# Quádricas com PSTricks


UFMT

**Régis da Silva Santos**

Acadêmico do Curso de Matemática, UFMT, Cuiabá, MT

rg3915@yahoo.com.br



32$^o$ Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional — **XXXII CNMAC**


## Introdução

O LaTeX é comumente usado como um editor de texto científico, porém, nosso objetivo aqui é expandir sua utilização para a criação de figuras geométricas, mais especificamente o desenho de quádricas através da linguagem PostScript com o auxílio do pacote PST-Solides3D. Nosso objetivo final é obter uma imagem com uma boa qualidade de resolução para que possa ser usada como saída para impressão, recurso este que dificilmente encontramos em outros softwares.

Representaremos as quádricas na sua forma paramétrica, pois o PST-Solides3D não dá suporte às equações implícitas, o qual é definida as quádricas em coordenadas cartesianas. Em seguida, faremos uma breve apresentação da linguagem PostScript e o uso dos pacotes PSTricks e PST-Solides3D. E finalmente, veremos alguns exemplos de quádricas e os códigos que o geram no LaTeX.

## As Quádricas

As quádricas podem ser consideradas como a versão tridimensional das cônicas, de uma forma geral, são superfícies em $\mathbb{R}^3$.

**Definição:** Chama-se *quádrica* qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Nos restringiremos aqui apenas a definição do elipsóide e do parabolóide elíptico (no sistema de coordenadas cartesianas), a definição das demais quádricas pode ser encontrada em P. Boulos [3].

**Elipsóide:** Uma quádrica é um *elipsóide* se existem números reais $a, b, c$, pelo menos dois deles distintos, tais que o elipsóide pode ser descrito pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

chamada *equação reduzida do elipsóide*.

**Parabolóide elíptico:** Se existem números reais $a$ e $b$ tais que uma quádrica seja descrita pela equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

então, se $a \neq b$, teremos um *parabolóide elíptico*.

## Superfícies Paramétricas

**Definição:** Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície parametrizada* se existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma aplicação diferenciável $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S = \mathcal{F}(U)$. Ou seja,

$$\mathcal{F} : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

já que $U \subset \mathbb{R}^2$ e $S \subset \mathbb{R}^3$.

Veremos as equações paramétricas de algumas quádricas, algumas outras estão desenvolvidas em M. P. Do Carmo [4].

**Exemplo 1** As equações paramétricas do **elipsóide** são dadas por

$$\mathcal{F}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$$

onde $0 < u < \pi$ e $0 < v < 2\pi$.

**Obs**: Os valores de $u$ nos próximos exemplos podem variar de $-\infty$ à $+\infty$, mas por uma questão de estética visual escolhemos os valores que se seguem.

**Exemplo 2** As equações paramétricas do **cone** são

$$\mathcal{F}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)\,, \text{ onde } -1 < u < 1 \text{ e } 0 < v < 2\pi.$$

**Exemplo 3** Uma das equações paramétricas do **hiperbolóide de uma folha** é

$$\mathcal{F}(u, v) = (a \cos u - v \sin u, a \sin u + v \cos u, cv)$$

uma outra opção é

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\sqrt{1 + u^2} \sin v, \sqrt{1 + u^2} \cos v, u\right)$$

onde $-3 < u < 3$ e $0 < v < 2\pi$.

**Exemplo 4** Uma das equações paramétricas do **parabolóide elíptico** é

$$\mathcal{F}(u, v) = (au \sin v, bu \cos v, cu^2)$$

uma outra opção é

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right); a, b \neq 0.$$

Observe que esta última é uma parametrização conhecida como *parametrização global*, onde uma função de duas variáveis reais pode ser representada de modo que seu gráfico seja reproduzido pela equação paramétrica

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \text{ onde } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

## A Linguagem

PostScript é uma linguagem de programação voltada para a criação de letras e figuras de natureza diversa, dentre elas, figuras com representações matemáticas como retas, arcos, círculos, etc.

PSTricks é uma coleção de macros do TEX baseado em PostScript, que é compatível com a maioria dos pacotes de macros TEX, incluindo LaTeX. A funcionalidade do PSTricks é que torna possível se desenhar no LaTeX. Com ele é possível desenhar retas, polígonos, curvas, arcos, etc. inclusive gráficos de funções reais.

## O pacote PST-Solides3D

O pacote PST-Solides3D (versão 4.11) é uma extensão do PSTricks. Ele é dedicado a visualização 3D de sólidos pré-definidos, como esferas, cilindros, entre outros. O PST-Solides3D também gera superfícies tridimensionais definidas por funções de duas variáveis ($z = f(x, y)$) e superfícies paramétricas, que é o foco do nosso trabalho.

Precisaremos de três comandos básicos: `\psSolid`, para a manipulação de objetos em $3$ dimensões, `\psSurface`, para representar superfícies definidas pela equação $z = f(x, y)$ e `\axesIIID` para gerar um sistema de eixos ortogonais em $\mathbb{R}^3$.

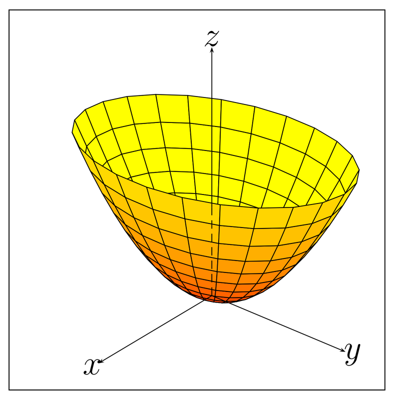
Por padrão o LaTeX interpreta as equações no formato RPN (Reversed Polish Notation), porém, com a opção `algebraic` podemos escrever as equações paramétricas com as notações usuais.

## Aplicação

Veremos agora, alguns exemplos das quádricas escrita em linguagem LaTeX.

**Exemplo 5** Parabolóide elíptico

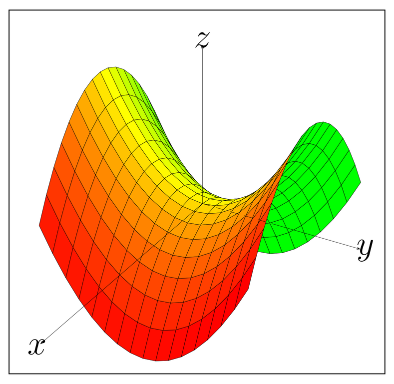
$$\mathcal{F}(u, v) = (u \sin v, 1.5u \cos v, 0.5u^2); 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$$




```
\psset{unit=0.7}
\begin{pspicture*}(-6,-2.7)(6,8.5)
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=50 40 30 rtp2xyz,
   Decran=50}
\psset{ngrid=.25 .25,linewidth=0.5pt}
%superficie parametrica
\defFunction[algebraic]{Paraboloid}(u,v)
   {u*sin(v)}{1.5*u*cos(v)}{0.5*u^2}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=0.001 pi 0.001 2 pi mul,
   hue=0 .15,incolor=yellow,
   function=Paraboloid]
\axesIIID(0,0,3)(5,5,8)
\end{pspicture*}
```

**Exemplo 6** Parabolóide hiperbólico

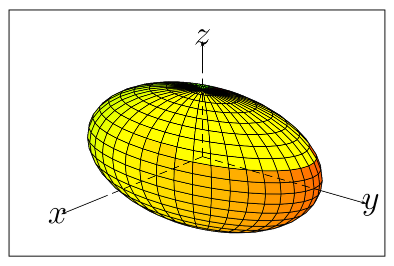
$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{4}; -4 < x < 4, -4 < y < 4$$




```
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=80 30 30 rtp2xyz,
   Decran=50}
\psset{ngrid=.5 .5,linewidth=0.1pt}
\begin{pspicture*}(-4,-3.5)(4,4)
\psSurface[algebraic,hue=.3 0](-4,-4)(4,4)
   {(y^2-x^2)/4}
\axesIIID(0,3,0)(10,6,6)
\end{pspicture*}
```

**Exemplo 7** Elipsóide

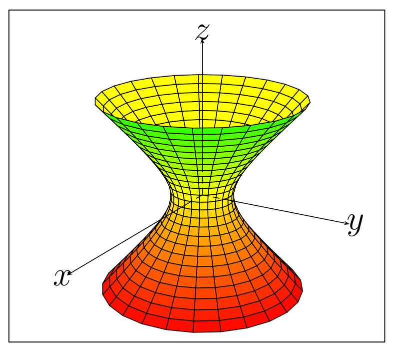
$$\mathcal{F}(u, v) = (\cos u \sin v, 2 \sin u \sin v, \cos v); 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$$




```
\begin{pspicture*}(-4,-2)(4,3)
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=40 40 20 rtp2xyz,
   Decran=20}
\psset{linewidth=0.5pt}
\defFunction[algebraic]{ellipsoid}(u,v)
   {cos(u)*sin(v)}
   {2*sin(u)*sin(v)}{cos(v)}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=0 2 pi mul 0.001 2 pi mul,
   hue=.3 0,incolor=yellow,
   function=ellipsoid,
   unit=3,ngrid=40]
\axesIIID(6,6,4)(8,8,5)
\end{pspicture*}
```

**Exemplo 8** Hiperbolóide de uma folha

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\sqrt{1 + u^2} \sin v, \sqrt{1 + u^2} \cos v, u\right);$$
$$-\pi < u < \pi, -\pi < v < \pi$$

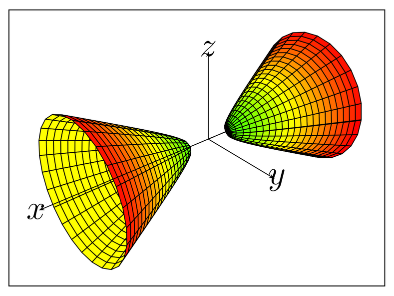



```
\begin{pspicture*}(-4,-3)(4,3.8)
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=30 30 20 rtp2xyz,
   Decran=20}
\psset{ngrid=.25 .25,linewidth=0.5pt}
\defFunction[algebraic]{hyperboloidOne}(u,v)
   {sqrt(1+u^2)*sin(v)}
   {sqrt(1+u^2)*cos(v)}
   {u}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=pi neg pi pi neg pi,hue=0 .3,
   incolor=yellow,
   function=hyperboloidOne]
\axesIIID(1,1,1)(7,5,5)
\end{pspicture*}
```

**Exemplo 9** Hiperbolóide de duas folhas

Neste caso precisaremos dividir a equação em duas partes porque devemos ter $u > 1$.

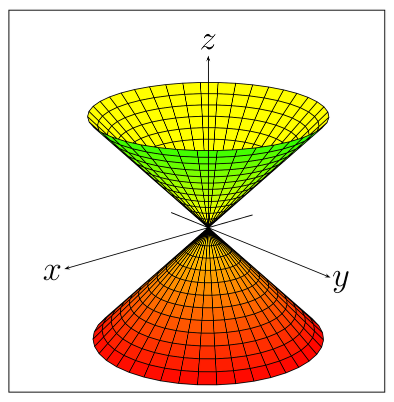
$$\mathcal{F}(u, v) = \left(-2u, \sqrt{u^2 - 1} \cos v, \sqrt{u^2 - 1} \sin v\right);$$
$$1 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$$
$$\mathcal{F}(u, v) = \left(2u, \sqrt{u^2 - 1} \sin v, \sqrt{u^2 - 1} \cos v\right)$$




```
\psset{unit=0.75}
\begin{pspicture*}(-5.5,-4)(5.5,3.5)
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=60 50 30 rtp2xyz,
   Decran=20}
\psset{algebraic,ngrid=.25 .25,linewidth=0.5pt}
%superficie parametrica
\defFunction{hyperboloidTwoN}(u,v)
   {-2*u}
   {sqrt(u^2-1)*cos(v)}
   {sqrt(u^2-1)*sin(v)}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=1.001 2 pi mul 0.01 2 pi mul,
   hue=.3 0,incolor=yellow,
   function=hyperboloidTwoN]
%superficie parametrica
\defFunction{hyperboloidTwo}(u,v)
   {2*u}
   {sqrt(u^2-1)*sin(v)}
   {sqrt(u^2-1)*cos(v)}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=1.001 2 pi mul 0.01 2 pi mul,
   hue=.3 0,incolor=yellow,
   function=hyperboloidTwo]
\axesIIID(-2,0,0)(16,8,8)
\end{pspicture*}
```

**Exemplo 10** Cone

$$\mathcal{F}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, u); -2 < u < 2, 0 < v < 2\pi$$




```
\psset{unit=0.75}
\psset[pst-solides3d]{viewpoint=30 50 20 rtp2xyz,
   Decran=50}
\begin{pspicture*}(-5.5,-4.5)(4.5,6)
\psset{linewidth=0.5pt}
\defFunction[algebraic]{cone}(u,v)
   {u*sin(v)}{u*cos(v)}{u}
\psSolid[object=surfaceparametree,
   base=-2 2 0 2 pi mul,
   hue=0 .3,incolor=yellow,
   function=cone,
   ngrid=25 40]
\axesIIID(-1,-1,0)(3,3,3)
\end{pspicture*}
```

**Importante**: O PDFLaTeX não gera as figuras feitas em PSTricks, então para gerar um arquivo final em PDF é necessário primeiro converter o DVI para PS e depois para PDF.

## Conclusão

A possibilidade de se usar o LaTeX como ferramenta de desenho oferece uma gama de recursos e opções que enriquecem o trabalho e, principalmente a qualidade final de impressão. Com o pacote PSTricks é possível fazer qualquer tipo de desenho em duas dimensões usando expressões matemáticas. E o PST-Solides3D é voltado para visualização tridimensional.

O método de usar equações paramétricas pode ser expandido para a visualização tanto de superfícies dadas por funções de duas variáveis quanto de superfícies paramétricas em geral.

## Referências


[1] J.P. Vignault, M. Luque, A. Schmittbuhl, “pst-solides3d: The Documentation - The Basics”, Agosto, 2008.

[2] T.V. Zandt, “PSTricks: PostScript macros for Generic TEX”, Julho, 2003.

[3] P. Boulos, “Geometria Analítica. Um tratamento vetorial.” 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] M.P. Do Carmo. “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Coleção Textos Universitários.” 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.