

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Ardonik, *easy-origami-fold-a-day-calendar-great-rhombicub octahedron*
<http://www.flickr.com/photos/ardonic/2833120348>
Licenza Attribution, Share Alike 2.0

Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

grado

1

Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Per risolverla supponiamo che il coefficiente di x^2 , cioè il coefficiente a

, sia *positivo*. Se così non fosse, basterebbe cambiare segno a tutti i

termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ si può risolvere la disequazione $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostituisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè dalla disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Possono presentarsi tre casi.

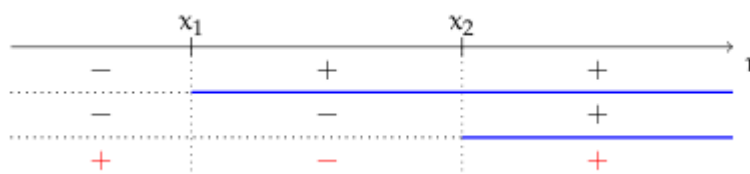
L'equazione è spuria $ax^2 + bx = 0$

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo x a fattore comune $x(ax + b) = 0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x = 0 \vee ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Chiamiamo le due radici x_1

e

x_2 . Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo grado, poniamo

separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori, come nel seguente grafico.



Dal grafico si evince che le soluzioni saranno:

- $x < x_1 \vee x > x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $ax^2 + bx > 0$, analogamente $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \geq 0$.
- $x_1 < x < x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $ax^2 + bx < 0$, analogamente $x_1 \leq x \leq x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \leq 0$.

1.1 Esempi

- $3x^2 - 2x > 0$ mettiamo x a fattore comune $x(3x - 2) > 0$. Soluzioni: $x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$;
- $5x^2 + x \leq 0$ mettiamo x a fattore comune $x(5x + 1) \leq 0$. Soluzioni $-\frac{1}{5} \leq x \leq 0$;
- $x - 3x^2 > 0$ cambiamo di segno $3x^2 - x < 0$ da cui $x(3x - 1) < 0$. Soluzioni $0 < x < \frac{1}{3}$.

L'equazione è pura: $ax^2 + c = 0$

Possono esserci due situazioni:

- $c < 0$: in questo caso l'equazione ammette due radici reali opposte: $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$: si torna al caso precedente e si ha $x < x_1 \vee x > x_2$ se la disequazione è $ax^2 + c > 0$ oppure $x_1 < x < x_2$ se la disequazione è $ax^2 + c < 0$;
- $c > 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio $ax^2 + c$ è la somma di un quadrato con un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza, la disequazione $ax^2 + c > 0$ avrà soluzioni per ogni x reale, mentre $ax^2 + c < 0$ non avrà nessuna soluzione reale.

1.2 Esempi

- $x^2 - 4 \geq 0$ Soluzioni $x \leq -2 \vee x \geq 2$
- $5x^2 + x \leq 0$ soluzioni $-3 \leq x \leq 3$
- $x^2 + 4 > 0$ soluzioni $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + 9 \leq 0$ soluzioni nessun valore reale I.S. = \emptyset
- $1 - x^2 < 0$ cambiamo di segno $x^2 - 1 > 0$ soluzioni $x < -1 \vee x > 1$

L'equazione è completa: $ax^2 + bx + c = 0$. ^^^^

Si calcola il valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

e seconda del suo segno possono presentarsi tre casi:

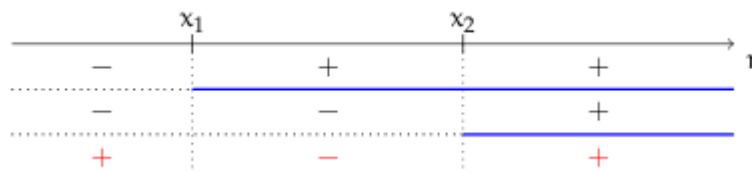
Primo caso

$\Delta > 0$

L'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$

. Poiché abbiamo supposto a

positivo, il segno del trinomio è dato dalla seguente tabella:



Per cui la disequazione $ax^2 + bx + c \geq 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$; mentre la disequazione $ax^2 + bx + c \leq 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1 \leq x \leq x_2$.

1.3 Esempi

- $x^2 - 3x - 4 > 0$; calcolo il valore del discriminante $\Delta = 9 + 16 = 25$
e le soluzioni dell'equazione associata
 $x_1 = -1 \vee x_2 = 4$. Soluzioni della disequazione: $x < -1 \vee x > 4$.
- $x^2 - 3x - 4 < 0$, in questo caso le soluzioni della disequazione sono $-1 < x < 4$.

Secondo caso $\Delta = 0$

In questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1 = x_2$, pertanto il trinomio si scompone in $a(x - x_1)^2$. Poiché a è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

- $a(x - x_1)^2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq x_1$;
- $a(x - x_1)^2 \geq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $a(x - x_1)^2 < 0$ non è mai verificata;
- $a(x - x_1)^2 \leq 0$ è verificata solo per $x = x_1$;

1.4 Esempi

- $x^2 - 2x + 1 > 0 \rightarrow (x - 1)^2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1$;
- $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \rightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 + 2x + 1 < 0 \rightarrow (x + 1)^2 < 0$ non è mai verificata;
- $4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \rightarrow (2x + 1)^2 \leq 0$ è verificata solo per $x = -\frac{1}{2}$.

**Terzo caso ** $\Delta < 0$

Studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi:

- mettiamo il coefficiente a
a fattore comune, aggiungendo e togliendo

$\frac{b^2}{4a^2}$ ottenendo

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right);$$

- osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore ottenendo $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$;
- studiamo ora il segno di questa espressione: a è positivo, nella parentesi quadra si ha una somma in cui $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ essendo un quadrato è sempre positivo, come $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ sempre positivo perché $\Delta < 0$. Possiamo allora concludere che il trinomio è sempre positivo.

Si hanno allora le seguenti possibilità con $a > 0$

:

- $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $ax^2 + bx + c \geq 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata;
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ non è mai verificata.

1.5 Esempi

- $2x^2 - 3x + 4 > 0 \rightarrow \Delta = 9 - 32 = -23 < 0$ verificata
 $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 - x + 1 < 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ verificata per nessun valore reale di x .

I seguenti esempi analizzano la risoluzione di disequazioni di secondo grado con $\Delta \geq 0$

1.6 Esempi

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione $-3x^2 + 2x > 0$

.

Cambiamo segno per ottenere il primo coefficiente positivo; l'equazione diventa $3x^2 - 2x < 0$
e l'equazione associata è spuria

$3x^2 - 2x = 0$ con le radici

$x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$. Pertanto la disequazione assegnata ha

$$\text{I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{3} \right\}$$

.

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2 - 5 \leq 0$.

L'equazione associata $2x^2 - 5 = 0$

, è pura con soluzioni reali

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{10}}{2}$$

. Quindi

$$\text{I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{10}}{2} \leq x \leq +\frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

.

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2 + 3x - 1 > 0$

.

TABELLA 1.1: Tabella1

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$: l'equazione associata ha 2 soluzioni reali distinte $x = x_1 \vee x = x_2$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
	$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	I.S. = \emptyset	$x = x_1$
Definizione 1.2. $\Delta = 0$: l'equazione associata ha 2 soluzioni reali coincidenti $x = x_1 = x_2$				
	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	I.S. = \emptyset	I.S. = \emptyset
Definizione 1.3. $\Delta < 0$: l'equazione associata non ha soluzioni reali				

L'equazione associata è completa $2x^2 + 3x - 1 = 0$
e il delta:

Definizione 1.1. $\Delta = 9 + 8 = 17$ è positivo, dunque le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \vee x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

; ci troviamo nel primo caso, quindi l'insieme soluzione della disequazione

$$\text{è: I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere la disequazione $2x^2 + 3x - 1 < 0$
e i casi

$$2x^2 + 3x - 1 \geq 0 ;$$

$$2x^2 + 3x - 1 \leq 0 .$$

Conclusione : una disequazione di secondo grado si presenta sempre in una delle seguenti forme: $ax^2 + bx + c > 0$

,

$$ax^2 + bx + c \geq 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c < 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 ; \text{ possiamo sempre supporre positivo il primo coefficiente e, anche se}$$

incompleta, per l'equazione associata possiamo sempre pensare ai tre casi generati dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

. Pertanto avremo: