

Predslov

Tieto skriptá sú určené predovšetkým poslucháčom šudijného odboru "Aplikovaná mechanika" a sú v nich obsiahnuté základné poznatky o Mechanike kontinua, s hlavným zameraním na pevné poddajné teleso. Zavedenie tohto predmetu, ktorý sa začal vyučovať na Strojníckej fakulte SVŠT od školského roku 1982/83, súvisí s obsahovou prestavbou štúdia, ktorá mala okrem iného za cieľ naučiť študentov najnovším poznatkom z oblasti vedy a techniky, a urýchleným zavádzaním týchto výsledkov do praxe potom účinnejšie prispievať k rozvoju našej spoločnosti. Napísaním týchto skriptov chceme aj my prispieť k splneniu tohto cieľa.

V našich skriptách si, prirodzene, nekladíme nárok na úplné vyčerpanie obsahu tohto vedného odboru. Je to hlavne z dôvodu, že odbor sa neustále rozvíja a pre jeho jednotlivé oblasti ako napr.: Teória pružnosti, Mechanika tekutín, Plasticita a iné už na Strojníckej fakulte vyšli samostatné skriptá. Pre ďalšie prehĺbenie vedomostí z daného odboru odporúčame hlavne učebnicu "Mechanika kontinua" od Miroslava Brdičku a knihy od autora Y.C. Funga, prípadne ďalšie, ktoré sú uvedené v zozname použitej a odporúčanej literatúry. Matematické vyjadrenie rovníc je robené indexovaným zápisom, s využitím tenzorovej analýzy. Tento postup našiel v poslednom čase široké uplatnenie, či už v písaní učebníc alebo ostatnej odbornej literatúry, čo podmienil hlavne rozvoj numerických metód mechaniky kontinua. Takýto zápis príslušné operácie značne zjednoduší a skoncentruje získané poznatky, pričom však treba mať na zreteli fyzikálnu predstavu javu, ktorá sa môže vplyvom matematických formulácií z daného problému vytratiť.

Autori ďakujú dr. Ing. M. Bílemu, DrSc. a dr. Ing. Kompišovi, CSc. za cenné pripomienky a starostlivú recenziu skriptov.

© Ing. Justín Murín, CSc., Ing. Pavel Élesztős, CSc.

Lektori: Dr. Ing. Matěj Bílý, DrSc.
Dr. Ing. Vladimír Kompiš, CSc.

Vydala Slovenská vysoká škola technická v Bratislave v Edičnom stredisku SVŠT, Bratislava, Gottwaldovo nám. 17.

Za odbornú a ideologickú náplň tohto vydania zodpovedá Ján Syč-Milý, CSc. vedúci Katedry pružnosti a pevnosti.

Schválil rektor Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave dňa 20.1. 1984, č. 3359/83 ako skriptá pre Strojnícku fakultu, študijný odbor: Aplikovaná mechanika.

Bratislava v júni 1985

Ing. Justín Murín, CSc.
Ing. Pavel Élesztős, CSc.

1. Úvod

Pri riešení konkrétnych úloh praxe inžinier alebo vedecko-výskumný pracovník musí nájsť odpovede na dôležité otázky ako napr.: Ako sa bude daný problém formulovať? Ako zostaviť hlavné rovnice a okrajové podmienky? Akú hypotézu možno vysloviť o danom probléme a akými experimentálnymi skúškami dokázať jej platnosť? Akej strednej chyby sa pritom dopustíme? A v neposlednom rade, koľko sa minie finančných prostriedkov a času na dosiahnutie vhodného riešenia? V týchto skriptách z tohto okruhu otázok sa budeme zaoberať hlavne odpoveďou na prvú otázku. Za tým účelom si najskôr ozrejmime niektoré základné pojmy, nevyhnutné pre pochopenie opisovaných fyzikálnych javov.

Mechanika - študuje pohyb (prípadne rovnováhu) hmotného telesa a sily, ktoré tento pohyb, resp. rovnováhu v priestore a čase spôsobujú. Pretože pojem hmotného telesa je veľmi zložitý, budeme abstrahovať od skutočného zloženia hmoty a hovoríme o mechanike hmotného kontinua. Základné princípy mechaniky sú vlastne matematickou formuláciou fyzikálnych zákonitostí. Učenie mechaniky preto tiež hovoríme, že je to učenie aplikovanej matematiky.

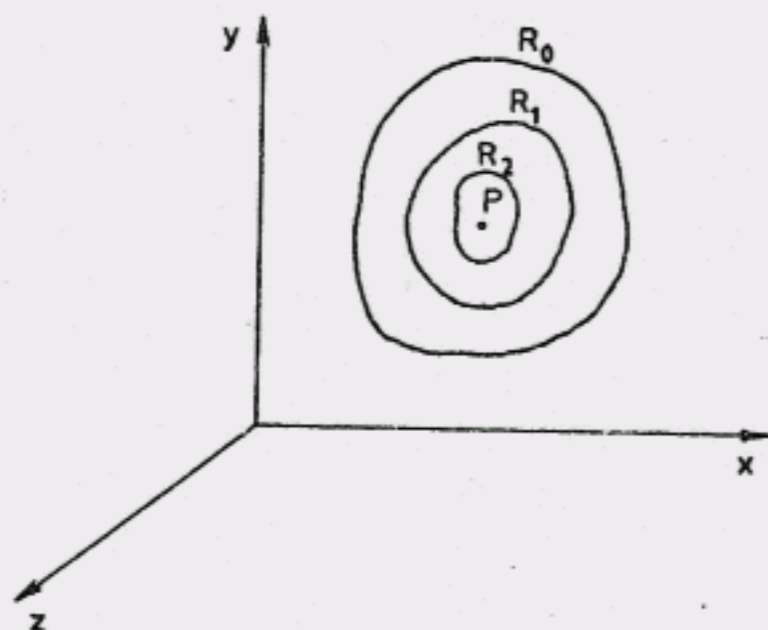
Koncept kontinua - je odvodený z matematiky. Povieme, že systém reálnych čísel je kontinuum. Medzi každými dvoma určitými číslami sú iné čísla, vlastne existuje nekonečne veľa reálnych čísel medzi uvažovanými dvoma číslami. Intuitívne čas môže byť reprezentovaný systémom reálnych čísel a trojdimensionálny priestor je reprezentovaný tromi systémami reálnych čísel x, y, z . Čas a priestor budeme identifikovať ako štvorrozmerné kontinuum. Rozšírením pojmu kontinua na hmotu budeme hovoriť o spojitom rozdelení hmoty v priestore. Pre názornosť uvažujeme pojem hustoty hmoty. Predpokladajme, že priestor R_0 je vyplnený hmotou (obr. 1.1).

Uvažujme bod P v R_0 a ďalej, že časti podpriestoru R_1, R_2, \dots, R_n konvergujú do bodu P , pričom

$$R_n \subset R_{n-1}, \quad P \in R_n$$

Nech objem R_n je V_n a hmotnosť látky obsiahnutej v R_n je M_n . Utvoríme pomer M_n/V_n , a ak limita M_n/V_n existuje pre $n \rightarrow \infty$ a $V_n \rightarrow 0$, túto limitnú hodnotu definujeme ako hustotu (rozdelenia) hmoty v bode P

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}$$



Obr. 1.1
K definícii kontinua

Ak je hustota definovaná všade v R_0 , hovoríme, že hmota je rozdelená spo-
jite.

Podobnú úvahu možno použiť na definovanie hustoty hybnosti, hustoty ener-
gie, Na základe toho definujeme pojem hmotného kontinua:

je materiál, ktorého hustota hmoty, hybnosti, energie, ..., existuje v na-
značenom matematickom zmysle. Mechanika takéhoto hmotného kontinua je me-
chanikou kontinua. Mechanika kontinua patrí medzi technické vedné odbory.
Jej špeciálne disciplíny sú napr.: Teória pružnosti, Teória plasticity,
Teória viskoelasticity a viskoplasticity, Mechanika tekutín, Termodynamika
a iné závislé deje.

Mechanika kontinua nachádza široké aplikácie na problémy fyzikálneho sveta.
Pretože kontinuum je matematickou abstrakciou skutočného sveta, otázka apli-
kácie závisí od určitých predpokladov. Konkrétnejšie, pretože hmota je uva-
žovaná v modernej fyzike ako štruktúra elementárnych častíc, nemôžeme sto-
tožňovať túto časticu s hmotným bodom kontinua. Ak vodu uvažujeme ako štruk-
túru elementárnych častíc, potom voda nie je kontinuum. Ak chceme defino-
vať hustotu vody v zmysle podanej definície, narazíme na ťažkosti, keď di-
menzia podpriestoru R_n bude redukovaná na priemer atómu. Potom, ak R_n a
 R_{n+1} sa líšia o neutrón, potom pomer M_n/V_n sa líšia o konečný rozdiel od
pomeru M_{n+1}/V_{n+1} . Ak sa častica navyše pohybuje, limita M_n/V_n buď neexistu-
je, alebo závisí od času a polohy v priestore. Aby sme sa vyhli tejto situ-
ácii, uvažujme pomer M_n/V_n takto: Nech R_n je stále menší a menší, ale zo-
stáva taký veľký, aby obsahoval stále veľký počet elementárnych častíc. Ak
pri zachovaní tohto obmedzenia má pomer M_n/V_n konečnú limitu $\rho(P)$, potom

$\rho(P)$ je hustota hmoty. Inými slovami, korešpondujúc s reálnym materiálom,
definujeme matematické kontinuum, ktoré má rovnakú hustotu v zmysle pred-
chádzajúcich úvah. V dôsledku toho analýza mechaniky konkrétneho materiálu
môže byť založená na matematickom modeli.

Tieto obmedzenia nespôsobujú v praxi veľké problémy. Molekulárny rozmer vo-
dy je okolo 1 \AA (10^{-8} cm), potom ak riešime úlohu s tečúcou vodou v potru-
bí, v ktorom nikdy nepripustíme rozmery menšie ako 10^{-6} cm , môžeme túto vo-
du považovať za kontinuum. Stredný rozmer molekuly vzduchu je $5 \times 10^{-6} \text{ cm}$,
potom ak uvažujeme prúdenie vzduchu okolo lietadla, môžeme vzduch pokladať
za kontinuum. Červené krvinky majú rozmer okolo $8,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$, potom môžeme
našu krv pokladať za kontinuum, ak sa zaoberáme prúdením krvi v artériách
priemeru povedzme $0,5 \text{ cm}$.

Koncept materiálneho kontinua je matematickou idealizáciou reálneho sveta
a je aplikovateľný na problémy v ktorých jemnosť štruktúry môže byť zaned-
baná. Je teda prístupom makroskopickým. Keď nás táto jemná štruktúra zaují-
ma, musíme sa vrátiť k fyzike elementárnych častíc (mikroskopický prístup)
a štatistickej mechanike. Dialektické spojenie kontinua a elementárnych
častíc nám pomáha porozumieť fyzikálnemu svetu ako celku. Napríklad v opti-
ke skúmame svetlo raz ako elementárne častice a inokedy ako elektromagne-
tické vlnenie.

Keďže kontinuum je abstrakciou veľkého množstva elementárnych častíc, cie-
lom mechaniky kontinua je popísať pohyb (alebo v špeciálnom prípade rovno-
váhu) týchto častíc v priestore a čase v závislosti od všetkých síl, ktoré
tento pohyb (resp. rovnováhu) ovplyvňujú. V priebehu vývoja sa vyvinuli
rôzne metódy a postupy mechaniky kontinua. Najzákladnejšie delenie týchto
metód je:

- a) špeciálne metódy,
- b) všeobecné metódy.

Špeciálne metódy sú zamerané na vyriešenie toho-ktorého individuálneho prob-
lému. Takýto prístup je atraktívny, vedecký a inžiniersky. Veľa nových ve-
deckých poznatkov sa dosiahlo touto metódou. Univerzálnejšia je však metó-
da všeobecná. Popisuje celú oblasť problémov systémom rovníc, ktoré sa po-
tom zjednodušujúci predpokladmi a okrajovými a počiatočnými podmienkami
aplikujú na konkrétne úlohy. Obidva prístupy majú svoje výhody a nevýhody,
a preto treba pri voľbe ich použitia vychádzať z konkrétneho riešeného prob-
lému.

Obidve tieto metódy môžu byť:

- experimentálne,
- analytické,
- numerické.

V poslednom čase, najmä s rozvojom výpočtovej techniky, dochádza k širokému uplatneniu metód numerických ako napr.: Metódy konečných elementov, Metódy integrálnych rovníc, Metódy konečných diferencií, Metódy sietí a iných. Práve tieto metódy vyžadujú postavenie matematického modelu, ktorý by mal čo najpresnejšie odrážať objektívnu realitu.

Vo vedeckovýskumnej činnosti prírodných a technických vied sa široko používajú rôzne modely. Dejiny vied by ani nebolo možné popísať bez pojmov ako dokonale tuhé teleso, nestlačiteľná kvapalina, nedeliteľný atóm, pružné siločiar, planetárny systém atómov, alebo bez dualizmu vlna-častica. Aj na samotného človeka sa v 18. storočí nazeralo ako na jemný hodinový mechanizmus, 19. storočie ho považovalo za tepelný stroj, 20. storočie vidí v ňom samočinný počítač. Pre prerazenie bariér v procese intelektuálneho napredovania zohrali takéto modely rozhodujúcu úlohu a podporovali ľudský mozog v predstavení si nepredstaviteľného. Boli to napr.: model éteru v teórii pola Faradaya a Maxwella, korpuskulárny model v atómovej hypotéze Daltona a Boltzmann, vlnový model v názornej kvantovej mechanike Broglieho a Schrödingera, alebo dvojité špirály v molekulárnej genetike Cricka a Watsona. Dnešné vedecké rozmyšľanie, zbehlé v abstrakciách, často siaha po rôznych analógiách - napríklad keď hovoríme o zakrivených priestoroch, ...

Cieľom výskumníka je, aby kvantitatívne predpovedal následné správanie jednoduchých modelov, pričom jednoduchosť modelu je požadovaná možnosťou jeho pochopenia a popísania existujúcim matematickým aparátom, ako aj nárokmi na vyriešenie postavených matematických vzťahov.

Už v priebehu štúdia, v procese prípravy na vedecko-výskumnú činnosť treba si uvedomiť, že jednotlivé vyučované predmety hovoria o tom istom materiálnom svete, sú modelami jedného materiálneho sveta, sú teda zrkadlovým odrazom sveta podľa rôznych hľadísk. Nelíšia sa v odzrkadlení rôznych objektov, ale v prvom rade v spôsobe odzrkadlenia. Toto nám umožňuje, aby sme o objektoch selektívnym pozorovaním získali vyčerpávajúce poznatky.

Keď sa v určitom prípade modely relatívne dobre zhodujú s objektívnou realitou, ich predpovede budú väčšinou pravdivé. Takýto úspešný model sa môže všeobecne zameniť s objektívnou realitou, čo vedie k dogmatizmu. Pojmy euklidovskej geometrie, geocentrického sveta, statického univerza, elektrónovej dráhy alebo nemennosti rodov boli také presvedčivé, že na ich prekorenie sa musela vynaložiť obrovská energia. Modely síce používame s obľubou, opierame sa o ne v rôznych vetách a príkladoch, avšak absolutizovať ich nesmieme.

Univerzum, ale potenciálne i jediný atóm, má nekonečný stupeň voľnosti. Počet neutrónov v ľudskom mozgu je však konečný. Takto obmedzeným ľudským mozgom, alebo samočinným počítačom sme schopní zohľadniť len konečný počet

zmien. Na popísanie nevyčerpatelného materiálneho sveta používame modely, ktoré sa zmestia do počítača alebo do mozgu.

Počet používaných modelov narastá, menia sa a vyvíjajú. Vyberajúc ich a obmieňajúc môžeme v podstate vysvetliť každý skúmaný prírodný jav.

Samozrejme, jediným objektívnym kritériom pravdivosti takto dosiahnutých výsledkov je spoločenská prax.

2. Tenzory

2.1 KARTÉZSKE TENZORY

Pod tenzormi budeme rozumieť fyzikálne veličiny, ktoré pri transformácii súradnicového systému podliehajú určitým transformačným zákonom, o ktorých sa zmienime podrobnejšie v ďalších kapitolách. Keď pôjde špeciálne o transformáciu kartézskoho súradnicového systému natočením, budeme hovoriť o kartézskych tenzoroch. Kvôli jednoduchosti budeme v ďalšom používať názov "tenzory", pričom budeme mať na mysli tenzory kartézske. Všeobecnými tenzormi sa v týchto skriptách pre nedostatok miesta zaoberať nebudeme.

Rozlišujeme tenzory rôzneho stupňa (rádu): tenzorom nultého stupňa budeme označovať skaláry. Vektory, ktorými sa budeme zaoberať v samostatnej kapitole, budeme nazývať tenzormi prvého stupňa. Dyády, fyzikálne veličiny ako napr. tenzor napätia (odtiaľ pochádza pojem "tenzor"), budeme nazývať tenzormi druhého stupňa. Tenzory môžu byť všeobecne stupňa n -tého. Dyáda, resp. tenzor 2. stupňa, môže byť opísaný ako matica (3,3) (tri riadky, tri stĺpce). Elementom takto zoradenej číselnej schémy hovoríme komponenty (zložky) tenzora. Využijeme možnosť zápisu tenzora ako matice, a budeme potom s ním narábať podľa pravidiel maticového počtu, čo je najmä pre inžiniera vhodný spôsob operácie s tenzormi.

2.2 SUMAČNÉ PRAVIDLO

V ďalšom opise látky budeme používať nasledujúce označenie: Množina n -premenných x_1, \dots, x_n bude označená ako $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Keď bude napísané jednoducho x_i , platí to pre všetky premenné x_1, x_2, \dots, x_n . Veľkosť n musí byť vždy určená, obvyklá cesta je písať $i = 1, 2, \dots, n$. Symbol i je indexom. Index môže vystupovať v polohe dolnej alebo hornej, a to na ľavej alebo pravej strane príslušného označenia sledovanej veličiny. Napr.

$$A_i^j, \quad j_A, \quad i_{A_j}, \quad k_{A_j}^i$$

Ďalším zápisom, pri ktorom sa použijú indexy, nazývame indiciálnym (indexovaným) zápisom. Indexovaný zápis značne zjednodušuje písanie matematických vzťahov, uľahčuje vykonanie niektorých operácií s nimi a umožňuje jednoduchšie a rýchlejšie naprogramovanie potrebných algoritmov pre samočinný počítač.

Uvažujme rovnicu roviny v trojrozmernom priestore, vzťahovanú na pravouhlý kartézsky súradnicový systém s osami x_1, x_2, x_3

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p \quad (2.2-1)$$

keď a_i a p sú konštanty. Túto rovnicu môžeme písať v tvare

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = p \quad (2.2-2)$$

zavedením sumácie podľa Einsteina píšeme jednoducho

$$a_i x_i = p \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2-3)$$

Štandardná konvencia je takáto: Opakovanie indexu vo výraze bude označovať sčítanie podľa tohto indexu cez celú jeho veľkosť. Veľkosť indexu je množina n -celých čísel 1 až n . Inými slovami, nebudeme sumáciu vyznačovať znakom \sum , ale si ju jednoducho myslíme urobenú podľa každého indexu, ktorý sa vyskytuje v jednom člene dvakrát. Ak sa vo výnimočných prípadoch, napríklad opakujúcim indexom nebude sumácia vykonávať, znázorníme to indexom v zátvorke, alebo osobitne pripojíme poznámku. Napr.:

$$\delta_{(i)n_i} \quad \text{alebo} \quad \delta_i n_i \quad (\text{bez sumácie})$$

Index, podľa ktorého robíme sumáciu, nazývame indexom sumačným (sčítacím). Indexy, cez ktoré sumácia neprebieha, nazývame voľnými indexami. Sumačné indexy možno v priebehu výpočtu voľne premenúvať (napr.: k, l, m, \dots). Použitie sumačného pravidla ilustrujeme na nasledujúcich príkladoch.

Uvažujme jednotkový vektor ν v trojrozmernom euklidovskom priestore s pravouhlými kartézskymi súradnicami x, y a z . Definujeme smerové kosínusy

$$\alpha_1 = \cos(\nu, x), \quad \alpha_2 = \cos(\nu, y), \quad \alpha_3 = \cos(\nu, z)$$

keď (ν, x) označuje uhol medzi ν a osou x , atď. ...

Množina čísiel α_i , ($i = 1, 2, 3$) reprezentuje zložky jednotkového vektora v súradnicových osiach. Skutočnosť, že dĺžka vektora je jednotková

$$(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 = 1 \quad (2.2-4)$$

alebo jednoduchšie

$$\alpha_i \alpha_i = 1 \quad (2.2-5)$$

Ako ďalšiu ilustráciu uvažujme lineárny element so zložkami dx , dy , dz v trojrozmernom euklidovskom priestore. Štvorec dĺžky lineárneho elementu je

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.2-6)$$

Definujeme

$$dx_1 = dx, \quad dx_2 = dy, \quad dx_3 = dz \quad (2.2-7)$$

a

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ pre } i \neq j \quad (2.2-8)$$

potom môžeme (2.2-6) písať ako

$$(ds)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (2.2-9)$$

s tým, že i a j sa mení od 1 po 3. Symbol δ_{ij} , definovaný podľa (2.2-8), nazývame "Kroneckerova delta".

Ďalej určíme hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \dots \quad (2.2-10)$$

Ak označíme všeobecný člen determinantu a_{ij} a celý determinant ako $|a_{ij}|$, potom môžeme (2.2-10) písať v tvare

$$|a_{ij}| = e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3} \quad (2.2-11)$$

kde e_{rst} je tzv. permutačný symbol a je definovaný rovnicami

$$\begin{aligned} e_{111} = e_{222} = e_{333} = e_{112} = e_{113} = \dots = 0 \\ e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1 \end{aligned} \quad (2.2-12)$$

Inými slovami, e_{ijk} je nulové, ak hodnota niektorých dvoch indexov je rovnaká; $e_{ijk} = 1$, ak i, j, k sú párnou permutáciou čísel 1, 2, 3; a $e_{ijk} = -1$ vo všetkých ostatných prípadoch (ak i, j, k sú nepárnou permutáciou čísel 1, 2, 3).

Kroneckerova delta a permutačný symbol sú veľmi dôležité veličiny a budeme o nich ešte osobitne hovoriť.

Nakoniec zaveďme sumačné pravidlo do diferencných vzťahov. Nech $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkcia n -premenných x_1, x_2, \dots, x_n . Pre jej diferenciál môžeme písať

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = f_{,i} dx_i \quad (2.2-13)$$

Čiarke vo výraze $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$ znázorňuje parciálnu deriváciu funkcie $f(x_j)$ podľa i -tej premennej.

2.3 TRANSFORMÁCIA SÚRADNÍC

Uvažujme, kvôli jednoduchosti, v rovine kartézské súradnicové systémy $O(x, y)$ a $O'(x', y')$. Ak súradnicový systém $O'(x', y')$ dostaneme posunutím $O(x, y)$ bez zmeny orientácie, potom túto transformáciu súradníc nazývame "transláciou" (posunutím). Ak počiatok súradnicového systému zostáva nezmenený, a nové osi x' a y' dostaneme natočením osi x a y o uhol θ , potom takúto transformáciu nazývame "natočenie" súradníc. Je zrejme, že všeobecná transformácia kartézskeho súradnicového systému pozostáva z translácie a natočenia (rotácie) súradnicového systému. My sa budeme ďalej zaoberať len takou transformáciou súradnicového systému, ktorá sa deje natočením súradníc.

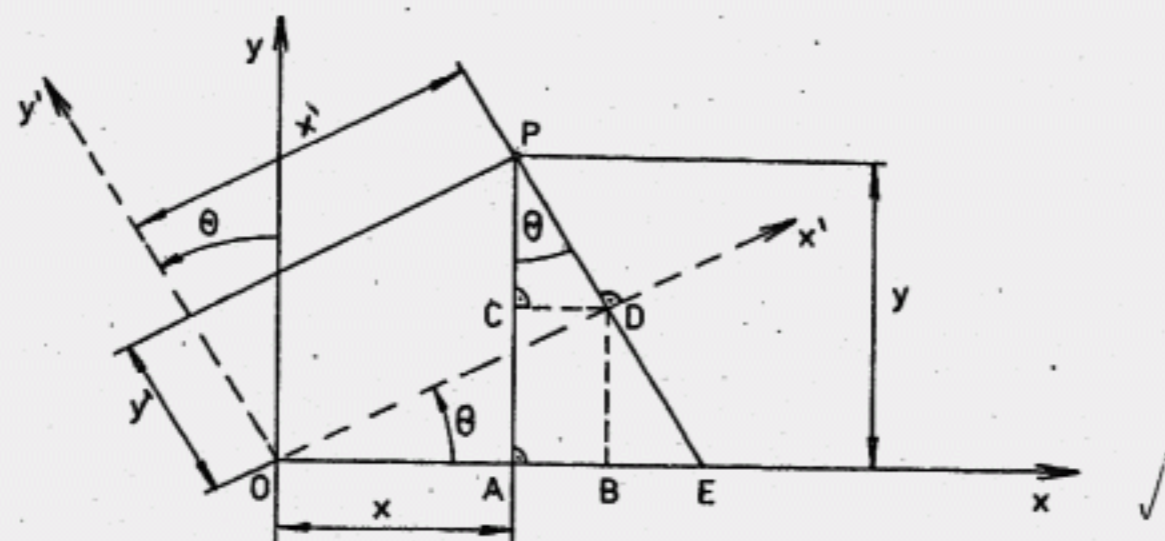
Nech bod P má súradnice (x, y) , (x', y') v starom, resp. v novom súradnicovom systéme. Potom (viď obr. 2.1)

$$\overline{PC} = y' \cos \theta$$

$$\overline{CD} = y' \sin \theta = \overline{AB}$$

$$\overline{DB} = x' \sin \theta = \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = x' \cos \theta$$



Obr. 2.1

Rotácia (natočenie) súradnicového systému

$$x = \overline{OB} - \overline{AB} = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad (2.3-1)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

a pre čiarkované súradnice máme

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.3-2)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Aby sme mohli použiť sumačné pravidlo, x_1, x_2 nahradíme x, y a x'_1, x'_2 za x', y' .

Potom transformáciu súradníc natočením bude reprezentovať sústava rovníc

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2) \quad (2.3-3)$$

$$y = k x$$

$$X = B y$$

kde a_{ij} sú členmi štvorcovej matice (a_{ij})

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad B = k^{-1} \quad (2.3-4)$$

Inverzný vzťah k (2.3-3) bude

$$x_i = a_{ji} x'_j \quad (i = 1, 2) \quad (2.3-5)$$

kde a_{ji} , v zhode s (2.3-1), je elementom j -tého riadku a i -tého stĺpca matice (a_{ij}) . T.j.

$$(a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.3-6)$$

Je transponovanou maticou (a_{ij}) ,

$$(a_{ji}) = (a_{ij})^T \quad (2.3-7)$$

Na druhej strane, z hľadiska riešenia systému lineárnych rovníc, matica (a_{ji}) v (2.3-5) musí sa chápať ako inverzná matica k matici (a_{ij}) , t.j.:

$$(a_{ji}) = (a_{ij})^{-1} \quad (2.3-8)$$

Porovnaním (2.3-7) a (2.3-8) dostaneme základnú vlastnosť transformačnej matice (a_{ij}) , ktorá definuje natočenie pravouhlého, kartézskeho súradnicového systému a hovorí, že transponovaná transformačná matica sa rovná jej inverznému tvaru

$$(a_{ij})^T = (a_{ij})^{-1} \quad (2.3-9)$$

Transformačná matica (a_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, ktorá spĺňa rovnicu (2.3-9), sa nazýva ortogonálnou maticou. Transformácia súradníc sa nazýva ortogonálnou, ak zodpovedajúca transformačná matica je ortogonálna. Matica (2.3-4), definujúca natočenie pravouhlého súradnicového systému, je ortogonálna a teda transformácia natočením tohto systému je ortogonálnou transformáciou. Pre ortogonálnu maticu máme

$$(a_{ij}) (a_{ij})^T = (a_{ij}) (a_{ij})^{-1} = (\delta_{ij}) \quad (2.3-10)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerova delta. Po rozpísaní (2.3-10) dostaneme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Porovnaním s (δ_{ij}) dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

resp. pre zložky Kroneckerovej delty bude platiť

$$\delta_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2$$

$$\delta_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$$

$$\delta_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12}, \text{ atď.}$$

a všeobecne

$$\delta_{ij} = a_{ik} a_{jk} = a_{ki} a_{kj} \quad (2.3-11)$$

Rovnice (2.3-3) a (2.3-5) sa dajú rozšíriť na trojdimenzionálny priestor, t.j. bude platiť

$$x_i = a_{ji} x'_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3-12)$$

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

Urobíme teraz všeobecnú transformáciu súradníc. Nech $x_i, i = 1, 2, 3$ sú súradnice bodu v pôvodnom súradnicovom systéme. Nech je daná transformácia týchto súradníc do nového súradnicového systému so súradnicami

$$x'_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3-13)$$

$$x'_i = f(x_1, x_2, x_3)$$

Inverzná transformácia bude

$$x_i = g(x'_1, x'_2, x'_3) \quad (2.3-14)$$

Aby táto transformácia bola v nejakej oblasti R jednoznačná, t.j. aby určitému bodu (x'_1, x'_2, x'_3) prislúchal jediný bod (x_1, x_2, x_3) a naopak, musí platiť:

- funkcia f_i je jednoducho spojitá včítane jej prvej derivácie v nejakej oblasti R ;
- Jacobiho determinant (Jacobian), $J = \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right|$ nie je nulový v každom bode oblasti R , t.j.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.3-15)$$

Transformácia súradníc, spĺňajúca obidve tieto podmienky, sa nazýva "prípustná" transformácia. Ak je Jacobian pozitívny ($J > 0$), potom pravotočivý súradnicový systém je transformovaný tiež na pravotočivý systém, a takúto transformáciu nazývame "vlastná" transformácia. Ak je Jacobian záporný ($J < 0$), hovoríme o transformácii "nevlastnej".

Napríklad pre transformáciu súradníc natočením je Jacobian transformácie

$$J = \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{\partial (a_{ij} x_j)}{\partial x_j} \right| = |a_{ij}| = 1 \quad (2.3-16)$$

V týchto skriptách budeme uvažovať transformácie prípustné a vlastné. Takou zrejme je podľa (2.3-16) aj transformácia natočením pravouhlého kartézneho súradnicového systému.

2.4 VEKTORY

V súvislosti s naznačenou predstavou, v úvode ku kartézskym tenzorom, budeme vektory považovať za špeciálne tenzory, menovite tenzory stupňa prvého.

Definícií pojmu vektor je niekoľko. Najjednoduchšia z nich hovorí, že vektor je orientovaná úsečka, ktorá má určenú svoju veľkosť a smer. My budeme vektory definovať z hľadiska ich transformačných vlastností. Označenie vektorov je možné týmito troma najdôležitejšími spôsobmi:

- symbolicky
pomocou písmen niektorej staršej abecedy, alebo hrubo vytlačených písmen (napr.: \bar{A} , \bar{A} , \bar{u} , \bar{i} , ...);
- analyticky
pomocou indexovaného zápisu (napr.: A_i , $i = 1, 2, 3$),
pomocou matíc (napr.: riadková matica $A = (A_1, A_2, A_3)$, stĺpcová matica, ...);
- v zložkovom tvare
(napr.: $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$), pričom jednotkový vektor e_i , $i = 1, 2, 3$ slúži ako básový vektor, a A_1, A_2, A_3 sú zložkami vektora A .

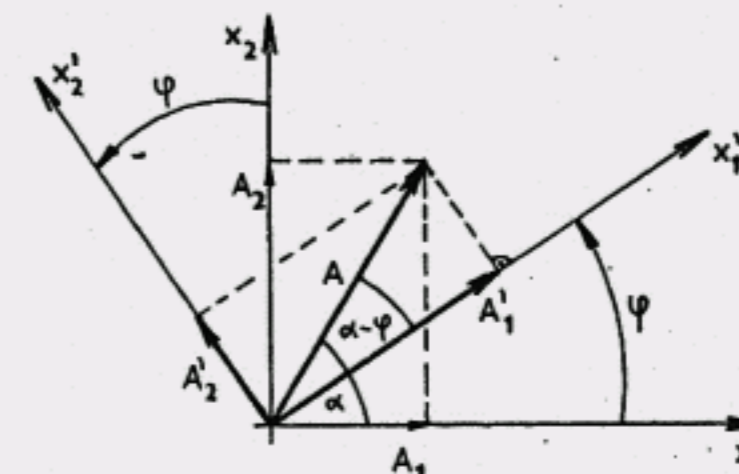
Všetky tieto možnosti znázornenia, ktoré sú zaužívané pre vektory, možno použiť aj pre tenzory. Pri tenzoroch vyššieho stupňa ako druhého nemožno použiť maticový zápis, ale ostatné možnosti zápisu ostanú zachované.

Vektor A vystupuje ako zoradená trojica čísel, vlastne ako trojica jeho zložiek A_i , $i = 1, 2, 3$. Chceme ukázať, že navyše sa vyznačuje transformačným zákonom, ktorému podliehajú jeho komponenty. Ako už bolo spomínané, obmedzíme sa len na transformáciu kartézskoho súradnicového systému natočením. (Počiatok pôvodného a natočeného súradnicového systému je zhodný.) Okrem toho, kvôli jednoduchosti, budeme uvažovať rovinný prípad (obr. 2.2).

Z obr. 2.2 sa dá odčítať vzájomný vzťah medzi zložkami vektorov A_i a A'_i , ktoré dostaneme z počiatočného súradnicového systému x_i natočením o uhol φ do x'_i :

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \alpha \\ A_2 &= A \sin \alpha \\ A'_1 &= A \cos(\alpha - \varphi) = A (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) = \\ &= A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

$$\begin{aligned} A'_2 &= A \sin(\alpha - \varphi) = A (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) = \\ &= A_2 \cos \varphi - A_1 \sin \varphi = A_1 \cos(90^\circ - \varphi) + A_2 \cos \varphi \end{aligned}$$



Obr. 2.2
Transformácia zložiek vektora

Pri odvodení vzťahov (2.4-1) bola použitá vzájomná súvislosť medzi goniometrickými funkciami

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \cos(90^\circ - \varphi) \\ -\sin \varphi &= \cos(90^\circ + \varphi) \end{aligned} \quad (2.4-2)$$

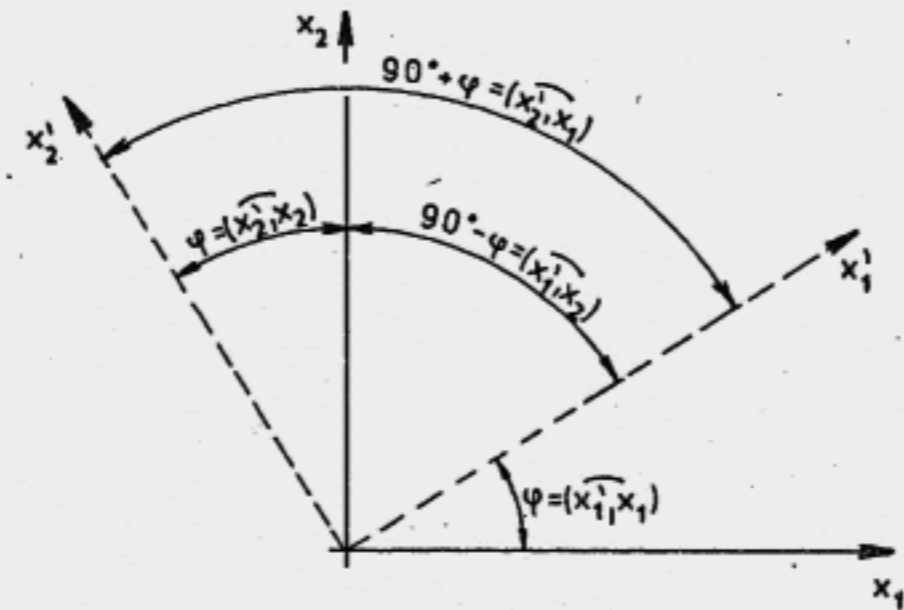
Zaveďme označenie

$$a_{ij} = \cos(\widehat{x'_i, x_j}) \quad (2.4-3)$$

ktoré udáva kosínus uhla, vytvoreného medzi natočenou osou x'_i a pôvodnými súradnicami x_j . Potom na základe obr. 2.3 môžeme písať

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\widehat{x'_1, x_1}) = a_{11} \\ \cos(90^\circ - \varphi) &= a_{12} \\ \cos(90^\circ + \varphi) &= a_{21} \\ \cos \varphi &= a_{22} \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

Vo vzťahoch (2.4-3), resp. (2.4-4) sa prvý index vzťahuje na čiarkovanú súradnicu a druhý index sa vzťahuje na pôvodnú (nečiarkovanú) súradnicu.



Obr. 2.3
Znázornenie uhlového natočenia

S využitím (2.4-4) môžeme (2.4-1) písať v tvare

$$A_1' = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 \quad (2.4-5)$$

$$A_2' = a_{21}A_1 + a_{22}A_2$$

Zovšeobecňíme túto úlohu na priestorový vektor A_i , $i = 1, 2, 3$ a na priestorový kartézsky súradnicový systém $(x_i, i = 1, 2, 3 - \text{pôvodný}, x_i', i = 1, 2, 3 - \text{natočený})$, a dostaneme

$$\begin{aligned} A_1' &= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 \\ A_2' &= a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 \end{aligned} \quad (2.4-6)$$

$$A_3' = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3$$

V zmysle kapitoly 2.1.1 môžeme (2.4-6) zapísať skrátene

$$A_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-7)$$

a použitím sumačného pravidla

$$A_i' = a_{ij}A_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-8)$$

S (2.4-8) sme vlastne našli platný transformačný zákon pre kartézské vektory.

Pre úplnosť treba vyriešiť rovnicu (2.4-8) aj pre veličiny bez čiarky, A_j . To sa môže urobiť spôsobom, ako pri lineárnom systéme algebraických rovníc. My to urobíme zavedením určitého formalizmu (v zhode s kapitolou 2.2, pretože sa dá dokázať, že pri transformácii súradnicového systému natočením sa trojica súradníc transformuje ako vektor; $x_i' = a_{ij}x_j$, $dx_i' = a_{ij}dx_j$), že nahradíme v (2.4-8) veličiny bez čiarky veličinami s čiarkou a naopak. Tak dostaneme z A_i' jednoducho A_i , A_j prejde na A_j' a z

$$a_{ij} = \cos(\widehat{x_i', x_j})$$

bude

$$\cos(\widehat{x_i, x_j'}) = \cos(\widehat{x_j', x_i}) = a_{ji} \quad (2.4-9)$$

(Z obr. 2.3 je zrejmé, že $(\widehat{x_i', x_j}) \equiv (\widehat{x_j, x_i'})$, $(\widehat{x_i', x_2}) \equiv (\widehat{x_2, x_i'})$, ...) To znamená, že pre koeficienty systému rovníc znamená tento prechod zmenu poradia indexov. Potom z (2.4-8) dostaneme

$$A_i = a_{ji}A_j' \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-10)$$

Čiarkované zložky vektora sú homogénnymi lineárnymi funkciami zložiek vektora nečiarkovaných a naopak.

Vzťahy (2.4-8) a (2.4-10) stanovujú transformačné vzťahy pre kartézské tenzory prvého stupňa.

Pomocou týchto transformačných zákonov definujeme vektory nasledovne:

Vektory sú usporiadané trojice čísel so zložkami A_i , $i = 1, 2, 3$ vzhľadom na kartézsky súradnicový systém x_i , $i = 1, 2, 3$ a s komponentmi A_i' , $i = 1, 2, 3$ vzhľadom na natočený systém x_i' , $i = 1, 2, 3$, pričom medzi zložkami A_i a A_i' platí transformačný zákon (2.4-8) a (2.4-10). Vektorový charakter nejakej okúmanej veličiny, zadanej tromi súradnicovými zložkami, sa dokáže práve existenciou transformačných zákonov (2.4-8) a (2.4-10). Ak zadane zložky nespĺňajú tieto transformačné zákony, skúmaná veličina nie je vektorom.

Uvažujme gradient skalárnej funkcie f . Symbolické označenie je

$$\text{grad } f = \nabla f \quad (2.4-11)$$

resp. analyticky

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{alebo} \quad f_{,i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-12)$$

Výraz (2.4-11) je trojica čísiel $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$ a ∇ je symbolické označenie Nabla - operátora.

Chceme dokázať, že (2.4-11) je vektor. Za tým účelom predpokladajme, že v natočenom súradnicovom systéme x_i' bude grad f analyticky zadaný ako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-13)$$

Podľa reťazcového pravidla diferenciálneho počtu bude

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} \frac{\partial x_1'}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2'}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3'} \frac{\partial x_3'}{\partial x_i} \quad (2.4-14)$$

a použitím sumačného pravidla máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \quad (2.4-15)$$

pričom zrejme platí rovnosť $x_i = x_i(x_1', x_2', x_3')$, resp. $x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$.
Pre náš prípad

$$x_i' = a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4-16)$$

Z (2.4-15) dostaneme

$$\frac{\partial x_j'}{\partial x_i} = a_{ij} \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = a_{ji} \quad (2.4-17)$$

a po dosadení do (2.4-15) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j'} \quad (2.4-18)$$

Rovnica (2.4-18) predstavuje transformačný zákon pre trojicu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Vzhľadom na to ∇f je viacej ako usporiadaná trojica, je to vektor. Túto skutočnosť možno s výhodou využiť pri narábaní s týmto operátorom.

Predpokladáme, že čitateľ je dobre oboznámený so základmi vektorového počtu, preto tu uvedieme len krátky prehľad vektorovej analýzy.

Dva vektory sa sebe rovnajú, ak majú rovnaký smer a veľkosť. Jednotkovým vektorom je vektor, ktorého veľkosť (absolútna hodnota) sa rovná jednej. Nulový vektor označený ako $\mathbf{0}$ je vektor s veľkosťou rovnou nule. Absolútnu hodnotu vektora s počiatkom v bode A a s koncom v bode B označíme $|\overline{AB}|$.

Súčet dvoch vektorov je iný vektor daný "parallelogramovým" zákonom, čo môžeme písať napríklad ako $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Vektorový súčet je komutatívny a asociatívny.

Vynásobením vektora číslom dostaneme iný vektor. Ak k je kladné reálne číslo, $k\overline{a}$ reprezentuje vektor majúci rovnaký smer ako vektor \overline{a} a k -násobnú absolútnu hodnotu. Ak je k negatívne, $k\overline{a}$ je vektor, ktorého absolútna hodnota je k krát väčšia a ktorého smer je opačný k smeru vektora \overline{a} . Ak $k=0$, máme $0\overline{a} = \mathbf{0}$ - nulový vektor.

Rozdiel vektorov môžeme definovať

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$$

Ak \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} sú jednotkové vektory v smere kladných osí x , y , z , dá sa dokázať, že každý vektor v priestore môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia \overline{i} , \overline{j} a \overline{k} . Ak koncové body daného vektora \overline{u} majú súradnice (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) , môžeme písať

$$\overline{u} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k} = u_x \overline{i} + u_y \overline{j} + u_z \overline{k}$$

kde u_x, u_y, u_z nazývame zložkami vektora \overline{u} v smere \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} . Absolútna hodnota $|\overline{u}|$ je potom

$$|\overline{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

pričom $\overline{u} = \mathbf{0}$, ako $u_x = u_y = u_z = 0$

Skalárny súčin vektorov \overline{u} a \overline{v} , označený $\overline{u} \cdot \overline{v}$, je definovaný vzťahom

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| |\overline{v}| \cos \theta \quad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$$

kde θ je uhol medzi zadanými vektormi. Skalárny súčin nám reprezentuje súčin absolútnej hodnoty jedného vektora a zložky druhého vektora v smere vektora prvého. Ak

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

potom skalárny súčin týchto vektorov možno vyjadriť v zložkovom tvare

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

resp. v zmysle sumačného pravidla

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i \quad i = 1, 2, 3$$

Zatiaľ čo skalárny súčin dvoch vektorov je skalár, vektorovým súčinom dvoch vektorov \vec{u} a \vec{v} je vektor \vec{w} , a budeme písať $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Absolútna hodnota $|\vec{w}|$ je definovaná ako

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \quad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$$

kde θ je uhol medzi \vec{u} a \vec{v} , a smer \vec{w} je kolmý na rovinu určenú vektormi \vec{u} a \vec{v} s tým, že vektory \vec{u} , \vec{v} a \vec{w} tvoria pravotočivý systém. Vektorový súčin spĺňa nasledujúce relácie:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$k\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times k\vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

Použijúc tieto závislosti, možno vektorový súčin vyjadriť v závislosti od vektorových zložiek

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

alebo symbolicky

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Cieľom vektorovej analýzy je zaviesť označenie (hrubotlačené písmená, alebo symboly so šípkami), ktoré poukazuje na geometrický a fyzikálny význam symbolov a vyjadruje fyzikálnu alebo geometrickú realitu rovnicou, ktorá je nezávislá od pozorovateľa. Napríklad, ak máme časticu, na ktorú pôsobia sily $\vec{F}^{(1)}, \vec{F}^{(2)}, \dots, \vec{F}^{(n)}$, potom podmienka rovnováhy pre túto časticu bude

$$\vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \dots + \vec{F}^{(n)} = \vec{0}$$

Táto rovnica hovorí o vektorovej rovnici. Túto rovnicu netreba ďalej rozvíjať, ak nás prípadne nezaujímajú zložky jednotlivých síl.

Napriek tomu, že vektorové rovnice sú veľmi elegantné, nie vždy sa píšu v takomto tvare, ale sa napíšu v analytickom (zložkovom) tvare. Ak si zvolíme vhodný súradnicový systém O-xyz, podmienku rovnováhy síl môžeme napísať ako

$$\sum_{i=1}^n F_x^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_y^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_z^{(i)} = 0$$

kde $F_x^{(i)}, F_y^{(i)}$ a $F_z^{(i)}$ sú zložkami vektora $\vec{F}^{(i)}$ vzhľadom na zvolený súradnicový systém.

Prečo sa niekedy uprednostňuje analytická forma zápisu? My chceme vyjadriť fyzikálne veličiny pomocou čísel. Aby sme špecifikovali silu \vec{F} , je obvyklé ju definovať tromi zložkami F_x, F_y, F_z . V praktických výpočtoch sa preto analytická forma zápisu rovníc oveľa častejšie používa.

2.5. DYÁDY A TENZORY VIŠŠIEHO STUPŇA, ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S TENZORMI

Dyádami (resp. tenzormi druhého stupňa) sa napr. stretáme, keď tvoríme dyadický (vektorový) súčin dvoch vektorov. Na úvod predpokladajme, že vektory u_i a v_i spojíme navzájom dyadicky, t.j. podľa maticového počtu

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \quad (2.5-1)$$

čiže vpravo stojacú maticu. Označme jej elementy ako

$$t_{ij} = u_i v_j \quad (2.5-2)$$

čo môžeme symbolicky zapísať

$$T = (t_{ij})$$

Podľa predpokladu sú u_i a v_j vektory. Môžeme preto pre ne použiť transformačný zákon (2.4-7), takže z (2.5-2) dostaneme

$$t_{ij} = a_{ki} u'_k a_{lj} v'_l = a_{ki} a_{lj} u'_k v'_l \quad (2.5-3)$$

V zhode s (2.5-2) môžeme v natočenom súradnicovom systéme písať

$$u'_k v'_l = t'_{kl} \quad (2.5-4)$$

Po zohľadnení (2.4-4) vo vzťahu (2.5-3) dostaneme transformačnú rovnicu

$$t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl} \quad (2.5-5)$$

Otočením postupu máme

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl} \quad (2.5-6)$$

Teraz vidíme, že symbolom T označené a dyadickým súčinom vytvorené zobrazenie nie je len usporiadanou maticou (3x3), ale usporiadaná číselná schéma ktorá zobrazuje tenzor druhého rádu. Pre kartézské tenzory v trojrozmernom priestore stanovíme nasledujúcu definíciu.

Dyády sú pomocou (3x3) matice znázorniteľné, usporiadané číselné schémy s $3^2 = 9$ elementmi. Tie majú vzhľadom na pôvodný kartézsky súradnicový systém x_i , $i = 1, 2, 3$ komponenty t_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, a vzhľadom na natočený súradnicový systém x'_i , $i = 1, 2, 3$ komponenty t'_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, pričom medzi t_{ij} a t'_{ij} platia transformačné vzťahy (2.5-5), resp. (2.5-6).

Je vidieť, že $t'_{kl} = u'_k v'_l$ je lineárnou homogénnou funkciou deviatich nečiar-kovaných veličín $t_{ij} = u_i v_j$. Zároveň si všimnime, že na pravej strane rovnice (2.5-6) máme súčin dvoch smerových kosínusov, a ďalej, že pri transformácii je $u'_k v'_l$ jedným celkom, t.j. stále je vo forme súčinu jednej zložky vektora u'_k a jednej zložky vektora v'_l . Všimnime si ešte, že indexy veličín t_{ij} sa vzťahujú k dvom osiam tej istej súradnicovej sústavy. Naproti tomu smerové kosínusy a_{ij} , i keď ich píšeme s dvoma indexami, nie sú zložkami tenzora druhého stupňa, lebo ich indexy sa vzťahujú k osiam dvoch rôznych súradnicových sústav.

To však v týchto skriptách bude jediná výnimka, že veličina označená dvoma indexami nie je tenzorom druhého stupňa.

Dyády budeme symbolicky označovať ako T , pomocou matice ako

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

a analyticky pomocou indexovaného zápisu t_{ij} , B_{ij} , T_{ij} , Obdobným spôsobom definujeme tenzory vyššieho stupňa, tzv. polyády. Veličinám $t_{ijk...n}$, definovaným v určitom bode trojrozmerného priestoru, ktorých je 3^n a majú n - indexov i, j, k, \dots, n , všeobecne hovoríme zložky tenzora n -tého stupňa (alebo jednoducho tenzory n -tého rádu), ak pri ortogonálnej transformácii súradníc sa transformujú podľa zákona

$$t_{ijk...n} = a_{oi} a_{pj} a_{qk} \dots a_{nn} t'_{opq...n} \quad (2.5-7)$$

$$t'_{ijk...n} = a_{io} a_{jp} a_{kq} \dots a_{nn} t_{opq...n}$$

Napríklad pre tenzor štvrtého rádu máme

$$t_{ijkl} = a_{oi} a_{pj} a_{qk} a_{rl} t'_{opqrl} \quad (2.5-8)$$

$$t'_{ijkl} = a_{io} a_{jp} a_{kq} a_{lr} t_{opqrl}$$

Vo všeobecnosti má tenzor štvrtého rádu $3^4 = 81$ nezávislých zložiek.

Základnými operáciami tenzorového počtu sú zlučovanie, násobenie a zúženie.

Zlučovať môžeme len tenzory rovnakého stupňa. Výsledkom zlučenia je tenzor toho istého stupňa. Ak sú A_{ijk} a B_{ijk} tenzormi tretieho stupňa, potom

$$C_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk} \quad (2.5-9)$$

$$D_{ijk} = A_{ijk} - B_{ijk}$$

pričom C_{ijk} a D_{ijk} sú tiež tenzormi tretieho stupňa.

Násobením dvoch tenzorov dostaneme tenzor, ktorého stupeň sa rovná súčtu stupňov oboch tenzorov.

Uvažujme tenzor druhého a tretieho stupňa A_{ij} a B_{klm} . Pre ich transformáciu platí

$$A'_{ij} = a_{in} a_{jp} A_{np} \quad B'_{klm} = a_{kr} a_{ls} a_{mt} B_{rst}$$

Vzájomným vynásobením všetkých zložiek oboch tenzorov dostaneme 3^5 veličín $A'_{ij} B'_{klm}$. Ich transformačný zákon je

$$A'_{ij} B'_{klm} = a_{in} a_{jp} a_{kr} a_{ls} a_{mt} A_{np} B_{rst} \quad (2.5-10)$$

Z (2.5-10) vidieť, že veličiny

$$C_{ijklm} = A_{ij} B_{klm} \quad (2.5-11)$$

sú zložkami tenzora piateho rádu.

Ďalšou dôležitou operáciou je zúženie tenzora. Majme tenzor štvrtého stupňa T_{ijkl} . V čiarkovanom systéme platí

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} T_{mnr} \quad (2.5-12)$$

Položme teraz rovnosť indexov $k = j$ a urobme sumáciu cez index j . V našej symbolike to znamená písať j miesto k . Potom dostaneme

$$\begin{aligned} T'_{ijjl} &= a_{im} a_{jn} a_{jr} a_{ls} T_{mnr} = a_{im} \delta_{nr} a_{ls} T_{mnr} = \\ &= a_{im} a_{ls} \delta_{nr} T_{mnr} = a_{im} a_{ls} T_{ms} \end{aligned} \quad (2.5-13)$$

pričom sme využili vlastnosti Kroneckerovej delty pri jej aplikácii na tenzor $\delta_{nr} T_{mnr} = T_{ms}$.

Z tohto postupu vidieť, že T'_{ijjl} sa správa ako tenzor druhého stupňa. Pretože pôvodný stupeň tenzora bol 4, znížil sa teraz na 2.

Operácii, pri ktorej položíme dva indexy sebe rovné a podľa nich sčítame, nazývame zúžením tenzora. Súhrnne môžeme povedať, že zúžením znížime stupeň tenzora o 2 stupne.

Ako vidíme zo zúženého tenzora (2.5-13), stupeň tenzora určuje počet voľných indexov. Sčítacie indexy, ktoré sa vyskytujú vždy dvakrát, neovplyvňujú stupeň tenzora. Odtiaľ plynie napríklad, že tenzory

$$T_{ijkjll}, \quad R_{ijk} S_{jll}, \quad P_{ik}$$

sú rôzne tenzory rovnakého stupňa (v našom prípade druhého). Ak majú mať rovnice fyzikálny význam, musia byť rozmerovo správne, t.j. rozmer všetkých členov na oboch stranách rovnice musí byť rovnaký. Táto požiadavka nám potom dovoľuje stanoviť rozmer veličiny, ktorú novo zavádzame. Podobne je to s indexami v tenzorovej rovnici. Po vynechaní sumačných indexov musia byť ostatné (voľné) indexy rovnaké v celej rovnici, lebo tým máme zaručené, že uvažovaná rovnica ostane platná i vo všetkých transformovaných sústavách.

V rovnici (2.5-13) sme aplikovali tenzor δ na tenzor T . Pre jednoduchosť uvažujme vektory A_i a C_j , ako aj tenzor druhého rádu t_{ij} , a uvažujme ich spojenie vo forme tenzorového súčinu

$$C_i = t_{ij} A_j \quad (2.5-14)$$

Vo vzťahu (2.5-14) tenzor t_{ij} pôsobí na vektor A_j a vytvára nový vektor C_i . Symbolicky zapísané máme

$$TA = C$$

Vzhľadom na vlastnosti Kroneckerovej delty môžeme potom písať

$$\delta A = A$$

pričom je tu jasne vidieť jednotkovú, alebo tiež substitučnú vlastnosť tenzora δ , ktorého aplikáciou na vektor A dostaneme ten istý vektor. Dá sa ukázať, že tenzor je lineárnym operátorom, pretože spĺňa obidve podmienky

$$T(A + B) = TA + TB \quad (2.5-15)$$

$$T(mA) = mTA$$

ktoré sú charakteristické pre lineárne operátory. Pritom sú A a B vektory a m je skalár.

Teraz ukážeme, že prostredníctvom operácie TA dostaneme nový vektor C . Použijeme pritom indexovaný zápis, pričom rozpíšeme pravú stranu (2.5-14) pomocou transformačných vzťahov pre veličiny v čiarkovanom súradnicovom systéme

$$C_i = a_{ki} a_{lj} t'_{kl} a_{mj} A'_m = a_{ki} a_{lj} a_{mj} t'_{kl} A'_m$$

Platí však, že $a_{lj} a_{mj} = \delta_{lm}$, takže potom môžeme písať

$$C_i = a_{ki} \delta_{lm} t'_{kl} A'_m = a_{ki} t'_{km} A'_m$$

Po zohľadnení $t'_{km} A'_m = C'_k$, dostaneme nakoniec

$$C_i = a_{ki} C'_k$$

čo predstavuje transformačný zákon pre vektory. Na ľavej strane (2.5-14) stojí skutočne vektor, t.j. pôsobením operátora T na vektor A sme dostali opäť vektor, konkrétne vektor C . V ďalšom postupe tejto kapitoly odpovieme na otázku, ako dokážeme, alebo zistíme, či nami skúmaná veličina má tenzorový charakter.

Nech je daná rovnica

$$X_{ik} A_k = B_i \quad (2.5-16)$$

kde A_k a B_i sú zložkami dvoch vektorov. Máme rozhodnúť, či X_{ik} je tenzorom. O tenzorovom charaktere však rozhodujú predtým definované transformačné zákony. V čiarkovanom súradnicovom systéme môžeme písať

$$X'_{ik} A'_k = B'_i \quad (2.5-17)$$

Transformačný zákon pre B'_i má tvar

$$B'_i = a_{il} B_l \quad (2.5-18)$$

Nahradíme B_l výrazom $X_{lm} A_m$, ktorý plynie z rovnice (2.5-16), a tiež nech $A_m = a_{km} A'_k$. Po dosadení do (2.5-18) máme

$$B'_i = a_{il} X_{lm} A_m = a_{il} a_{km} X_{lm} A'_k$$

Po dosadení do (2.5-17) dostaneme

$$X'_{ik} A'_k = a_{il} a_{km} X_{lm} A'_k$$

čo môžeme tiež napísať v tvare

$$(X'_{ik} - a_{il} a_{km} X_{lm}) A'_k = 0$$

Vzhľadom na to, že zložky vektora A'_k môžeme považovať za ľubovoľné, musí byť

$$X'_{ik} = a_{il} a_{km} X_{lm}$$

čo je vlastne transformačný zákon pre tenzor druhého stupňa Pravidlo, ktorým dokazujeme tenzorový charakter nejakej veličiny, nazývame Quocientové pravidlo.

2.6. DERIVÁCIA TENZOROV

Uvažujme v trojrozmernom euklidovskom priestore oblasť, v ktorej je definovaná skalárna veličina f , t.j. také fyzikálna veličina, že každému bodu oblasti je priradená určitá jej hodnota. Môže to byť napr. teplota, potenciál, ... Veličina f bude zrejme funkciou súradníc x_i uvažovanej bodu P , t.j. $f = f(x_i)$. Keď si zvolíme inú súradnicovú sústavu, bude f funkciou nových súradníc x'_j toho istého bodu, ale hodnota skalárnej funkcie ostáva nezmenená, t.j.

$$f(x_i) = f(x'_j) \quad (2.6-1)$$

Ak sa vzťahuje platnosť tejto rovnice na každý bod uvažovanej oblasti, nazývame funkciu $f(x_i)$ skalárnou funkciou polohy a oblasť, na ktorú sa vzťahuje, skalárnym polom. Keď nejaká veličina nezávisí od zmeny vzťažného súradnicového systému, hovoríme, že je veličinou invariantnou. Skalár je teda invariantná veličina.

Vo vlastnosti skalárnej funkcie polohy $f(x_i)$ nás zaujíma tenzorový charakter jej prvých derivácií podľa súradníc. V kapitole 2.4 sme dokázali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ji} \frac{\partial f}{\partial x'_j} = \text{grad } f = \nabla f \quad (2.6-2)$$

nie je len usporiadaná trojica, ale je tenzorom prvého stupňa, čiže vektorom, ktorú tiež nazývame gradientom funkcie f . Operátor $\nabla \equiv (\partial, i; i = 1, 2, 3)$ je tzv. Nabla operátor a je operátorom lineárnym. Ak veličina, ktorá nám popisuje vlastnosti poľa vektorom (napr. rýchlosť prúdenia kvapaliny, ...), hovoríme o vektorovej funkcii polohy a vektorovom poli. Tri zložky vektorovej funkcie, ktoré označíme u_i , sú funkciami polohy, t.j. $u_i = u_i(x_j)$. Podobne, ako v prípade skalárnej funkcie, aj tu nás budú zaujímať prvé parciálne derivácie zložiek vektorovej funkcie podľa súradníc a ich transformačné vlastnosti.

Nech C_i je konštantný vektor v celom obore, kde je definované u_i . Utvoríme teda skalárnu funkciu $f = u_i C_i$. Jej úplný diferenciál bude tiež skalárom

$$df = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i C_i) dx_j$$

Vzhľadom na to, že C_i je konštantou, potom

$$df = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} C_i dx_j \quad (2.6-3)$$

Ak však má byť aj pravá strana rovnice (2.6-3) skalárom, musí byť $u_{i,j}$ tenzorom, lebo C_i a dx_j sú vektory.

Tento výsledok môžeme dostať aj priamo transformáciou výrazu $u_{i,j}$. Budeme pritom vychádzať zo vzťahu v čiarkovanej súradnicovej sústave $u'_{i,j}$, ale u'_i musí byť vyjadrené ako funkcia súradníc nečiarkovaných. Keďže u'_i sú zložkami vektora, v zmysle transformačného zákona bude $u'_i = a_{ik} u_k$, a pre jeho deriváciu platí

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = u'_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_1} (a_{ik} u_k) \frac{\partial x_1}{\partial x'_j} = a_{ik} a_{j1} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} = a_{ik} a_{j1} u_{k,1} \quad (2.6-4)$$

Konečný výraz v (2.6-4) je známy transformačný vzťah pre tenzory druhého stupňa (využili sme, že ak $x_1 = a_{j1} x'_j$, potom $\frac{\partial x_1}{\partial x'_j} = a_{j1}$). Všimnime si zaujímavý jav, ktorý vyplýva z rovníc (2.6-3) a (2.6-4). Z prvej rovnice je zrejmé, že derivácia skalárnej funkcie podľa súradnice je zložkou vektora, a z druhej, že derivácia zložky vektorovej funkcie podľa súradnice je zložkou tenzora druhého stupňa. Toto pravidlo platí všeobecne, t.j. deriváciou kartézskeho tenzora podľa súradníc sa jeho stupeň o jednotku zvýši. Analyticky zapísané

$$\frac{\partial T_{ijkl\dots n}}{\partial x_o} = S_{ijkl\dots no}$$

Zúžením tenzora $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ na $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ dostaneme výraz, ktorý zodpovedá skalárnemu súčinu dvoch vektorov. Je to skalár a nazývame ho divergencia \bar{u} (označenie $\text{div } \bar{u}$). Skalárny charakter potvrdíme tak, že dokážeme jeho invariantnosť

$$\text{div } \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a_{ki} a_{li} \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} = \delta_{kl} \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} = \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} \quad (2.6-5)$$

Z (2.6-5) vidieť, že divergencia mení pole vektorové na pole skalárne

$$\text{div } \bar{u} = u_{i,i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

Ak vektor \bar{u} je gradientom nejakého skaláru, t.j. ak

$$u_i = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

potom

$$\text{div grad } f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \Delta f \quad (2.6-6)$$

kde

$$\Delta = \partial^2_{i,i} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (2.6-7)$$

je Laplaceov operátor v kartézskych súradniciach.

Tak isto ako sme definovali výraz $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ zúžením $u_{i,j}$, ktorý zodpovedá skalárnemu súčinu dvoch vektorov, môžeme definovať diferenciálnu operáciu analógickú s vektorovým súčinom dvoch vektorov, ktorých výsledkom je znovu vektor. Túto operáciu nazývame rotácia a označujeme ju $\text{rot } \bar{u}$.

Pre i-tú zložku, ktorú označíme $\text{rot}_i \bar{u}$, máme

$$\text{rot}_i \bar{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (2.6-8)$$

Napr. pre $i = 2$ z (2.6-8) dostaneme

$$\text{rot}_2 \bar{u} = e_{2jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = e_{21k} u_{k,1} + e_{22k} u_{k,2} + e_{23k} u_{k,3} = \dots$$

Ohľadnením vlastností permutačného symbolu po konečnej úprave dostaneme

$$\text{rot}_2 \bar{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = u_{1,3} - u_{3,1}$$

Operáciu rotácia vektora \bar{u} môžeme tiež písať v tvare determinantu

$$(\nabla \times \bar{u}) = \text{rot } \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(u_{3,2} - u_{2,3}) + \bar{j}(u_{1,3} - u_{3,1}) + \bar{k}(u_{2,1} - u_{1,2})$$

v ktorom $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osí $x_i, i=1,2,3$

Odtiaľ máme

$$\text{rot}_1 \bar{u} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = u_{3,2} - u_{2,3}$$

$$\text{rot}_2 \bar{u} = u_{1,3} - u_{3,1}$$

$$\text{rot}_3 \bar{u} = u_{2,1} - u_{1,2}$$

Aplikáciou operácie divergencie na $\text{rot } \bar{u}$ dostaneme

$$\text{div}(\text{rot } \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = e_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= e_{ijk} u_{k,ij} = 0 \quad (2.6-9)$$

lebo ak zameníme indexy i a j , výraz $u_{k,ij}$ sa nezmení (za predpokladu spojitých druhých derivácií vektorovej funkcie u_k), ale e_{ijk} zmení znamienko ($e_{ijk} = -e_{jik}$), čo v konečnom dôsledku spôsobí vyrušenie všetkých nenulových členov.

Podobne, ak je $\bar{u} = \text{grad } f$, dosadením do (2.6-8) dostaneme

$$\text{rot}_i \bar{u} = \text{rot}_i(\text{grad } f) = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = e_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (2.6-10)$$

pre každé i z rovnakého dôvodu ako v (2.6-9).

Náverom uveďme, že derivovaním tenzora podľa skalárnej premennej zostáva tenzorový charakter derivovanej veličiny nezmenený. Všetky derivácie u tenzorov tvoríme obvyklým spôsobom, ako pri derivovaní obyčajnej skalárnej funkcie.

V tabuľke 2.1 je uvedené označenie pre najčastejšie používané operácie skalárneho a vektorového poľa.

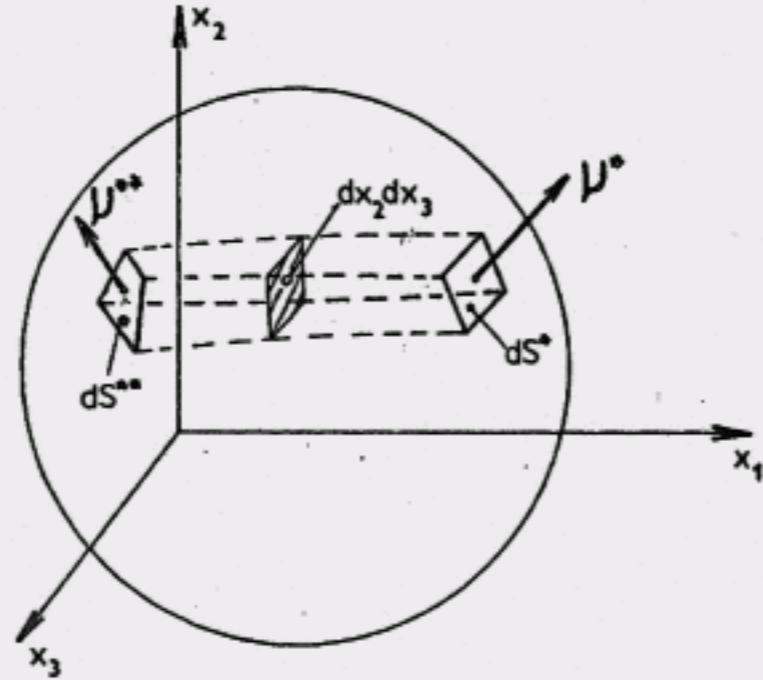
Tabuľka 2.1

Symbolické označenie	Indexovaný zápis	Stup. tenz.
v, \bar{v} (vektor)	v_i	1
$\lambda = \bar{u} \cdot \bar{v}, \bar{\lambda} = \bar{u} \cdot \bar{v}$ (skal.súčin)	$u_i v_i$	0
$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}, \bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ (vekt.súčin)	$w_i = e_{ijk} u_j v_k$	1
$\text{grad } f = \nabla f$ (gradient skal.poľa)	$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$	1
$\text{grad } \bar{v}$ (gradient vektora)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$	2
$\text{div } \bar{v} = \nabla \cdot \bar{v}$ (divergencia vekt)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$	0
$\text{rot } \bar{v} = \nabla \times \bar{v}$ (rotácia vektora)	$e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = e_{ijk} v_{k,j}$	1
$\nabla^2 \bar{v} = \nabla \cdot \nabla \bar{v} = \Delta \bar{v}$ (Laplaceov op.)	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} = v_{j,ii}$	1

2.7 GAUSOVA VETA

Táto veta má pre veľa úvah v oblasti mechaniky kontinua fundamentálny význam. Gausova veta, známa tiež pod názvom Greenov teorém, premieňa objemový integrál na plošný a naopak.

Uvažujme konvexnú oblasť v trojrozmernom súradnicovom systéme s objemom V a s povrchom S , ktorý sa skladá z konečného počtu častí povrchov, na ktorých vonkajšie normály tvoria spojité vektorové pole (ako je tomu napr. na obr. 2.4). Takúto oblasť nazývame regulárnou oblasťou.



Obr. 2.4
Gausova veta

Ďalej, nech funkcia $A(x_1, x_2, x_3)$ je definovaná vo vnútri objemu V ako aj na povrchu S . Uvažujme objemový integrál

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

Integrandom je parciálna derivácia $A(x_1)$ podľa x_1 . Po integrácii vzhľadom na x_1 pozdĺž priameho elementu L dostaneme

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_S [A]_{A^{**}}^{A^*} dx_2 dx_3 = \\ &= \iint_S (A^* - A^{**}) dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (2.7-1)$$

kde A^* a A^{**} sú hodnoty funkcie A na povrchu dS na ľavej a pravej strane segmentu L , rovnobežne s osou x_1 . Plošný integrál na pravej strane rovnice (2.7-1) sa dá upraviť nasledujúcim spôsobom. Faktory $+dx_2 dx_3$ a $-dx_2 dx_3$ sú projekcie plôch dS^* a dS^{**} koncov segmentu do roviny $x_2 x_3$. Nech $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$

je jednotkový vektor v smere vonkajšej normály plochy S . Pre element podľa obr. 2.4 platí, že $\nu_1^* = \cos(x_1, \nu^*)$ je pozitívne a $\nu_1^{**} = \cos(x_1, \nu^{**})$ je negatívne. V tomto prípade potom bude $dx_2 dx_3 = \nu_1^* dS^*$ na pravej a $-dx_2 dx_3 = -\nu_1^{**} dS^{**}$ na ľavej strane segmentu L . Potom môžeme písať

$$\iint_S (A^* dx_2 dx_3 - A^{**} dx_2 dx_3) = \iint_S (A^* \nu_1^* dS^* + A^{**} \nu_1^{**} dS^{**}) \quad (2.7-2)$$

Po vynechaní znakov pre dvojitý integrál môžeme (2.7-2) skrátene písať $\int_S A \nu_1 dS$. Podobným zohľadnením ľavej strany (2.7-1) dostaneme

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dV = \int_S A \nu_1 dS$$

kde dV a dS označujú elementárne časti z V a S .

Novoobecním tohto postupu dostaneme Gausovu vetu

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A \nu_i dS \quad (2.7-3)$$

Táto veta platí pre každú konvexnú regulárnu oblasť, alebo pre oblasť, ktorú možno rozdeliť na konečný počet konvexných regulárnych oblastí.

Uvažujme teraz tenzorové pole $A_{jkl...}$. Nech oblasť V s povrchom S je definovaným oborom $A_{jkl...}$. Nech každá zložka $A_{jkl...}$ je spojitou diferencovateľná vo V . Potom rovnica (2.7-3) je aplikovateľná na každú zložku tenzora

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl...n} dV = \int_S \nu_i A_{jkl...n} dS \quad (2.7-4)$$

On je jeden z veľmi častých teorémov používaných v aplikovanej matematike. V literatúre možno sa s ním stretnúť s rôznym pomenovaním podľa jeho jednotlivých autorov:

- = Lagrange (r. 1762);
- = Gauss (r. 1813);
- = Green (r. 1828);
- = Ostrogradskij (r. 1831).

Najznámejšie názvy sú však Gaussova alebo Greenova veta. Teraz si ukážeme niekoľko aplikácií, prípadne rôzne tvary Gaussovej vety

a) Nech v_i je vektor. Potom v zhode s (2.7-4) môžeme priradiť $A_i = v_i$, a

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = \int_S v_i \nu_i dS \quad (2.7-5)$$

Ak preznačíme súradnice x_i , $i = 1, 2, 3$ na x, y, z a v_i , $i = 1, 2, 3$ na u, v, w , smery normály ν_i , $i = 1, 2, 3$ na l, m, n , potom (2.7-5) dostaneme v tvare

$$\iiint_V \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{v}} dx dy dz = \iint_S \underbrace{(lu + mv + nw)}_{\vec{\nu} \cdot \vec{v}} dS \quad (2.7-6)$$

Zohľadnením, že $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v}$ a $v_i \nu_i$ je skalárny súčin $\vec{v} \cdot \vec{\nu}$, dostaneme

Gaussovu vetu v inom populárnom tvare

$$\int_V \text{div } \vec{v} dV = \int_S \vec{v} \cdot \vec{\nu} dS \quad (2.7-7)$$

(2.7-7) a (2.7-6) sú najznámejšie tvary Gaussovej vety.

b) Ak A predstavuje potenciálnu funkciu Φ , potom Gaussova veta má obvyklý tvar

$$\int_V \text{grad } \Phi dV = \int_S \nu \Phi dS$$

c) Ak e_{ijk} je permutačný tenzor, potom

$$\int_V e_{ijk} u_{k,j} dV = e_{ijk} \int_V u_{k,j} dV = e_{ijk} \int_S u_k \nu_j dS = \int_S e_{ijk} u_k \nu_j dS$$

Vzhľadom na označenie v tabuľke 2.1 môžeme ďalej symbolicky písať

$$\int_V \text{rot } \vec{u} dV = \int_S \vec{\nu} \times \vec{u} dS$$

2.8 IZOTROPICKÉ TENZORY

Medzi tenzormi existujú také, ktoré sú invariantné k zmene vzťažného súradnicového systému. Nech v počiatočnom súradnicovom systéme má napr. tenzor tretieho stupňa zložky t_{ijk} a v natočenom t'_{ijk} . Ak $t_{ijk} = t'_{ijk}$, potom t_{ijk} je izotropickým tenzorom. Z izotropických tenzorov sa najčastejšie používajú δ a ϵ tenzory, ktoré sme v kapitole 2.1 pomenovali jednotkovým (substitučným) tenzorom (tiež Kroneckerova delta), resp. permutačným symbolom. Tenzor δ je tenzorom druhého rádu a jeho elementy sú Kroneckerove symboly δ_{ij} , pre ktoré platí

$$\delta = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symbolicky budeme tento tenzor označovať δ . Analytický zápis je δ_{ij} , pričom musíme dbať na to, či δ_{ij} je Kroneckerov symbol ako zložka tenzora alebo tenzor sám. Ak napr. položíme $j = i$, potom $\delta_{ii} = 1$ ak i je nejaké pevné číslo, povedzme $i = 2$. Ale keď δ_{ii} je mienený ako tenzor, po použití sumačného pravidla dostaneme

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

Keď δ - tenzor aplikujeme ako lineárny operátor na vektor \vec{A} , dostaneme

$$\delta_{ij} A_j = A_i \quad (2.8-1)$$

čo je vlastne vektor sám. Napríklad pre $i = 1$ máme

$$A_1 = \delta_{1j} A_j = \delta_{11} A_1 + \delta_{12} A_2 + \delta_{13} A_3 = \delta_{11} A_1 = A_1$$

Táto skutočnosť viedla k pomenovaniu tohto tenzora jednotkovým alebo substitučným.

V kapitole 2.3 sme ukázali, že

$$\delta_{ij} = a_{ik} a_{jk} = a_{ki} a_{kj} = \delta'_{ij}$$

$$\delta_{ij} = a_{ik} a_{jk} = a_{ki} a_{kj} = \delta'_{ij}$$

pretože ak a_{ij} sú členy transformačnej matice pri natočení súradnicového systému, potom

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jk} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl}$$

čo je transformačný zákon pre tenzory druhého rádu. Pritom sme využili vlastnosť tenzora ako lineárneho operátora, t.j.

$$a_{jk} = \delta_{kl} a_{jl}$$

Rovnosť $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ potvrdzuje izotropickú vlastnosť substitučného tenzora

Druhým, pre výpočty veľmi dôležitým tenzorom, je e tenzor. Je tenzorom tretieho stupňa, teda triáda, ako sa tiež zvykne hovoriť tenzorom tretieho stupňa, a je stanovený

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{keď sa dva indexy zhodujú,} \\ +1, & \text{keď sú indexy párnymi permutáciami čísel} \\ & 1,2,3 \\ -1, & \text{keď sú indexy nepárnymi permutáciami} \\ & \text{čísel } 1,2,3 \end{cases} \quad (2.8-3)$$

Teraz dokážeme, že skutočne ide o tenzor. Za tým cieľom musíme ukázať, že e_{ijk} sa správa podľa transformačných zákonov

$$\begin{aligned} e'_{ijk} &= a_{il} a_{jm} a_{kn} e_{lmn} \\ e_{ijk} &= a_{li} a_{mj} a_{nk} e'_{lmn} \end{aligned} \quad (2.8-4)$$

Rozpísaním výrazu $a_{il} a_{jm} a_{kn} e_{lmn}$ pomocou sumačného pravidla dostaneme

$$a_{il} a_{jm} a_{kn} e_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = a_{i1} a_{j2} a_{k3} + a_{j1} a_{k2} a_{i3} + \dots$$

Pre tento determinant platí, že pri dvoch rovnakých číslach, t.j. keď dva z indexov i, j, k sú rovnaké, je rovný nule, pre i, j, k ako párne permutácie 1,2,3 predstavuje transformačnú maticu a je rovný 1, pri nepárnych permutáciách mení svoje znamienko a je rovný -1. V dôsledku toho môžeme písať

$$a_{il} a_{jm} a_{kn} e_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = e_{ijk}$$

Vzhľadom na izotropickú vlastnosť $e_{ijk} = e'_{ijk}$ môžeme v konečnom dôsledku písať

$$a_{il} a_{jm} a_{kn} e_{lmn} = e'_{ijk}$$

čo súhlasí s transformačným zákonom (2.8-3).

e tenzor slúži okrem iného tiež na analytické vyjadrenie vektorového súčinu dvoch vektorov A_j a B_k

$$C_i = e_{ijk} A_j B_k \quad (2.8-4)$$

čo je totožné so symbolickým zápisom vektorového súčinu

$$C = A \times B$$

Teraz teraz dokážať, že na ľavej strane rovnice (2.8-4) je vektor. Použitím transformačných vzťahov pre vektory $A_j = a_{lj} A'_l$, $B_k = a_{mk} B'_m$ dostaneme z pravej strany (2.8-4)

$$C_i = e_{ijk} A_j B_k = e_{ijk} a_{lj} A'_l a_{mk} B'_m$$

Vynásobením oboch strán tejto rovnice s a_{ni} dostaneme po jednoduchej úprave

$$a_{ni} C_i = \underbrace{e_{ijk} a_{ni} a_{lj} a_{mk}}_{e'_{nlm}} A'_l B'_m = e'_{nlm} A'_l B'_m \quad (2.8-5)$$

Keby sme výraz (2.8-4) napísali pre čiarkované veličiny, dostali by sme

$$C'_n = e'_{nlm} A'_l B'_m \quad (2.8-6)$$

a porovnaním s (2.8-5) máme

$$a_{ni} C_i = C'_n \quad (2.8-7)$$

čím sme dokázali, že C_i je vektorom.

Pomocou tenzora e_{ijk} teraz vyjadríme zmiešaný súčin troch vektorov $A, (B \times C)$. Uvažujme vektory A_i a $D_i = e_{ijk} B_j C_k$ a spolu ich skalárne vynásobíme, t.j. rozpišeme $A_i D_i$

$$A_i D_i = A_i e_{ijk} B_j C_k = e_{ijk} A_i B_j C_k$$

Po sumácii

$$\begin{aligned} e_{ijk} A_i B_j C_k &= e_{123} A_1 B_2 C_3 + e_{231} A_2 B_3 C_1 + e_{312} A_3 B_1 C_2 + \\ &+ e_{321} A_3 B_2 C_1 + e_{213} A_2 B_1 C_3 + e_{132} A_1 B_3 C_2 = \\ &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - \\ &- A_3 B_2 C_1 - A_2 B_1 C_3 - A_1 B_3 C_2 \end{aligned}$$

čo je totožný výsledok so zmiešaným súčinom troch vektorov. Na základe toho budeme písať

$$A \cdot (B \times C) = e_{ijk} A_i B_j C_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (2.8-8)$$

Na záver bez dôkazu poukážeme na dôležitý vzťah medzi tenzormi δ a e . Ich vzájomnú súvislosť

$$e_{ijk} e_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks} \quad (2.8-9)$$

nazývame e - δ identitou.

2.9. TRANSPONOVANÉ, SYMETRICKÉ A ANTISYMETRICKÉ TENZORY

Uvažujme tenzor $T = (t_{ij})$. Chceme teraz maticu (t_{ij}) transformovať, t.j. prejsť k matici (t_{ji}) . Dá sa dokázať, že táto transponovaná matica je znov tenzorom, menovite $T^{(T)} = (t_{ji})$. Tenzor $T^{(T)}$ nazývame transponovaným k tenzoru T .

Keď nejaký tenzor T sa rovná svojmu transponovanému tvaru, teda platí $t_{ij} = t_{ji}$, nazývame takýto tenzor symetrickým tenzorom. Keď však platí $t_{ij} = -t_{ji}$, takémuto tenzoru hovoríme antisymetrickým tenzorom. Je logické, že pre antisymetrický tenzor sú jeho diagonálne zložky nulové.

Pre ľubovoľný tenzor môžeme písať

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ij} - t_{ji} + t_{ji}) = \\ &= \frac{1}{2} [t_{ij} + t_{ji}] + \frac{1}{2} [t_{ij} - t_{ji}] = t_{ij}^{(s)} + t_{ij}^{(as)} \quad (2.9-1) \end{aligned}$$

Vzťah (2.9-1) hovorí, že každý tenzor môžeme rozpísať ako súčet jeho symetrickej časti $t_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji})$ a antisymetrickej časti $t_{ij}^{(as)} = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji})$.

Zavedené pojmy platia aj pre tenzory vyššieho rádu. Ak napr. platí, že $T_{ijkl} = T_{jikl}$, potom tenzor T je symetrický v indexoch i a j . Ak platí $T_{ijkl} = -T_{jikl}$, potom T je antisymetrický v indexoch i, j . Dôležitou vlastnosťou symetrického tenzora je, že jeho symetrickosť sa transformáciou zachováva. Aby sme túto vlastnosť dokázali, uvažujme rovnosť $t_{ij} = t_{ji}$. V čiarkovanom súradnicovom systéme bude

$$\begin{aligned} t'_{ij} - t'_{ji} &= a_{ik} a_{jl} t_{kl} - a_{jk} a_{il} t_{kl} = \\ &= a_{ik} a_{jl} t_{kl} - a_{jl} a_{ik} t_{lk} = a_{ik} a_{jl} (t_{kl} - t_{lk}) = 0 \end{aligned}$$

Potom $t'_{ij} - t'_{ji} = 0$, resp. $t'_{ji} = t'_{ij}$, čím je tvrdenie o zachovaní symetrickosti tenzora dokázané. Pri dokazovaní sme premenovali sčítanie indexy $k, l \rightarrow l, k$ vo vzťahu $a_{jk} a_{il} t_{kl} = a_{jl} a_{ik} t_{lk}$, čo nám však vlastnosti indexovaného zápisu povoľujú.

Zaveďme teraz vektor $\omega = -(t_{23} e_1 + t_{31} e_2 + t_{12} e_3)$, ktorého zložky pozostávajú z členov antisymetrického tenzora

$$T^{(as)} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & -t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

a e_i sú jednotkové vektory, ktoré ležia v súradnicových osiach. Dá sa dokázať, že

$$t_{ij}^{(as)} = -e_{ijk} \omega_k \quad (2.9-2)$$

a za pomoci tohto vzťahu možno dokázať zaujímavú skutočnosť:

Predpokladajme, že antisymetrický tenzor $T^{(as)}$ aplikujeme na vektor A a dostaneme vektor C . Symbolicky zapísané

$$T^{(as)} A = C$$

čo analyticky znamená

$$t_{ij}^{(as)} A_j = C_i \quad (2.9-3)$$

Vzhľadom na (2.9-2) môžeme (2.9-3) prepísať na

$$-e_{ijk} \omega_k A_j = C_i$$

a keďže $e_{ijk} = -e_{ikj}$, na záver dostaneme

$$e_{ikj} \omega_k A_j = C_i \quad (2.9-4)$$

Porovnaním (2.9-4) s (2.8-4) vidíme, že (2.9-4) zodpovedá

$$\omega \times A = C \quad (2.9-5)$$

Keď symbolom ω označíme vektor antisymetrického tenzora $T^{(as)}$, môžeme na základe (2.9-4) povedať, že pôsobenie tenzora $T^{(as)}$ ako operátora na vektor A môžeme nahradiť vektorovým súčinom jeho duálneho vektora ω s vektorom A

2.10 VLASTNÉ HODNOTY, VLASTNÉ VEKTORY, HLAVNÉ OSI, INVARIANTY SYMETRICKÉHO TENZORA

Predpokladajme pre jednoduchosť symetrický tenzor druhého stupňa a požadujeme, aby sme pôsobením tohto tenzora T ako operátora na vektor A dostali

$$T A = \lambda \delta A \quad (2.10-1)$$

kde λ je zatiaľ neurčený skalár (faktor úmernosti) a δ je Kroneckerova delta.

Hlavnou (2.10-1) môžeme upraviť na tzv. rovniciu vlastného tvaru tenzora T :

$$(T - \lambda \delta) A = 0 \quad (2.10-2)$$

Keď prejdeme zo symbolického na analytické znázornenie, bude

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) A_j = 0 \quad (2.10-3)$$

Tu teraz zavedme jednotkový vektor

$$e = \frac{A}{|A|}$$

ktorý má zložky $v_i = \frac{A_i}{|A|}$. Pretože e je jednotkovým vektorom, musí platiť

$$v_i v_i = 1 \quad (2.10-4)$$

Keď predelením (2.10-3) absolútnou hodnotou $|A|$, dostaneme

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0 \quad (2.10-5)$$

(2.10-5) je lineárnym algebraickým systémom rovníc na výpočet v_j . Pretože je homogénny, pre jeho netriviálne riešenie musí platiť, že determinant sústavy sa rovná nule, t.j.

$$\det (t_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (2.10-6)$$

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hlavnou (2.10-6) nazývame charakteristickou rovnicou symetrického tenzora.

Hlavným determinantu dostaneme kubickú rovnicu

$$+\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2.10-7)$$

Korene $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ tejto rovnice sú hlavné hodnoty tenzora. Koefficienty I_k , $k = 1, 2, 3$, v (2.10-7) sú invarianty tenzora, ktoré zachovávajú hodno-

tu bez ohľadu na voľbu súradnicového systému, v ktorom sa tenzor popisuje. So zložkami tenzora t_{ij} súvisia nasledujúcim spôsobom:

$$I_1 = t_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij}) \quad (2.10-8)$$

$$I_3 = \epsilon_{ijk}t_{i1}t_{j2}t_{k3}$$

Na ukážku uvedieme invarianty tenzora v rozpísanom tvare:

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{33} & t_{31} \\ t_{13} & t_{11} \end{vmatrix} \quad (2.10-9)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}$$

Vo výrazoch (2.10-8) sú všetky indexy sčítacie, ide tu teda o skalárne veličiny. Táto ich vlastnosť hovorí o ich invariantnosti (nezávislosti) voči zmene súradnicového systému. Preto ich nazývame invariantami tenzora. Je za ujímavé si všimnúť, že I_1 vznikol zúžením tenzora, čím sa jeho stupeň znížil o dva rády. V našom špeciálnom prípade je to súčet diagonálnych zložiek. Tento súčet budeme nazývať stopou tenzora a označovať st^T (v literatúre sa stretne s nemeckým označením sp^T - spur, poprípade s anglickým tr^T - trace).

Ak vyriešime systém rovníc (2.10-6), a hlavné hodnoty tenzora $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ už poznáme, môžeme ich postupne dosadzovať do (2.10-5) a odtiaľ z rovnice

$$(t_{ij} - \lambda^{(k)}\delta_{ij})\gamma_j^{(k)} = 0 \quad (2.10-10)$$

vypočítať $\gamma_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$, pričom platí $\gamma_j^{(k)}\gamma_j^{(k)} = 1$. Pre každé určité $\lambda^{(k)}$ by sme dostali trojicu smerových kosínusov $\gamma_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$. Táto trojica smerových kosínusov predstavuje vlastný smer tenzora. Keď budeme naproti tomu $\gamma_j^{(k)}$ chápať ako zložky vektora, určíme tým vlastný vektor tenzora, ktorého nositeľka zodpovedá vlastnému smeru tenzora.

Pretože máme tri $\lambda^{(k)}$, dostaneme tri vlastné smery, resp. vlastné vektory tenzora

$$\gamma^{(1)} \equiv (\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}) \longrightarrow \lambda^{(1)}$$

$$\gamma^{(2)} \equiv (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)}) \longrightarrow \lambda^{(2)}$$

$$\gamma^{(3)} \equiv (\gamma_1^{(3)}, \gamma_2^{(3)}, \gamma_3^{(3)}) \longrightarrow \lambda^{(3)}$$

Pre symetrické tenzory sú tieto navzájom kolmé a tvoria tzv. hlavný súradnicový systém tenzora (HSS).

Natožnime teraz vzťažný súradnicový systém s hlavným súradnicovým systémom tenzora t_{ij} . Hodnoty smerových kosínusov pre jednotlivé $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, potom budú

$$a) \gamma_1^{(1)} = \cos(x_1^1, x_1) = 1; \gamma_2^{(1)} = \cos(x_1^1, x_2) = 0; \gamma_3^{(1)} = \cos(x_1^1, x_3) = 0; \text{pre } \lambda^{(1)}$$

$$b) \gamma_1^{(2)} = 0; \gamma_2^{(2)} = 1; \gamma_3^{(2)} = 0 \quad \text{pre } \lambda^{(2)} \quad (2.10-11)$$

$$c) \gamma_1^{(3)} = 0; \gamma_2^{(3)} = 0; \gamma_3^{(3)} = 1 \quad \text{pre } \lambda^{(3)}$$

Dosadením (2.10-11) do (2.10-10) dostaneme napr. pre $k = 1$

$$(t_{ij} - \lambda^{(1)}\delta_{ij})\gamma_j^{(1)} = 0$$

a po sčítaní cez j

$$(t_{i1} - \lambda^{(1)}\delta_{i1})\gamma_1^{(1)} + \overbrace{(t_{i2} + \lambda^{(1)}\delta_{i2})}^0\gamma_2^{(1)} + \dots = 0 \quad (2.10-12)$$

Dosadením za $i = 1$ do (2.10-12) dostaneme

$$t_{11} = \lambda^{(1)}$$

pre $i = 2$ a 3 dostaneme $t_{12} = 0$, resp. $t_{13} = 0$.

Podobným spôsobom pre $k = 2$ a 3 dostaneme

$$\begin{aligned} t_{22} &= \lambda^{(2)}, & t_{21} &= t_{23} = 0 \\ t_{33} &= \lambda^{(3)}, & t_{31} &= t_{32} = 0 \end{aligned}$$

Pre tento zvláštny prípad bude mať maticová forma tenzora t_{ij} tvar

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

Z uvedeného vyplýva, že v hlavnom súradnicovom systéme sa tenzor dá vyjadriť pomocou diagonálnej matice, obsahujúcej hlavné hodnoty $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$. Odtiaľ plynie praktický význam HSS, t.j. že zložky tenzora T vzhľadom na HS sú hlavnými hodnotami tenzora, vystupujúce v jeho charakteristickú rovnici (2.10-5).

Vo všeobecnom prípade, keď sú všetky tri korene $\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, navzájom rozdielne, existujú len tri navzájom kolmé hlavné osi tenzora. Ak rovnica (2.10-6) má koreň dvójnasobný, v tomto prípade máme nekonečne veľký počet hlavných súradnicových osí, pričom jedna z nich je osou symetrie (rotácie). Za HSS volíme os rotácie a ľubovoľné dve navzájom kolmé osi, ktoré s treťou osou tvoria ortogonálny pravotočivý súradnicový systém. Ak sú všetky tri korene totožné, potom ľubovoľný ortogonálny pravotočivý systém možno zvoliť za HSS tenzora.

HSS nie je závislý od transformácie uvažovaného súradnicového systému, invarianty tenzora musia ostať rovnaké vo všetkých sústavách transformovaných a teda pre HSS musí platiť charakteristická rovnica, resp.

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10-13)$$

Pre HSS však máme $t_{11} = \lambda^{(1)}$, $t_{22} = \lambda^{(2)}$, $t_{33} = \lambda^{(3)}$, $t_{ij} = 0$ pre $i \neq j$.

Uvedením zložiek tenzora do (2.10-13) dostaneme

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10-14)$$

Uvedením determinantu (2.10-14) dostaneme kubickú rovnicu

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0$$

Prípadom pre invarianty J_i , $i = 1, 2, 3$, v HSS platí

$$J_1 = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}$$

$$J_2 = \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + \lambda^{(2)} \lambda^{(3)} + \lambda^{(1)} \lambda^{(3)} \quad (2.10-15)$$

$$J_3 = \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \lambda^{(3)}$$

Prípadom, vzhľadom na invariantnosť, bude (2.10-9) totožné s (2.10-15),

$$I_1 = J_1, \quad I_2 = J_2, \quad I_3 = J_3$$

3. Tenzor napätia

Stredobodom nášho záujmu v tejto kapitole bude pojem "napätie". Prostredníctvom napätia sa v mechanike kontinua určuje vzájomné pôsobenie medzi jednotlivými časťami hmotného telesa. Preto sa zmienime podrobnejšie o tomto pojme, ako aj o metóde jeho popísania. Ukážeme, že na jednoznačné určenie napätostného stavu v nejakom bode telesa postačí deväť zložiek, nazývaných komponentmi alebo tiež zložkami napätia. Týchto deväť zložiek možno zoradiť do matice tvaru (3,3). Za predpokladu, že momenty objemových síl a momentové napätia neexistujú, matica napätia je symetrická, to znamená, že tri dvojice zložiek napätia sú sebe rovné, a na úplné popísanie napätostného stavu v bode telesa postačuje šesť nezávislých zložiek napätia. Zmenou vzťažného súradnicového systému sa menia aj hodnoty zložiek napätia. Vyjadrením transformačného zákona zmeny napätia pri natočení súradnicového systému sa ukáže, že toto pravidlo je transformačným vzťahom platným pre transformáciu tenzorov. Na základe tohto zákona môžeme tvrdiť, že napätie je tenzorovou veličinou.

Keď je tenzor napätia známy, možno z neho určiť vektor napätia. Vzájomný vzťah medzi tenzorom a vektorom napätia nám udáva Cauchyho formula.

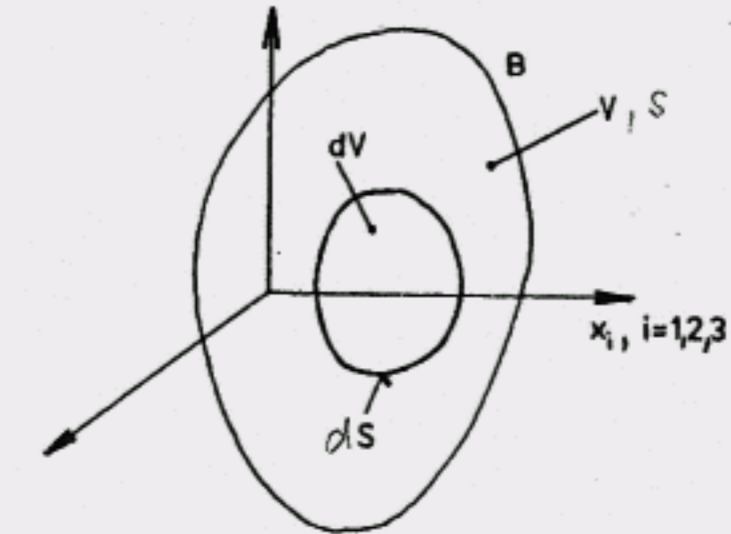
3.1 POJEM NAPÄTIA

V mechanike častíc sa študujú dva typy vzájomného pôsobenia medzi jednotlivými časticami, a to pri zväčšovaní a zmenšovaní vzdialenosti medzi nimi. Pri uvažovaní systému častíc musí byť jednoznačne stanovené, ako jednu časticu ovplyvňujú všetky ostatné častice.

Podobne v mechanike kontinua budeme skúmať vzájomné pôsobenie medzi jednotlivými časťami telesa. Avšak kontinuum je abstrakciou reálneho sveta, ktorého malý objem obsahuje veľké množstvo častíc, preto už spomínaný koncept používaný v mechanike elementárnych častíc by nebol vhodný na jeho skúmanie.

Novým postupom pri skúmaní kontinua je koncept napätia. Uvažujme materiálne kontinuum B, ktorého objem je V (obr. 3.1).

Vo vnútri telesa B si predstavme jeho elementárnu časť dV s povrchom S. My chceme vyjadriť vzájomné pôsobenie medzi materiálom mimo S a obsiahnutým v S



Obr. 3.1
Materiálne kontinuum

Povrch telesa nech je v styku s inými telesami, ktoré na ploche dotyku silovo pôsobia (ťahy, tlaky a pod.). Sústredené sily pôsobiace v jednotlivých povrchových bodoch môžeme taktiež zahrnúť do tejto skupiny ako limitný prípad síl pôsobiacich na malú plochu povrchu telesa. Prax nás presvedčuje o tom, že toto silové pôsobenie z povrchu telesa sa prenáša do jeho vnútra. Na vybraný objemový element s povrchom S budú všeobecne pôsobiť dva druhy síl, a to sily objemové a sily plošné.

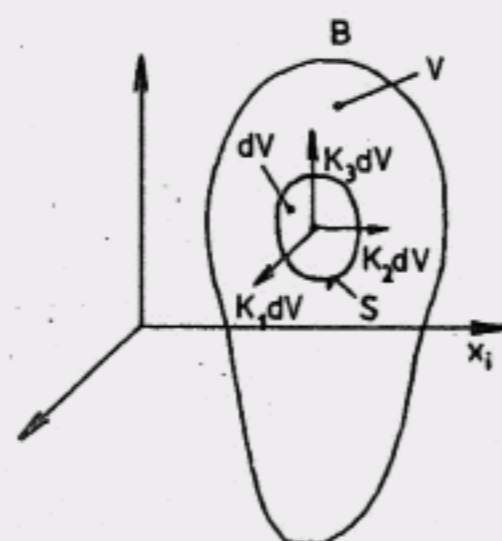
Objemové sily sú úmerné hmotnosti obsiahnutej v uvažovanom elemente a pôsobia na jednotlivé elementy telesa. Tieto sily sú tak pre zmiernený element, ako by celé teleso silami vonkajšími. Ak objemové sily vzťahujeme na jednotku objemu a označíme K , ich zložky v kartézskom súradnicovom systéme budú K_i (viď obr. 3.2). Na objemový element dV bude pôsobiť objemová sila (o K predpokladáme, že je konečne veľká)

$$K dV \quad (3.1-1)$$

alebo v zložkovom tvare $K_i dV$. Jednoduchým príkladom objemovej sily je merná tíž, v tomto prípade vektor K mieri zvisle dolu a jeho veľkosť je daná súčinom hmoty ρ a tiažového zrýchlenia g . Za pôsobisko objemovej sily môžeme zvoliť ľubovoľný bod elementu dV . Vo všeobecnosti K závisí od polohy elementu dV v telese, takže ju budeme považovať za funkciu súradníc bodu, okolo ktorého je objemový element vytvorený.

Výsledná objemová sila pre hmotu obsiahnutú v B sa bude rovnáť objemovému integrálu

$$G = \int_V K dV \quad (3.1-2)$$



Obr. 3.2
Objemové sily

Pre zložky výslednice objemových síl bude platiť

$$G_i = \int_V K_i dV \quad (3.1-1)$$

Výsledný moment objemových síl k nejakému bodu, ktorého polohový vektor je r , bude

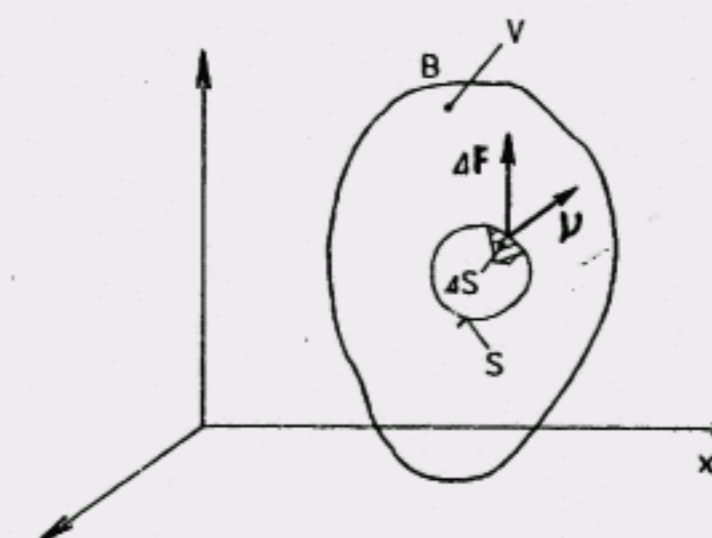
$$M^{(k)} = r \times G \quad (3.1-2)$$

alebo po analytickom vyjadrení jeho zložiek

$$M_i^{(k)} = \int_V e_{ijk} r_j K_k dV \quad (3.1-3)$$

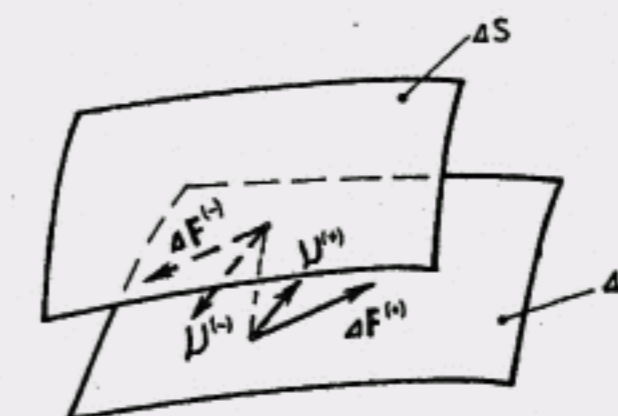
kde e_{ijk} je permutačný symbol.

Druhou skupinou síl pôsobiacich na vybraný element sú sily plošné. Týmito silami pôsobia ostatné hmotné body elastického telesa na hmotné body vo vnútri uvažovaného elementu. To znamená, že pre tento element sú silami vonkajšími, ale z hľadiska celého telesa sú silami vnútornými. O týchto silách predpokladáme, že pôsobia do vzdialenosti rádovo rovnakých, ako sú vzdialenosti susedných hmotných bodov. Tieto sily sú teda obmedzené na dva susedné hmotné body, ktoré sú práve na opačných stranách myšlenej plochy oddelujúcej myšlený element. Plošná sila ΔF , ktorá pôsobí na plošný element ΔS (obr. 3.3), bude úmerná jeho veľkosti a vyjadruje vzájomné silové pôsobenie na ploške ΔS dvoch častí uvažovaného telesa.



Obr. 3.3
Plošné sily

Je zrejmé, že podľa zákona akcie a reakcie je sila, ktorou pôsobí prvá časť na druhú, rovnako veľká, ale opačne orientovaná, než sila, ktorou pôsobí druhá časť na prvú. Záleží teraz na dohode, ktorú silu budeme považovať za kladnú $\Delta F^{(+)}$ a ktorú za zápornú $\Delta F^{(-)}$. Pri voľbe postupujeme takto: ΔS je časťou myšlenej uzatvorenej plochy S, ktorá vydeľuje z telesa určitý konečný objem. Potom smer vonkajšej normály $n^{(+)}$ plošky ΔS považujeme za kladný a za kladnú silu $\Delta F^{(+)}$ považujeme tú silu, ktorá pôsobí na element ΔS z vonkajšej strany, t.j. zo strany kladnej normály (obr. 3.4).



Obr. 3.4
Voľba znamienka plošných síl

Pri tom vo všeobecnosti smer vektora plošnej sily nesplyva so smerom vonkajšej normály a jej veľkosť závisí od polohy a veľkosti plošky ΔS , ako aj od orientácie jej normály. Za predpokladu, že ΔS sa blíži k nule, potom pomer $\Delta F / \Delta S$ sa blíži ku konečnej limite $\frac{dF}{dS}$, a že moment síl pôsobiacich na ploške ΔS ku každému bodu oblasti je v limite nulový, potom pre limitný vektor môžeme písať

$$\vec{T} = \frac{dF}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Tento limitný vektor sa nazýva vektorom napätia a budeme pod ním rozumieť silu, ktorá pôsobí na jednotkovú plošku, ktorej normála je ν . Horný index ν nám označuje smer normály ν uvažovanej plošky ΔS . Predpoklad, ktorý je definovaný pre každú oblasť s uzatvoreným povrchom S vo vnútri kontinua, že vektorové pole napätia pôsobiace na materiál vo vnútri plochy S je protipólom silového pôsobenia vonkajšieho materiálu na S , je Euler - Cauchyho princípom.

Výslednica plošných síl, ktorá na ploche S uzatvára povrch vybraného objemového elementu, sa bude rovnať

$$F = \int_S \vec{T} dS \quad (3.1-6)$$

a moment plošných síl je

$$M^{(T)} = \int_S (\vec{r} \times \vec{T}) dS = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.1-7)$$

Zložky momentu plošných síl sú

$$M_i^{(T)} = \int_S e_{ijk} r_j T_k dS \quad (3.1-8)$$

Euler - Cauchyho princíp je veľmi uznávaný a našiel uplatnenie v konvenčnej mechanike fluida a prostredia. Avšak nie je to jeho základná forma. Napríklad nie je apriori dokázané, prečo je interakcia na dvoch stranách plošky ΔS bezmomentová. Sú odporcovia tézy, že "moment síl pôsobiacich na povrchu ΔS je ku každému bodu plochy v limite nulový" a rozšírili tento napätový princíp. Tvrdia, že "v okolí každého nekonečne malého plošného elementu v materiáli je pôsobenie vonkajšieho materiálu na vnútorný ekvipolentný v silách a momentoch". Na základe tohto princípu rozpracovaná teória predpokladá existenciu momentových napätí a je podstatne komplikovanejšia ako teória klasického kontinua. Túto teóriu podrobne rozviedli bratia Cosseratovci a kontinuu, pre ktoré táto teória platí, hovoríme Cosseratove kontinuum. My sa v ďalšom nebudeme kvôli zložitosti zaoberať týmto kontinuumom, i keď sa zdá, že začína nachádzať uplatnenie v nových numerických metódach pri riešení niektorých konštrukčných prvkov, napr. škrupín.

Ako sme už uviedli, vektor napätia \vec{T} závisí nielen od polohy plošného elementu, ale aj od jeho orientácie. Preto pod týmto označením budeme rozumieť napätie, ktoré pôsobí na jednotkovú plošku, ktorej normála je ν .

Vo všeobecnosti môžeme vektor napätia rozložiť do smeru normály ν , t.j. normálovú zložku napätia $\vec{T} \cdot \nu$, ktorú nazývame normálovým napätím a do smeru dotyčnice, ktorú nazývame tangenciálnym alebo šmykovým napätím.

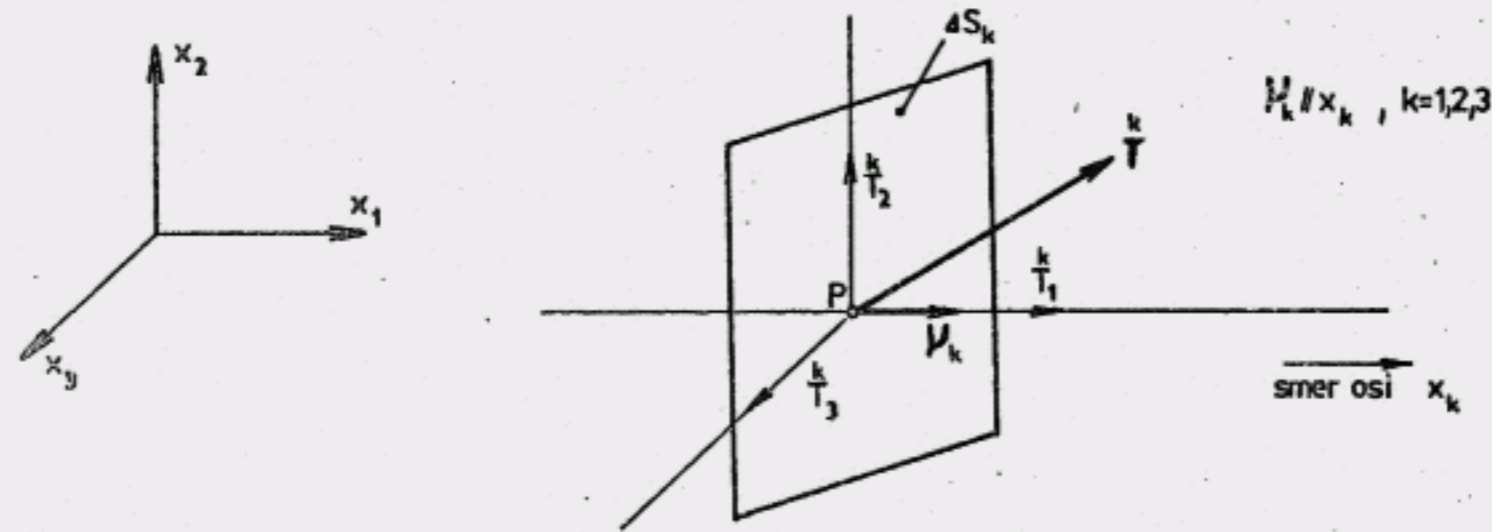
3.1.2 OZNAČOVANIE ZLOŽIEK NAPÄTIA

Uviedli sme pojem vektora napätia ako silu pôsobiacu na jednotku plochy a povedali sme, že napätie je vo všeobecnosti funkciou nielen miesta, ale aj orientácie elementárnej plošky dS . Pretože smer priamky určujeme spravidla smerovými kosínusmi, môžeme povedať, že napätie je závislé od umiestnenia plošky dS v telese a od smerových kosínusov jej normály.

Zložky vektora napätia T_i ako funkcie miesta určujú napätosť nielen v uvažovanom bode P , ale aj v jeho okolí na ploške, ktorej normála je ν . Pretože uvažovaným bodom môžeme preložiť dvojparametrický vzťah elementárnych (rovinných) plošiek, ide nám o to, koľko elementárnych plošiek (rovín) a ako orientovaných stačí na to, aby sme úplne určili napätosť v okolí bodu P . Neskôr uvidíme, že stačí poznať napätie na troch vzájomne kolmých rovinných ploškách, prechádzajúcich bodom P .

Uvažujme špeciálny prípad, v ktorom uvažovaná ploška ΔS_k , $k = 1, 2, 3$ je rovnobežná s niektorou súradnicovou rovinou. Nech normála ΔS_k má smer kladného smeru osi x_k . Označme vektor napätia pôsobiaci na ΔS_k s troma zložkami T_1^k, T_2^k, T_3^k do smerov súradnicových osí x_1, x_2, x_3 (viď obr. 3.5). Index i vo výraze T_i^k označuje zložku vektora a index k označuje normálu (os x_k) plošky, na ktorej vektor napätia pôsobí. V tomto špeciálnom prípade zaviedeme nové symboly na označenie zložiek napätia. Ak zoradíme zložky napätia pôsobiace na troch ortogonálnych ploškách ΔS_k , $k = 1, 2, 3$ do štvorcovej matice, dostaneme

		zložky napätia				
		1	2	3		
normály plošky v smere	x_1	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	zodpovedá vektoru	1 T_i
	x_2	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}		2 T_i
	x_3	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}		3 T_i



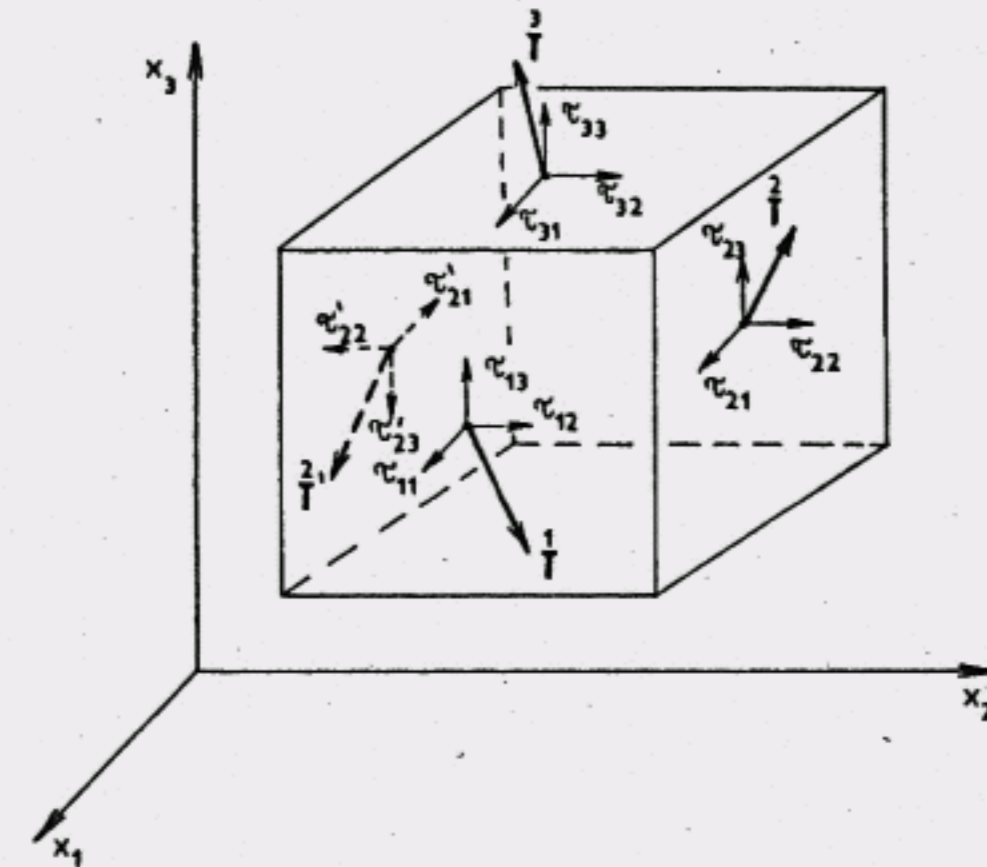
Obr. 3.5

Rozdelenie vektora napätia do súradnicových smerov

Ak hmotný bod, za účelom vyjadrenia napätia, nahradíme elementárnym hranolčekom, dostaneme tri dvojice rovnobežných rovín (obr. 3.6). Na obrázku sú naznačené zložky napätia na kladných ploškách objemového elementu (normály majú smer príslušnej súradnicovej osi). Tak sme dospeli k 9 veličinám a zavedieme pre ne označenie

$$\tau_{ij}^i = \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.2-2)$$

Veličiny τ_{ij} majú dva indexy, ktoré sú v postavení indexov tenzorových. Neskôr si ukážeme, že týchto 9 veličín τ_{ij} sú zložkami symetrického tenzora druhého rádu. Tomuto tenzoru budeme hovoriť tenzor napätia. Všimnime si, že v τ_{ij} prvý index označuje smer normály elementárnej roviny, na ktorú vektor napätia \vec{T} pôsobí a druhý index stanoví, o ktorú zložku napätia ide. Spôsob, akým sú zavedené kladné napätia, je zrejmý z obrázku 3.6. Kladné zložky τ_{ij} pôsobia na kladných stenách kvádra (t.j. na stenách, ktorých vonkajšia normála je rovnobežná s kladným smerom niektorej zo súradnicových osí). Na zá-



Obr. 3.6

Označenie zložiek napätia

porných stenách kvádra (normála ide so záporným smerom niektorej zo súradnicovej osi) pôsobia kladné zložky τ_{ij} v smere záporných súradnicových osí. Na obr. 3.6 je zrejmé, že normálové napätia sú kladné, ak sa snažíme vyvolať posunutie materiálu, a sú záporné, keď chceme materiál stlačiť.

Ako sme už spomínali, zložky napätia v smere normály nazývame normálovými, tangenciálne zložky napätiami šmykovými. Z 9 zložiek tenzora napätia sú teda τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} napätiami normálovými, zostávajúcich 6 zložiek sú napätiami šmykovými. Všetky zložky napätia takto majú rozmer sily na jednotku plochy.

V literatúre existujú rozlišnosti v označovaní zložiek napätia. Častým spôsobom označovania, vzhľadom na pravouhlý kartézsky súradnicový systém x, y, z je

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.2-3)$$

alebo

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2-4)$$

My budeme v prevažnej miere označovať zložky napätia podľa (3.2-2), t.j.

$$\tau_{ij}, (\tau_{ij}), \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (3.2-5)$$

3.3 POHYBOVÉ ROVNICE KONTINUA

Mechanika kontinua je založená na Newtonových pohybových zákonoch, ktoré pre kontinuum upravil Euler.

Uvažujme súradnicový systém x_1, x_2, x_3 , ktorý je inerciálnym vzťažným systémom. Nech teleso vyplnené látkou zaberá v nejakom čase t priestor $B(t)$. Nech \mathbf{r} je polohovým vektorom vybraného elementu, ktorého hustota látky je ρ a \mathbf{v} je jeho vektor rýchlosti. Element má teda polohu (x_1, x_2, x_3) , objem dV a hmotnosť ρdV . Pre hybnosť priamočiareho pohybu telesa v konfigurácii $B(t)$ bude platiť

$$\mathbf{H} = \int_{B(t)} \mathbf{v} \rho dV \quad (3.3-1)$$

Integrál

$$\mathcal{H} = \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV \quad (3.3-2)$$

nazývame momentom hybnosti telesa. Eulerom upravené pohybové rovnice hovoria, že časová zmena hybnosti priamočiareho pohybu sa rovná celkovej aplikovanej sile \mathbf{F} pôsobiacej na teleso

$$\dot{\mathbf{H}} = \int_{B(t)} \dot{\mathbf{v}} \rho dV = \mathbf{F} \quad (3.3-3)$$

a časová zmena momentu hybnosti sa rovná celkovému aplikovanému momentu \mathcal{L} okolo počiatku súradnicového systému, t.j.

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{L}} = \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} dV \quad (3.3-4)$$

Podľa nad hybnosťou a momentom hybnosti predstavuje ich časovú deriváciu, ktorú tiež môžeme označiť výrazmi $\frac{D\mathbf{H}}{Dt}$, resp. $\frac{D\mathcal{H}}{Dt}$. Dá sa dokázať, že ak platí rovnica (3.3-3), potom keď rovnica (3.3-4) platí pre jednu voľbu počiatku súradníc, je platná pre ľubovoľný iný počiatok vzťažného súradnicového systému.

Ako sme sa predtým zmienili, na teleso pôsobia dva typy síl:

- 1) objemové sily, pôsobiace na objemové elementy telesa;
- 2) plošné sily, pôsobiace na plošné elementy telesa.

Príkladom objemových sú gravitačné alebo elektromagnetické sily. Príkladom plošných síl sú aerodynamické sily, alebo tlak spôsobený mechanickým kontaktom dvoch telies.

Objemové sily sme špecifikovali ako

$$\int_B \mathbf{K} \rho dV$$

kde vektor \mathbf{K} s tromi komponentmi K_1, K_2, K_3 je silou na jednotku objemu telesa. Napr. pre gravitačné pole bude platiť

$$K_i = \rho g_i$$

kde g_i sú zložky tiažového zrýchlenia a ρ je merná hustota látky.

Plošné sily, pôsobiace v nejakej vnútornej oblasti telesa, sú vektorom napätia, ktorý vychádza z Eulerovho a Cauchyho princípu napätia. V zhode s týmto princípom celkové sily v materiáli, obsiahnutom v oblasti B a uzatvorenej povrchom S , sú

$$F = \int_S \vec{T} dS + \int_B K dV \quad (3.3-5)$$

kde \vec{T} je vektor napätia pôsobiaci na ΔS , ktorej vonkajšia normála je ν . Podobne torzia (moment) síl okolo počiatku súradnicového systému bude daná rovnicou

$$\mathcal{L} = \int_S \mathbf{r} \times \vec{T} dS + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{K} dV \quad (3.3-6)$$

Kombináciou týchto dvoch rovníc dostaneme pohybové rovnice v tvare

$$\int_S \vec{T} dS + \int_B \mathbf{K} dV = \frac{D}{Dt} \int_B \nu \rho dV \quad (3.3-7)$$

resp.

$$\int_S \mathbf{r} \times \vec{T} dS + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{K} dV = \frac{D}{Dt} \int_B \mathbf{r} \times \nu \rho dV \quad (3.3-8)$$

Treba povedať, že nie je podstatné, z čoho sa skladá uvažovaná oblasť $B(t)$, alebo či je zostavená z rovnakých častíc v každom čase. Nerobili sme žiadne špeciálne predpoklady pre rôzne častice alebo tvar kontinua. Preto rovnice (3.3-7) a (3.3-8) sú platné pre každý materiál telesa. Okrajová plocha oblasti môže súhlasiť s okrajovým povrchom elastického prvku, ale môže tiež zahrňovať len jeho malú časť. Voľnosť výberu oblasti $B(t)$ má veľký význam. Za účelom lepšieho popisu nejakého celku sa v mechanike vyberajú z neho jednotlivé časti a tie sa riešia samostatne, pričom vychádzame z uvoľneného stavu telesa. (Např. uvoľnený nosník, poprípade len jeho časť vybraná myslenným rezom.) Za oblasť $B(t)$ potom dosadíme konkrétny objem V vybranej časti uvažovaného kontinua.

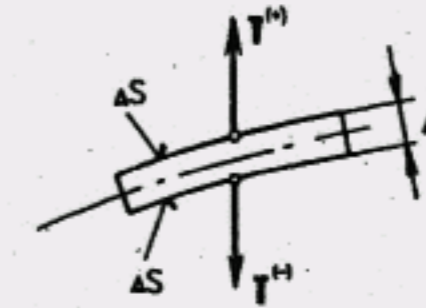
3.4 CAUCHYHO FORMULA

Z pohybových rovníc teraz dospejeme k záveru, ktorý hovorí, že vektor napätia $\vec{T}^{(+)}$, reprezentujúci pôsobenie vonkajšieho materiálu na plošný element vnútorného materiálu, sa rovná absolútnej veľkosti vektora \vec{T} , ale s opač-

ným znamienkom $\vec{T}^{(-)}$, ktorý reprezentuje pôsobenie vnútorného materiálu na vonkajší prostredníctvom toho istého plošného elementu, čiže

$$\vec{T}^{(-)} = -\vec{T}^{(+)}$$

Dôkaz tohto tvrdenia vychádza z nasledujúcich úvah. Majme tenký element s dvoma paralelnými povrchmi veľkosti S a hrúbky elementu Δ (viď obr. 3.7).



Obr. 3.7
Rovnováha tenkého elementu

Keď sa bude hrúbka elementu Δ blížiť k nule a ΔS bude malé, avšak konečné, objemové sily a hybnosť, ako aj jej časovú zmenu môžeme zanedbať a na plochách ΔS ostanú pôsobiť len plošné sily. Z pohybovej rovnice (3.3-7) potom dostaneme

$$\int_S \vec{T} dS = \vec{T}^{(+)} \Delta S + \vec{T}^{(-)} \Delta S = 0$$

po vydelení s ΔS máme

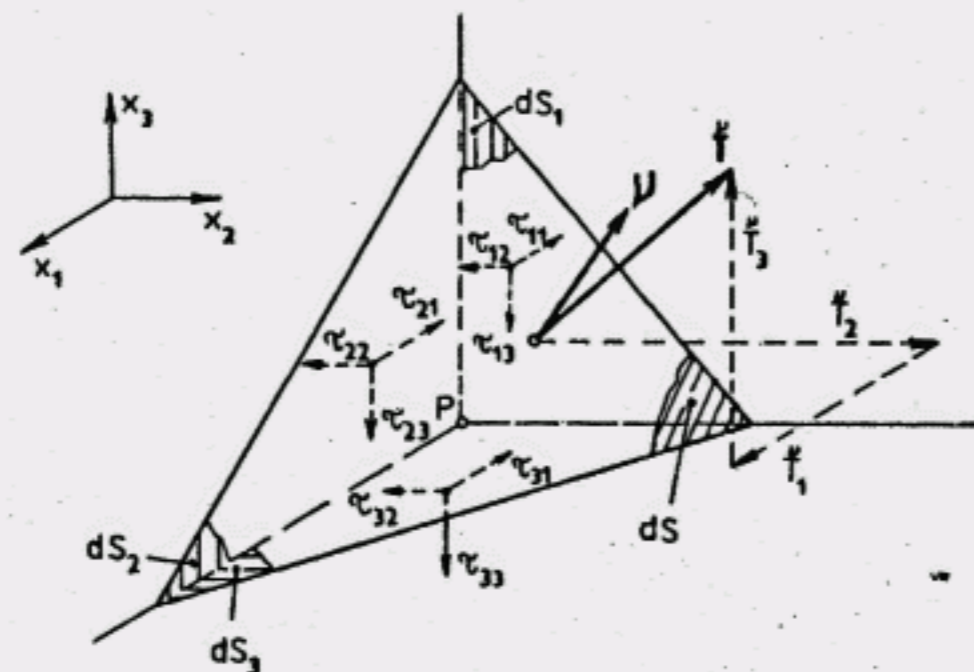
$$\vec{T}^{(-)} = -\vec{T}^{(+)}$$

Môžeme taktiež povedať, že vektor napätia je funkciou normálového vektora plochy. Keď sa zmení smer vonkajšej normály, zmení sa aj smer napätia.

Ukážeme teraz, že ak poznáme zložky tenzora σ_{ij} , môžeme určiť vektor napätia, ktorý pôsobí na plochu s jednotkovým vektorom ν so zložkami ν_1, ν_2, ν_3 . Tento vektor sme označili \vec{T} so zložkami T_1, T_2, T_3 . Vzájomný vzťah medzi vektorom a tenzorom napätia nám udáva Cauchyho formula

$$T_i = \nu_j \sigma_{ji} \quad (3.4-1)$$

Dôkaz tvrdenia (3.4-1) urobíme nasledujúcim spôsobom. Uvažujme elementárny tetraéder vytvorený tromi plochami rovnobežnými so súradnicovými rovinami a jednou normálovou rovinou vzhľadom na jednotkový vektor ν (obr. 3.8).



Obr. 3.8

K závislosti medzi vektorom a tenzorom napätia

Nech prierezová plocha normálovej roviny k ν je dS . Potom plochy na ostatných troch stenách tetraédra sú:

$$\begin{aligned} dS_1 &= dS \cos(\nu, x_1) = \nu_1 dS - \text{plocha steny rovnobežnej s rovinou } (x_2, x_3); \\ dS_2 &= dS \cos(\nu, x_2) = \nu_2 dS - \text{plocha steny rovnobežnej s rovinou } (x_3, x_1); \\ dS_3 &= dS \cos(\nu, x_3) = \nu_3 dS - \text{plocha steny rovnobežnej s rovinou } (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Objem tetraédra je $dV = \frac{1}{3} h dS$, kde h je výška kolmice z bodu P na dS . Na troch súradnicových plochách tetraédra budú pôsobiť v kladnom smere osi x_i sily

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1) dS_1, \quad (-\tau_{21} + \epsilon_2) dS_2, \quad (-\tau_{31} + \epsilon_3) dS_3$$

kde $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}$ sú napätia pôsobiace na súradnicových stenách tetraédra v smere x_1 . Záporné znamienko pri napätiach je vzhľadom na záporný smer vonkajších normál uvažovaných troch stien. $\epsilon_i, i = 1, 2, 3$ zohľadňujú skutočnosť, že bod P nie je obvykle totožný s bodom pôsobenia napätia (hmotný bod P sme nahradili elementárnym hranolčekom). Ak uvažujeme, že napätové pole je spojité, potom ϵ_i sú nekonečne malé hodnoty (napr. $\epsilon_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1$).

Naproti tomu sila, pôsobiaca na normálovej rovine k ν , má zložku $(T_1 + \epsilon) dS$ v pozitívnom smere osi x_1 , zložku objemovej sily $(K_1 + \epsilon') dV$ a časová zmena hybnosti bude $\rho \dot{v}_1 dV$. Prvá pohybová rovnica pre smer x_1 bude mať potom tvar

$$\begin{aligned} &(-\tau_{11} + \epsilon_1) \nu_1 dS + (-\tau_{21} + \epsilon_2) \nu_2 dS + (-\tau_{31} + \epsilon_3) \nu_3 dS + \\ &+ (T_1 + \epsilon) dS + (K_1 + \epsilon') \frac{1}{3} h dS = \rho \dot{v}_1 \frac{1}{3} h dS \end{aligned}$$

Každú túto rovnicu vydělíme dS a uvažujeme $h \rightarrow 0$ (uvažujeme prakticky hmotný bod miesto elementu), potom $\epsilon_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), a $\epsilon = \epsilon' = 0$, táto rovnica sa nám zjednoduší na konečný tvar

$$T_1 = \tau_{11} \nu_1 + \tau_{21} \nu_2 + \tau_{31} \nu_3 \quad (3.4-2)$$

Rovnica (3.4-2) predstavuje prvý člen z Cauchyho formuly (3.4-1), t.j. položíme index $i = 1$ a urobíme sumáciu cez sčítací index $j = 1, 2, 3$. Vychádzajúc z predchádzajúcej úvahy by sme dospeli k ostatným zložkám vektora napätia

T_i v bode P .

Cauchyho formula nám stanovuje, že znalosť deviatich zložiek napätia τ_{ij} je nutnou a postačujúcou podmienkou na definovanie napätosti v nejakom bode elementu ako aj v jeho okolí. Stav napätosti v bode telesa je teda kompletne stanovený a charakterizovaný deviatimi zložkami τ_{ij} . Pretože T_i je vektor a rovnica (3.4-1) platí pre ľubovoľný vektor normály ν_j , potom τ_{ij} musí byť tenzorom (v kapitole 1 sme aplikáciou tenzora ako lineárneho operátora na nejaký vektor A_i dostali iný vektor B_j). τ_{ij} nazývame tenzorom napätia.

Jeho tenzorový charakter dokážeme Quotientovým pravidlom. Predpokladajme, že τ_{ij} sa vzťahuje k určitej kartézskej súradnicovej sústave. Transformáciou súradnicového systému natočením by sme mali dostať

$$\tau'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \tau_{kl} \quad (3.4-2)$$

čo je transformačný zákon pre tenzory druhého stupňa.

Rovnica (3.4-1) platí

$$T_i = \tau_{ij} \nu_j \quad (3.4-3)$$

v natočenom súradnicovom systéme

$$T'_i = \tau'_{ji} \nu'_j \quad (3.4-4)$$

Keďže \vec{T}_i je vektorom, bude preň platiť transformácia

$$\vec{T}'_i = a_{il} \vec{T}_l = a_{il} \sigma_{ml} \nu_m = a_{il} \sigma_{ml} a_{jm} \nu'_j \quad (3.4-5)$$

Porovnaním (3.4-4) a (3.4-5) máme

$$(\sigma'_{ji} - a_{il} a_{jm} \sigma_{ml}) \nu'_j = 0 \quad (3.4-6)$$

Pretože $\nu'_j \neq 0$, musí byť $\sigma'_{ji} - a_{il} a_{jm} \sigma_{ml} = 0$, resp.

$$\sigma'_{ji} = a_{jm} a_{il} \sigma_{ml}$$

čím je tenzorový charakter napätia dokázaný. V (3.4-5) sme využili vektorový charakter normály ν , t.j. že $\nu_m = a_{jm} \nu'_j$.

3.5 ROVNICE ROVNOVÁHY

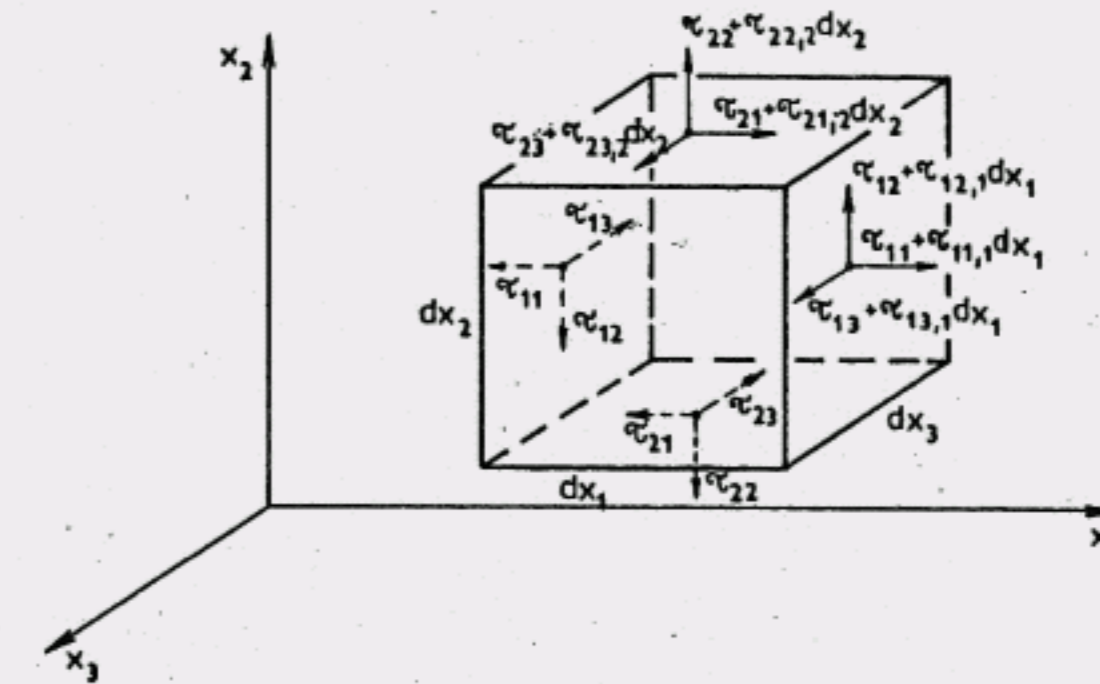
Teraz pretransformujeme pohybové rovnice (3.3-7) a (3.3-8) do tvaru diferenciálnych rovníc. Možno to urobiť pomocou Gausovej vety a Cauchyho formuly. My to však urobíme tak, aby bola zrejماً fyzikálna podstata problému.

Uvažujme elementárny štvorboký element, ktorého steny sú rovnobežné so súradnicovými rovinami a ktorý je v statickej rovnováhe. Napätia pôsobiace napr. na dvoch dvojiciach plôch elementu sú znázornené na obr. 3.9.

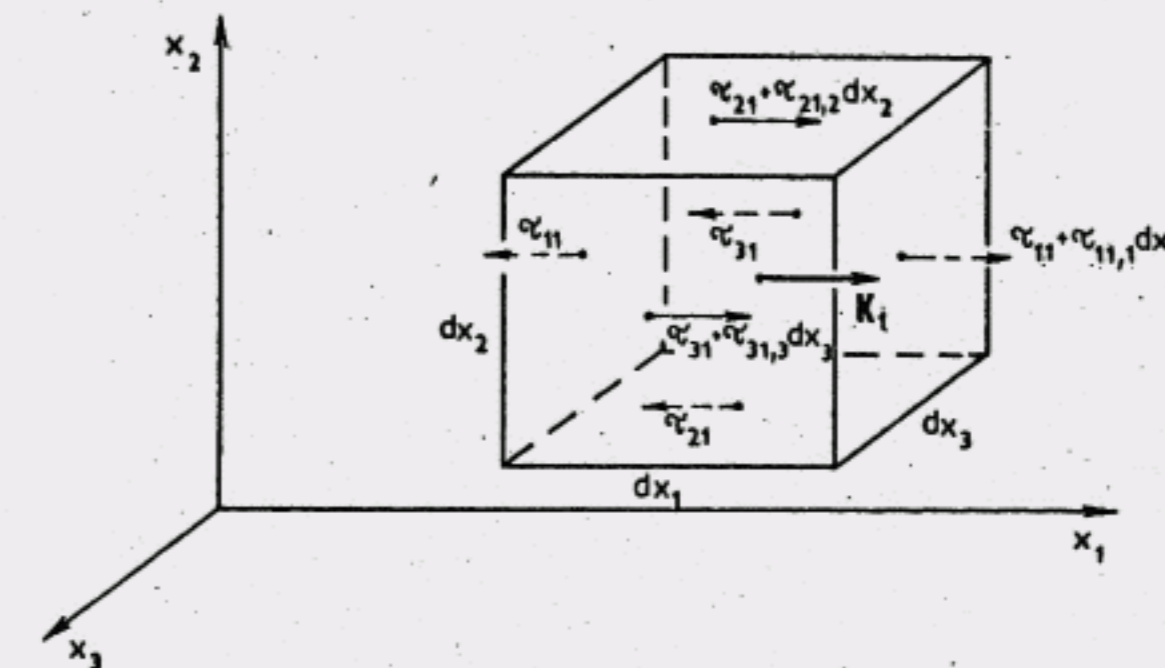
Sila $\sigma_{11} dx_2 dx_3$ pôsobí na ľavej stene (zápornej) a sila $(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3$ pôsobí na pravej (kladnej) stene hranolčeka, kolmej na súradnicovú os x_1 , atď. ...

Tento predpoklad spĺňa podmienku spojitosti rozloženia napätia po hrúbke elementu. Objemové sily, pôsobiace v elementárnom hranolčeku, budú $K_1 dx_1 dx_2 dx_3$. Všetky napätia a ich derivácie sa vzťahujú na súradnicový systém (x_1, x_2, x_3) . Rovnováha telesa vyžaduje, aby posuvný a otáčavý účinok všetkých síl naň pôsobiacich sa rovnal nule.

Napríklad v smere rovnobežnom s osou x_1 , pôsobí šesť zložiek plošných síl a jedna zložka sily objemovej (obr. 3.10).



Obr. 3.9
Zložky napätia na elementárnom hranolčeku



Obr. 3.10
Zložky napätia a objemových síl v smere x_1

Všetkých síl v smere x_1 musí sa rovnať nule, resp.

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 +$$

$$\left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + K_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Po vydelení tejto rovnice elementárnym objemom $dx_1 dx_2 dx_3$ dostaneme

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + K_1 = 0 \quad (3.5-1)$$

Cyklickou zámennou dostaneme podobné podmienky rovnováhy v smere zvýšených súradnicových osí x_2 a x_3 . Tento systém troch rovníc možno skrátene analyticky zapísať v tvare

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + K_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.5-2)$$

Toto je dôležitý výsledok, ktorý podrobnejšie rozvedieme v ďalšej kapitole skrípt.

Splnením druhej podmienky rovnováhy, že aj otáčavý účinok všetkých síl pôsobiacich na elementárny hranolček musí byť nulový, dostaneme zaujímavú skutočnosť, že tenzor napätia je tenzorom symetrickým, t.j.

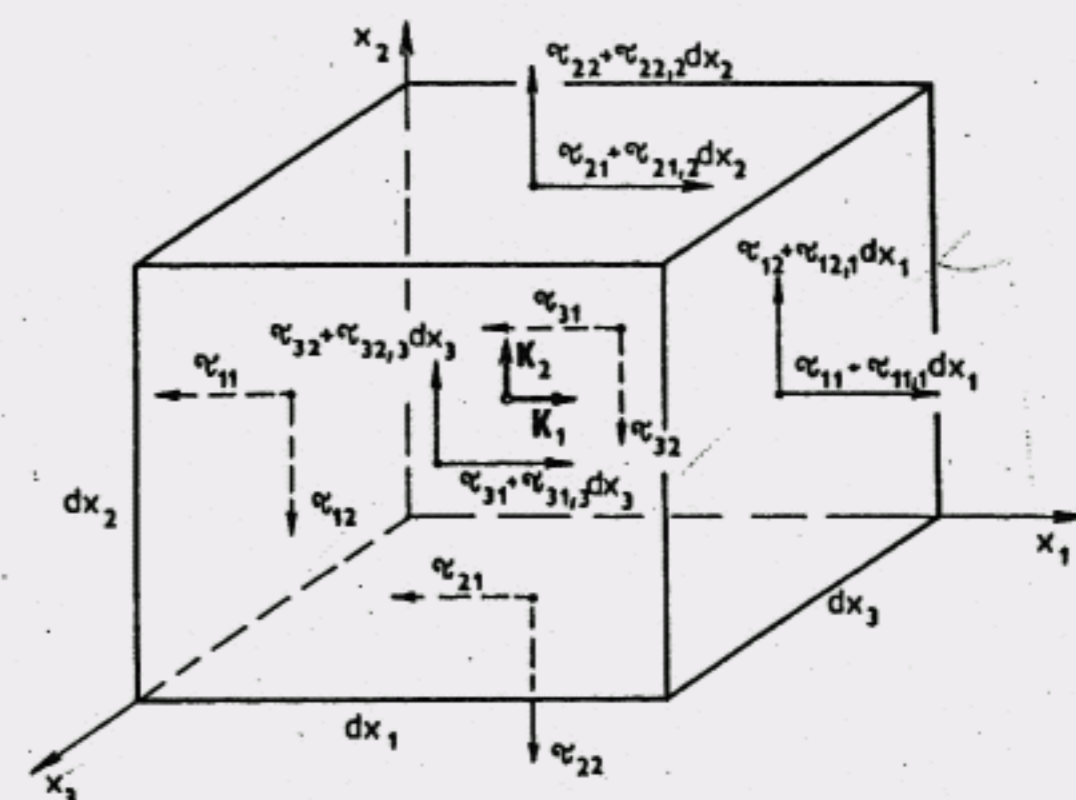
$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (3.5-3)$$

Rovnica (3.5-3) platí za predpokladu, že moment objemových síl sa rovná nule. Pri Coseratovom kontinuu tento predpoklad neplatí, a preto tenzor napätia tu nie je symetrickým tenzorom, čo veľmi sťažuje analýzu tohto kontinua.

Vlastnosť (3.5-3) dokážeme nasledujúcim spôsobom. Uvažujme moment všetkých síl okolo osi x_3 . Je zrejmé, že zložky síl rovnobežné s osou x_3 , majú otáčavý účinok okolo tejto osi nulový. Sily, ktoré vytvárajú moment okolo osi x_3 , sú znázornené na obr. 3.11.

Momentová podmienka okolo osi x_3 bude mať tvar

$$\begin{aligned} & - \left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{11} dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \\ & + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \\ & + \dots - K_1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} + K_2 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} = 0 \end{aligned}$$



Obr. 3.11
K podmienkam rovnováhy

Podelením rovnice s $dx_1 dx_2 dx_3$ a s uvažovaním, že v limite $dx_1 = dx_2 = dx_3 \rightarrow 0$, dostaneme

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (3.5-4)$$

Podobným spôsobom by sme dostali pre ostatné zložky výrazy

$$\tau_{31} = \tau_{13}$$

$$\tau_{32} = \tau_{23}$$

Symetrická vlastnosť tenzora napätia nám vlastne potvrdzuje zákon združených šmykových napätí, ktorý poznáme zo základov náuky o pružnosti a pevnosti materiálov.

Ako sme už spomínali, pri odvodzovaní Cauchyho formuly predpokladáme protipólny účinok dvoch častí telesa na seba len v silách. Ak uvažujeme existenciu momentov, ktoré sú proporcionálne k objemu elementu, a ktoré sa snažia teoreticky otočiť jeden hmotný bod oproti druhému, vlastnosť symetrie tenzora napätia nebude viac platná. Nech napr. v elementárnom hranolčeku pôsobí okolo osi x_3 moment $C_3 dx_1 dx_2 dx_3$. Potom namiesto rovnice (3.5-4) dostaneme

$$\tau_{12} - \tau_{21} + C_3 = 0 \quad (3.5-5)$$

Maxwell uvádza, že nenulové momenty telesa existujú v magnetických poliach, v dielektrických materiáloch v elektrickom poli, ktoré má rozdielne polarizačné roviny. Ak je elektromagnetické pole také intenzívne a hladina napätia také nízka, že τ_{12} a C_3 majú rovnakú veľkosť, potom vzhľadom na (3.5-5) τ_{12} nemôže sa rovnať τ_{21} . V tomto prípade tenzor napätia τ_{ij} nie je symetrický. Ak C_3 je malý oproti τ_{12} , potom ho môžeme zanedbať a potvrdíme platnosť (3.5-4). Pri vývoji fyzikálnej teórie, určenej pre inžinierske potreby, je veľmi dôležité dosiahnuť čo najjednoduchšiu formuláciu s ohľadom na presnosť riešenia. Rozhodnutie o tom, či tenzor napätia budeme považovať za symetrický, alebo nie, musí záležať na charaktere teórie. Pre inžiniersku mechaniku stačí predpokladať symetrickosť tenzora napätia.

V týchto skriptách budeme tento predpoklad uvažovať. Pre klasické kontinuum budú teda platiť rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + K_i = 0 \quad (3.5-6)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

3.6 ZMENA ZLOŽIEK NAPÄTIA PRI TRANSFORMÁCII SÚRADNICOVÉHO SYSTÉMU

V časti 3.4 sme pomocou Quocientového pravidla ukázali, že napätie je tenzorom druhého stupňa, čiže potom platí preň transformačný zákon

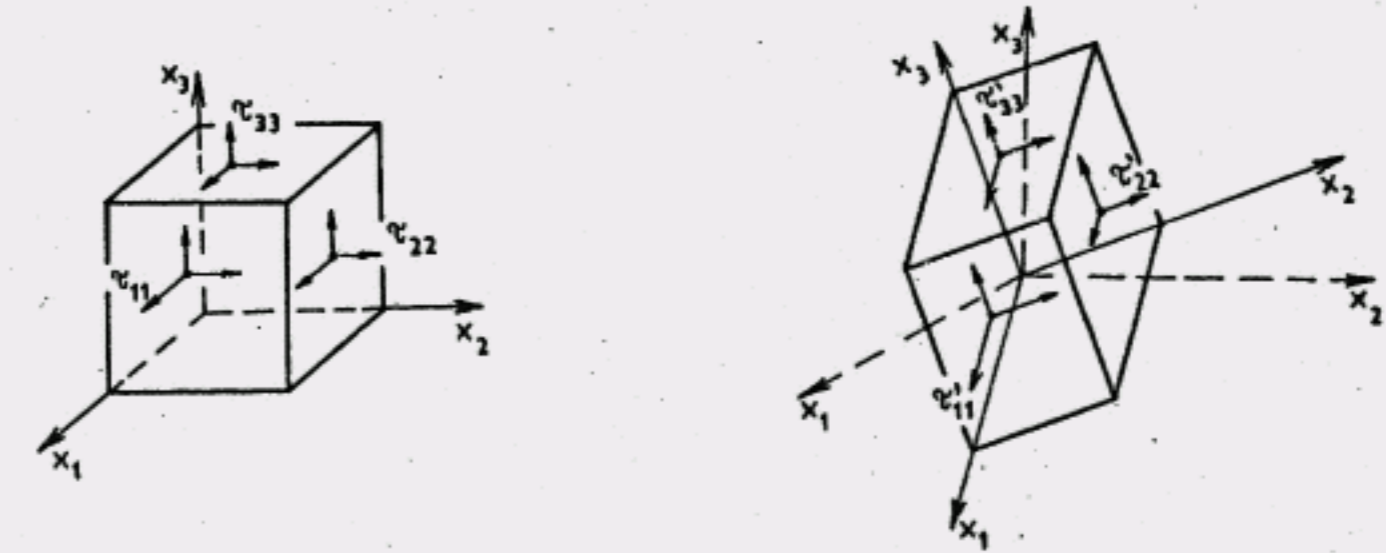
$$\tau'_{ij} = a_{il} a_{jm} \tau_{lm} \quad (3.6-1)$$

kde a_{ij} sú smerové kosínusy transformácie súradnicového systému natočením. Vzťah (3.6-1) môžeme dostať aj z nasledujúcej úvahy. Majme definovaný tenzor napätia τ_{lm} vzhľadom na pravouhlý súradnicový systém x_1, x_2, x_3 . Nech druhý pravouhlý súradnicový systém s tým istým počiatkom je oproti pôvodnému systému natočený (obr. 3.12), so súradnicovými osami x'_1, x'_2, x'_3 .

Súradnice oboch systémov sú spojené lineárnym vzťahom

$$x'_i = a_{il} x_l \quad (l = 1, 2, 3) \quad (3.6-2)$$

kde a_{il} sú smerové kosínusy uhlov medzi osou x'_i vzhľadom na osi x_l . Cauchyho formula nám stanovuje, že ak dS je elementárna plocha, ktorej vonkaj-



Obr. 3.12
Transformácia zložiek napätia pri natočení súradnicového systému

Nech normála ν má zložky ν_m , potom na nej pôsobiaci vektor napätia T má zložky

$$T_l = \tau_{ml} \nu_m \quad (3.6-3)$$

Nech normála ν je rovnobežná s osou x'_1 , čiže

$$\nu_1 = a_{i1}, \quad \nu_2 = a_{i2}, \quad \nu_3 = a_{i3}$$

Potom vektor napätia T bude mať zložky

$$T_l = a_{im} \tau_{ml}$$

Zložky vektora T v smere osi x'_j budú dané súčynom T_l a smerových kosínusov a_{jl} . Pre zložky napätia dostaneme

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} &= \text{priemet } T^i \text{ do smeru } x'_j \\ &= a_{j1} T_1 + a_{j2} T_2 + a_{j3} T_3 = a_{j1} a_{im} \tau_{m1} + a_{j2} a_{im} \tau_{m2} + \\ &+ a_{j3} a_{im} \tau_{m3} \end{aligned}$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme

$$\tau'_{ij} = a_{im} a_{jl} \tau_{ml} \quad (3.6-4)$$

Rovnica (3.6-4) potvrdzuje matematickú definíciu τ_{ij} ako tenzora druhého stupňa v Euklidovskom priestore.

3.7 ZLOŽKY NAPÄTIA V ORTOGONÁLNO KRIVOČIARYCH SÚRADNICIACH (CYLINDRICKÉ)

Cylindrické súradnice sa používajú v mechanike kontinua, ak sú okrajové podmienky pre takýto systém jednoduchšie (napr. prúdenie v kruhovom cylindrickom valci). Ak chceme študovať rozdelenie napätia v priestore, použijeme sférické súradnice.

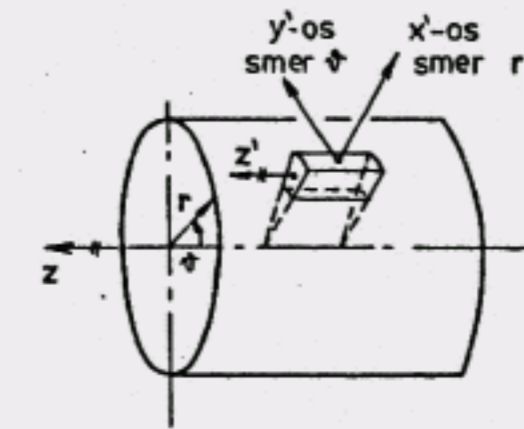
Je zaužívané označovať zložky napätia v smere krivočiarych súradníc indexami zhodnými s označením súradnicových osí. Napríklad pre cylindrické súradnice r, θ, z , ktorých vzájomný súvis s pravouhlými súradnicami je

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.6-1)$$

Označíme zložky tenzora napätia v bode (r, θ, z)

$$\begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.6-2)$$

Aby sme vyjadrili vzájomný vzťah týchto zložiek napätia s napätiami $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$, položíme do bodu (r, θ, z) pravouhlý súradnicový systém x', y', z' . Nech os x' ide v smere narastajúcej hodnoty súradnice r , os y' v smere narastajúceho θ a z' je rovnobežná s osou z (obr. 3.13).



Obr. 3.13
Zložky napätia v cylindrických súradniciach

Ďalej možno definovať zložky napätia v bode (r, θ, z) v klasickom označení $\tau_{x'x'}, \tau_{x'y'}, \dots$. My však chceme určiť zložky napätia v zmysle (3.7-2) a môžeme vzhľadom na identifikáciu r, θ, z s x', y', z' písať

$$\tau_{rr} = \tau_{x'x'}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{x'y'}, \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{y'y'}, \text{ atď.}$$

Pretože súradnice x', y', z' a x, y, z sú pravouhlé, môžeme aplikovať transformačný zákon (3.6-1). Smerové kosínusy uhlov medzi osami x', y', z' a x, y, z sú (kap. 2.1.1)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7-3)$$

Inverziou vzťahu (3.6-1) dostaneme

$$\tau_{ij} = a_{li} a_{mj} \tau'_{lm}$$

a napr. pre $i = j = 1$ máme

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \sigma_x &= a_{11} a_{m1} \tau'_{1m} = a_{11} a_{m1} \tau'_{1m} + a_{21} a_{m1} \tau'_{2m} + a_{31} a_{m1} \tau'_{3m} = \\ &= a_{11} a_{11} \tau'_{11} + a_{11} a_{21} \tau'_{12} + a_{11} a_{31} \tau'_{13} + \\ &+ a_{21} a_{11} \tau'_{21} + a_{21} a_{21} \tau'_{22} + a_{21} a_{31} \tau'_{23} + \\ &+ a_{31} a_{11} \tau'_{31} + a_{31} a_{21} \tau'_{32} + a_{31} a_{31} \tau'_{33}. \end{aligned} \quad (3.7-4)$$

Dosadením (3.7-3) do (3.7-4) a príslušnej zámene (napr. $\tau'_{11} \equiv \tau_{x'x'} \equiv \sigma_r$ atď), môžeme pre $i = j = 1$, a ostatné kombinácie indexov písať

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_z &= \sigma_z \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin\theta \cos\theta + \tau_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \tau_{zx} &= \tau_{zr} \cos\theta - \tau_{z\theta} \sin\theta \\ \tau_{zy} &= \tau_{zr} \sin\theta + \tau_{z\theta} \cos\theta \end{aligned} \quad (3.7-5)$$

Podobným spôsobom môžeme dospieť k zložkám napätia v iných, často používaných súradnicových sústavách.

3.8 OKRAJOVÉ PODMIENKY PRE NAPÄTIE

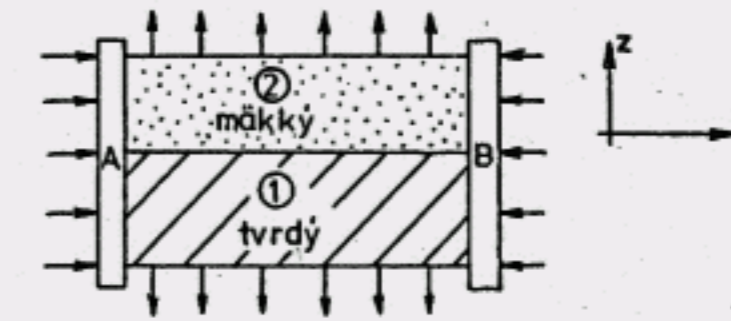
Problémy, ktoré rieši mechanika, majú obvykle nasledujúci charakter:

Vieme spravidla niečo o silách, rýchlostiach alebo posunutíach na povrchu telesa, prostredia, prípadne tekutiny, a zaujíma nás, aký dôsledok pôsobenia týchto príčin vznikne vo vnútri telesa. Aby sme rozšírili naše poznanie vo vnútri telesa, popíšeme danú úlohu diferenciálnymi rovnicami a známe fakty o vonkajšom pôsobení zahrnieme do okrajových podmienok.

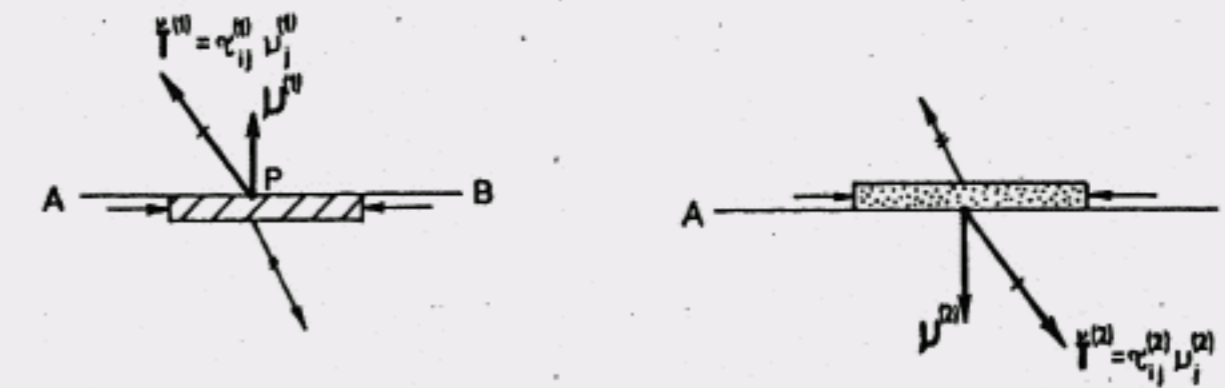
Na povrchu telesa alebo na styčnej ploche dvoch telies pôsobia plošné sily, ktoré musia byť na oboch stranách styčnej, príp. myslenej plochy rovnaké. To tvrdí Cauchyho formula, na ktorej je postavený koncept napätia.

Uvažujme teleso tvaru kocky zložené z dvoch častí, jedna časť je z tvrdého a druhá časť z mäkkého materiálu (obr. 3.14). Nech je tento blok stláčaný medzi dvoma rovinami, obidva materiály budú namáhané. Situácia v bode P roviny AB je znázornená na obr. 3.15.

V tvrdom materiáli, na pozitívnej strane styčnej plošky v bode P, pôsobí vektor napätia $\vec{T}^{(1)}$, ktorého zložky sú $\tau_{ij}^{(1)} \nu_j^{(1)}$, kde $\tau_{ij}^{(1)}$ je tenzor na-



Obr. 3.14
Model stláčania telesa



Obr. 3.15
Vektor napätia v bode P roviny AB

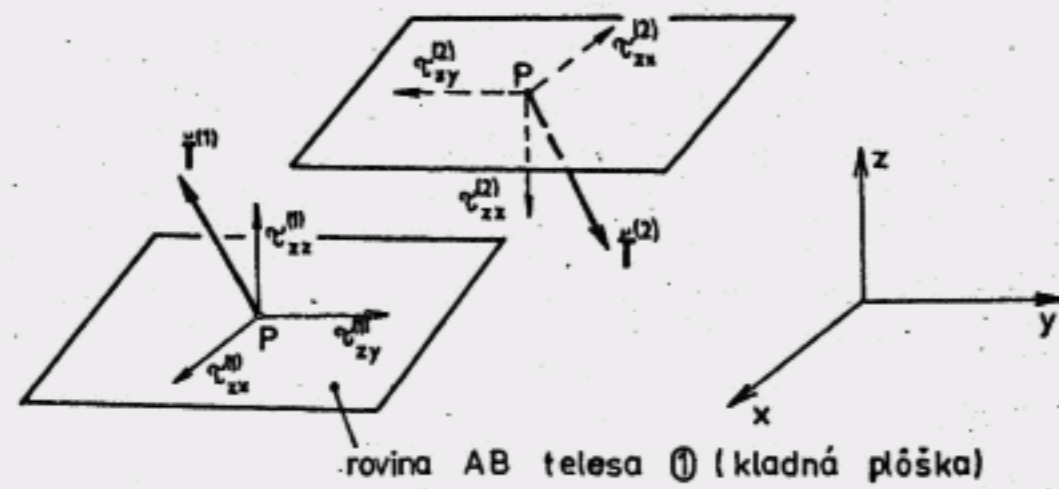
pätia v bode P tvrdého materiálu. Pre mäkký materiál musí v bode P existovať podobný vektor napätia $\vec{T}^{(2)}$ so zložkami $\tau_{ij}^{(2)} \nu_j^{(2)}$. Vzhľadom na Cauchyho formulu musí byť

$$\vec{T}^{(1)} = \vec{T}^{(2)} \quad (3.8-1)$$

Explicitnejšie vyjadrené, nech medziplocha AB leží v rovine x, y ($x \equiv x_1$, $y \equiv y_2$) a nech os $z \equiv x_3$ je kolmá na túto rovinu. Potom z vektorovej rovnice (3.8-1), vzhľadom na obr. 3.16, dostaneme tri rovnice

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{(1)} &= \tau_{zz}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(1)} &= \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(1)} &= \tau_{yz}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.8-2)$$

to sú okrajové podmienky pre napätie média ① a ② v ich styčnej ploche.



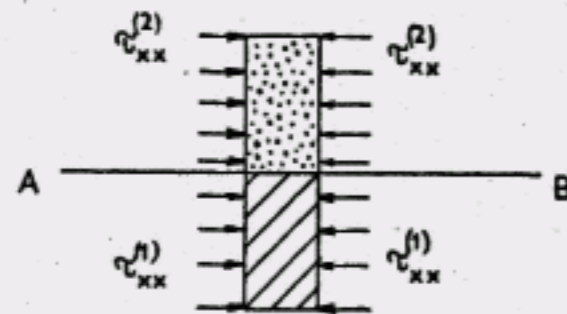
Obr. 3.16

Zložky tenzora napätia v styčnej rovine AB

Podmienky (3.8-2) však nič nehovoria o zložkách napätia τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} . Ak moduly pružnosti materiálu ① a ② sú rôzne, potom pomerne skrátene nebudú pre obidva materiály rovnaké a vo všeobecnosti

$$\tau_{xx}^{(1)} \neq \tau_{xx}^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} \neq \tau_{xy}^{(2)}, \quad \tau_{yy}^{(1)} \neq \tau_{yy}^{(2)}$$

Ako vidieť z obr. 3.17, tieto rovnosti neodporujú podmienkam rovnováhy.



Obr. 3.17

Rovnovážny stav zložiek napätia

Špeciálny prípad nastane vtedy, keď materiál ② je taký poddajný, že v ňom pôsobiace napätia sú zanedbateľné oproti napätiam v materiáli ① (napr. vzduch a oceľ). Potom hovoríme o nezataženom (voľnom) povrchu a pre tento okraj dostaneme podmienky

$$\tau_{zz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0$$

Na druhej strane, ak napätosť v médiu ② je známa, potom môže byť uvažovaná ako vonkajšie zataženie pôsobiace na médium ①. Okrajové podmienky pre napätie budú mať potom tvar

$$\tau_{nn} = p_1, \quad \tau_{nt_1} = p_2, \quad \tau_{nt_2} = p_3$$

Kde p_1, p_2, p_3 sú špecifické funkcie polohy a času, a n, t_1, t_2 je pravouhlý systém súradníc, pričom os n je zároveň vonkajšou normálou plochy.

Vo všeobecnosti, každá plocha oddeľuje dva priestory. Napríklad uvažujme prúd vzduchu vplyvom vetra na budovu. Vplyv vetra považujeme za vonkajšie zataženie na povrch budovy. Naopak, v dynamike tekutín sa budova považuje ako prekážka v prúde vzduchu. To znamená, že tá istá styčná plocha predstavuje dva rôzne typy okrajových podmienok pre dve médiá. Pri ich stanovovaní sa problém zjednodušuje, a napr. pre prúd vzduchu sú elastické deformácie budovy zanedbateľné, a preto sa budova bude považovať za dokonale tuhé teleso. Naproti tomu pri analýze budovy sú tieto deformácie podstatné a budova sa bude považovať za teleso, ktoré je schopné deformácie.

1.9 Hlavné napätia a hlavné osi

Medzi dôležité pojmy v koncepte napätia patria hlavné napätia, invarianty a deviatory napätia, maximálne šmykové napätia. V tejto kapitole odvodíme a popíšeme tieto základné veličiny a poukážeme na ich praktické využitie.

1.9.1 Úvodné pojmy

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že na určenie napätosti v nejakom bode telesa je treba poznať šesť lineárne nezávislých zložiek z celkového počtu deviatich zložiek tenzora napätia.

Tieto deväť zložiek napätia možno usporiadať do tvaru symetrickej matice

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (\tau_{ij} = \tau_{ji})$$

ktorej komponenty, pri transformácii súradnicového systému podliehajú transformačnému zákonu tenzora druhého stupňa.

Symetrická vlastnosť tenzora napätia umožňuje hľadať taký súradnicový systém, do ktorého sa bude matica zložiek napätia transformovať na diagonálnu maticu

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Zložky napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazývame hlavnými napätiami, a súradnicové osi, ku ktorým je táto matica diagonálna, nazývame hlavnými osami. Súradnicové roviny, zodpovedajúce hlavným osiam, sú hlavnými rovinami. Fyzikálne, každé z hlavných napätí je normálovým napätím a pôsobí v hlavnej rovine. Je zrejme, že šmykové napätie sa v týchto rovinách rovná nule. Pri praktických výpočtoch napätia v bode telesa je finálnou požiadavkou určenie hlavných osí a hlavných napätí. Nás bude zaujímať nielen spôsob ich určenia, ale aj ich praktický význam. Ďalej ukážeme, že symetria tenzora napätia je základným predpokladom pre existenciu hlavných súradnicových osí.

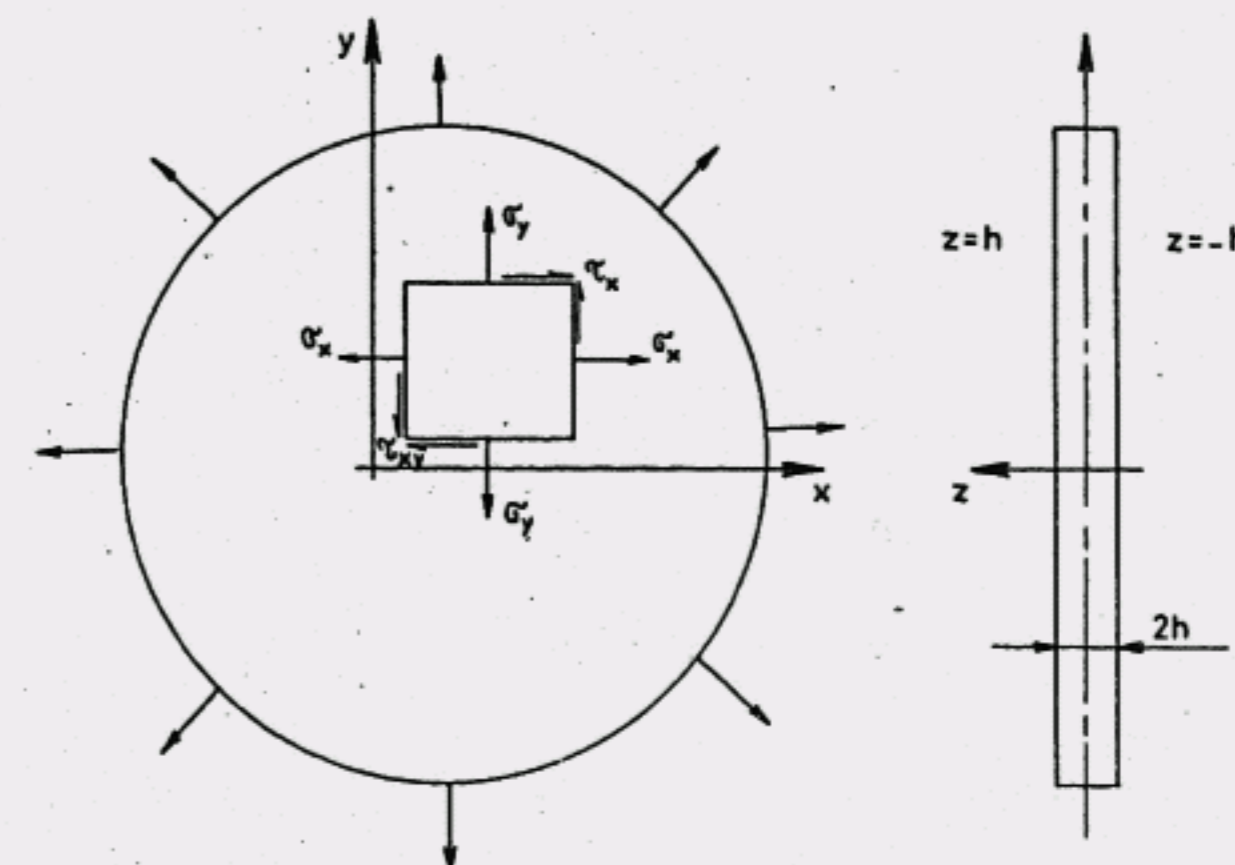
3.9.2 Rovinná napätosť

Pre lepšiu názornosť budeme sa najskôr zaoberať rovinným prípadom napätosti, pričom zložky napätia označíme v zmysle zaužívaných symbolov v základnej pružnosti a pevnosti.

Uvažujme praktický prípad, keď je tenká membrána namáhaná silami, pôsobiacimi na jej koncoch v rovine membrány (obr. 3.18). Strany membrány $z = \pm h$ sú nezatažené a preto zložky napätia

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (3.9.2-1)$$

Je zrejme, že napätia σ sú normálové a τ sú napätiami šmykovými. Napätosť, pri ktorej platí rovnica (3.9.2-1), hovoríme rovinná napätosť v rovine xy. Zložky napätia rovinatej napätosti potom skoncentrujeme do symetrickej matice



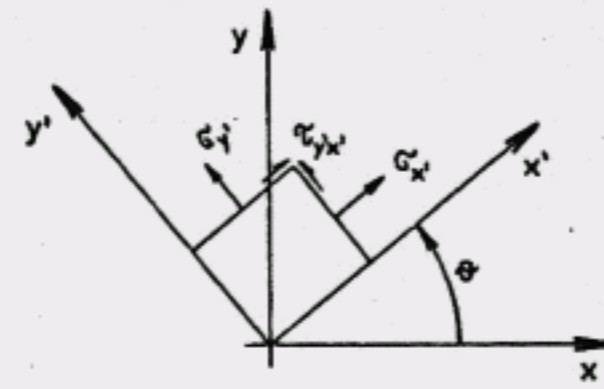
Obr. 3.18
Rovinná napätosť

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ako sme pre názornosť označili $\sigma_x = \tau_{11}, \sigma_y = \tau_{22}, \tau_{xy} = \tau_{12}$. Uvažujme ľubovoľné natočenie súradnicového systému x, y do systému x', y' , a v zmysle časti 3.6 nájdeme zodpovedajúce zložky napätia

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podľa obr. 3.19 možno smerové kosínusy medzi dvoma pravouhlými súradnicami popísať v závislosti od hodnoty uhla natočenia θ . Matica smerových kosínusov je



Obr. 3.19
Zmena súradníc pri rovinnej napätosti

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9.2-2)$$

Zapísaním x, y a x', y' namiesto x_1, x_2 a x'_1, x'_2 ; σ_x pre τ_{11} ; atď. ..., a dosadením smerových kosínusov (3.9.2-2) do transformačnej rovnice (3.6-1) dostaneme zložky napätia v natočenom súradnicovom systéme

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{x'y'} &= (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + 2 \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.9.2-3)$$

Pretože

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

môžeme predchádzajúce rovnice napísať v známom tvare

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.9.2-4)$$

Upravovaním tohto systému rovníc môžeme zistiť, že

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} + \sigma_{y'} &= \sigma_x + \sigma_y \\ \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial \theta} &= 2 \tau_{x'y'} \\ \frac{\partial \sigma_{y'}}{\partial \theta} &= -2 \tau_{x'y'} \end{aligned} \quad (3.9.2-5)$$

Ak tangens uhla natočenia

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

potom

$$\tau_{x'y'} = 0 \quad (3.9.2-6)$$

Ak smery súradnicových osí x', y' zodpovedajú hodnote uhla θ v súlade s (4.2-6), nazývame ich hlavnými smermi, osi x' a y' nazývame potom hlavnými osami, a $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ hlavnými napätiami. Ak osi x' a y' sú hlavnými osami, potom $\tau_{x'y'} = 0$ a $\sigma_{x'}$ je buď maximálnou alebo minimálnou hodnotou napätia vzhľadom na voľbu uhla natočenia θ . To isté platí pre napätie $\sigma_{y'}$. Substitúciou hodnoty uhla θ z (3.9.2-6) dp (4.2-4) dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Podobným spôsobom dostaneme maximálnu hodnotu šmykových napätí $\tau_{x'y'}$,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

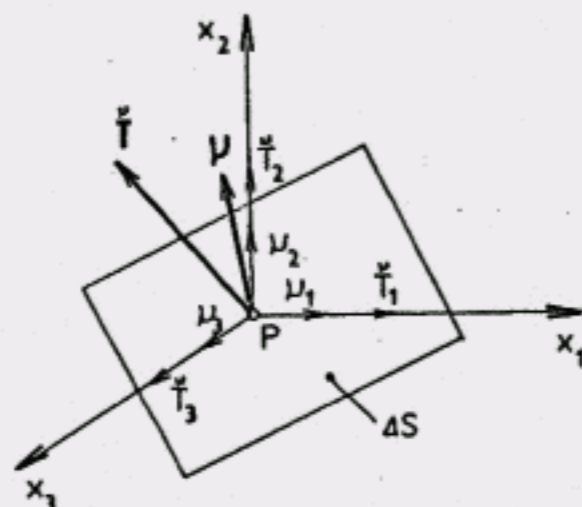
ktorá leží v rovine natočenej o uhol $\pm 45^\circ$ od hlavných smerov daných vzťahom (4.2-6).

Geometrickú interpretáciu uvedených rovníc urobil Otto Mohr do tzv. Mohrových kružníc. Týmto kružnicami sa však nebudeme zaoberať, pretože už predpokladáme ich znalosť zo základného kurzu pružnosti a pevnosti materiálov.

3.9.3 Priestorová napätosť

Zovšeobecnením poznatkov získaných pri rovinnej napätosti prejdeme na priestorovú napätosť, pričom sa vrátíme k pôvodnému označeniu pravouhlého súradnicového systému x_1, x_2, x_3 . Vo všeobecnom stave napätia vektor napätia, pôsobiaci na ploche s vonkajšou normálou ν , závisí od smeru tejto normály. V uvažovanom bode telesa sa bude uhol medzi vektorom napätia a normálou ν meniť v závislosti od orientácie plochy. Bude preto zrejmé nájsť takú plochu prechádzajúcu sledovaným bodom, že vektor napätia bude na ňu kolmý. V skutočnosti existujú tri ortogonálne plochy, ktoré plne vyhovujú tejto podmienke v každom bode telesa. Tieto plochy nazývame hlavnými rovinami, ich normály hlavnými osami, a v nich pôsobiace napätia - hlavnými napätiami.

Uvažujme elementárnu rovinu s jednotkovým normálovým vektorom ν v bode P tejto roviny. Nech v uvažovanom bode pôsobí vektor napätia \vec{T} , ktorý je vo všeobecnosti rôznobežný s ν . Do bodu P položíme pravouhlý súradnicový systém x_i , $i = 1, 2, 3$ (viď obr. 3.20).



Obr. 3.20
Napätosť v bode roviny

Vzhľadom na zvolený súradnicový systém má normála ν plošky ΔS zložky do súradnicových osí ν_1, ν_2, ν_3 a vektor napätia má zložky T_1, T_2, T_3 .

Potom pre vektor napätia môžeme písať

$$\vec{T}_i \nu_i = T_1 \nu_1 + T_2 \nu_2 + T_3 \nu_3 \quad (3.9.3-1)$$

Daným bodom P môžeme preložiť nekonečné množstvo rovín s príslušnými vektormi napätia a normálovými vektormi. Potom napätosť v bode P je charakterizovaná súhrnom napätosti v jednotlivých rovinách prechádzajúcich týmto bodom.

V predchádzajúcich častiach sme ukázali, že na určenie napätosti v bode stačí poznať 9 zložiek napätia, ktoré ležia v troch ortogonálnych ploškách, prechádzajúcich bodom P. (V praxi si hmotný bod nahradzame elementárnym hranolčekom a v jeho rovinách stanovujeme 9 zložiek tenzora napätia τ_{ij} .)

Pre zložky vektora napätia z Cauchyho formuly dostaneme

$$T_i \nu_i = \tau_{ji} \nu_j \quad (3.9.3-2)$$

Uvažujme teraz prípad, v ktorom súradnicový systém natočíme tak, že je hlavným súradnicovým systémom (HSS), a normálový vektor ν plošky ΔS je totožný so smerom niektorej hlavnej súradnicovej osi. Ďalej predpokladajme, že σ je zodpovedajúce hlavné napätie. Potom zložky vektora napätia budú (je zrejmé, že šmykové napätie je nulové)

$$T_i \nu_i = \sigma \nu_i \quad (3.9.3-3)$$

Porovnaním (3.9.3-2) a (3.9.3-3) máme

$$\sigma \nu_i = \tau_{ji} \nu_j \quad (3.9.3-4)$$

príčom po zohľadnení, že $\nu_i = \delta_{ji} \nu_j$, z (3.9.3-4) dostaneme

$$(\tau_{ji} - \sigma \delta_{ji}) \nu_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9.3-5)$$

Výraz (3.9.3-5) je systém troch rovníc pre výpočet smerových kosínusov (ν_1, ν_2, ν_3) takej roviny, na ktorú je vektor napätia kolmý. Smerové kosínusy musia však spĺňať podmienku $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Tento systém predstavuje pľedenie vlastných hodnôt tenzora napätia a má nenulové riešenie ν_1, ν_2, ν_3 , keď determinant koeficientov sústavy rovníc je nulový.

$$|\tau_{ji} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (3.9.3-6)$$

Po zámene sčítacích indexov môžeme písať

$$|\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{vmatrix} =$$

$$= -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (3.9.3-7)$$

(3.9.3-7) je kubická rovnica, ktorej koreňmi sú hlavné napätia. Pre každú hodnotu hlavného napätia možno určiť jednotkovú normálu ν plošky, na ktorú je vektor napätia kolmý.

Rovnica (3.9.3-7) je vlastne rovnicou vlastného tvaru tenzora napätia, kde

$$I_1 = |\tau_{ii}| = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad (3.9.3-8)$$

$$I_2 = \left| \frac{1}{2} (\tau_{ii} \tau_{jj} - \tau_{ij} \tau_{ij}) \right| = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{33} & \tau_{31} \\ \tau_{13} & \tau_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix} \quad (3.9.3-9)$$

$$I_3 = \epsilon_{ijk} \tau_{i1} \tau_{j2} \tau_{k3} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad (3.9.3-10)$$

Rovnica (3.9.3-7) platí pre každý súradnicový systém a teda platí aj pre hlavný súradnicový systém (HSS), kde je tenzor napätia zadaný zložkami

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \sigma_1 \\ \tau_{22} &= \sigma_2 \\ \tau_{33} &= \sigma_3 \\ \tau_{ij} &= 0, \quad \text{pre } i \neq j \end{aligned}$$

To znamená, že

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9.3-11)$$

a odtiaľ

$$(\sigma_1 - \sigma) (\sigma_2 - \sigma) (\sigma_3 - \sigma) = 0 \quad (3.9.3-12)$$

resp.

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (3.9.3-13)$$

kde

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.9.3-14)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad (3.9.3-15)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (3.9.3-16)$$

Protože hlavné napätia charakterizujú fyzikálny stav napätia v bode, sú nezávislé od voľby vzťažného súradnicového systému. Taktiež rovnica (3.9.3-7) nie je závislá od vzťažného súradnicového systému, a preto je ekvivalentná s rovnicou (3.9.3-13), čo má za následok invariantnosť koeficientov I_1, I_2, I_3 vzhľadom na natočenie súradnicového systému. I_1, I_2, I_3 nazývame invariantami tenzora napätia.

Dá sa dokázať, že pre symetrický tenzor napätia sú všetky tri hlavné napätia reálne, a príslušné hlavné súradnicové roviny sú ortogonálne. Nech ν^1, ν^2, ν^3 sú jednotkové normálové vektory v smere súradnicových osí so zložkami $\nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^3$ ($i = 1, 2, 3$), ktoré sme dostali riešením rovnice (4.3-5) postupným dosadzovaním za $\sigma \rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$(\tau_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) \nu_j^1 = 0$$

$$(\tau_{ij} - \sigma_2 \delta_{ij}) \nu_j^2 = 0$$

$$(\tau_{ij} - \sigma_3 \delta_{ij}) \nu_j^3 = 0$$

Vynásobením prvej rovnice s ν_i^2 , druhej s ν_i^1 a sumáciou cez i a ich vzájomným odčítaním dostaneme rovnicu

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \nu_i^1 \nu_i^2 = 0 \quad (3.9.3-17)$$

Vzhľadom na symetriu tenzora napätia sme pritom použili rovnosť

$$\tau_{ij} \nu_i^1 \nu_j^2 = \tau_{ji} \nu_i^2 \nu_j^1 = \tau_{ij} \nu_j^1 \nu_i^2 \quad (3.9.3-18)$$

Posledný člen v rovnici (3.9.3-18) sme dostali premenovaním sčítacích indexov.

Nech hlavné napätia $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, potom z (3.9.3-18) a ďalších dvoch získaných tou istou úpravou rovníc druhej a tretej, resp. prvej a tretej

$$v_i^1 v_i^2 = 0, \quad v_i^2 v_i^3 = 0, \quad v_i^3 v_i^1 = 0$$

čo vlastne znamená, že hlavné vektory sú navzájom ortogonálne a pre danú napätosť v bode existuje len jediný HSS.

Ak $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, potom v_i^3 je pevne stanovený, ale môžeme určiť nekonečný počet párov vektorov v_i^1 a v_i^2 , ktoré sú kolmé k v_i^3 . Je to napríklad pri axiálnej symetrii. HSS je tu určený osou symetrie a dvoma ľubovoľnými osami, kolmými na túto os.

Ak $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, potom každý pravouhlý súradnicový systém možno zvoliť za HSS tenzora napätia.

Ak vzťažný súradnicový systém je zhodný s hlavnými osami, potom matica zložiek napätia je

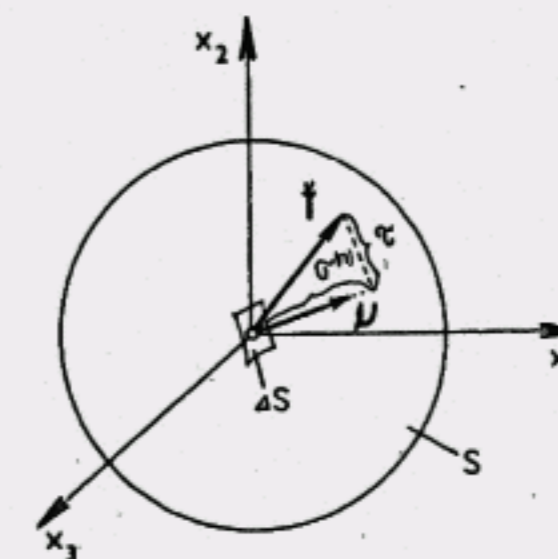
$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.9.3-19)$$

3.9.4 Šmykové napätia

Uvažujme plošný element s jednotkovou vonkajšou normálou ν (so zložkami ν_i), na ktorej pôsobí vektor napätia $\overset{\nu}{T}$, ($T_i = T_{ji} \nu_j$), (obr. 3.21).

Priemet $\overset{\nu}{T}$ do smeru normály ν je normálovým napätím, pôsobiacim na plošný element, ktoré označíme $\sigma_{(n)}$. Tento priemet je vlastne skalárny súčin oboch vektorov

$$\sigma_{(n)} = \overset{\nu}{T}_i \nu_i = T_{ji} \nu_j \nu_i \quad (3.9.4-1)$$



Obr. 3.21
Šmykové napätia

Veľkosť druhej zložky vektora napätia, ktorá je tangenciálnou zložkou, dostaneme z Pythagorovej vety

$$\tau^2 = |\overset{\nu}{T}|^2 - \sigma_{(n)}^2 \quad (3.9.4-2)$$

Nech hlavné osi sú totožné so vzťažnými osami a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sú príslušnými hlavnými napätiami, potom

$$\begin{aligned} \overset{\nu}{T}_1 &= \sigma_1 \nu_1 \\ \overset{\nu}{T}_2 &= \sigma_2 \nu_2 \\ \overset{\nu}{T}_3 &= \sigma_3 \nu_3 \end{aligned} \quad (3.9.4-3)$$

$$\overset{\nu}{T}^2 = (\sigma_1 \nu_1)^2 + (\sigma_2 \nu_2)^2 + (\sigma_3 \nu_3)^2$$

Normálové napätie podľa (3.9.4-1) potom bude

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1 \nu_1^2 + \sigma_2 \nu_2^2 + \sigma_3 \nu_3^2 \quad (3.9.4-4)$$

resp.

$$\sigma_{(n)}^2 = [\sigma_1 \nu_1^2 + \sigma_2 \nu_2^2 + \sigma_3 \nu_3^2]^2 = [\sigma_i \nu_i^2]^2 \quad (3.9.4-5)$$

Dosadením do (3.9.4-2) a s uvažovaním, že

$$(\nu_1)^2 - (\nu_1)^4 = (\nu_1)^2 [1 - (\nu_1)^2] = (\nu_1)^2 [(\nu_2)^2 + (\nu_3)^2]$$

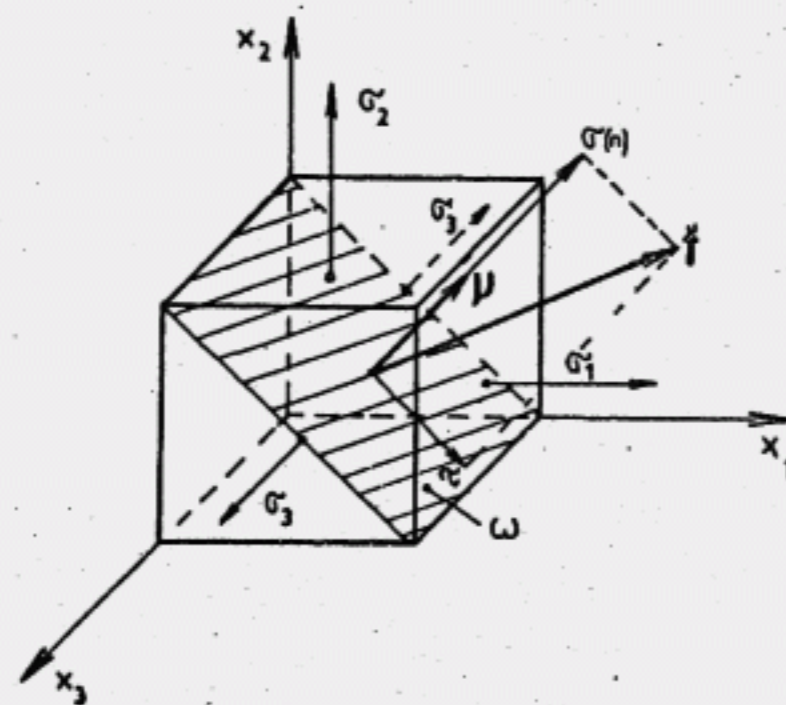
máme

$$\begin{aligned} \tau^2 = & (\nu_1)^2 (\nu_2)^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\nu_2)^2 (\nu_3)^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ & + (\nu_3)^2 (\nu_1)^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \end{aligned} \quad (3.9.4-6)$$

Ak napr. $\nu_1 = \nu_2 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\nu_3 = 0$, potom

$$\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

je šmykové napätie v rovine ω (obr. 3.22).



Obr. 3.22
Hlavné napätia

Z obr. 3.22 vidieť, že tretie hlavné napätie neovplyvňuje podmienky rovnováhy v rovine ω , čo má za následok považovať napätosť v tejto ploške za rovinnú.

3.9.5 Deviator napätia

Tenzor

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (3.9.5-1)$$

nazývame deviačným tenzorom napätia, δ_{ij} je Kroneckerova delta a σ_0 je stredné napätie

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \\ &= \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \text{tr} T \end{aligned} \quad (3.9.5-2)$$

Prídom I_1 je prvým invariantom a $\text{tr} T$ je stopou tenzora napätia. Podľa (3.9.5-1) pre tenzor napätia dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = \tau'_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij} = & \begin{pmatrix} \tau_{11} - \sigma_0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma_0 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9.5-3)$$

To znamená, že sa rovná súčtu deviačného tenzora (tiež deviatora) napätia a nulového tenzora (má len diagonálne členy rôzne od nuly). Toto rozdelenie má veľký význam najmä pri popise plastického správania materiálu.

Deviator napätia je tiež tenzorom druhého stupňa a je tenzorom symetrickým.

Pre jeho invariant J_1 platí

$$J_1 = \tau'_{ii} = 0 \quad (3.9.5-4)$$

Ak položíme determinant rovnice (3.9.5-5) rovný nule

$$|\sigma'_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}| = 0 \quad (3.9.5-5)$$

dostaneme kubickú rovnicu

$$\sigma_0^3 - J_2 \sigma_0 + J_3 = 0 \quad (3.9.5-6)$$

Pre ostatné dva invarianty máme

$$J_2 = 3 \sigma_0^2 - I_2 \quad (3.9.5-7)$$

$$J_3 = I_3 - I_2 \sigma_0 + 2 \sigma_0^3 = I_3 + J_2 \sigma_0 - \sigma_0^3 \quad (3.9.5-8)$$

pričom I_2 a I_3 sú druhým a tretím invariantom tenzora napätia. Po dosadení za I_2 do (3.9.5-7) dostaneme

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + (\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{31})^2$$

alebo tiež

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (3.9.5-9)$$

Ukážeme teraz, že hlavné osi tenzora napätia a deviatora napätia sú zhodné.

Nech osi x_i , $i = 1, 2, 3$ sú totožné s HSS. Ak σ'_1 , σ'_2 a σ'_3 sú hlavnými deviatorickými napätiami

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_0, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_0, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_0$$

potom invarianty

$$J_2 = -(\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1) \quad (3.9.5-10)$$

$$J_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

Žiadorné znamienko pri J_2 vyplýva zo znamienkovej voľby v rovnici (3.9.5-6). Dosadením výrazov pre hlavné deviatorické napätia, pre druhý invariant dostaneme

$$J_2 = -(\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0) - (\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0)(\sigma_1 - \sigma_0) =$$

$$= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + 2 \sigma_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3 \sigma_0^2 =$$

$$= -I_2 + 6 \sigma_0^2 - 3 \sigma_0^2 = 3 \sigma_0^2 - I_2$$

to je dôkaz pre (3.9.5-7). Podobným spôsobom by sme dokázali platnosť vzťahov (3.9.5-10).

3.9.6 Lamého elipsoid napätia

Na každej elementárnej rovine, prechádzajúcej sledovaným bodom, s vonkajšou normálou ν , (ν_i), pôsobí vektor napätia $\overset{\nu}{T}$, ($\overset{\nu}{T}_i$), ktorého zložky sú dané Cauchyho formulou

$$\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ji} \nu_j$$

Nech hlavné osi sú totožné so zvoleným súradnicovým systémom $i = 1, 2, 3$ a hlavné napätia sú σ_i , $i = 1, 2, 3$. Potom

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{pre } i \neq j$$

$$\overset{\nu}{T}_1 = \sigma_1 \nu_1, \quad \overset{\nu}{T}_2 = \sigma_2 \nu_2, \quad \overset{\nu}{T}_3 = \sigma_3 \nu_3 \quad (3.9.6-1)$$

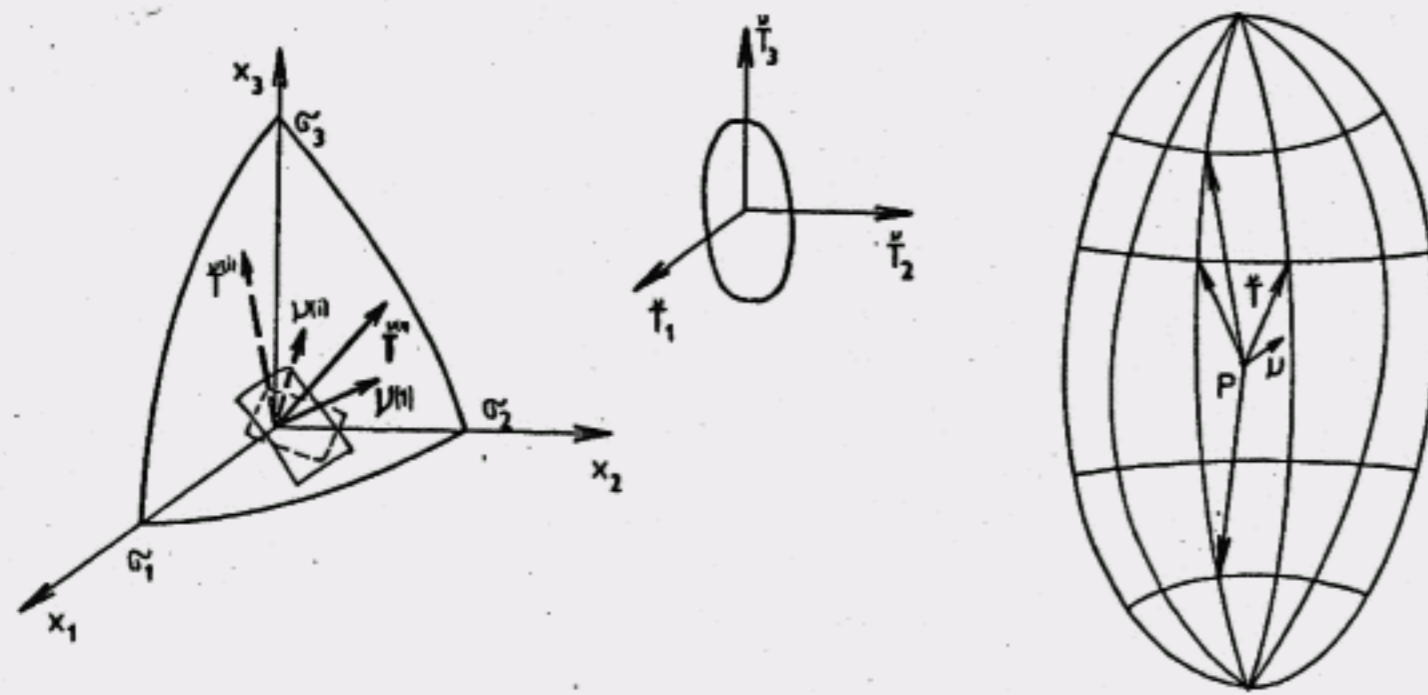
Pretože ν je jednotkovým vektorom, bude súčet smerových kosínusov

$$(\nu_1)^2 + (\nu_2)^2 + (\nu_3)^2 = 1 \quad (3.9.6-2)$$

Riešením (3.9.6-1) pre ν_i a dosadením do (3.9.6-2) uvidíme, že zložky $\overset{\nu}{T}_i$ spĺňajú rovnicu

$$\frac{(\bar{T}_1)^2}{(\bar{\sigma}_1)^2} + \frac{(\bar{T}_2)^2}{(\bar{\sigma}_2)^2} + \frac{(\bar{T}_3)^2}{(\bar{\sigma}_3)^2} = 1 \quad (3.9.6-3)$$

čo je rovnica elipsoidu v pravouhlom súradnicovom systéme s osami $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$. Tento elipsoid je množina koncových bodov vektorov napätia vychádzajúcich zo stredu súradnicového systému (obr. 3.23).

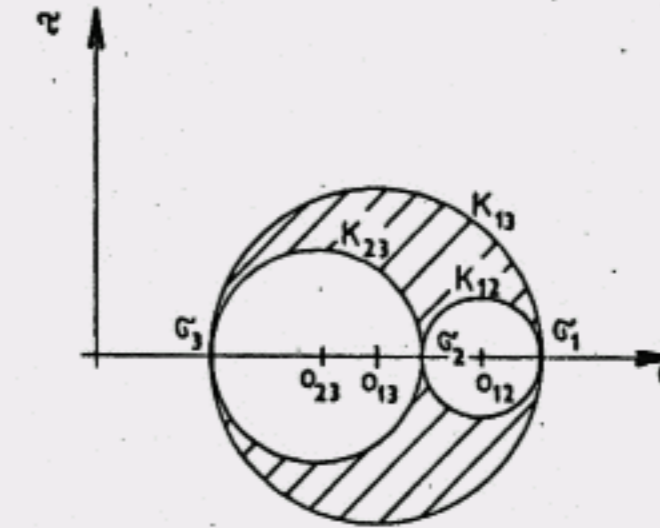


Obr. 3.23
Elipsoid napätia

3.9.7 Mohrove kružnice priestorovej napätosti

Mohrovými kružnicami napätosti (najmä pre rovinnú napätosť) sa poslucháči podrobne oboznámili v základnom kurze pružnosti a pevnosti. Tu sa zmienime okrajovo o Mohrových kružniciach priestorovej napätosti. Zostrojenie Mohrových kružníc je pre všeobecný prípad napätosti veľmi komplikované, a je možné vtedy, keď je známe aspoň jedno hlavné napätie. Najjednoduchší prípad je vtedy, keď priestorová napätosť je zadaná všetkými troma hlavnými napätiami.

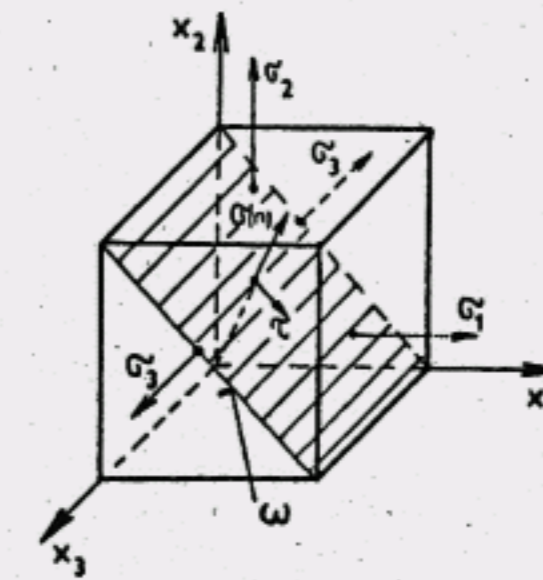
Otto Mohr ukázal zaujímavú skutočnosť, že ak na nejakej ploške pôsobí normálové napätie $\bar{\sigma}_{(n)}$ a šmykové napätie $\bar{\tau}$, potom tu možno znázorniť v rovine so súradnicovým systémom $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ (obr. 3.24) ako bod, ktorý leží v šrafovannej oblasti medzi troma kružnicami, ktorých stred leží na osi $\bar{\sigma}$. Súradnice daného bodu v príslušnej ploške (rovine) $\bar{\sigma}_{(n)}$ a $\bar{\tau}$.



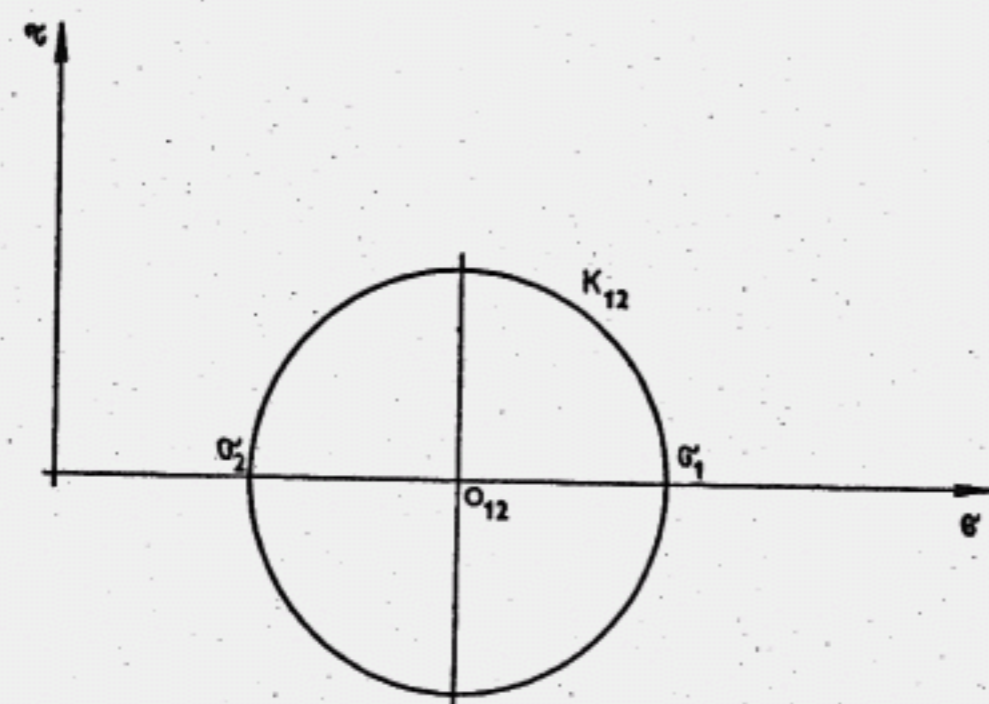
Obr. 3.24
Mohrove kružnice priestorovej napätosti

V prípade ako je na obr. 3.24, kde $\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_3$, je $\bar{\sigma}_1$ najväčším normálovým napätím, a $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)/2$ je najväčším šmykovým napätím pre všetky možné roviny, prechádzajúce sledovaným bodom. Rovina, v ktorej pôsobí najväčšie šmykové napätie, zvierá uhol 45° s hlavnými rovinami, na ktorý pôsobí napätie $\bar{\sigma}_1$ a $\bar{\sigma}_3$. Význam troch kružníc na obr. 3.24 vyplýva z nasledujúcich úvah:

Nech osi $x_i, i = 1, 2, 3$ sú totožné s hlavnými osami. V rovinách elementárneho hranolčeka pôsobia hlavné napätia $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ (obr. 3.25). Vezmime si rovinu ω , ktorá je rovnobežná s osou x_3 . Na veľkosť napätia $\bar{\sigma}_{(n)}$ a $\bar{\tau}$ v tejto rovine nemá vplyv, vzhľadom na podmienky rovnováhy, napätie $\bar{\sigma}_3$. To znamená, že napätie v rovine ω a teda vo všetkých rovinách rovnobežných s osou x_3 , môžeme určiť pomocou Mohrovej kružnice K_{12} , akoby išlo o rovinnú napätosť (obr. 3.26).



Obr. 3.25
Napätosť v rovine



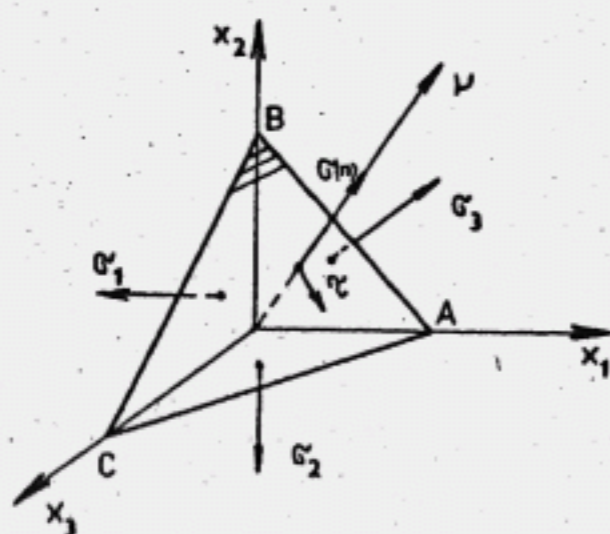
Obr. 3.26

Mohrova kružnica napätosti v rovine

Podobne pre roviny rovnobežné s x_1 bude napätosť znázornená kružnicou K_{13} .

Pre určenie napätia $\sigma_{(n)}$ a τ vo všeobecnej rovine s vonkajšou normálou ν postupujeme takto:

Nech všeobecná rovina ABC má vonkajšiu normálu ν so smerovými kosínusmi $\nu_1 = \cos(\nu, x_1)$, $\nu_2 = \cos(\nu, x_2)$ (obr. 3.27).



Obr. 3.27

Napätosť vo všeobecnej rovine

Pretože ν je jednotkovým vektorom

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \quad (3.9.7-1)$$

Normálové napätie, t.j. zložku vektora \vec{T} pôsobiaceho v tejto rovine, podľa rovnice (3.9.4-4) bude

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1 \nu_1^2 + \sigma_2 \nu_2^2 + \sigma_3 \nu_3^2 \quad (3.9.7-2)$$

Napokon pre vektor napätia podľa (3.9.4-2) máme

$$\left| \frac{\nu}{T} \right|^2 = \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 \quad (3.9.7-3)$$

Rovnice (3.9.7-1) až (3.9.7-3) sú algebraickým systémom troch rovníc pre tri neznáme ν_1^2 , ν_2^2 , ν_3^2 .

Tieto vypočítame pomocou Cramerovho pravidla, napr.:

$$\nu_1^2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_{(n)} & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\nu_2^2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_{(n)} & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\nu_3^2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_{(n)} \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 \end{vmatrix}$$

(3.9.7-4)

kde D je determinantom matice konštánt

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

Osobitne treba rozobrať tri prípady.

