

**MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2**  
**DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO**



Ardonik, *easy-origami-fold-a-day-calendar-great-rhombicub octahedron*  
<http://www.flickr.com/photos/ardonik/2833120348>  
Licenza Attribution, Share Alike 2.0



# Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

# 1

Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Per risolverla supponiamo che il coefficiente di  $x^2$ , cioè il coefficiente  $a$ , sia *positivo*. Se così non fosse, basterebbe cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione  $-2x^2 + 3x - 1 > 0$  si può risolvere la disequazione  $2x^2 - 3x + 1 < 0$ .

Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostituisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè dalla disequazione  $ax^2 + bx + c > 0$  all'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ . Possono presentarsi tre casi.

L'equazione è spuria  $ax^2 + bx = 0$

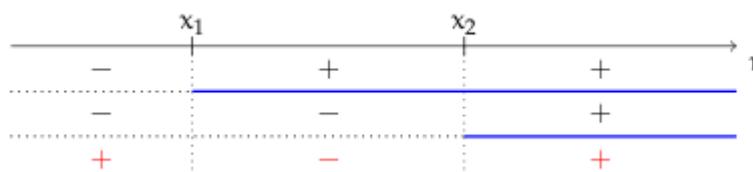
---

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo  $x$  a fattore comune  $x(ax + b) = 0$  e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo  $x = 0 \vee ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ . Chiamiamo le due radici  $x_1$

e

$x_2$ . Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo grado, poniamo

separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori, come nel seguente grafico.



Dal grafico si evince che le soluzioni saranno:

- $x < x_1 \vee x > x_2$  soluzioni esterne se la disequazione è  $ax^2 + bx > 0$ , analogamente  $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$  se la disequazione è  $ax^2 + bx \geq 0$ .
- $x_1 < x < x_2$  soluzioni interne se la disequazione è  $ax^2 + bx < 0$ , analogamente  $x_1 \leq x \leq x_2$  se la disequazione è  $ax^2 + bx \leq 0$ .

### 1.1 Esempi

- $3x^2 - 2x > 0$  mettiamo  $x$  a fattore comune  $x(3x - 2) > 0$ . Soluzioni:  $x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$ ;
- $5x^2 + x \leq 0$  mettiamo  $x$  a fattore comune  $x(5x + 1) \leq 0$ . Soluzioni  $-\frac{1}{5} \leq x \leq 0$ ;
- $x - 3x^2 > 0$  cambiamo di segno  $3x^2 - x < 0$  da cui  $x(3x - 1) < 0$ . Soluzioni  $0 < x < \frac{1}{3}$ .

L'equazione è pura:  $ax^2 + c = 0$

Possono esserci due situazioni:

- $c < 0$ : in questo caso l'equazione ammette due radici reali opposte:  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ : si torna al caso precedente e si ha  $x < x_1 \vee x > x_2$  se la disequazione è  $ax^2 + c > 0$  oppure  $x_1 < x < x_2$  se la disequazione è  $ax^2 + c < 0$ ;
- $c > 0$ : l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio  $ax^2 + c$  è la somma di un quadrato con un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza, la disequazione  $ax^2 + c > 0$  avrà soluzioni per ogni  $x$  reale, mentre  $ax^2 + c < 0$  non avrà nessuna soluzione reale.

### 1.2 Esempi

- $x^2 - 4 \geq 0$  Soluzioni  $x \leq -2 \vee x \geq 2$
- $5x^2 + x \leq 0$  soluzioni  $-3 \leq x \leq 3$
- $x^2 + 4 > 0$  soluzioni  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + 9 \leq 0$  soluzioni nessun valore reale I.S. =  $\emptyset$
- $1 - x^2 < 0$  cambiamo di segno  $x^2 - 1 > 0$  soluzioni  $x < -1 \vee x > 1$

L'equazione è completa:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Si calcola il valore del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$

e seconda del suo segno possono presentarsi tre casi:

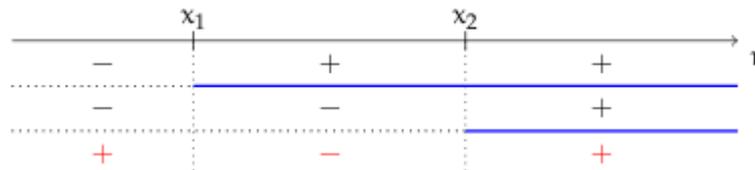
#### Primo caso

$$\Delta > 0$$

L'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in  $a(x - x_1)(x - x_2)$

. Poiché abbiamo supposto  $a$

positivo, il segno del trinomio è dato dalla seguente tabella:



Per cui la disequazione  $ax^2 + bx + c \geq 0$  è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè  $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ ; mentre la disequazione  $ax^2 + bx + c \leq 0$  è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

### 1.3 Esempi

- $x^2 - 3x - 4 > 0$ ; calcolo il valore del discriminante  $\Delta = 9 + 16 = 25$   
e le soluzioni dell'equazione associata  
 $x_1 = -1 \vee x_2 = 4$ . Soluzioni della disequazione:  $x < -1 \vee x > 4$ .
- $x^2 - 3x - 4 < 0$ , in questo caso le soluzioni della disequazione sono  $-1 < x < 4$ .

#### Secondo caso $\Delta = 0$

In questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti  $x_1 = x_2$ , pertanto il trinomio si scompone in  $a(x - x_1)^2$ . Poiché  $a$  è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

- $a(x - x_1)^2 > 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq x_1$ ;
- $a(x - x_1)^2 \geq 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $a(x - x_1)^2 < 0$  non è mai verificata;
- $a(x - x_1)^2 \leq 0$  è verificata solo per  $x = x_1$ ;

### 1.4 Esempi

- $x^2 - 2x + 1 > 0 \rightarrow (x - 1)^2 > 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1$ ;
- $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \rightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $x^2 + 2x + 1 < 0 \rightarrow (x + 1)^2 < 0$  non è mai verificata;
- $4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \rightarrow (2x + 1)^2 \leq 0$  è verificata solo per  $x = -\frac{1}{2}$ .

#### \*\*Terzo caso \*\* $\Delta < 0$

Studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi:

- mettiamo il coefficiente  $a$   
a fattore comune, aggiungendo e togliendo

$\frac{b^2}{4a^2}$  ottenendo

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right);$$

- osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore ottenendo  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ ;
- studiamo ora il segno di questa espressione:  $a$  è positivo, nella parentesi quadra si ha una somma in cui  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  essendo un quadrato è sempre positivo, come  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$  sempre positivo perché  $\Delta < 0$ . Possiamo allora concludere che il trinomio è sempre positivo.

Si hanno allora le seguenti possibilità con  $a > 0$

:

- $ax^2 + bx + c > 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R}$  ;
- $ax^2 + bx + c \geq 0$  è verificata  $\forall x \in \mathbb{R}$  ;
- $ax^2 + bx + c < 0$  non è mai verificata;
- $ax^2 + bx + c \leq 0$  non è mai verificata.

### 1.5 Esempi

- $2x^2 - 3x + 4 > 0 \rightarrow \Delta = 9 - 32 = -23 < 0$  verificata  
 $\forall x \in \mathbb{R}$  ;
- $x^2 - x + 1 < 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$  verificata per nessun valore reale di  $x$  .

I seguenti esempi analizzano la risoluzione di disequazioni di secondo grado con  $\Delta \geq 0$

### 1.6 Esempi

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione  $-3x^2 + 2x > 0$

.

Cambiamo segno per ottenere il primo coefficiente positivo; l'equazione diventa  $3x^2 - 2x < 0$   
e l'equazione associata è spuria

$3x^2 - 2x = 0$  con le radici

$x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$  . Pertanto la disequazione assegnata ha

$$\text{I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{3} \right\}$$

.

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione  $2x^2 - 5 \leq 0$  .

L'equazione associata  $2x^2 - 5 = 0$

, è pura con soluzioni reali

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{10}}{2}$$

. Quindi

$$\text{I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{10}}{2} \leq x \leq +\frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

.

- Determinare l'insieme soluzione della disequazione  $2x^2 + 3x - 1 > 0$

.

TABELLA 1.1: Tabella1

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$ : l'equazione associata ha 2 soluzioni reali distinte $x = x_1 \vee x = x_2$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
	$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	I.S. = $\emptyset$	$x = x_1$
<b>Definizione 1.2.</b> $\Delta = 0$ : l'equazione associata ha 2 soluzioni reali coincidenti $x = x_1 = x_2$				
	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	I.S. = $\emptyset$	I.S. = $\emptyset$
<b>Definizione 1.3.</b> $\Delta < 0$ : l'equazione associata non ha soluzioni reali				

L'equazione associata è completa  $2x^2 + 3x - 1 = 0$   
e il delta:

**Definizione 1.1.**  $\Delta = 9 + 8 = 17$  è positivo, dunque le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \vee x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

; ci troviamo nel primo caso, quindi l'insieme soluzione della disequazione

$$\text{è: I.S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere la disequazione  $2x^2 + 3x - 1 < 0$   
e i casi

$$2x^2 + 3x - 1 \geq 0 ;$$

$$2x^2 + 3x - 1 \leq 0 .$$

**Conclusione** : una disequazione di secondo grado si presenta sempre in una delle seguenti forme:  $ax^2 + bx + c > 0$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c < 0 ,$$

$ax^2 + bx + c \leq 0$  ; possiamo sempre supporre positivo il primo coefficiente e, anche se

incompleta, per l'equazione associata possiamo sempre pensare ai tre casi generati dal segno del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$

. Pertanto avremo: