questo rapporto e la probabilità?

Se in un grande numero di scommesse così congegnate vincessimo la somma $g$ una frazione $p$ di volte e perdessimo la somma $q$ una frazione $1-p$, affinché il gioco risulti equo dovremmo avere $p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0$. Isoliamo $p$ nell'uguaglianza:

$$p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0 \Rightarrow p \cdot g - q + q \cdot p = 0 \Rightarrow p \cdot (g+q) = q \Rightarrow p = \frac{q}{g+q}.$$

La relazione è dunque questa: la probabilità di una scommessa $q : g$ è data dalla perdita $q$ al numeratore e al denominatore la somma complessiva che si incassa data dal guadagno più quello che si è scommesso.

---

**Esempio 13.7.** Supponiamo che la vincita ai mondiali di calcio dell'Italia sia data 5 : 12 cioè 5 a 12 dai bookmaker inglesi. Quale probabilità assegnano gli allibratori alla vincita dell'Italia?

Significa che scommettendo 5 euro sulla vincita dell'Italia ne possiamo vincere 12 nel caso che l'evento si verifichi.

Quindi la probabilità della vincita dell'Italia sarà: $P(E) = \frac{5}{5+12} = \frac{5}{17} = 0,294$

**Esempio 13.8.** Leggo sul sito del Corriere della Sera, che per la partita Real Madrid-Barcellona, che si giocherà questa sera, la vittoria del Real Madrid viene data 1 a 2,60.

Significa che scommettendo 1 euro possiamo vincerne 2,60: la vittoria del Real Madrid è stata quindi stimata dal giornale $p = \frac{1}{2,60} = \frac{100}{260} = 0,38\ldots$ circa 38%.

---

## 13.3 Probabilità dell'unione di due eventi

La misura della probabilità si può applicare a tutti gli eventi individuati dall'insieme delle parti degli eventi elementari $\wp(\Omega)$. Qualsiasi evento si può definire come sottoinsieme dell'insieme elementare (elencando gli eventi elementari che ne fanno parte) oppure enunciando una proposizione vera nel caso in cui l'evento si verifichi. Possiamo quindi poter esprimere la probabilità su eventi composti da due o più eventi di $\wp(\Omega)$ attraverso le operazioni di unione e intersezione tra insiemi che corrispondono alle operazioni di disgiunzione inclusiva e di congiunzione nelle proposizioni.

Per la probabilità dell'evento unione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro incompatibili e eventi tra loro compatibili.

### 13.3.1 Unione di due eventi tra loro incompatibili

**Definizione 13.8.** Due eventi A e B si dicono *incompatibili* quando non si possono verificare contemporaneamente, cioè quando $A \cap B = \emptyset$. Due eventi A e B si dicono *compatibili* quando si possono verificare contemporaneamente, cioè quando $A \cap B \neq \emptyset$.

---

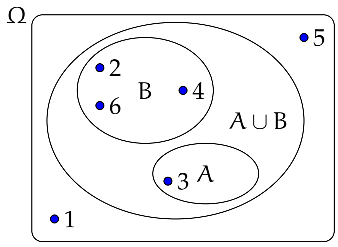
**Esempio 13.9.** Nel lancio di un dado regolare calcolare la probabilità dell'uscita del numero 3 o di un numero pari.

I due eventi "$A =$ Uscita del numero 3" e "$B =$ Uscita di un numero pari" sono eventi incompatibili.

Ci sono due modi per calcolare la probabilità dell'evento unione.

**Modo I** : Secondo la valutazione classica la probabilità che esca il 3 o un numero pari è uguale a $\frac{4}{6}$: infatti i casi favorevoli sono 4 (le facce 3,2,4,6) su un totale di 6 casi possibili.

**Modo II** : Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi considerando le proprietà dei singoli eventi. Dato che i due eventi sono incompatibili, cioè: $A \cap B = \emptyset$: abbiamo $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$.




---

Possiamo quindi affermare che dati due eventi incompatibili cioè tali che $A \cap B = \emptyset$ la probabilità dell'evento unione è dato dalla uguaglianza: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

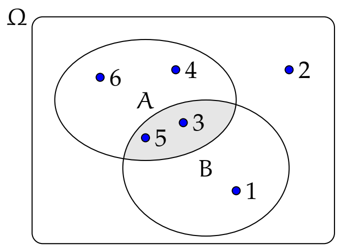
Può essere utile per avere un'idea intuitiva di questa uguaglianza pensare alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi. Se voglio la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su $A$ che addiziono a quella presente su $B$.

### 13.3.2 Unione di due eventi tra loro compatibili

---

**Esempio 13.10.** Consideriamo il lancio di un dado regolare, vogliamo trovare la probabilità dell'uscita di un numero maggiore di 2 o di un numero dispari.

Gli eventi "$A =$ Uscita di un numero maggiore di 2" e "$B =$ Uscita di un numero dispari" sono compatibili in quanto le facce 5 e 3 appartengono sia all'evento $A$ che all'evento $B$.




**Modo I** : La probabilità che esca un numero maggiore di 2 o un numero dispari è uguale a $\frac{5}{6}$: infatti i casi favorevoli sono 5 (le facce 1,3,4,5,6) su un totale di 6 casi possibili.

**Modo II** : Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi considerando le proprietà dei singoli eventi. In questo caso non possiamo sommare come nei casi precedenti le probabilità dei singoli eventi. Infatti $P(A) + P(B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$ che contraddice l'assioma della probabilità. Occorre togliere la probabilità dell'intersezione tra A e B contata due volte, una volta per A e una per B, che è uguale a $\frac{2}{6}$: due casi favorevoli (le facce 3 e 5) su sei casi possibili:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

**Esempio 13.11.** Calcolare la probabilità che estraendo a caso un numero della tombola esso contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.

La prima domanda da farsi è se i due eventi sono compatibili o incompatibili. Poiché esistono numeri della tombola che contengono la cifra 5 e che sono anche multipli di 5 (per esempio 15, 50...) i due eventi sono compatibili. Di conseguenza bisogna applicare la regola $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- $A =$ estrarre un numero che contiene la cifra 5. Questi numeri sono: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, ..., 59, 65, 75, 85, in tutto 18 ne segue che: $p(A) = \frac{18}{90}$;
- $B =$ estrarre n multiplo di 5. I multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, ... due per ogni decina, quindi 18 in tutto, ne segue che: $p(B) = \frac{18}{90}$;
- $A \cap B =$ estrarre un cifra che contiene 5 ed è multiplo di 5. Questi numeri sono 5, 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85 in tutto sono 10 quindi: $p(A \cap B) = \frac{10}{90}$.

Applichiamo la regola della probabilità utilizzata nel modo II del precedente esempio quindi:

$A \cup B =$ estrarre un numero che contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{90} + \frac{18}{90} - \frac{10}{90} = \frac{26}{90} \approx 0,29 \approx 29\%.$$

---

Dagli esempi svolti possiamo enunciare il seguente teorema:

**Teorema 13.1** (delle probabilità totali)**.** *Dati due eventi A e B, entrambi appartenenti allo stesso spazio degli eventi, la probabilità dell'unione degli eventi è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi meno la probabilità della loro intersezione. In simboli:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se pensiamo alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi, per calcolare la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su A che addiziono a quella presente su B a cui devo togliere la massa presente su $A \cap B$ che è stata contata due volte.

❑ **Osservazione** Il teorema delle proprietà totali vale anche nel caso degli eventi incompatibili in quanto in questo caso la probabilità dell'intersezione dei due eventi $P(A \cap B) = 0$ e l'uguaglianza diventa $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

## 13.4 Probabilità dell'evento complementare

Dato un evento A si definisce *evento complementare* di A indicato con $\overline{A}$ l'evento che si verifica quando non si verifica A.

**Teorema 13.2** (dell'evento complementare)**.** *Dato un evento* E*, la probabilità dell'evento complementare* $\overline{E}$ *è data da* 1 *meno la probabilità dell'evento* E*. In simboli:*

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

*Dimostrazione.* per l'assioma introdotto all'inizio del capitolo:

$$P(\overline{E} \cup P(E)) = P(\Omega) = 1;$$

per il teorema delle probabilità totali essendo i due eventi incompatibili:

$$(P(\overline{E}) \cup P(E)) = P(\overline{E}) + P(E);$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$P(\overline{E}) + P(E) = 1 \Rightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

□

Se pensiamo all'analogia della una massa unitaria distribuita sugli eventi, la probabilità dell'evento $\overline{E}$ sarà data dalla massa unitaria meno la probabilità di $E$.

---

**Esempio 13.12.** Nel lancio di un dado regolare determina la probabilità che la somma delle facce non sia uguale a 5.

Consideriamo la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia un punteggio uguale a 5. I casi possibili sono 36 (ogni faccia del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado), mentre i casi favorevoli all'evento sono 4, precisamente (1,4), (4,1), (2,3) e (3,2). Quindi $P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Per conoscere la probabilità dell'evento complementare cioè la probabilità che la somma delle due facce del dado non sia uguale a 5, risulterebbe piuttosto laborioso trovare tutti i casi in cui la somma delle due facce sia uguale a 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, si può invece applicare la regola $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ cioè nel nostro caso $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

---

❑ **Osservazione** L'uguaglianza sulla probabilità dell'evento complementare può risultare molto utile nel risolvere alcuni problemi. A volte è più facile o indispensabile calcolare la probabilità dell'evento complementare che calcolare direttamente la probabilità dell'evento.

## 13.5 La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

Dati due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ ci proponiamo di calcolare la probabilità dell'evento intersezione cioè $P(A \cap B)$ partendo dalla probabilità degli eventi componenti $P(A)$ e $P(B)$. Si tratta quindi di stimare con quale probabilità i due eventi avvengono congiuntamente. Occorre innanzitutto verificare che i due eventi non siano incompatibili in quanto in questo caso l'evento intersezione è impossibile.

Per la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro *indipendenti* e eventi tra loro *dipendenti*.

### 13.5.1 Intersezione di due eventi tra loro indipendenti

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se il verificarsi di A *non cambia* la probabilità del verificarsi di B, si dicono invece *dipendenti* se il verificarsi di A *cambia* la probabilità di B rispetto a quella valutata per B prima del verificarsi di A.

**Esempio 13.13.** Determinare la probabilità che lanciando una moneta e un dado regolari esca testa e un numero maggiore di 4.

- $A$ = Uscita di Testa nel lancio di una moneta $\to P(A) = \frac{1}{2}$;
- $B$ = Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado $\to P(B) = \frac{2}{6}$;
- $(A \cap B)$= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado.

Vediamo come determinare $P(A \cap B)$. I due eventi A e B non si influenzano in quanto l'uscita di testa non modifica la probabilità dell'uscita di 4 nel lancio del dado.

Notiamo subito una situazione diversa rispetto a quella precedente dell'unione di due eventi. Nel caso precedente, lo spazio degli eventi era lo stesso per l'evento A, per l'evento B e per l'evento unione $(A \cup B)$. Ora invece per l'evento A l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_1 = \{T, C\}$, per l'evento B invece, l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'evento $(A \cap B)$ ha il seguente insieme degli eventi elementari:

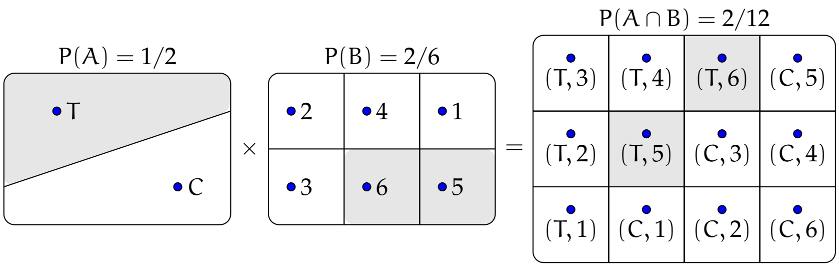
$$\Omega = \{(T, 1); (T, 2); (T, 3); (T, 4); (T, 5); (T, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}.$$

Lo spazio degli eventi elementari dell'intersezione è dato dal prodotto cartesiano dello spazio elementare di A moltiplicato per quello di B. Si può calcolare la probabilità in due modi:

**Modo I** : Si indicano i casi favorevoli e i casi possibili rispetto all'evento intersezione: i casi favorevoli all'evento sono due: $(A \cap B) = \{(T, 5); (T, 6)\}$, i casi possibili sono dodici:

$$\Omega = \{(T, 1); (T, 2); (T, 3); (T, 4); (T, 5); (T, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$$

la probabilità dell'evento intersezione è: $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.




**Modo II** : Dato che i due eventi non si influenzano, supponiamo di procedere con due scelte successive: prima il lancio della moneta con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ e poi il lancio del dado con probabilità pari a $\frac{2}{6}$. Se si verifica il primo evento la probabilità si riduce da 1 a $\frac{1}{2}$ a cui devo applicare la probabilità che si verifichi il secondo evento pari a $\frac{2}{6}$, moltiplicando le probabilità dei singoli eventi.

- $A$ = Uscita di Testa nel lancio di una moneta $\to P(A) = \frac{1}{2}$;
- $B$ = Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado $\to P(B) = \frac{2}{6}$;

- $(A \cap B)$= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{12}$.

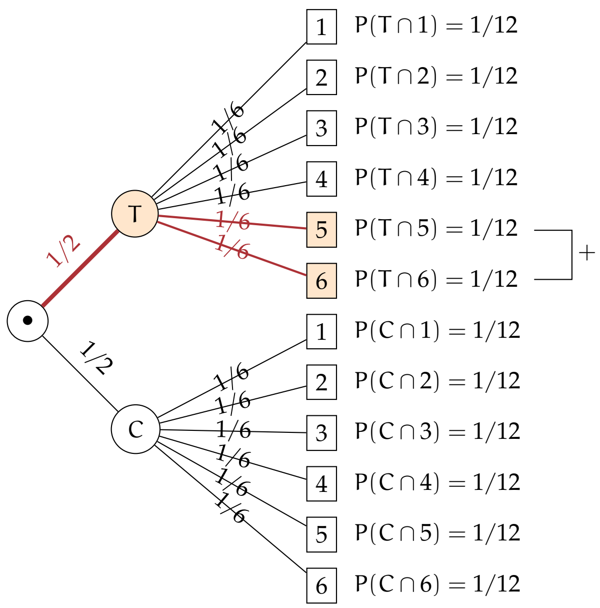
---

Generalizziamo: dati due eventi aleatori A e B tra loro indipendenti la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è data dalla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

#### Diagrammi ad albero

Una rappresentazione grafica che può risultare utile nello studio della probabilità dell'evento intersezione detto anche studio delle *probabilità composte* è il diagramma ad albero. Le linee dell'albero si dicono *rami*, mentre i punti da cui partono e arrivano i rami si dicono *nodi*, il nodo iniziale si chiama *radice*.

La costruzione di un diagramma ad albero nel caso delle probabilità composte consente di eseguire un'analisi completa di tutti i possibili esiti di una prova. Ogni percorso dell'albero che va dalla radice al nodo terminale indica una sequenza di eventi congiunti, incompatibile con qualsiasi altro percorso dell'albero. La probabilità di ogni singolo evento si indica sui rami e moltiplicando le probabilità che si incontrano nel percorso si ottiene la probabilità della congiunzione degli eventi che formano il percorso. Dato che ogni percorso che va dalla radice al nodo terminale individua eventi incompatibili, se vogliamo trovare l'unione di due o più percorsi possiamo semplicemente sommarli. L'esempio precedente può essere schematizzato in questo modo:




L'albero può essere semplificato considerando gli eventi coinvolti e i loro complementari.

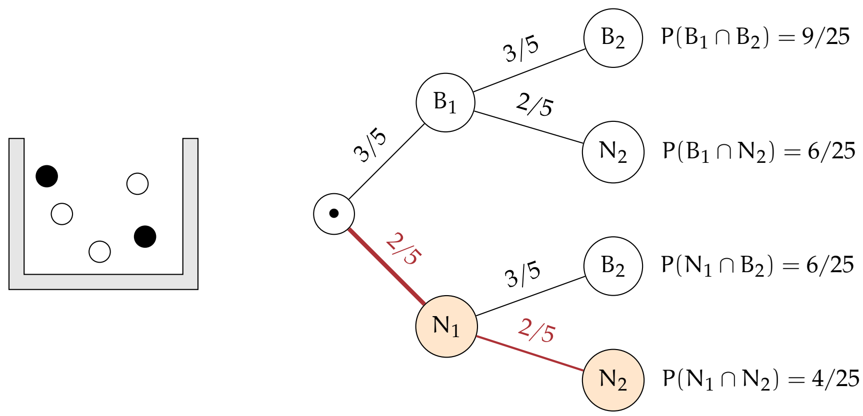
---

**Esempio 13.14.** In un'urna abbiamo tre palline bianche e due nere. Facciamo due estrazioni rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità dell'uscita di una pallina nera nelle due estrazioni.

- $B_1$ = nella prima estrazione pallina bianca $\rightarrow P(B_1) = \frac{3}{5}$;

- $B_2$ = nella seconda estrazione pallina bianca $\rightarrow P(B_2) = \frac{3}{5}$ in quanto la pallina si rimette nell'urna;
- $N_1$ = nella prima estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_1) = \frac{2}{5}$;
- $N_2$ = nella seconda estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_2) = \frac{2}{5}$.

Il problema è sempre lo stesso: calcolare una probabilità su un insieme intersezione partendo dalle probabilità degli eventi componenti. Devo moltiplicare la probabilità di avere nera nella prima estrazione $P(N_1) = \frac{2}{5}$ con la probabilità di avere nera nella seconda estrazione $P(N_2) = \frac{2}{5}$ in quanto, l'uscita della prima pallina nera, evento considerato ora come avvenuto, non influenza la probabilità di avere nera alla seconda estrazione in quanto la pallina estratta viene rimessa nell'urna. Quindi: $P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ in quanto i due eventi sono indipendenti.




Le domande che posso fare su questo esperimento sono relative allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. ove $\Omega = \{(B_1, B_2); (B_1, N_2); (N_1, B_2); (N_1, N_2)\}$ sono del tipo "Quale è la probabilità che escano palline di diverso colore", "Qual è la probabilità che la prima pallina sia bianca", ecc.

---

#### Il problema del Cavalier de Méré

Il Cavalier de Méré pose al grande matematico francese Blaise Pascal nel 1654 il seguente problema.

**Problema 13.15.** Perché scommettendo alla pari sull'evento $A$ = "ottenere almeno una volta un 6 in 4 lanci di un dado" ho accumulato una fortuna, mentre rischio la rovina scommettendo alla pari sull'evento $B$ = "ottenere almeno una coppia di 6 in 24 lanci di due dadi".

Scommettere alla pari 1:1 significa assegnare alla probabilità degli eventi A e B il valore pari a $\frac{1}{2}$. Consideriamo la probabilità dell'evento A composto dai quattro eventi indipendenti ma non incompatibili

- $E_1$ = ottenere 6 nel primo lancio;
- $E_2$ = ottenere 6 nel secondo lancio;
- $E_3$ = ottenere 6 nel terzo lancio;
- $E_4$ = ottenere 6 nel quarto lancio.

In questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare: $\overline{A}$ = non ottenere un 6 in quattro lanci di un dado. $\overline{A} = (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4})$.

Dato che gli eventi sono indipendenti e equiprobabili abbiamo:

$$P(\overline{E_1}) = P(\overline{E_2}) = P(\overline{E_3}) = P(\overline{E_4}) = \frac{5}{6}.$$

I valori di ciascun evento vanno moltiplicati tra loro per la regola vista in precedenza. Quindi $P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0,482$. La probabilità dell'evento A sarà quindi superiore a 0,5 in quanto $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,482 = 0,518$ e in un numero considerevole di scommesse il Cavalier de Méré accumulava una fortuna.

Consideriamo ora la probabilità dell'evento B, dove valgono considerazioni analoghe. Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{B}$. Dato che i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36 il caso favorevole all'evento 6 nel primo dado e 6 nel secondo dado è uno soltanto. Se $P(B) = \frac{1}{36} \Rightarrow p(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{35}{36}$. Dato che i lanci dei due dadi sono 24 e tutti tra loro indipendenti avremo:

$$p(\overline{B}) = \underbrace{\frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \ldots \cdot \frac{35}{36}}_{\text{24 volte}} = \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0,509$$

da cui $P(B) = 1 - 0,509 = 0,491$. Così è spiegato come mai in un grande numero di scommesse scommettendo alla pari il Cavalier de Méré si rovinasse.

### 13.5.2 Intersezione di due eventi tra loro dipendenti

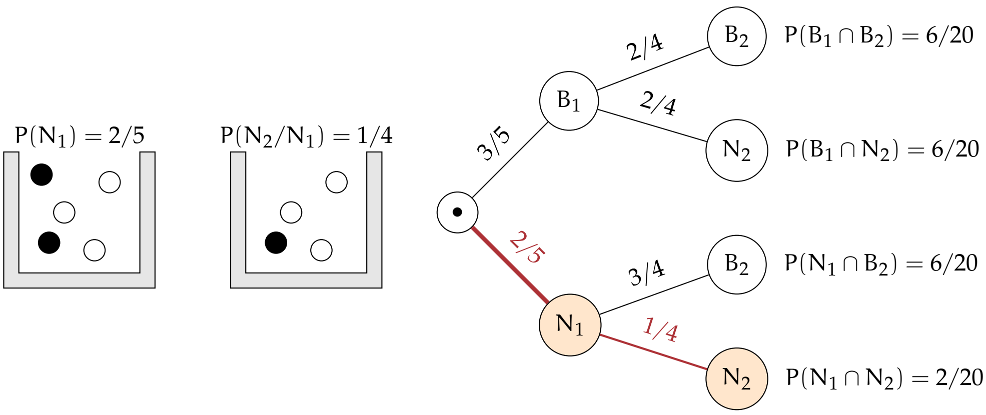
**Definizione 13.9.** Si chiama *probabilità condizionata* di un evento B rispetto a un evento A, la probabilità di B nell'ipotesi che l'evento A si sia già verificato. La probabilita di B subordinata o condizionata ad A si indica con $P(B/A)$.

---

**Esempio 13.16.** Calcolare la probabilità di avere due palline nere in due estrazioni in un'urna contenente tre palline bianche e due nere, questa volta però senza rimettere la pallina nell'urna.

Dato che vogliamo calcolare la probabilità dell'evento intersezione $(N_1 \cap N_2)$ questa sarà data dalla probabilità dell'evento $N_1$ moltiplicata per la probabilità dell'evento $N_2$ dopo che si è verificato l'evento $N_1$. La probabilità dell'evento $N_2$ dopo il verificarsi di $N_1$ non è la stessa dell'esperimento precedente in quanto la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

- $N_1$ = nella prima estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_1) = \frac{2}{5}$;
- $N_2$ = nella seconda estrazione pallina nera, dopo che l'evento $N_1$ si è verificato $\rightarrow P(N_2/N_1) = \frac{1}{4}$.




La probabilità dell'insieme intersezione diventa: $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$.

Attraverso il diagramma ad albero è facile calcolare le probabilità degli eventi elementari di questo esperimento con $\Omega = \{(B_1, B_2); (B_1, N_2); (N_1, B_2); (N_1, N_2)\}$.

**Esempio 13.17.** Una scatola di caramelle contiene 20 caramelle assortite alla frutta, incartate allo stesso modo e quindi irriconoscibili. Di esse 14 sono al limone. Fabio ne mangia 2. Qual è la probabilità che siano tutte e due al limone?

- $E_1$ = la prima caramella è al limone $\rightarrow P(E_1) = \frac{14}{20}$;
- $E_2$ = la seconda è al limone. Questo evento è dipendente dal primo, perché se Fabio ha mangiato una caramella al limone nella scatola rimangono 19 caramelle di cui 13 al limone quindi $P(E_2/E_1) = \frac{13}{19}$.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}.$$

---

**Teorema 13.3** (delle probabilità composte)**.** *Dati due eventi A e B, entrambi appartenenti allo stesso spazio degli eventi, la probabilità dell'intersezione degli eventi è uguale al prodotto della probabilità del primo evento per la probabilità del secondo evento condizionata al primo. In simboli:* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Per la proprietà commutativa dell'intersezione abbiamo: $A \cap B = B \cap A$ quindi anche $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Possiamo ora meglio definire la dipendenza e l'indipendenza di due eventi.

**Definizione 13.10.** Due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ si dicono *indipendenti* se la probabilità di B e la probabilità di B subordinata a A sono uguali, *dipendenti* nel caso contrario.

$P(B) = P(B/A) \rightarrow$ eventi indipendenti;

$P(B) \neq P(B/A) \rightarrow$ eventi dipendenti.

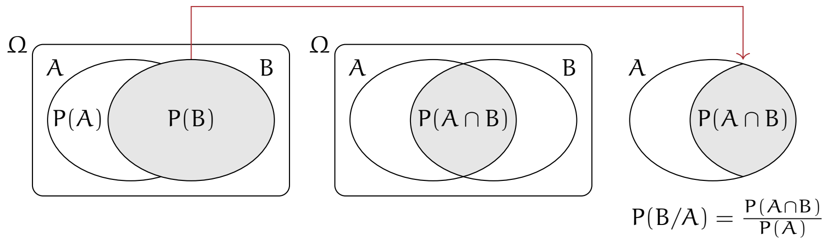
❑ **Osservazione** Il teorema delle probabilità composte vale sia nel caso di eventi dipendenti che nel caso di eventi indipendenti in quanto nel caso di eventi indipendenti $P(B) = P(B/A)$.

### 13.5.3 Interpretazione insiemistica della probabilità condizionata

Dalla uguaglianza del teorema delle probabilità composte isoliamo la probabilità condizionata per meglio individuare qual è il suo significato. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Da ciò segue

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Mettiamo a confronto $P(B)$ e $P(B/A)$ aiutandoci con i diagrammi di Venn.




Immaginiamo la misura della probabilità come una massa unitaria da spalmare sull'evento. La probabilità B è la quantità di massa da spalmare sull'evento B in relazione allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. Nell'ipotesi di ricevere un'ulteriore informazione dal verificarsi di A, questa informazione modifica la probabilità di B. L'insieme di riferimento per la probabilità di B non sarà più $\wp(\Omega)$, ma $\wp(A)$ e $P(B/A)$ sarà data dal rapporto della massa spalmata tra ciò che hanno in comune A e B cioè $P(A \cap B)$ e la probabilità di A cioè $P(A)$: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Se $P(B/A) = P(B)$ la parte della massa unitaria spalmata su B e il rapporto tra la massa spalmata sull'intersezione tra A e B e la massa spalmata su A rimane invariato e i due eventi si dicono indipendenti.

Se $P(B/A) > P(B)$ si dice che l'evento B è correlato positivamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A aumenta la probabilità dell'evento B.

Se $P(B/A) < P(B)$ si dice che l'evento B è correlato negativamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A diminuisce la probabilità dell'evento B.

❑ **Osservazione** Due eventi A e B tra loro incompatibili cioè tali che $P(A \cap B) = 0$ sono fortemente dipendenti. Infatti

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0 \neq P(B).$$

In genere $P(A/B) \neq P(B/A)$ in quanto le due probabilità pur avendo lo stesso numeratore hanno quasi sempre denominatore diverso:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \neq P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Per la proprietà commutativa della intersezione abbiamo: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ quindi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

---

**Esempio 13.18.** Conviene scommettere alla pari che in una classe composta da 23 alunni, due persone compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese?

In questo esempio non consideriamo gli anni bisestili e che la probabilità di nascere in un giorno dell'anno sia la stessa per tutti i giorni dell'anno. Scommettere alla pari significa intanto attribuire alla probabilità dell'evento A il valore di 0,5. Se la probabilità dell'evento è maggiore di 0,5 conviene scommettere altrimenti no.

Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $P(\overline{A})$ cioè la probabilità che nessuno dei 23 allievi compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese. $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{21} \cap \overline{A}_{22} \cap \overline{A}_{23})$ dove $\overline{A_i}$ rappresenta la probabilità che il compleanno dell'alunno *i*-esimo non coincida con nessuno dei compleanni degli altri alunni.

Analizziamo alcune di queste probabilità e applichiamo il teorema delle probabilità composte: $P(\overline{A}_1) = \frac{365}{365}$; $P(\overline{A}_2/\overline{A}_1) = \frac{364}{365}$; $P(\overline{A}_3/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{363}{365}$; $P(\overline{A}_4/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \frac{362}{365}; \ldots$ e così via fino ad arrivare a $P(\overline{A}_{23}/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{21} \cap \overline{A}_{22}) = \frac{343}{365}$.

Il primo allievo avrà la certezza di non avere alcun allievo che compie gli anni nello stesso suo giorno; il secondo allievo avrà una probabilità pari a 364 giorni su 365 di non compiere gli anni nello stesso giorno del primo, il terzo allievo una probabilità di 363 giorni su 365 condizionata a non compiere gli anni lo stesso giorno del primo e del secondo e così via fino alla probabilità dell'ultimo allievo pari a 343 giorni su 365 di non compiere gli anni lo stesso giorno dei propri compagni.

Ora applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{345}{365} \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots 345 \cdot 344 \cdot 343}{365^{23}} = 0,493.$$

Dato che $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,493 = 0,507$.

❍ **Conclusione** Conviene scommettere alla pari sull'evento A.

---

Il problema dell'esempio precedente si può così schematizzare: in un'urna ci sono 365 palline numerate da 1 a 365, qual'è la probabilità, rimettendo la pallina nell'urna, di estrarre la stessa pallina in 23 estrazioni?

## 13.6 Esercizi

### 13.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 13.1 Gli eventi

**13.1.** Quali dei seguenti eventi sono certi, probabili, impossibili

a ) Il giorno di Pasquetta pioverà;
b ) il giorno di Pasqua sarà domenica;
c ) comprando un biglietto della lotteria vincerò il primo premio;
d ) quest'anno sarò promosso;
e ) il 30 febbraio sarà domenica.

**13.2.** Aprendo a caso un libro di 200 pagine indica se gli eventi seguenti sono impossibili, certi o casuali e in questo ultimo caso indica se sono elementari.

a ) Si prenda la pagina 156: . . . . . . . . . . . ;
b ) si prenda la pagina 210: . . . . . . . . . . . ;
c ) si prenda una pagina minore o uguale a 200: . . . . . . . . . . . ;
d ) si prenda una pagina multipla di 10: . . . . . . . . . . .

**13.3.** Completa la tabella:

| Insieme $\Leftrightarrow$ Evento | Spazio degli eventi | Numero degli eventi |
|---|---|---|
| Lanciando una moneta ottengo croce | | |
| $E = \{croce\}$ | $\Omega = \{testa, croce\}$ | $2^2 = 4$ |
| Lanciando un dado ottengo 1 o 6 | | |
| $E = \{1, 6\}$ | $\Omega = \{1, 2, \dots\dots, \dots, \dots\}$ | $2^6 = \dots$ |
| Pallina con un numero primo da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15 | | |
| $E = \{2, 3, 5 \dots, \dots, \dots\}$ | $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ | $2^{15}$ |
| Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta il 7 di denari | | |
| $E = \{7denari\}$ | $\Omega = \{x \in A \mid A = \{Mazzo\ da\ 40\}\}$ | . . . . . . . . . . . |
| Lanciando due monete ottengo facce diverse | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . |
| Lanciando un dato ottengo un numero pari | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . |
| Pallina con un numero multiplo di 3 da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15 | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . |
| Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta un asso | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . |

**13.4.** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane, individua fra le seguenti le coppie di eventi incompatibili:

a ) La carta estratta è un re;
b ) la carta estratta è di spade.
c ) la carta estratta è un 5.
d ) la carta estratta è una figura.
e ) la carta estratta è di denari.
f ) la carta estratta è un multiplo di 3.
g ) la carta estratta non è una figura.

Quali sono i 2 eventi la cui unione genera un evento certo?

**13.5.** Considerando la distribuzione dei sessi in famiglie con due figli in cui lo spazio degli eventi $\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$ quali sono l'intersezione e l'unione degli eventi $E_1$ =“Il primo figlio è maschio” e $E_2$ = “Il secondo figlio è maschio”.

## 13.2 Definizioni di probabilità

**13.6.** Quali tra i seguenti numeri possono essere misure di probabilità?

$$1,5;\ 0,5;\ 25;\ 100\%;\ -0,1;\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{3};\ 0;\ 120\%;\ 0,\bar{3}.$$

**13.7.** Elenca i casi favorevoli all'evento: “lanciando tre dadi la somma delle facce è 5”.

**13.8 (*).** Per uno studente è indifferente ricevere 350 € senza condizioni, oppure un motorino del valore 1500 € solo se sarà promosso. Qual è la probabilità che lo studente attribuisce alla sua promozione?

**13.9 (*).** Uno studente è disposto a puntare 10 € per riceverne 60 solo se sarà interrogato in matematica. Quale probabilità lo studente attribuisce all'eventualità di essere interrogato in matematica?

**13.10 (*).** Tre amici si sfidano ad una gara di scacchi. Giudico che due di essi si equivalgano, mentre ritengo che il terzo abbia probabilità doppia di ciascuno degli altri due sfidanti. Quale probabilità attribuisco a ciascuno dei tre giocatori?

**13.11 (*).** Un'urna contiene 3 palline bianche, 5 rosse e 7 verdi tutte uguali e distinguibili solo per il colore. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna si verificano i seguenti eventi.

➡ $A =$ si estrae una pallina rossa;
➡ $B =$ si estrae una pallina bianca;
➡ $C =$ si estrae una pallina bianca o verde.

**13.12.** Si lanciano 3 monete equilibrate (testa e croce sono egualmente possibili); calcolare la probabilità di ottenere due croci e una testa.

**13.13 (*).** Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi regolari la somma dei numeri che si presentano sia 6.

**13.14 (*).** Un'urna contiene 100 palline identiche, numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia un multiplo di 10.

**13.15 (*).** Un'urna contiene 15 palline identiche, numerate da 1 a 15. Calcolare la probabilità che estraendo a caso due palline dall'urna, la loro somma sia 10.

**13.16 (*).** Calcola la probabilità che lanciando 4 volte una moneta equilibrata escano solo due teste.

**13.17 (*).** Pago alla mia compagnia di assicurazione un premio di 450 € l'anno per avere assicurato contro il furto la mia auto che ho pagato 12000 €. Quale probabilità viene attribuita dalla compagnia al furto dell'auto?

**13.18 (*).** E' più facile vincere un premio acquistando un biglietto nella lotteria A che prevede 10 premi di ugual valore su un totale di 5000 biglietti venduti o nella lotteria B che prevede 7 premi su 3000 biglietti venduti? Se ogni premio per entrambe le lotteria ammonta a 1000 euro, quale dovrebbe essere un prezzo equo per la lotteria A? Quale il prezzo equo per la lotteria B?

**13.19.** In Italia nel 2005 sono stati denunciati dalla polizia 2.579.124 crimini penali, nello stesso periodo in Danimarca sono stati denunciati 432.704 crimini. Sulla base di questi dati ritieni che sia più sicuro vivere in Danimarca?

**13.20.** In un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estraendo a caso una carta essa sia:

- $A =$ un re;
- $B =$ una carta a denari;
- $C =$ una carta minore di 8;
- $D =$ una carta con punteggio pari.

**13.21.** Un mazzo di carte francesi è composto da 54 carte, 13 per seme e due jolly, i semi sono cuori e quadri di colore rosso, picche e fiori di colore nero. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una carta

- $A =$ sia un jolly;
- $B =$ sia un re;
- $C =$ sia l'asso di picche,
- $D =$ sia una carta di colore rosso.

**13.22.** Da un mazzo di 40 carte napoletane vengono tolte tutte le figure, calcola la probabilità di estrarre una carta a denari.

**13.23.** In un sacchetto vengono inserite 21 tessere, su ciascuna delle quali è stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Calcola la probabilità che estraendo a caso una tessera essa sia

- $A =$ una consonante;
- $B =$ una vocale;
- $C =$ una lettera della parola MATEMATICA.

**13.24.** Nelle estrazioni del Lotto si estraggono dei numeri a caso compresi tra 1 e 90. Calcola la probabilità che il primo numero estratto sia:

- $A =$ il 90;
- $B =$ un numero pari;
- $C =$ un multiplo di 3;

➡ D = contenga la cifra 1.

**13.25.** In un ipermercato si sono venduti in un anno 1286 cellulari di tipo A e 780 cellulari di tipo B. Mentre erano ancora in garanzia sono stati restituiti 12 cellulari di tipo A e 11 cellulari di tipo B perché malfunzionanti. Comprando un cellulare di tipo A, qual è la probabilità che sia malfunzionante? Qual è la probabilità che sia malfunzionante un cellulare di tipo B?

**13.26.** Quando vado al lavoro parcheggio l'auto nei parcheggi a pagamento ma non sempre compro il biglietto del parcheggio. Precisamente lo compro il lunedì e il giovedì, non lo compro il martedì e il mercoledì, il venerdì vado sempre con l'auto di un collega, il sabato e la domenica non lavoro. Quando vado al lavoro, che probabilità ho di prendere la multa per non aver pagato il parcheggio?

**13.27.** Un semaforo mostra il rosso per 120″, il verde per 60″, il giallo per 10″. Qual è la probabilità di incontrare il semaforo quando è verde?

### 13.3 Probabilità dell'unione di due eventi

**13.28 (*).** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero dispari o minore di 4.

**13.29 (*).** Da un'urna che contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero minore di 6 o un numero maggiore di 8.

**13.30 (*).** Da un'urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero pari o un numero maggiore di 8.

**13.31 (*).** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero pari o minore di 2.

**13.32 (*).** Calcolare la probabilità che scegliendo a caso una carta da un mazzo di carte francesi di 54 carte si prenda una carta di picche o un re.

**13.33 (*).** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità che sia un 3 o una carta di spade.

**13.34 (*).** Da un'urna che contiene 5 palline rosse, 8 palline blu, 12 palline bianche, 15 palline gialle, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina sia rossa o blu o gialla.

**13.35 (*).** Da un'urna che contiene 30 palline identiche numerate da 1 a 30, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che il numero della pallina sia minore di 20 o multiplo di 4.

**13.36.** Per un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità di estrarre

➡ A = un asso o un re;
➡ B = un sette o una carta a bastoni;
➡ C = una figura o una carta a denari.

**13.37.** Calcola la probabilità che lanciando un dado a sei facce esca un numero pari o un multiplo di 3.

**13.38.** Nel gioco della tombola si estrae una pallina numerata da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità che estraendo la prima pallina essa riporti:

- A = un multiplo di 5 o un multiplo di 10,
- B = un numero pari o un multiplo di 5,
- C = un numero che contenga la cifra 5 o la cifra 2.

## 13.4 Probabilità dell'evento complementare

**13.39.** La seguente tabella è tratta dalla tavola di mortalità dei maschi al 2002 relativa a una popolazione di 100000 individui:

| Età | $0 \leqslant x < 20$ | $20 \leqslant x < 40$ | $40 \leqslant x < 60$ | $60 \leqslant x < 80$ | $80 \leqslant x < 100$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Decessi | 997 | 1909 | 7227 | 39791 | 49433 |

Calcola la probabilità per un individuo dell'età di 20 anni di vivere almeno per altri 40 anni.

**13.40 (*).** Calcola la probabilità di vincita dell'Italia ai campionati mondiali di calcio se i bookmaker scommettono su una sua vincita 12 a 5.

**13.41 (*).** In un incontro di boxe il pugile Cacine viene dato a 1:7 contro il detentore del titolo Pickdur. Secondo gli allibratori, quale la probabilità ha Cacine di conquistare il titolo? Quali le poste per Pickdur?

**13.42 (*).** Quanto devo puntare su Celestino, che viene dato vincente 4:21 per riscuotere 500 €?

**13.43 (*).** Un cubo di legno viene verniciato e successivamente segato parallelamente alle facce in modo da ottenere 1000 cubetti. Quanti tagli sono necessari? Qual è la probabilità che, una volta mescolati i cubetti, si estragga

- A = un cubetto con una sola faccia verniciata;
- B = un cubetto con due facce verniciate;
- C = un cubetto con nessuna faccia verniciata.

**13.44 (*).** In un circolo vi sono 100 soci. Di essi si sa che 44 sanno giocare a dama, 39 a scacchi, 8 sanno giocare sia a dama che a scacchi. Estraendo a sorte uno dei 100 soci, qual è la probabilità che sia una persona che non sappia giocare ad alcun gioco.

**13.45 (*).** Da un mazzo di 40 carte si estrae 1 carta. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

- A = la carta non è di spade;
- B = la carta non è una figura;
- C = la carta non è un 2.

**13.46 (*).** Calcola la probabilità che lanciano 4 volte una moneta equilibrata esca almeno una testa.

### 13.5 La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

**13.47** (*). Nel lancio di due monete qual è la probabilità che una almeno sia croce?

**13.48** (*). Nel lancio di due dadi qual è la probabilità di avere un totale di 8 o due numeri uguali?

**13.49** (*). Qual è la probabilità nel lancio di due dadi che la somma dei punti sia almeno 9?

**13.50** (*). Punto 7 euro nel lancio di due dadi sulla somma delle facce uguale a 5. Quanto devo ricevere perché il gioco sia equo?

**13.51** (*). La probabilità che un proiettile colpisca un determinato bersaglio è 0,5. Qual è la probabilità che tre proiettili lanciati uno dopo l'altro colpiscano tutti il bersaglio.

**13.52** (*). Due persone giocano con le dita di entrambe le mani a pari e dispari. Con una posta 1:1 conviene giocare sul pari o sul dispari?

**13.53** (*). Un allievo cuoco prepara la cena. La probabilità che la minestra sia troppo salata è pari a 0,3 e che l'arrosto bruci sia pari a 0,4. Qual è la probabilità che la cena riesca bene?

**13.54** (*). Una scopa elettrica è formata da due apparati: il motore che si guasta una volta su 10 dopo un anno e la carrozzeria che si rompe una volta su 100 dopo un anno. Che probabilità ha la scopa elettrica di essere funzionante dopo un anno?

**13.55** (*). Una coppia ha caratteri ereditari tali che ogni loro figlio ha probabilità pari a $1/4$ di essere malato. I genitori vorrebbero avere due figli. Calcolare la probabilità di avere:

- $A =$ entrambi i figli sani;
- $B =$ almeno un figlio malato.

**13.56** (*). Determinare la probabilità che lanciando tre volte una moneta si presentino

- $A = 3$ Teste;
- $B = 1$ Testa;
- $C = 2$ Teste.

**13.57** (*). Nel lancio di una moneta e di un dado calcolare la probabilità di:

- $A =$ ottenere Croce e il 6;
- $B =$ ottenere Testa e un numero multiplo di 2;
- $C =$ ottenere Croce e un numero maggiore di 2.

**13.58** (*). In un'urna ci sono 6 palline, di cui 2 nere e 4 bianche: calcola la probabilità di estrarre palline di diverso colore nel caso in cui la prima pallina viene rimessa nell'urna.

**13.59.** L'urna $U_1$ contiene 10 palline rosse e 15 bianche, l'urna $U_2$ contiene 12 palline rosse e 13 palline bianche. Calcola la probabilità che estraendo una pallina da $U_1$ e una pallina da $U_2$ siano entrambe rosse.

**13.60** (*). Un'urna contiene 10 palline rosse, 7 palline nere e 2 bianche. Estraendone simultaneamente, tre calcolare la probabilità:

- $A =$ tutte e tre rosse;

- B = tutte e tre bianche;
- C = 1 rossa e 2 nere;
- D = tutte di colore diverso;
- E = una sola bianca.

**13.61** (*). Da un mazzo di 40 carte, si estrae una carta a caso. Determina la probabilità:

- A = che esca un Re;
- B = che esca un Re nell'ipotesi che sia uscita una figura;
- C = che esca un Re nell'ipotesi che sia uscito il seme di fiori;
- D = che esca il seme di fiori dopo che è uscito un Re.

Tra gli eventi A, B, C e D quali sono indipendenti?

**13.62** (*). Uno studente universitario ha la probabilità 0,3 di superare l'esame di matematica e 0,5 di superare l'esame di diritto privato. Se i due eventi sono indipendenti determinare la probabilità che lo studente ha di superare

- A = tutti e due gli esami;
- B = almeno un esame.

**13.63** (*). Un'urna contiene 5 palline bianche e 12 nere. Estraendole due a caso qual è la probabilità che siano dello stesso colore?

**13.64** (*). Uno studente ha la probabilità del 55% di prendere il debito in matematica, del 30% di prendere il debito in inglese e del 20% di prendere il debito in entrambe le materie. Valutare la probabilità di:

- A = avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo già preso in inglese;
- B = avere il debito in inglese nell'ipotesi di averlo già preso in matematica;
- C = avere il debito in matematica nell'ipotesi di non averlo preso in inglese;
- D = avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica;
- E = non avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo preso in inglese;
- F = non avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.

### Esercizi dalle prove Invalsi

**13.65** (Prove Invalsi 2005). Se si lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che escano una testa e una croce?

**13.66** (Prove Invalsi 2005). Qual è la probabilità che su 6 lanci di un comune dado a 6 facce non truccato si abbia per 6 volte il numero 3?

**13.67** (Prove Invalsi 2005). Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Sena reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari?

**13.68** (Prove Invalsi 2006). Se lanci un dado una sola volta, quale probabilità hai di ottenere un numero pari minore di 6?

**13.69** (Prove Invalsi 2006). È lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che escca una faccia il cui numero è multiplo di 3?

**13.70** (Prove Invalsi 2006)**.** Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: "esce una figura o un asso"?

**13.71** (Prove Invalsi 2006)**.** Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu?

**13.72** (Prove Invalsi 2006)**.** La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è $3/50$. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna?

**13.73** (Prove Invalsi 2005)**.** Si lancia un comune dado a 6 facce non truccato per 8 volte. Qual è la probabilità che al terzo lancio esca il numero 5?

**13.74** (Prove Invalsi 2005)**.** Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, quale delle seguenti affermazioni è falsa? La probabilità di estrarre una pallina...

- rossa o gialla è 0,5;
- verde è 0,1;
- blu o gialla è 0,7;
- rossa o blu è 0,4

**13.75** (Prove Invalsi 2006)**.** Se i lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che esca almeno una testa?

**13.76** (Prove Invalsi 2006)**.** Un'urna contiene 20 palline: 4 bianche, 6 rosse e 10 verdi. Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa e la probabilità di estrarre una pallina rossa o verde?

**13.77** (Prove Invalsi 2006)**.** La probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna è $4/10$. Quale delle seguenti affermazioni è compatibile con la precedente?

- l'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 nere;
- l'urna contiene 40 palline bianche, 40 rosse e 40 nere;
- l'urna contiene 40 palline bianche e 100 rosse;
- l'urna contiene 80 palline bianche, 50 rosse e 70 nere.

**13.78** (Prove Invalsi 2006)**.** In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5?

**13.79** (Prove Invalsi 2007)**.** Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna ed osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una 21-esima pallina, qual è la probabilità che questa si nera?

**13.80** (Prove Invalsi 2007)**.** Quanto vale la probabilità che una persona risponda correttamente ad una domanda che prevede solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte?

**13.81** (Prove Invalsi 2007)**.** Un'urna contiene 21 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento "esce la lettera $\pi$"?

**13.82** (Prove Invalsi 2007)**.** In una lotteria i 4 premi sono assegnati per estrazioni successive, partendo dal 1° fino al 4°. Pietro ha acquistato uno solo dei 100 biglietti venduti. Egli è presente all'estrazione dei premi e l'estrazione del 1° premio lo vede perdente. Qual è la probabilità che Pietro vinca il 2° premio?

**13.83** (Prove Invalsi 2007)**.** Si lanciano due dadi ed escono due numeri il cui prodotto è 6. Qual è la probabilità che uno dei due numeri usciti sia 2?

**13.84** (Prove Invalsi 2007)**.** Quanti casi possibili si ottengono gettando un dado e una moneta contemporaneamente?

A. 12 B. 8 C. 36 D. 2 E. La risposta esatta non è tra quelle proposte.

**13.85** (Prove Invalsi 2003)**.** Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3?

- Maggiore di 61, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4;
- 61, perché il dado non si ricorda degli eventi passati;
- minore di 61, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri;
- 21, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro);
- le informazioni date non consentono di rispondere.

**13.86** (Prove Invalsi 2003)**.** Estrarre da un mazzo di carte francesi (52 carte) una carta di seme nero e figura è ...

- più probabile che estrarre una carta di seme nero;
- più probabile che estrarre una figura di qualunque seme;
- meno probabile che estrarre una carta di seme nero e asso;
- altrettanto probabile che estrarre una carta di seme nero o figura;
- altrettanto probabile che estrarre una carta di seme rosso e figura. (Prove Invalsi 2003)

**13.87** (Prove Invalsi 2003)**.** La probabilità di estrarre un 6 o un 8 da un mazzo di carte napoletane (40 carte) è ...

**13.88** (Prove Invalsi 2003)**.** Aldo e Luigi giocano a testa o croce, ciascuno di essi lancia due monete. Qual è la probabilità che il numero di teste di Luigi sia uguale a quelle ottenute da Aldo?

**13.89** (Prove Invalsi 2004)**.** Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità 1/2 di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa?

- Maggiore di $\frac{1}{2}$;
- uguale a $\frac{1}{2}$;
- minore di $\frac{1}{2}$;
- le informazioni date non consentono di rispondere.

**13.90** (Prove Invalsi 2004)**.** Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35?

**13.91** (Prove Invalsi 2004)**.** Qual è la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari o multiplo di 3?

### 13.6.2 Risposte

**13.8** $P(E) = 0,23$.

**13.9** $P(E) = 0,17$.

**13.10** $P(A) = P(B) = 0,25$; $P(C) = 0,50$.

**13.11** $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(C) = \frac{2}{3}$.

**13.13** $P(E) = \frac{5}{36}$.

**13.14** $P(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

**13.15** $P(E) = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}$

**13.16** $P(E) = \frac{3}{8}$.

**13.17** $P(E) = 0,0375$.

**13.18** Biglietto B; Prezzo(A)=2€; Prezzo(B)=2,23€.

**13.28** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**13.29** $P(E) = \frac{3}{4}$.

**13.30** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**13.31** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**13.32** $P(E) = \frac{8}{27}$.

**13.33** $P(E) = \frac{13}{40}$.

**13.34** $P(E) = \frac{7}{10}$.

**13.35** $P(E) = \frac{11}{15}$.

**13.39** $P(E) = 0,91$.

**13.40** $P(E) = 0,71$.

**13.41** $P(A) = \frac{1}{8}; B = 7:1$.

**13.42** 80 €.

**13.43** $P(A) = 0,384$; $P(B) = 0,096$; $P(C) = 0,512$.

**13.44** $P(E) = 0,25$.

**13.45** $P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{7}{10}$; $P(C) = \frac{9}{10}$.

**13.46** $P(E) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

**13.47** $P(E) = \frac{3}{4}$.

**13.48** $P(E) = \frac{5}{18}$.

**13.49** $P(E) = \frac{15}{18}$.

**13.50** 63€.

**13.51** $P(E) = 0,125$.

**13.52** indifferente.

**13.53** $P(E) = 0,42$.

**13.54** $P(E) = 89,1\%$

**13.55** $P(A) = \frac{9}{16}$; $P(B) = \frac{7}{16}$.

**13.56** $P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(C) = \frac{3}{8}$.

**13.57** $P(A) = \frac{1}{12}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{1}{3}$.

**13.58** $P(E) = \frac{4}{9}$.

**13.60** $P(A) = 0,12$; $P(B) = 0$; $P(C) = 0,22$; $P(D) = 0,14$; $P(E) = 0,28$.

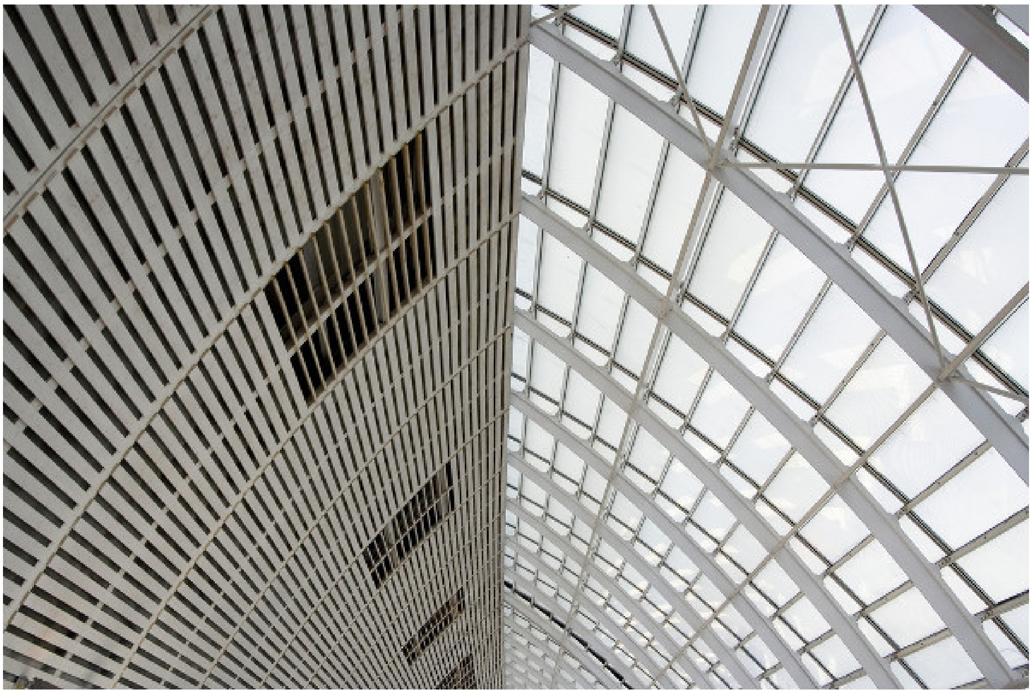
**13.61** $P(A) = \frac{1}{10}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{10}$; $P(D) = \frac{1}{4}$; A e C.

**13.62** $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,65$.

**13.63** $P(A) = 0,56$.

**13.64** $P(A) = 67\%$; $P(B) = 36\%$; $P(C) = 50\%$; $P(D) = 22\%$; $P(E) = 33\%$; $P(F) = 64\%$.

# Elementi di informatica V



"WIcker Composition"
Foto di cobalt123
http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

# 14 Geometria interattiva

## 14.1 Introduzione

*Cos'è la geometria interattiva, i primi oggetti.*

La geometria interattiva permette di creare gli oggetti della geometria euclidea:

- punti;
- rette;
- circonferenze.

I punti possono essere:

- liberi;
- vincolati a una linea;
- intersezioni di due linee.

Le rette possono essere anche:

- semirette;
- segmenti.

I punti base possono essere trascinati con il mouse quindi, se ho realizzato una costruzione geometrica a partire da alcuni punti, quando muovo questi punti tutta la costruzione si muove.

La Geometria interattiva mette in evidenza quali sono le caratteristiche invarianti e quali quelle variabili di una certa costruzione.

Esistono molti programmi che permettono di operare con la geometria interattiva, a questo indirizzo se ne possono trovare ben 36:

`http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software`

In questo testo propongo l'uso del linguaggio Python con la libreria `pyig`.

È comunque possibile seguire il percorso proposto anche con un programma *punta e clicca* invece che con un linguaggio.

Per l'installazione di Python e della libreria Pygraph, che contiene anche Pyig, vedi l'introduzione alla geometria della tartaruga nel volume precedente.

### 14.1.1 Installiamo un interprete

*Cosa installare per lavorare con la geometria interattiva.*

### Python

Chi usa come sistema operativo Windows può installare `Python` a partire dal sito:
`www.python.org/downloads`
E installare la versione più recente della serie 3.x.x.

Chi utilizza altri sistemi operativi può installarlo partendo dal proprio gestore di pacchetti installando `Python3` e anche `IDLE`.

### `pygraph`

Si può scaricare l'intero pacchetto da:
`bitbucket.org/zambu/pygraph/downloads`
A questo punto bisogna fare a mano alcune operazioni che dipendono dal proprio sistema operativo:

### Windows

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella cartella `pygraph`.
- Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.
- Copiarli nella cartella `C:\Python3x\Lib\site-package`

Dove "Python3x" potrebbe essere: "Python34", "Python35" ...

### MacOSX

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella cartella `pygraph`.
- Selezionare il file `pygraph.pth` e la cartella `pygraph` lì presenti.
- Copiarli nella cartella `HD/libreria/python/3.x/site-package`

Se in "HD/libreria/python/" non è presente la cartella "3.4/site-packages", bisogna crearla.

### GNU/Linux

- Scompattare il file scaricato.
- Entrare nella directory `pygraph`.
- Aprire un terminale in questa directory.
- Copiare la cartella `pygraph` e il file `pygraph.pth` nella cartella
  `/usr/lib/python3/dist-packages/`
  Dato che in Linux, per modificare le directory di sistema bisogna essere amministratori, il comando da dare assomiglierà a questo:
  ```
  sudo cp -R python* /usr/lib/python3/dist-packages/
  ```

A questo punto se tutto è andato bene dovremmo essere in grado di avviare Python-IDLE e dare il comando:

`import pyig as ig`

Se non succede nulla vuol dire che tutto è andato a buon fine, se invece appare una scritta rossa, bisogna leggere almeno l'ultima riga e cercare di capire cosa non è andato bene. Magari ci si può far aiutare da qualcuno esperto nell'installazione di programmi.

Se tutto è andato per il verso giusto possiamo procedere.

**Riassumendo**

- La geometria interattiva permette di creare e di muovere gli oggetti della geometria euclidea.
- Ci sono molti programmi che permettono di giocare con la geometria interattiva, noi utilizzeremo il linguaggio Python con la libreria `pyig`.
- Gli oggetti di base sono:
  - punti:
    - liberi,
    - vincolati,
    - intersezioni;
  - rette:
    - rette,
    - semirette,
    - segmenti;
  - circonferenze.

**Prova tu**

1. Installa Python.
2. Installa la libreria pygraph.

## 14.2 Elementi fondamentali

*Come creare un piano vuoto, dei punti, delle rette e altri oggetti geometrici.*

La geometria interattiva permette di visualizzare facilmente elementi varianti e invarianti di una certa costruzione geometrica.

### 14.2.1 Strumenti

In questo capitolo utilizzeremo i seguenti strumenti di Pyig:

- `Point(x, y)` crea un punto con date coordinate.
- `Line(p0, p1)` crea una retta passante per p0 e p1.
- `Ray(p0, p1)` crea una semiretta con origine in p0 passante per p1.
- `Segment(p0, p1)` crea un segmento di estremi p0 e p1.
- `Circle(centro, punto)` crea una circonferenza dati il centro e un suo punto.

### 14.2.2 Problema

Crea un piano e disegna i quattro vertici di un quadrato, poi disegna i quattro lati del quadrato. Modifica poi la figura trascinando i punti base con il mouse.

### 14.2.3 Soluzione guidata

1. Crea un nuovo programma e salvarlo con il nome: `gi01_elementi.py`. Per creare un nuovo programma:
   a) avvia IDLE (in Windows: menu-programmi-Python-IDLE);
   b) crea un nuovo editor: menu-file-new window;
   c) salvalo nella tua cartella con il nome desiderato: menu-file-save;
2. Incomincia a scrivere il programma.
   a) Scrivi un'intestazione fatta da commenti che contenga le informazioni:
      - data,
      - nome,
      - titolo del programma;

   Esegui il programma in modo da controllare che non ci siano errori (<F5>).
3. Il programma vero e proprio è fatto da tre parti:
   a) la lettura delle librerie;
   b) il programma principale;
   c) l'attivazione della finestra grafica.

   A questo punto il programma assomiglierà a:

```
# <data>
# <autore>
# Elementi di base della geometria

"""
Problema: Disegna i quattro vertici di un quadrato.
Disegna i quattro lati del quadrato.
"""

# lettura delle librerie

# programma principale

# attivazione della finestra grafica
```

4. Fin qui abbiamo scritto solo commenti, ora incominciamo a scrivere comandi:
   a) Leggo la libreria Pyig e le do un nome più breve, "ig":

import pyig

a) Il programma principale consiste, per ora, in una sola istruzione, creo un "InteractivePlane" della libreria "ig" e associo questo oggetto all'identificatore (=alla parola) "ip":

ip = pyig.InteractivePlane()

a) Rendo attiva la finestra grafica:

ip.mainloop()

5. Aggiungi le istruzioni sotto ai commenti:

```
# <data>
# <nome>
# Elementi di base della geometria

"""
Problema: Disegna i quattro vertici di un quadrato.
Disegna i quattro lati del quadrato.
"""

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

6. Prova il programma premendo il tasto: `<Ctrl-F5>` o cliccando su `menu-Run-Run module`. Deve apparire una finestra grafica con un riferimento cartesiano e una griglia di punti. La finestra grafica è attiva, risponde al mouse e si può chiudere. Se non avviene questo, probabilmente è apparso un messaggio di errore in rosso nella shell di `IDLE`, leggi il messaggio, correggi l'errore e ritenta.

Ora incominciamo ad aggiungere al programma principale le istruzioni per risolvere il problema. Incominciamo creando un punto. Aggiungiamo al programma principale il comando della libreria `pyig` che crea un punto associando l'oggetto appena creato all'identificatore "p_0":

```
p_0 = ig.Point(3, 4)
```

È possibile trascinare con il mouse il punto nel suo piano: il punto non cambia cambiando la sua posizione.

In geometria un punto non dovrebbe avere altre caratteristiche oltre la propria posizione, ma a noi fa comodo poter dare ai punti anche altre caratteristiche come: uno spessore, un colore, un'etichetta:

```
p_0 = ig.Point(3, 4, color='red', width=6, name='A')
```

In generale a tutti gli oggetti di pyig che possono essere visualizzati si possono assegnare le seguenti caratteristiche:

- colore: color=<una stringa di colore>;
- spessore: width=<un numero>;
- etichetta: name=<una stringa>;
- visibilità: visible=<True> o <False>.

La sintassi del costruttore dell'oggetto `Point` è:

```
Point(<x>, <y>
      [, visible=True][, color='green'][, width=3][, name=''])
```

I primi due parametri, `x` e `y`, sono obbligatori, quelli messi tra parentesi quadre sono opzionali e, se non specificati, hanno il valore riportato sopra.

Passiamo alla seconda richiesta del problema: disegnare una retta.Per poter tracciare una retta abbiamo bisogno di due punti infatti due punti individuano univocamente una retta (per due punti passa una e una sola retta). Possiamo utilizzare i due punti già disegnati e creare la retta passante per `p_0` e `p_1`:

```
s_0 = ig.Segment(p_0, p_1)
```

Anche in questo caso possiamo modificare "colore" e "spessore" del segmento:

```
s_0 = ig.Segment(p_0, p_1, color='pink', width=6)      # lati
```

La sintassi del costruttore dell'oggetto `Segment` è:

```
Segment(<punto_0>, <punto_1>
      [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])
```

È possibile trascinare con il mouse i punti base del segmento, ma il segmento continuerà a passare per quei due punti.

Le sintassi dei costruttori di alcuni altri oggetti della geometria interattiva:

```
Line(<punto_0>, <punto_1>
     [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])

Ray(<punto_0>, <punto_1>
    [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])

Circle(<centro>, <uunto>
       [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])
```

Ora crea tu una retta, una semiretta e una circonferenza.

**Riassumendo**

- Per lavorare con la geometria interattiva dobbiamo far caricare a Python la relativa *libreria* ad esempio con il comando:

  ```
  import pyig
  ```

- Un programma è composto (per ora) dalle seguenti parti:

```
<intestazione>
<lettura delle librerie>
<programma principale>
<attivazione della finestra grafica>
```

- La sintassi dei costruttori degli oggetti base della geometria è:

```
Point(<x>, <y>
      [, visible=True][, color='green'][, width=3][, name=''])

Line(<punto_0>, <punto_1>
      [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])

Ray(<punto_0>, <punto_1>
    [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])

Segment(<punto_0>, <punto_1>
        [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])

Circle(<centro>, <punto>
        [, visible=True][, color='blue'][, width=3][, name=''])
```

**Prova tu**

1. Crea un nuovo programma che disegni un segmento di colore viola, con due estremi rosa, grandi a piacere.
2. Crea un programma che disegni un rettangolo. Muovendo i punti base continua a rimanere un rettangolo?
3. Crea un programma che disegni un triangolo. Muovendo i punti base continua a rimanere un triangolo?
4. Crea un programma che disegni un quadrilatero delimitato da semirette.
5. Crea un programma che disegni tre punti `A`, `B` e `C`, disegna poi le tre circonferenze:
   - di centro `A` e passante per `B`;
   - di centro `B` e passante per `C`;
   - di centro `C` e passante per `A`;
6. Disegna due circonferenze concentriche. Muovendo i punti base, si mantiene la proprietà "essere concentriche"?

## 14.3 Intersezioni

*Come usare intersezioni tra oggetti.*

Oltre a quelli visti nel capitolo precedente, per poter realizzare costruzioni geometriche abbiamo bisogno di poter creare l'intersezione tra due rette, tra una retta e una circondìferenza o tra due circonferenze.

### 14.3.1 Strumenti

In questo capitolo utilizzeremo i seguenti strumenti di Pyig:

- `Point(x, y)` crea un punto con date coordinate.
- `Line(p0, p1)` crea una retta passante per p0 e p1.
- `Segment(p0, p1)` crea un segmento di estremi p0 e p1.
- `Intersection(oggetto_0, oggetto_1, [which])` crea un punto di intersezione tra due oggetti.

### 14.3.2 Problema

Crea un piano e inserisci:

- due rette nel terzo e quarto quadrante e il segmento che congiunge la loro intersezione con l'origine;
- una retta e una circonferenza nel secondo quadrante e i segmenti che congiungono le loro intersezioni con l'origine;
- due circonferenze nel primo quadrante e i segmenti che congiungono le loro intersezione con l'origine;

### 14.3.3 Soluzione guidata

1. Crea un nuovo programma e salvarlo con il nome: `gi02_intersezioni.py`. Per creare un nuovo programma: vedi la soluzione guidata del capitolo precedente.
2. Scrivi un'intestazione adeguata.
3. Scrivi lo scheletro del programma:
   a) la lettura delle librerie,
   b) il programma principale,
   c) l'attivazione della finestra grafica;

   e verifica che tutto funzioni.
4. Ora scriviamo dei commenti che indicano come intendiamo risolvere il problema:

```
# Creo le due rette
# Creo un punto nell'origine degli assi
# Creo l'intersezione tra le due rette
# Creo il segmento che congiunge l'origine all'intersezione
```

5. A questo punto il programma dovrebbe apparire circa così:

```
# <data>
# <nome>
# Intersezioni

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo le due rette
# Creo un punto nell'origine degli assi
# Creo l'intersezione tra le due rette
# Creo il segmento che congiunge l'origine all'intersezione


# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

6. Ora iniziamo a popolare di istruzioni il programma principale creando le due rette:

```
r_0 = ig.Line(ig.Point(-6, -4, width=6), ig.Point(2, -6, width=6))
r_1 = ig.Line(ig.Point(-11, -9, width=6), ig.Point(-3, -8, width=6))
```

   Eseguiamo il programma controllando che rispetti le specifiche.

7. Ora dobbiamo creare un segmento con un estremo nell'origine, quindi dobbiamo creare un punto nell'origine:

```
origine = ig.Point(0, 0, visible=False)
```

   e siccome vogliamo che nessuno possa muoverlo, lo facciamo invisibile.

8. L'altro estremo è l'intersezione delle due rette:

```
i_0 = ig.Intersection(r_0, r_1, color='red')
```

9. Infine creiamo il segmento:

```
s_0 = ig.Segment(origine, i_0, color='#505010')
```

10. A questo punto il programma dovrebbe apparire circa così:

```
# <data>
# <nome>
# Intersezioni

# lettura delle librerie
import pyig as ig

# programma principale
```

```
ip = ig.InteractivePlane()

# Creo le due rette
r_0 = ig.Line(ig.Point(-6, -4, width=6), ig.Point(2, -6, width=6))
r_1 = ig.Line(ig.Point(-11, -9, width=6), ig.Point(-3, -8, width=6))
# Creo un punto nell'origine degli assi
origine = ig.Point(0, 0, visible=False)
# Creo l'intersezione tra le due rette
i_0 = ig.Intersection(r_0, r_1, color='red')
# Creo il segmento che congiunge l'origine all'intersezione
s_0 = ig.Segment(origine, i_0, color='#505010')

# attivazione della finestra grafica
ip.mainloop()
```

11. Proviamo il programma e controlliamo che rispetti le specifiche richieste dal problema. Cosa succede quando muovo i punti base di una retta?

12. Se tutto funziona regolarmente possiamo passare alla seconda parte del problema:

```
# Creo una retta
# Creo una circonferenza
# Creo le intersezioni tra la retta e la circonferenza
# Creo i segmenti
```

13. Per quanto riguarda i primi due punti non dovrebbero esserci problemi, per il terzo invece presenta una novità rispetto a quanto visto per l'intersezione di due rette, infatti una retta interseca una circonferenza in due punti (e non sempre) e noi dobbiamo indicare a Python quale delle due intersezioni vogliamo:

```
i_1 = ig.Intersection(r_2, c_0, -1, color='red')
i_2 = ig.Intersection(r_2, c_0, +1, color='red')
```

14. Dopo aver controllato che fin qui il programma funzioni, disegniamo i due segmenti. la seconda parte dovrebbe assomigliare a questa:

```
# Creo una retta
r_2 = ig.Line(ig.Point(-11, 9, width=6), ig.Point(-6, 1, width=6))
# Creo una circonferenza
c_0 = ig.Circle(ig.Point(-6, 7), ig.Point(-5, 2))
# Creo le intersezioni tra la retta e la circonferenza
i_1 = ig.Intersection(r_2, c_0, -1, color='red')
i_2 = ig.Intersection(r_2, c_0, +1, color='red')
# Creo i segmenti
s_1 = ig.Segment(origine, i_1, color='#10a010')
s_2 = ig.Segment(origine, i_2, color='#10a080')
```

15. Proviamo il programma e controlliamo che rispetti le specifiche richieste dal problema. Cosa succede quando muovo i punti base della retta?

16. Completiamo il programma per risolvere anche la terza parte del problema.

**Riassumendo**

- pyig mette a disposizione un oggetto intersezione. L'intersezione tra rette non ha bisogno di ulteriori informazioni, quella tra una retta e una circonferenza o tra due circonferenze richiede un ulteriore argomento: con `-1` si indica un'intersezione, con `+1` si indica l'altra. La sintassi del costruttore di un'intersezione è:

```
Intersection(oggetto_0, oggetto_1 [, which]
            [, visible=True] [, color='blue'] [, width=3] [, name=''])
```

**Prova tu**

1. Disegna una circonferenza `c_0` con il centro nell'origine, una retta `r_0` e un'altra circonferenza `c_1`. Disegna in modo evidente le intersezioni tra la retta `r_0` e la circonferenza `c_0` e tra la circonferenza `c_1` e la circonferenza `c_0`.
2. Disegna una circonferenza e una retta. Poi disegna un'intersezione tra la retta e la circonferenza e assegna a questa intersezione il nome: "Ciao". Poi disegna una circonferenza che ha centro nell'intersezione e passa per il punto (3; 1).
3. Disegna le intersezioni tra due circonferenze che hanno centro in un estremo di un segmento e passano per l'altro estremo del segmento.

## 14.4 Costruzioni geometriche

*Come usare intersezioni tra oggetti.*
Lo strumento base della geometria greca era lo spago:

- tenendo teso un pezzo di corda si poteva rappresentare un segmento allungabile a piacere;
- tenendo fisso un estremo e facendo ruotare l'altro, si poteva rappresentare una circonferenza.

Con questo strumento hanno costruito la geometria euclidea e risolto innumerevoli problemi.

### 14.4.1 Strumenti

In questo capitolo utilizzeremo i seguenti strumenti di Pyig:

- `Point(x, y)` crea un punto con date coordinate.
- `Line(p0, p1)` crea una retta passante per p0 e p1.
- `Segment(p0, p1)` crea un segmento di estremi p0 e p1.
- `Intersection(oggetto_0, oggetto_1, [which])` crea un punto di intersezione tra due oggetti.
- `Polygon((punto0, punto1, punto2, ...))` crea un poligono dati i vertici.

### 14.4.2 Problema

Crea un piano e disegna:

- nel primo quadrante: due punti e il triangolo equilatero costruito su quei due punti;
- nel secondo quadrante: un segmento e l'asse di quel segmento;
- nel terzo quadrante: un angolo e la bisettrice di quell'angolo;
- nel quarto quadrante: due punti e il quadrato costruito su quei due punti.

### 14.4.3 Soluzione guidata

1. Crea un nuovo programma e salvarlo con il nome: `gi03_costruzioni.py`. Per creare un nuovo programma: vedi la soluzione guidata del primo capitolo.
2. Scrivi un'intestazione adeguata.
3. Scrivi lo scheletro del programma.
4. Ora scriviamo dei commenti che indicano come intendiamo risolvere il problema:

```
# Disegno tre punti disposti accuratamente
# Disegno il poligono che passa per i tre punti
```

5. Risolviamo la prima parte del problema ottenendo un programma principale simile a questo:

```
# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Disegno tre punti disposti accuratamente
p_0 = ig.Point(1, 2, width=6)
p_1 = ig.Point(11, 2, width=6)
p_2 = ig.Point(6, 10.66, width=6)
# Disegno il poligono che passa per i tre punti
triequi = ig.Polygon((p_0, p_1, p_2),
                     width=5, color='green', intcolor='gold')
```

   Osservate che il costruttore di `Poligon` vuole un primo argomento formato da una sequenza di punti per cui i vertici del poligono devono essere racchiusi tra parentesi.

6. Proviamo il programma e controlliamo che rispetti le specifiche richieste dal problema. Cosa succede quando muovo i punti base?

   Accidenti, il triangolo è equilatero all'inizio, ma non lo è più quando sposto uno dei punti base.

   Dobbiamo affrontare il problema in un altro modo. Il terzo vertice va costruito partendo dai primi due:

```
# Disegno due punti in una posizione qualunque
# Disegno le due circonferenze che hanno centro in un punto e
# passano per l'altro
# Trovo un'intersezione delle due circonferenze
# Disegno il poligono che ha per vertici i due punti e l'intersezione
```

7. Dovremmo ottenere un programma che assomiglia a questo:

```
# programma principale
ip = ig.InteractivePlane()

# Disegno due punti in una posizione qualunque
p_0 = ig.Point(1, 2, width=6)
p_1 = ig.Point(11, 2, width=6)
# Disegno le due circonferenze che hanno centro in un punto e
# passano per l'altro
c_0 = ig.Circle(p_0, p_1, width=1)
c_1 = ig.Circle(p_1, p_0, width=1)
# Trovo un'intersezione delle due circonferenze
p_2 = ig.Intersection(c_0, c_1, +1, width=6)
# Disegno il poligono che ha per vertici i due punti e l'intersezione
triequi = ig.Polygon((p_0, p_1, p_2),
                     width=5, color='green', intcolor='gold')
```

Osservate che è buona norma tenere le linee di costruzione più sottili rispetto alle altre, o addirittura renderle invisibili `visible=False`.

Si può osservare che questa volta i punti liberi sono solo due, il terzo vertice è vincolato alla posizione di questi due dalla nostra costruzione. Ora, se muoviamo i punti base il nostro triangolo cambia posizione e dimensioni, ma resta sempre un triangolo equilatero come era richiesto dal problema.

8. A questo punto cerca su un libro di disegno su internet come risolvere gli altri tre problemi. Risolvili con riga e compasso, poi con `pyig`. Di seguito riporto le tre tracce di soluzione.

9. Asse di un segmento:

```
# Disegno due punti
# Disegno il segmento
# Disegno le due circ. che hanno centro in un estremo e passano per l'altro
# Chiamo i_0 e i_1 le due intersezioni delle circonferenze
# L'asse e' la retta passante per i_0 e i_1
```

10. Bisettrice di un angolo:

```
# Disegno tre punti: p_0, vertice, p_1
# Disegno i due lati dell'angolo: r_0 e r_1
# Disegno una circ. che ha centro nel vertice e passa per p_0
# Chiamo i_1 l'intersezione della circonferenze con il lato r_1
```

```
# Disegno le circonferenze di centro p_0 e i_1 passanti per il vertice
# Chiamo i_2 l'intersezione delle due circonferenze
# La retta vertice - i_2 e' la bisettrice cercata
```

11. Quadrato dati due vertici consecutivi:

```
# Disegno due punti: p_0, p_1
# c_0 e' la circ. che ha centro in p_0 e passa per p_1
# c_1 e' la circ. che ha centro in p_1 e passa per p_0
# i_0 e' l'intersezione di queste due circonferenze c_0 e c_1
# c_2 e' la circ. che ha centro in i_0 e passa per p_0
# i_1 e' l'intersezione delle circonferenze c_0 e c_2
# c_3 e' la circonferenza di centro i_1 passante per p_0
# i_2 e' l'intersezione delle circonferenze c_3 e c_2
# r_0 e' la retta passante per p_0 e i_2
# p_3 e' l'intersezione della retta r_0 con la circonferenza c_0
# c_4 e' la circonferenza di centro i_3 passante per p_0
# p_2 e' l'intersezione della circonferenza c_4 con la circonferenza c_1
# Il quadrato cercato e il poligono di vertici: (p_0, p_1, p_2, p_3)
```

Quando il programma e complicato, come in quest'ultimo caso è importante eseguire il programma ogni volta che si aggiunge un'istruzione in modo da individuare immediatamente eventuali errori sia sintattici sia logici.

12. Completiamo il programma per risolvere anche la terza parte del problema.

**Riassumendo**

- Polygon permette di disegnare un poligono data una sequenza di punti. La sintassi del costruttore di `Polygon` è:

```
Polygon(sequenza di punti [, intcolor=white]
        [, visible=True] [, color='blue'] [, width=3] [, name=''])
```

- Per affrontare problemi complicati: prima pianifica la soluzione descrivendola per mezzo di commenti, poi scrivi le istruzioni per risolvere il problema eseguendo il programma ad ogni modifica.
- Nei libri d disegno, o in internet, si possono trovare molte costruzioni geometriche che si possono realizzare con rette, circonferenze e intersezioni.

**Prova tu**

1. Disegna un quadrato dati due vertici opposti.
2. Disegna un esagono regolare dati due vertici consecutivi.
3. Disegna un esagono regolare dato il centro e un vertice.
4. Disegna un pentagono regolare dati due vertici consecutivi.
5. Disegna un parallelogramma dati tre vertici consecutivi.

## 14.5 Strumenti di uso comune

*Quali altri oggetti abbiamo a disposizione.*

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come realizzare oggetti nuovi come assi, bisettrici, triangoli, quadrati, ... Ma se ho bisogno di vari assi per realizzare una costruzione complessa, non è comodo per ognuno di questi ripetere tutta la costruzione. Alcuni oggetti di uso comune sono già prefabbricati e vengono messi a disposizione dalla libreria pyig, basta chiamarli.

Nei prossimi paragrafi riporto quelli di uso più comune, l'elenco completo si trova nel manuale di Pygraph che è stato scaricato assieme alle librerie.

### 14.5.1 Lettura della libreria

Nel seguito si dà per sottinteso che all'inizio del programma sia stata caricata la libreria con l'istruzione:

```
import pyig as ig
```

### 14.5.2 `InteractivePlane`

`InteractivePlane` Crea il piano interattivo nel fare questa operazione si possono decidere alcune caratteristiche.

**Sintassi**

```
<nome_variabile> = InteractivePlane([<parametri>])
```

**Osservazioni**

Il costruttore presenta molti parametri tutti con un valore predefinito. Nel momento in cui si crea un piano cartesiano si possono quindi decidere le sue caratteristiche. Vediamole in dettaglio:

- titolo della finestra, valore predefinito: "Interactive geometry";
- dimensione, valori predefiniti: larghezza=600, altezza=600;
- scala di rappresentazione, valori predefiniti: una unità = 20 pixel;
- posizione dell'origine, valore predefinito: il centro della finestra;
- rappresentazione degli assi cartesiani, valore predefinito: `True`;
- rappresentazione di una griglia di punti, valore predefinito: `True`;
- colore degli assi valore predefinito: '#808080' (grigio).
- colore della griglia valore predefinito: '#808080'.
- riferimento alla finestra che contiene il piano cartesiano, valore predefinito: `None`.

Poiché tutti i parametri hanno un valore predefinito, possiamo creare un oggetto della classe `InteractivePlane` senza specificare alcun argomento: verranno usati tutti i valori predefiniti. Oppure possiamo specificare per nome gli argomenti che vogliamo siano diversi dal comportamento predefinito, si vedano di seguito alcuni esempi.

**Esempio**

Si vedano tutti gli esempi seguenti.

### 14.5.3 `Point`

**Scopo**

Crea un *punto libero* date le coordinate della sua posizione iniziale.

Questo oggetto è la base di ogni costruzione; dai punti liberi dipendono, direttamente o indirettamente, gli altri oggetti grafici.

Quando il puntatore del mouse si sovrappone ad un punto libero questo cambia colore. Trascinando un punto libero, con il mouse, tutti gli oggetti che dipendono da lui, verranno modificati.

`Point` essendo un oggetto che può essere trascinato con il mouse ha un colore predefinito diverso da quello degli altri oggetti.

**Sintassi**

```
Point(x, y[, visible][, color][, width][, name])
```

*Nota*: Spesso nella pratica è necessario assegnare l'oggetto creato ad un identificatore in modo da poter fare riferimento ad un oggetto nella costruzione di altri oggetti:

```
<identificatore> = Point(x, y[, visible][, color][, width][, name])
```

Si vedano gli esempi seguenti.

**Osservazioni**

- `x` e `y` sono due numeri, `x` è l'ascissa e `y` l'ordinata del punto.
- Per quanto riguarda i parametri non obbligatori si veda quanto scritto nel paragrafo relativo agli attributi degli oggetti visibili.

*Nota*: Nel resto del manuale riporterò solo gli argomenti obbligatori, è sottinteso che tutti gli oggetti che possono essere visualizzati hanno anche i parametri: `visible`, `color`, `width`, `name`.

**Esempio**

Funzione definita in N ad andamento casuale.

```
import random
ip = ig.InteractivePlane('Point')
y = 0
for x in range(-14, 14):
    y += random.randrange(-1, 2)
    ig.Point(x, y, color='red')
```

### 14.5.4 Attributi degli oggetti geometrici

**Scopo**

`Point`, come tutti gli oggetti geometrici ha degli attributi che possono essere determinati nel momento della creazione dell'oggetto stesso o in seguito. Questi attributi definiscono alcune caratteristiche degli oggetti che possono essere visualizzati.

- `visible` stabilisce se l'oggetto sarà visibili o invisibile;
- `color` imposta il colore dell'oggetto;

- `width` imposta la larghezza dell'oggetto.
- `name` imposta il nome dell'oggetto.

**Sintassi**

```
<oggetto>.visible = v
<oggetto>.color = c
<oggetto>.width = w
<oggetto>.name = s
```

**Osservazioni**

- `v` è un valore booleano, può essere True o False.
- `w` è un numero che indica la larghezza in pixel.
- `c` può essere:
  - una stringa nel formato: "#rrggbb" dove rr, gg e bb sono numeri esadecimali di due cifre che rappresentano rispettivamente le componenti rossa, verde, e blu del colore;
  - Una stringa contenente il nome di un colore;
  - Una terna di numeri nell'intervallo 0-1 rappresentanti le componenti rossa verde e blu.
- `s` è una stringa

**Esempio**
Disegna tre punti: uno con i valori di default, uno con colore dimensione e nome definiti quando viene creato, uno con valori cambiati dopo essere stato creato.

```
ip = ig.InteractivePlane('attributi')
a = ig.Point(-5, 3)
b = ig.Point(2, 3, color='indian red', width=8, name='B')
c = ig.Point(9, 3)
c.color = 'dark orange'
c.width = 8
c.name = 'C'
```

### 14.5.5 Metodi degli oggetti geometrici

**Scopo**
Tutti gli oggetti geometrici hanno anche dei metodi che danno come risultato alcune informazioni relative all'oggetto stesso.

- `xcoord` l'ascissa;
- `ycoord` l'ordinata;
- `coords` le coordinate.

**Sintassi**

```
<oggetto>.xcoord()
<oggetto>.ycoord()
<oggetto>.coords()
```

**Osservazioni**

Non richiedono argomenti e restituiscono un particolare oggetto che può essere utilizzato all'interno di un testo variabile.

**Esempio**

Scrivi ascissa, ordinata e posizione di un punto.

```
ip = ig.InteractivePlane('coords, xcoord, ycoord')
a = ig.Point(-5, 8, name='A')
ig.VarText(-5, -1, 'ascissa di A: {0}', a.xcoord())
ig.VarText(-5, -2, 'ordinata di A: {0}', a.ycoord())
ig.VarText(-5, -3, 'posizione di A: {0}', a.coords())
```

### 14.5.6 `Segment`

**Scopo**

Crea un segmento dati i due estremi, i due estremi sono *punti*.

**Sintassi**

```
<identificatore> = Segment(point0, point1)
```

**Osservazioni**

`point0` e `point1` sono due punti.

**Esempio**

Disegna un triangolo con i lati colorati in modo differente.

```
ip = ig.InteractivePlane('Segment')
# creo i 3 vertici
v0 = ig.Point(-4, -3, width=5)
v1 = ig.Point( 5, -1, width=5)
v2 = ig.Point( 2,  6, width=5)
# creo i 3 lati
l0 = ig.Segment(v0, v1, color='steel blue')
l1 = ig.Segment(v1, v2, color='sea green')
l2 = ig.Segment(v2, v0, color='saddle brown')
```

### 14.5.7 `length`

**Scopo**

È il metodo della classe `Segment` che restituisce un oggetto `data` contenente la lunghezza del segmento stesso.

**Sintassi**

```
<obj>.length()
```

**Osservazioni**
La lunghezza è la distanza tra `point0` e `point1`.
**Esempio**
Disegna un segmento e scrivi la sua lunghezza.

```
ip = ig.InteractivePlane('length')
p0 = ig.Point(-4, 7, width=5, name='A')
p1 = ig.Point(8, 10, width=5, name='B')
seg = ig.Segment(p0, p1)
ig.VarText(-5, -5, 'lunghezza di AB = {0}', seg.length())
```

### 14.5.8 `MidPoints`

**Scopo**
Crea il punto medio tra due punti.
**Sintassi**

```
MidPoints(point0, point1)
```

**Osservazioni**
`point0` e `point1` sono due punti.
**Esempio**
Punto medio tra due punti.

```
ip = ig.InteractivePlane('MidPoints')
# creo due punti
p0 = ig.Point(-2, -5)
p1 = ig.Point(4, 7)
# cambio i loro attributi
p0.color = "#00a600"
p0.width = 5
p1.color = "#006a00"
p1.width = 5
# creao il punto medio tra p0 e p1
m = ig.MidPoints(p0, p1, name='M')
# cambio gli attributi di m
m.color = "#f0f000"
m.width = 10
```

### 14.5.9 `MidPoint`

**Scopo**
Crea il punto medio di un segmento
**Sintassi**

```
MidPoint(segment)
```

**Osservazioni**
`segment` è un oggetto che ha un `point0` e un `point1`.
**Esempio**
Punto medio di un segmento.

```
ip = ig.InteractivePlane('MidPoint')
# creo un segmento
s = ig.Segment(ig.Point(-2, -1, color="#a60000", width=5),
               ig.Point(5, 7, color="#6a0000", width=5),
               color="#a0a0a0")
# creo il suo punto medio
ig.MidPoint(s, color="#6f6f00", width=10, name='M')
```

### 14.5.10 Line

**Scopo**
Crea una retta per due punti.
**Sintassi**

```
Line(point0, point1)
```

**Osservazioni**
`point0` e `point1` sono, indovina un po', due punti.
Vedi anche i metodi delle classi *linea* presentati nella classe `Segment`.
**Esempio**
Triangolo delimitato da rette.

```
ip = ig.InteractivePlane('Line')
# creo i 3 punti
a = ig.Point(0, 0)
b = ig.Point(1, 5)
c = ig.Point(5, 1)
# creo i 3 lati
ig.Line(a, b, color="#dead34")
ig.Line(b, c, color="#dead34")
ig.Line(c, a, color="#dead34")
```

### 14.5.11 Ray

**Scopo**
Traccia una semiretta con l'origine in un punto e passante per un altro punto.
**Sintassi**

```
Ray(point0, point1)
```

**Osservazioni**
`point0` è l'origine della semiretta che passa per `point1`.
Vedi anche i metodi delle classi *linea* presentati nella classe `Segment`.
**Esempio**
Triangolo delimitato da semirette.

```
ip = ig.InteractivePlane('Ray')
# creo i 3 punti
a = ig.Point(0, 0)
b = ig.Point(1, 5)
```

```
c = ig.Point(5, 1)
# creo i 3 lati
ig.Ray(a, b, color="#de34ad")
ig.Ray(b, c, color="#de34ad")
ig.Ray(c, a, color="#de34ad")
```

### 14.5.12 `Orthogonal`

**Scopo**
Crea la retta perpendicolare ad una retta data passante per un punto.
**Sintassi**

```
Orthogonal(line, point)
```

**Osservazioni**
`line` è la retta alla quale si costruisce la perpendicolare passante per `point`.
Vedi anche i metodi delle classi *linea* presentati nella classe `Segment`.
**Esempio**
Disegna la perpendicolare ad una retta data passante per un punto.

```
ip = ig.InteractivePlane('Orthogonal')
retta = ig.Line(ig.Point(-4, -1, width=5),
                ig.Point(6, 2, width=5),
                width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = ig.Point(-3, 5, width=5, name='P')
ig.Orthogonal(retta, punto)
```

### 14.5.13 `Parallel`

**Scopo**
Crea la retta parallela ad una retta data passante per un punto.
**Sintassi**

```
Parallel(line, point)
```

**Osservazioni**
`line` è la retta alla quale si costruisce la parallela passante per `point`.
Vedi anche i metodi delle classi *linea* presentati nella classe `Segment`.
**Esempio**
Disegna la parallela ad una retta data passante per un punto.

```
ip = ig.InteractivePlane('Parallel')
retta = ig.Line(ig.Point(-4, -1, width=5),
                ig.Point(6, 2, width=5),
                width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = ig.Point(-3, 5, width=5, name='P')
ig.Parallel(retta, punto)
```

### 14.5.14 `Polygon`

**Scopo**
Crea un poligono data una sequenza di vertici.
**Sintassi**

```
Polygon(points)
```

**Osservazioni**
`points` è una sequenza di punti, può essere una lista (delimitata da parentesi quadre) o una tupla (delimitata da parentesi tonde).
**Esempio**
Disegna un poligono date le coordinate dei vertici.

```
ip = ig.InteractivePlane('24: Polygon')
# Lista di coordinate
coords = ((-8, -3), (-6, -2), (-5, -2), (-4, 2), (-2, 3), (0, 4),
          (2, 3), (4, 2), (5, -2), (6, -2), (8, -3))
# Costruzione di una lista di punti partendo da una lista di coordinate:
# listcompreension
ip.defwidth = 5
points = [ig.Point(x, y) for x,y in coords]
ig.Polygon(points, color='HotPink3')
```

### 14.5.15 `perimeter` e `surface`

**Scopo**
Sono metodi presenti in tutte le classi *figura*, restituiscono la lunghezza del contorno e l'area della superficie dell'oggetto.
**Sintassi**

```
<figura>.perimeter()
<figura>.surface()
```

**Osservazioni**
Sono metodi degli oggetti che sono *figure piane* e non richiede argomenti.
**Esempio**
Scrive alcune informazioni relative a un poligono.

```
poli = ig.Polygon((ig.Point(-7, -3, width=5, name="A"),
                   ig.Point(5, -5, width=5, name="B"),
                   ig.Point(-3, 8, width=5, name="C")),
                   width=4, color='magenta', intcolor='olive drab')
ig.VarText(-3, -6, "perimetro={0}", poli.perimeter(), color='magenta')
ig.VarText(-3, -7, "area={0}", poli.surface(), color='olive drab')
```

### 14.5.16 `Circle`

**Scopo**
Circonferenza dato il centro e un punto o il centro e il raggio (un segmento).
**Sintassi**

```
Circle(center, point)
Circle(center, segment)
```

**Osservazioni**
`center` è il centro della circonferenza passante per `point` o di raggio segment.
Vedi anche i metodi delle classi *figure piane* presentati nella classe `Polygon`.
**Esempio**
Circonferenze con centro nell'origine.

```
ip = ig.InteractivePlane('Circle(Point, Point)')
origine = ig.Point(0, 0, visible=False, name="O")
p0 = ig.Point(-7, -3, width=5, name="P")
ig.Circle(origine, p0, color="#c0c0de", width=4)
raggio = ig.Segment(ig.Point(-7, 9, width=5, name="A"),
                    ig.Point(-4, 9, width=5, name="B"))
ig.Circle(origine, raggio, color="#c0c0de", width=4)
```

### 14.5.17 `Intersection`

**Scopo**
Crea il punto di intersezione tra due oggetti.
**Sintassi**

```
Intersection(obj0, obj1)
Intersection(obj0, obj1, which)
```

**Osservazioni** `obj0` e `obj1` possono essere rette o circonferenze. Se uno dei due oggetti è una circonferenza è necessario specificare quale delle due intersezioni verrà restituita indicando come terzo parametro `+1` o `-1`.
**Esempio**
Disegna una circonferenza tangente a una retta.

```
ip = ig.InteractivePlane('Intersection line line')
# Disegno retta e punto
retta = ig.Line(ig.Point(-4, -1, width=5),
                ig.Point(6, 2, width=5),
                width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = ig.Point(-3, 5, width=5, name='P')
# trovo il punto di tangenza
perpendicolare = ig.Orthogonal(retta, punto, width=1)
p_tang = ig.Intersection(retta, perpendicolare, width=5)
# disegno la circonferenza
ig.Circle(punto, p_tang, width=4, color='IndianRed')
```

Disegna il simmetrico di un punto rispetto ad una retta.

```
ip = ig.InteractivePlane('Intersection line circle')
# disegno l'asse di simmetria e il punto
asse = ig.Line(ig.Point(-4, -11, width=5),
               ig.Point(-2, 12, width=5),
               width=3, color='DarkOrange1', name='r')
```

```
punto = Point(-7, 3, width=5, name='P')
# disegno la perpendicolare all'asse passante per il punto
perp = ig.Orthogonal(asse, punto, width=1)
# trovo l'intersezione tra la perpendicolare e l'asse
piede = ig.Intersection(perp, asse)
# disegno la circonferenza di centro piede e passante per punto
circ = ig.Circle(piede, punto, width=1)
# trovo il simmetrico di punto rispetto a asse
ig.Intersection(perp, circ, -1, width=5, color='DebianRed', name="P'")
```

Disegna un triangolo equilatero.

```
ip = ig.InteractivePlane('Intersection circle circle')
# Disegno i due primi vertici
v0 = ig.Point(-2, -1, width=5, name='A')
v1 = ig.Point(3, 2, width=5, name='B')
# Disegno le due circonferenze di centro p0 e p1 e passanti per p1 e p0
c0 = ig.Circle(v0, v1, width=1)
c1 = ig.Circle(v1, v0, width=1)
# terzo vertice: intersezione delle due circonferenze
v2 = ig.Intersection(c0, c1, 1, width=5, name='C')
# triangolo per i 3 punti
ig.Polygon((v0, v1, v2), width=4, color='DarkSeaGreen4')
```

### 14.5.18 `Text`

**Scopo**
Crea un testo posizionato in un punto del piano.
**Sintassi**

```
Text(x, y, text[, iplane=None])
```

**Osservazioni**

- `x` e `y` sono due numeri interi o razionali relativi; `x` è l'ascissa e `y` l'ordinata del punto.
- `text` è la stringa che verrà visualizzata.
- Se sono presenti più piani interattivi, si può specificare l'argomento `iplane` per indicare in quale di questi la scritta deve essere visualizzata.

**Esempio**
Scrive un titolo in due finestre grafiche.

```
ip0 = ig.InteractivePlane('Text pale green', w=400, h=200)
ip1 = ig.InteractivePlane('Text blue violet', w=400, h=200)
ig.Text(-2, 2, "Prove di testo blue violet",
        color='blue violet', width=20)
ig.Text(-2, 2, "Prove di testo pale green",
        color='pale green', width=20, iplane=ip0)
```

### 14.5.19 `VarText`

**Scopo**

Crea un testo variabile. Il testo contiene dei "segnaposto" che verranno sostituiti con i valori prodotti dai dati presenti nel parametro variables.

**Sintassi**

```
VarText(x, y, text, variables[, iplane=None])
```

**Osservazioni**

- `x` e `y` sono due numeri interi o razionali relativi `x` è l'ascissa e `y` l'ordinata del punto.
- `text` è la stringa che contiene la parte costante e i segnaposto.
- In genere i *segnaposto* saranno nella forma: "{0}" che indica a Python di convertire in stringa il risultato prodotto dal dato.
- `variables` è un dato o una tupla di dati.
- Se sono presenti più piani interattivi, si può specificare l'argomento `iplane` per indicare in quale di questi la scritta deve essere visualizzata.

**Esempio**

Un testo che riporta la posizione dei un punto.

```
ip = ig.InteractivePlane('VarText')
p0 = ig.Point(7, 3, color='green', width=10, name='A')
ig.VarText(-4, -3, "Posizione del punto A: ({0}; {1})",
           (p0.xcoord(), p0.ycoord()),
           color='green', width=10)
```

### 14.5.20 `PointOn`

**Scopo**

Punto disegnato su un oggetto in una posizione fissa.

**Sintassi**

```
PointOn(obj, parameter)
```

**Osservazioni**

L'oggetto deve essere una linea o una retta o una circonferenza, `parameter` è un numero che individua una precisa posizione sull'oggetto. Sia le rette sia le circonferenze hanno una loro metrica che è legata ai punti base dell'oggetto. Su una retta una semiretta o un segmento `point0` corrisponde al parametro 0 mentre `point1` corrisponde al parametro 1. Nelle circoferenze il punto di base della circonferenza stessa corrisponde al parametro 0 l'intera circonferenza vale 2. Il punto creato con `PointOn` non può essere trascinato con il mouse.

**Esempio**

Disegna il simmetrico di un punto rispetto ad una retta.

```
ip = ig.InteractivePlane('PointOn')
# disegno l'asse di simmetria e il punto
asse = ig.Line(ig.Point(-4, -11, width=5),
               ig.Point(-2, 12, width=5),
               width=3, color='DarkOrange1', name='r')
punto = ig.Point(-7, 3, width=5, name='P')
# disegno la perpendicolare all'asse passante per il punto
perp = ig.Orthogonal(asse, punto, width=1)
# trovo il simmetrico di punto rispetto a asse
ig.PointOn(perp, -1, width=5, color='DebianRed', name="P'")
ig.Text(-5, -6, """P' e' il simmetrico di P.""")
```

### 14.5.21 `ConstrainedPoint`

**Scopo**
Punto legato ad un oggetto.
**Sintassi**

```
ConstrainedPoint(obj, parameter)
```

**Osservazioni**
Per quanto riguarda `parameter`, valgono le osservazioni fatte per `PoinOn`. Questo punto però può essere trascinato con il mouse pur restando sempre sull'oggetto. Dato che può essere trascinato con il mouse ha un colore di default diverso da quello degli altri oggetti.
**Esempio**
Circonferenza e proiezioni sugli assi.

```
ip = ig.InteractivePlane('ConstrainedPoint', sx=200)
# Circonferenza
origine = ig.Point(0, 0, visible=False)
unix = ig.Point(1, 0, visible=False)
uniy = ig.Point(0, 1, visible=False)
circ = ig.Circle(origine, unix, color="gray10")
# Punto sulla circonferenza
cursore = ig.ConstrainedPoint(circ, 0.25, color='magenta', width=20)
# assi
assex = Line(origine, unix, visible=False)
assey = Line(origine, uniy, visible=False)
# proiezioni
py = ig.Parallel(assey, cursore, visible=False)
hx = ig.Intersection(assex, py, color='red', width=8)
px = ig.Parallel(assex, cursore, visible=False)
hy = ig.Intersection(assey, px, color='blue', width=8)
```

### 14.5.22 `parameter`

**Scopo**
I punti legati agli oggetti hanno un metodo che permette di ottenere il parametro.
**Sintassi**

```
<constrained point>.parameter()
```

**Osservazioni**

In `PointOn` il parametro è fissato nel momento della costruzione dell'oggetto. In `ConstrainedPoint` il parametro può essere variato trascinando il punto con il mouse.

**Esempio**

Scrivi i dati relativi a un punto collegato a un oggetto.

```
ip = ig.InteractivePlane('parameter')
c0 = ig.Circle(ig.Point(-6, 6, width=6), ig.Point(-1, 5, width=6))
c1 = ig.Circle(ig.Point(6, 6, width=6), ig.Point(1, 5, width=6))
a = ig.PointOn(c0, 0.5, name='A')
b = ig.ConstrainedPoint(c1, 0.5, name='B')
ig.VarText(-5, -1, 'ascissa di A: {0}', a.xcoord())
ig.VarText(-5, -2, 'ordinata di A: {0}', a.ycoord())
ig.VarText(-5, -3, 'posizione di A: {0}', a.coords())
ig.VarText(-5, -4, 'parametro di A: {0}', a.parameter())
ig.VarText(5, -1, 'ascissa di B: {0}', b.xcoord())
ig.VarText(5, -2, 'ordinata di B: {0}', b.ycoord())
ig.VarText(5, -3, 'posizione di B: {0}', b.coords())
ig.VarText(5, -4, 'parametro di B: {0}', b.parameter())
```

### 14.5.23 `Angle`

**Scopo**

Angolo dati tre punti o due punti e un altro angolo. Il secondo punto rappresenta il vertice. Il verso di costruzione dell'angolo è quello antiorario.

**Sintassi**

```
Angle(point0, vertex, point1[, sides])
Angle(point0, vertex, angle[, sides])
```

**Osservazioni**

L'argomento `sides` può valere:

- `True` (o `(0, 1)`): vengono disegnati i lati;
- `0`: viene disegnato il lato 0;
- `1`: viene disegnato il lato 1;

`Angle` fornisce i seguenti metodi dal significato piuttosto evidente:

- `extent`: ampiezza dell'angolo;
- `bisector`: bisettrice.

**Esempio**

Disegna un angolo e un angolo con i lati.

```
ip = ig.InteractivePlane('Angle(Point, Point, Point)')
ip.defwidth = 5
a = ig.Point(-2, 4, color="#40c040", name="A")
b = ig.Point(-5, -2, color="#40c040", name="B")
c = ig.Point(-8, 6, color="#40c040", name="C")
d = ig.Point(8, 6, color="#40c040", name="D")
e = ig.Point(5, -2, color="#40c040", name="E")
f = ig.Point(2, 4, color="#40c040", name="F")
# angolo senza i lati
ig.Angle(a, b, c, color="#40c040")
# angolo con i lati
ig.Angle(d, e, f, color="#c04040", sides=True)
```

Somma di due angoli.

```
ip = ig.InteractivePlane('Angle(Point, Point, Angle)')
# i 2 angoli di partenza
a = ig.Angle(ig.Point(-3, 7, width=6),
             ig.Point(-7, 5, width=6),
             ig.Point(-6, 8, width=6),
             sides=(0, 1), color="#f09000", name='alfa')
b = ig.Angle(ig.Point(9, 2, width=6),
             ig.Point(2, 3, width=6),
             ig.Point(6, 4, width=6),
             sides=(0, 1), color="#0090f0", name='beta')
# Punti di base dell'angolo somma di a b
v = ig.Point(-11, -8, width=6)
p0 = ig.Point(3, -10, width=6)
# la somma degli angoli
b1 = ig.Angle(p0, v, b, (0, 1), color="#0090f0")
p1 = b1.point1()
a1 = ig.Angle(p1, v, a, sides=True, color="#f09000")
ig.Text(-4, -12, "Somma di due angoli")
```

### 14.5.24 `Bisector`

**Scopo**

Retta bisettrice di un angolo.

**Sintassi**

```
<Bisector>(<angle>)
```

**Osservazioni**

Vedi `Ray`.

**Esempio**

Disegna l'incentro di un triangolo.

```
ip = ig.InteractivePlane('Bisector')
# I tre vertici del triangolo
a = ig.Point(-7, -3, color="#40c040", width=5, name="A")
```

```
b = ig.Point(5, -5, color="#40c040", width=5, name="B")
c = ig.Point(-3, 8, color="#40c040", width=5, name="C")
# Il triangolo
ig.Polygon((a, b, c))
# Due angoli del triangolo
cba = ig.Angle(c, b, a)
bac = ig.Angle(b, a, c)
# Le bisettrici dei due angoli
b1 = ig.Bisector(cba, color="#a0c040")
b2 = ig.Bisector(bac, color="#a0c040")
# L'incentro
ig.Intersection(b1, b2, color="#c040c0", width=5, name="I")
```

### 14.5.25 `Calc`

**Scopo**
Dato che contiene il risultato di un calcolo.
**Sintassi**

```
Calc(function, variables)
```

**Osservazioni**

- `function` è una funzione python, al momento del calcolo, alla funzione vengono passati come argomenti il contenuto di `variables`.
- `variables` è un oggetto `Data` o una tupla che contiene oggetti `Data`. Il risultato è memorizzato all'interno dell'oggetto `Calc` e può essere visualizzato con `VarText` o utilizzato per definire la posizione di un punto.

**Esempio**
Calcola il quadrato di un lato e la somma dei quadrati degli altri due di un triangolo.

```
ip = ig.InteractivePlane('Calc')
ig.Circle(ig.Point(2, 4), ig.Point(-3, 4), width=1)
ip.defwidth = 5
a = ig.Point(-3, 4, name="A")
b = ig.Point(7, 4, name="B")
c = ig.Point(-1, 8, name="C")
ab = ig.Segment(a, b, color="#40c040")
bc = ig.Segment(b, c, color="#c04040")
ca = ig.Segment(c, a, color="#c04040")
q1 = ig.Calc(lambda a: a*a, ab.length())
q2 = ig.Calc(lambda a, b: a*a+b*b, (bc.length(), ca.length()))
ig.VarText(-5, -5, "ab^2 = {0}", q1, color="#40c040")
ig.VarText(-5, -6, "bc^2 + ca^2 = {0}", q2, color="#c04040")
```

**Riassumendo**

- In questo paragrafo sono stati presentati i seguenti oggetti.

- `Angle` Angolo dati tre punti o due punti e un angolo, il secondo punto rappresenta il vertice. Il verso di costruzione dell'angolo è quello antiorario.
- `Bisector` Retta bisettrice di un angolo.
- `Circle` Circonferenza dato il centro e un punto o il centro e un raggio (un segmento).
- `ConstrainedPoint` Punto legato ad un oggetto.
- `Calc` Dato che contiene il risultato di un calcolo.
- `InteractivePlane` Crea il piano cartesiano e inizializza gli attributi del *piano*.
- `Intersection` Crea il punto di intersezione tra due rette.
- `Line` Crea una retta per due punti.
- `MidPoint` Crea il punto medio di un segmento
- `MidPoints` Crea il punto medio tra due punti.
- `Orthogonal` Crea la retta perpendicolare ad una retta data passante per un punto.
- `Parallel` Crea la retta parallela ad una retta data passante per un punto.
- `Point` Crea un *punto libero* date le coordinate della sua posizione iniziale.
- `PointOn` Punto disegnato su un oggetto in una posizione fissa.
- `Polygon` Crea un poligono data una sequenza di vertici.
- `Ray` Traccia una semiretta con l'origine in un punto e passante per un altro punto.
- `Segment` Crea un segmento dati i due estremi, i due estremi sono *punti*.
- `Text` Crea un testo posizionato in un punto del piano.
- `VarText` Crea un testo variabile. Il testo contiene dei "segnaposto" che verranno sostituiti con i valori prodotti dai dati presenti nel parametro variables.

- In questo paragrafo sono stati presentati i seguenti attributi.

  - `<oggetto_visibile>.color` Attributo degli oggetti geometrici: imposta il colore dell'oggetto;
  - `<oggetto_visibile>.name` Attributo degli oggetti geometrici: imposta il nome dell'oggetto.
  - `<oggetto_visibile>.visible` Attributo degli oggetti geometrici: stabilisce se l'oggetto sarà visibili o invisibile;
  - `<oggetto_visibile>.width` Attributi degli oggetti geometrici: imposta la larghezza dell'oggetto.

- In questo paragrafo sono stati presentati i seguenti metodi.

  - `<circonferenza>.radius` Metodo delle classi *circonferenza* che restituisce un oggetto `data` che contiene la lunghezza del raggio della circonferenza.
  - `<figura>.perimeter` Metodo delle classi *figura* che restituisce un oggetto `data` contenete la lunghezza del contorno dell'oggetto.
  - `<figura>.surface` Metodo delle classi *figura* che restituisce un oggetto `data` contenete l'area della superficie dell'oggetto.

- `<oggetto_visibile>.coords` Restituisce un dato che contiene le coordinate.
- `<oggetto_visibile>.xcoord` Metodo degli oggetti visualizzabili: restituisce un dato che contiene l'ascissa.
- `<oggetto_visibile>.ycoord` Metodo degli oggetti visualizzabili: restituisce un dato che contiene l'ordinata.
- `<punto_legato>.parameter` Metodo dei punti legati agli oggetti che restituisce un oggetto `data` contenete il parametro.
- `<segmento>.length` Metodo della classe `Segment` che restituisce un oggetto `data` contenete la lunghezza del segmento stesso.

**Prova tu**

1. Ricopia e modifica alcuni esempi del manuale.
2. Disegna un triangolo con evidenziati i punti medi dei lati.
3. Disegna un quadrato usando gli oggetti: `Orthogonal` e `Parallel`.
4. Disegna un esagono regolare dato il centro e un vertice.
5. Disegna un poligono regolare dato il centro, un vertice e il numero di lati.
6. Disegna un poligono regolare e tutte le sue diagonali.