Prípád 1: Všetky tri napätia sú rôzne, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
V tomto prípade $D \neq 0$, a z (3.9.7-4) dostaneme

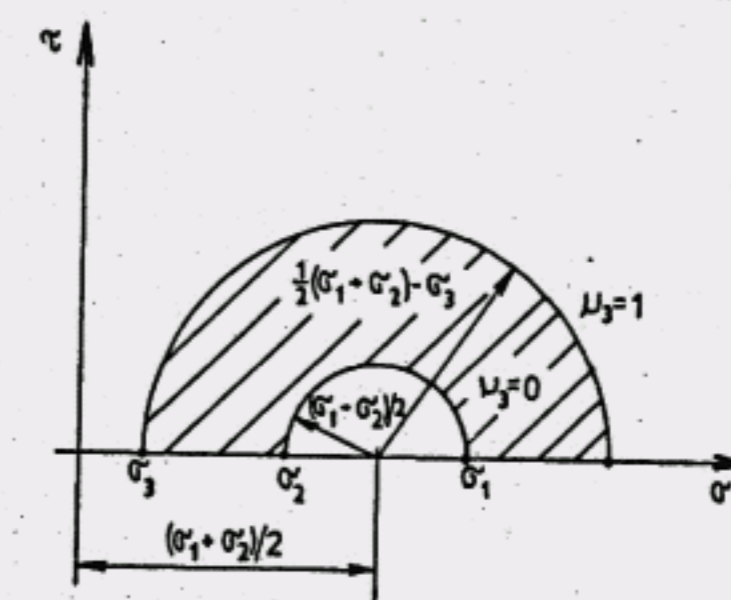
$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma_{(n)} - \sigma_2)(\sigma_{(n)} - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \nu_2^2 &= -\frac{\tau^2 + (\sigma_{(n)} - \sigma_3)(\sigma_{(n)} - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \nu_3^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma_{(n)} - \sigma_1)(\sigma_{(n)} - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \quad (3.9.7-5)$$

Uvažujme prípad, že ν_3 je pevne stanovená hodnota. To znamená, že plošný element môžeme len natáčať okolo osi x_3 . Inými slovami, rovina ABC zvierá pevne udaný uhol s osou x_3 . Z tretej rovnice vo vzťahu (3.9.7-5) vyplýva pre zložky napätia $\sigma_{(n)}$ a τ , že musia spĺňať rovnicu

$$\begin{aligned} \tau^2 + \left[\sigma_{(n)} - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 &= \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \\ &+ \nu_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \end{aligned} \quad (3.9.7-6)$$

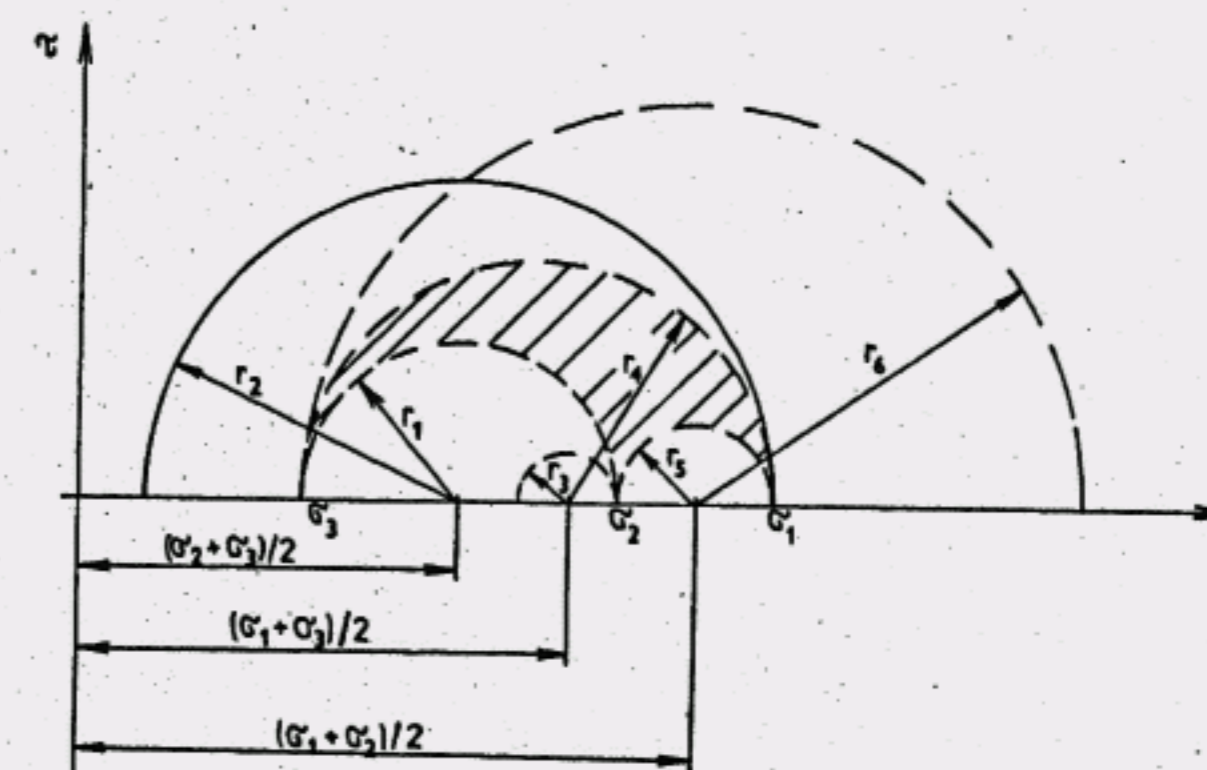
To je rovnica kružnice v súradnicovom systéme $\sigma_{(n)}$ a τ , ktorej stred je na osi $\sigma_{(n)}$ posunutý o hodnotu $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Táto kružnica predstavuje napätia $\sigma_{(n)}$ a τ vo všetkých možných rovinách, ktoré dostaneme rotáciou roviny ABC okolo osi x_3 . Polomer kružnice je daný druhou odmocninou pravej strany rovnice (3.9.7-6). Ak ν_3 sa mení v intervale $\langle 0, 1 \rangle$, potom polomer sa bude meniť medzi hodnotami $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ a $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3$. Množina kružníc, zadaná rovnicou (4.7-6), padne do vyšrafovej oblasti na obr. 3.28.

Podobnou úvahou, z ostatných dvoch rovníc systému (3.9.7-5), by sme dostali dve podobné množiny kružníc so stredmi na osi σ , vo vzdialenosti $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$,



Obr. 3.28
Mohrove kružnice

resp. $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$. Limitné polomery by boli $\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|$, $|\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_1|$; $\frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|$, $|\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) - \sigma_2|$. Tie sú znázornené na obr. 3.29.



Obr. 3.29
Polomery Mohrových kružníc

Každý bod $(\sigma_{(n)}, \tau)$ musí ležať medzi dvoma limitnými kružnicami všetkých troch množín kružníc. Z toho dôvodu bod môže ležať len vo vyšrafovej oblasti, znázornenej na obr. 3.29, resp. 3.28.

Prípad 2: Dve hlavné napätia sú rovnaké

Uvažujme, že $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Potom determinant $D = 0$, a rovnice (3.9.7-1), (3.9.7-2) a (3.9.7-3) majú riešenie len vtedy, ak platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_{(n)} & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 & \sigma_1^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_{(n)} & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9.7-7)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_{(n)} \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_{(n)}^2 + \tau^2 \end{vmatrix} = 0$$

Posledný determinant sa identicky rovná nule a z prvých dvoch dostaneme rovnaký výsledok

$$\tau^2 + \left[\sigma_{(n)} - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (3.9.7-8)$$

čo je znova rovnica kružnice. Podľa obr. 3.29 prejde $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ a vyšrafovaná plocha prejde do kružnice medzi bodmi σ_1 a σ_3 . Podobne pre prípad $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ sa vyšrafovaná oblasť redukuje do kružnice.

Prípad 3: Všetky tri hlavné napätia sú rovnaké, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. V tomto prípade $\sigma_{(n)} = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ a $\tau = 0$. Mohrove kružnice sa redukovujú do bodu.

4. Deformačný stav

4.1 PODDAJNÉ KONTINUUM

Pri skúmaní poddajných telies a prostredí, t.j. takých, pri ktorých pôsobenie síl vyvolá deformáciu, možno použiť niekoľko prístupov. S prihliadnutím na praxou dokázanú atomistickú štruktúru látky sa javí uprednostene použiť makroskopický prístup. Pri tomto postupe sa látka berie ako diskontinuálna a jej zloženie zohľadňuje častice atómových alebo molekulárnych veľkostí. Dostaneme tak hlboký prehľad o zataženom poddajnom telese, ktorý je síce založený na fyzikálnom základe, avšak už jednoduché veci sa tak skomplikujú, že je ich veľmi ťažko matematicky popísať, prípadne riešiť. Teória založená na tomto prístupe sa opiera na veľa predpokladoch a pre prácu inžiniera je ešte v súčasnosti nepohodlná a neistá.

My budeme preto používať makroskopický prístup, pri ktorom sa predpokladá existencia kontinua, definovaného v úvode týchto skrípt. To znamená, že telom obsiahnutý priestor je spojitely vyplnený látkou, a všetky pre pretvorenie telesa dôležité veličiny sú spojitými funkciami polohy. Ďalej budeme predpokladať, že látka sa skladá z identických objemových elementov. Predpokladáme teda homogénne kontinuum. Použitím makroskopického prístupu sa stanovuje fenomenologická teória, podľa ktorej správanie materiálu vplyvom zataženia, na základe experimentov, popíšeme pomocou vzťahov, v ktorých budú vystupovať určité materiálové konštanty. To je a bude úlohou atomárnej, mikroskopickej teórie takéto vzťahy a konštanty zo skutočnej štruktúry hmoty vylučovať a objasniť. V určitom rozsahu sa to už udialo, napr. v oblasti teórie tuhého telesa, fyziky kovov a inde. Uvažujme, že teleso v nezataženom stave zaujíma v priestore určitú polohu, ktorú budeme nazývať konfiguráciou telesa. Potom, v zmysle teórie kontinua, môžeme vytvoriť v telese objemové elementy, ktoré budeme chápať ako hmotné body, ktorým priradíme charakteristický súradnicový systém. Vplyvom zataženia sa pôvodná konfigurácia telesa bude meniť. To znamená, že objemové elementy budú meniť v priestore svoju polohu. V posunutej, deformovanej konfigurácii môžeme opäť jednotlivým hmotným bodom priradiť zodpovedajúci súradnicový systém. Vývoj takýchto po sebe nasledujúcich konfigurácií budeme chápať ako pohyb hmotného telesa v priestore a čase.

Na rozdielu medzi starými a novými súradnicami sledovaného bodu dostaneme složky vektora posunutia.

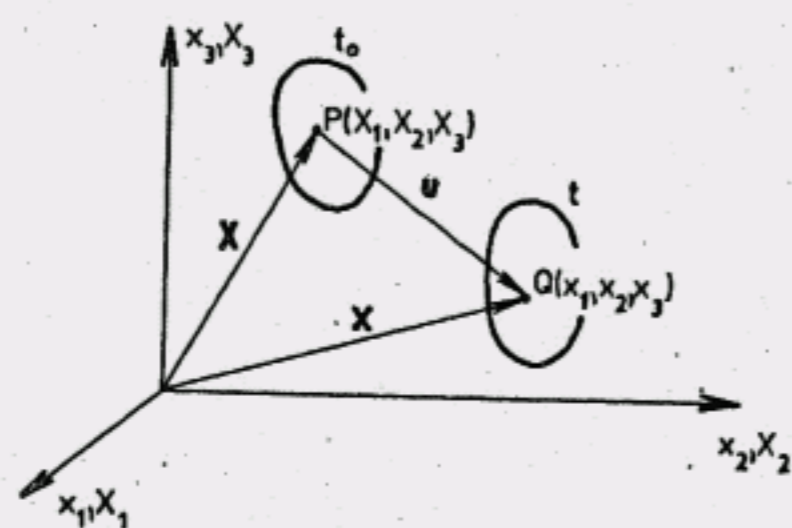
Zmenu polohy telesa v priestore, spôsobenú posunutím, môžeme rozdeliť na tuhý pohyb telesa (translácia a rotácia) a na pretvorenie telesa. V ďalších kapitolách nás bude zaujímať len pretvorenie telesa, to znamená, že vylúčíme tuhý pohyb telesa. Tuhý pohyb telesa zohráva veľkú úlohu pri geometricky nelineárnych úlohách mechaniky kontinua.

Pri pretváraní môže sa teleso správať rôzne. Môže byť elastické, plastické alebo môže tiecť. Celú oblasť tohto správania homogénneho, izotropného telesa popisuje reológia, a jednotlivými správaniami sa zaoberajú špeciálne oblasti mechaniky kontinua ako teória pružnosti, teória plasticity, teória viskoelasticity.

4.2 LAGRANGEOVSKÉ A EULEROVSKÉ SÚRADNICE

Nech množina hmotných bodov $\{P_k\}$ predstavuje počiatočnú, nedeformovanú konfiguráciu telesa v čase t_0 . Tejto množine jedno-jednoznačne prislúcha množina bodov $\{Q_k\}$, predstavujúca deformovanú konfiguráciu telesa v čase t .

Nech bodu $P(X_1, X_2, X_3)$ v nedeformovanej konfigurácii zodpovedá bod $Q(x_1, x_2, x_3)$ v deformovanej konfigurácii (obr. 4.1). Posunutie od bodu P k bodu Q označme vektorom posunutia u .



Obr. 4.1
Pohyb telesa

Pri popise pohybu telesa možno voliť dva postupy. V prvom postupe je pozorovateľ pevne spojený s k -tým objemovým elementom telesa v nedeformovanej kon-

figurácii a z tejto pozície popisuje všetky danosti pohybu. Tento spôsob popisu sa nazýva Lagrangeovským, alebo tiež materiálnym či substanciálnym.

V počiatočnej (nedeformovanej) konfigurácii má bod P súradnice X_i , $i = 1, 2, 3$, ktoré nazývame Lagrangeovskými súradnicami. V priebehu pohybu zaujíma bod P stále iné Q -body v priestore, ktorým prislúchajú súradnice x_i , $i = 1, 2, 3$, t.j.

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2-1)$$

Pri Lagrangeovskom spôsobe popisu vystupujú súradnice bodu P v nedeformovanej konfigurácii ako nezávislé premenné. Pre nejakú vlastnosť f , spojenú s látkou telesa, bude platiť

$$f = f(X_1, X_2, X_3, t) \quad (4.2-2)$$

Jeho derivácia podľa času bude

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t/L} \quad (4.2-3)$$

kde index $/L$ upozorňuje na Lagrangeovský charakter pri uskutočňovaní derivácie.

Pre vektor posunutia u máme

$$u_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i = x_i - X_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2-4)$$

pre jeho parciálnu deriváciu podľa počiatočných súradníc bude platiť

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2-5)$$

Je zrejme, že $\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$, čo si môže čitateľ ľahko dokázať.

V druhom prípade je pozorovateľ pevne spojený s bodom priestoru Q , ktorý má súradnice x_i , $i = 1, 2, 3$. Súradnice x_i nazývame Eulerovskými súradnicami a spôsob popisu pohybu - Eulerovským. Pozorovateľ pozoruje z bodu Q pretvorenie telesa, zmeny vlastností a stavov spojených s telesom.

Pohybujúce sa objemové elementy, ktoré z pohľadu bodu pozorovateľa sú spojené s Lagrangeovskými súradnicami, budú určené polohovým vektorom

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.2-6)$$

V tomto prípade sú Eulerovské súradnice bodu, t.j. súradnice bodu v deformovanej konfigurácii, zvolené za nezávisle premenné. Vlastnosti alebo stavy sú udané ako

$$f = f(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.2-7)$$

a ich derivácia podľa času

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.2-8)$$

Pritom $\frac{df}{dt}$ je substancionálna (materiálová), $\frac{\partial f}{\partial t}$ je lokálna a $\dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ je konvektívna derivácia. Pre vektor posunutia bude v tomto prípade platiť

$$u_i = x_i - X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2-9)$$

a derivácia

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (4.2-10)$$

Doposiaľ sme kvôli všeobecnosti predpokladali, že pretvorenie telesa závisí aj od času. Tak je to vtedy, keď materiál tečie. Pri elastickom materiáli nás zaujíma stav nedeformovanej konfigurácie po zatažení, pričom tento dej nie je závislý od času. Preto pojem času nám bude slúžiť len na rozlíšenie polohy konfigurácie. Preto upustíme od časovej závislosti v pravom fyzikálnom zmysle slova, ak výlučne nepôjde o časovo závislé deje v kontinuu (napr. dynamické deje) a použijeme ho len na označenie polohy telesa. Z tohto dôvodu budeme písať pre Lagrangeovský postup

$$x_i = x_i(X_j)$$

$$u_i = x_i - X_i \quad i = 1, 2, 3$$

Derivácia podľa polohových súradníc dostaneme gradient deformácie

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = L_{ij} = F_{ij}$$

napr. gradient posunutia

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij}$$

a pre Eulerovský popis

$$X_i = X_i(x_j)$$

$$u_i = x_i - X_i$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = X_{ij} = L_{ij}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - L_{ij}$$

Uvažujme teda, že v čase t_0 je teleso nedeformované. Jeho, ako hmotné body uvažované objemové elementy, sú charakterizované súradnicami X_i . Lagrangeovský spôsob popisu, ktorý súradnice X_i považuje za nezávisle premenné veličiny, je popisom pomocou súradníc nedeformovaného telesa.

V čase t je teleso v dôsledku zataženia zdeformované. Jeho objemové elementy sa posunutím dostali postupne do iných bodov priestoru, ktoré majú súradnice x_i . Tieto sú, ak sa objemové elementy identifikujú práve zaujatými bodmi priestoru, súradnicami deformovaného telesa. Eulerovský spôsob popisu, pri ktorom vystupujú x_i ako nezávisle premenné veličiny, je popisom pomocou súradníc deformovaného telesa.

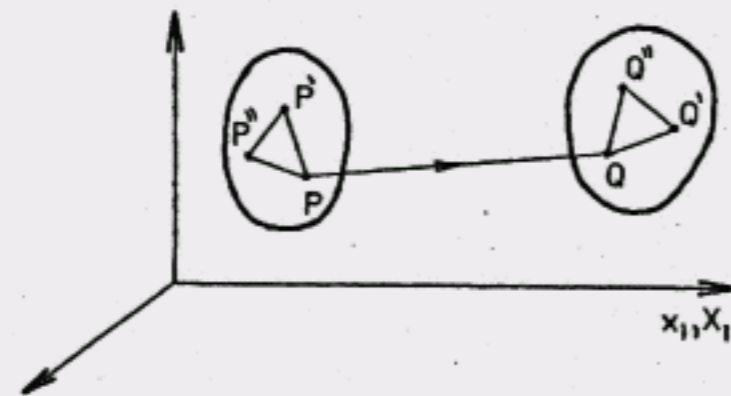
Keď sa predpokladajú malé pretvorenia, budú sa obidva spôsoby, ako neskôr uvidíme, málo odlišovať od seba, takže ich budeme považovať za identické. V teórii malých pružnoplastických deformácií sa vo väčšine prípadov predpokladajú nekonečne malé pretvorenia. Potom nevzniká žiaden rozdiel v spôsobe popisu, pretože tu nerobíme rozdiel v polohe deformovanej a nedeformovanej konfigurácie telesa.

Ak sa riešia dynamické problémy, odporúča sa používať Lagrangeovský spôsob. Aj pri stabilitných problémoch, pri ktorých dochádza ku konečným deformáciám a treba preto rozlišovať od seba deformovanú a nedeformovanú konfiguráciu, sa častejšie uplatňuje Lagrangeovská formulácia. Je to aj z toho dôvodu, že vo väčšine prípadov je poloha nedeformovanej konfigurácie známa.

4.3 PRETVORENIE TELESA

Myšlienka vzťahovať napätia k pretvoreniam prvý raz vznikla u Roberta Hooke (1635 - 1703), ktorý ju definoval zákonom "Sila v nejakom pružnom telese je priamo úmerná jeho rozťahnutiu (predĺženiu)". Tvrdenie tohto zákona je zrejmé pri pružnom telese, ako je napr. guma a jemu podobné látky. Ako vieme, samotný pohyb telesa pozostáva z tuhého pohybu telesa ako celku a z vlastného pretvorenia telesa.

Keďže tuhý pohyb telesa nevyvoláva napätie, nevzťahujú sa priamo posunutia na napätie. Aby sme mohli dať pretvorenie do súvislosti s napätím, musíme uvažovať stlačenie a roztiahnutie telesa. Za tým účelom uvažujme v telese, ktoré je v počiatočnej konfigurácii, tri susediace body P, P' a P''' (obr. 4.2).



Obr. 4.2
Deformácia telesa

Tieto body sa transformujú do bodov Q, Q' a Q''' v deformovanej konfigurácii telesa. Zmena plochy a uhlov trojuholníka sú určené, ak poznáme zmenu dĺžky jeho strán. Inými slovami, ak poznáme zmenu vzdialenosti medzi dvoma všeobecnými bodmi telesa, môžeme identifikovať novú plochu telesa v priestore. Popis zmeny vzdialenosti medzi dvoma bodmi telesa nazývame analýzou pretvorenia.

Uvažujme nekonečne malý priamkový element, spájajúci bod P(X₁, X₂, X₃) so susedným bodom P'(X₁+dX₁, X₂+dX₂, X₃+dX₃). Štvorec dĺžky tohto elementu v počiatočnej konfigurácii je

$$ds_0^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j \quad (4.3-1)$$

Keď sa body P a P' dostanú do bodov Q(x_i) a Q(x_i+dx_i) i = 1, 2, 3, štvorec dĺžky nového priamkového elementu bude

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (4.3-2)$$

Pre elementárne prírastky súradníc máme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad (4.3-3)$$

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j$$

Dosadením (4.3-3) do (4.3-1), resp. (4.3-2), upravíme štvorce dĺžok na tvar

$$ds_0^2 = \delta_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \frac{\partial X_j}{\partial x_m} dx_l dx_m \quad (4.3-4)$$

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} dX_l dX_m$$

Rozdiel štvorcov dĺžok po a pred deformáciou bude

$$ds^2 - ds_0^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} \frac{\partial x_j}{\partial X_m} dX_l dX_m - \delta_{ij} dX_i dX_j =$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} dX_i dX_j - \delta_{ij} dX_i dX_j =$$

$$= \left[\delta_{\alpha\beta} x_{\alpha,i} x_{\beta,j} - \delta_{ij} \right] dX_i dX_j \quad (4.3-5)$$

Je zrejmé, že v (4.3-5) sme premenovali sčítacie indexy vo výraze pre ds. Ak podobným spôsobom vhodne premenujeme sumačné indexy v ds₀, dostaneme

$$ds^2 - ds_0^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_j} dx_i dx_j =$$

$$= \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} x_{\alpha,i} x_{\beta,j} \right] dx_i dx_j \quad (4.3-6)$$

Dostali sme teda dvojaké vyjadrenie rozdielu štvorca dĺžkových elementov:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2 E_{ij} dX_i dX_j \quad (4.3-7)$$

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2 e_{ij} dx_i dx_j \quad (4.3-8)$$

V (4.3-7) sme označili symbolom E_{ij} výraz

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (4.3-9)$$

a v (4.3-8)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_j} \right) \quad (4.3-10)$$

Dá sa dokázať, že E_{ij} a e_{ij} sú tenzormi druhého stupňa. Tenzor E_{ij} bol zavedený Greenom a St. Venantom a nazýva sa Greenovým tenzorom deformácie. Pretože nezávisle premennými sú v tomto tenzore Lagrangeovské súradnice X_i , často sa v literatúre označuje Green - Lagrangeovým tenzorom deformácie.

Tenzor e_{ij} zaviedol Cauchy pre nekonečne malé deformácie, Almansi a Hamel pre konečné deformácie. V literatúre je známy pod menom Almansiho tenzor deformácie, prípadne Eulerov tenzor deformácie. Druhé pomenovanie súvisí tiež s tým, že nezávisle premennými veličinami v tomto výraze sú Eulerovské súradnice x_i . Tenzor E_{ij} je teda definovaný v súradnicovom systéme X_i a e_{ij} v súradnicovom systéme x_i .

Obidva tieto tenzory sú symetrické, t.j.

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

Priamym dôsledkom rovníc (4.3-7) a (4.3-8) je, že ak $ds^2 - ds_0^2 = 0$, potom platí

$$E_{ij} = e_{ij} = 0$$

Inými slovami, ak pri deformácii telesa zostáva dĺžka každého priamkového elementu nezmenená, ide o tuhý pohyb telesa. Na základe toho vyplýva záver, že nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby deformácia telesa bola tuhým pohybom, musia sa všetky zložky tenzora deformácie E_{ij} , resp. e_{ij} vo vnútri telesa rovnať nule. Spomínaná vlastnosť týchto tenzorov hovorí v podstate o invariantnosti E_{ij} a e_{ij} voči tuhému pohybu telesa, čo sa s výhodou v teórii konečných deformácií využíva.

4.4 ZLOŽKY DEFORMÁCIE V PRAVOUHLOM KARTÉZSKOM SÚRADNICOVOM SYSTÉME

Uvažujme vektor posunutia (obr. 4.1) u so zložkami

$$u_\alpha = x_\alpha - X_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4.4-1)$$

potom

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_i} + \delta_{\alpha i} \quad (4.4-2)$$

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$$

Dosadením (4.4-2) do (4.3-9), resp. (4.3-10) dostaneme jednotlivé tenzory v známejšom tvare

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_i} + \delta_{\beta i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial X_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial X_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial X_j} + \delta_{\beta j} \frac{\partial u_\beta}{\partial X_i} + \delta_{\beta i} \frac{\partial u_\beta}{\partial X_j} + \delta_{ij} \right) - \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{1,i} u_{1,j}) \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

Pri úprave (4.4-3) sme využili vlastnosť Kroneckerovej delty, menovite $\delta_{\beta i} u_\beta = u_i$, $\delta_{\beta j} u_\beta = u_j$ a napokon sumačný index β v nelineárnom člene sme premenovali na 1.

Podobnou úpravou dostaneme Almansiho tenzor v tvare

$$e_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} - u_{1,i} u_{1,j}] \quad (4.4-4)$$

Je zrejmé, že v (4.4-4) sú zložky posunutia, na rozdiel od (4.4-3), derivované podľa Eulerovských súradníc x_i .

Pri staršom značení (x, y, z pre x_1, x_2, x_3 ; X, Y, Z pre X_1, X_2, X_3 ; u, v, w pre u_1, u_2, u_3) z (4.4-3), resp. (4.4-4) pre jednotlivé zložky deformácie dostaneme

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right]$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) \right]$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

(4.4-5)

atď.

Poznamenajme ešte, že u, v, w sú funkciami X, Y, Z , t.j. funkciami polohy bodu v nedeformovanej konfigurácii v Green - Lagrangeovom tenzore deformácie, a pri Eulerovom tenzore deformácie sú funkciami súradníc x, y, z , t.j. funkciami polohy bodu v deformovanej konfigurácii.

Ak sú zložky posunutia u_i také, že ich derivácie podľa súradníc sú veľmi malé čísla; potom súčiny dvoch derivácií sú zanedbateľné, a z (4.4-3), resp. (4.4-4) dostaneme Cauchyho tenzor nekonečne malých deformácií

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(4.4-6)

Pri nekonečne malých deformáciách, ako sme už spomínali, nerozlišujeme medzi súradnicami bodu v deformovanej a nedeformovanej konfigurácii a z toho dôvodu zaniká rozdiel medzi Green - Lagrangeovým a Almansiho tenzorom deformácie. Nie je podstatné, či derivácie posunutia sa robia podľa súradníc pred alebo po deformácii.

Pre Cauchyho tenzor nekonečne malých deformácií z (4.4-6) dostaneme v staršom vyjadrení

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

alebo tiež v tvare

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Poznámka:

V mnohých učebniciach sa zložky deformácie definujú v tvare

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \gamma_{xy} = \gamma_z = 2 e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \gamma_{zy} = \gamma_x = 2 e_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

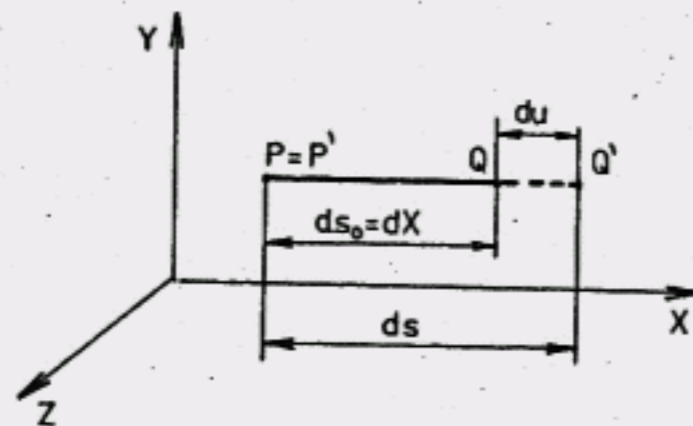
$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \gamma_{xz} = \gamma_y = 2 e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Inými slovami pomerné skosenia $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sú dvojnásobnými hodnotami zložiek tenzora e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} . My nebudeme používať toto označenie, lebo $\varepsilon_x, \gamma_x, \dots$ nie sú zložkami tenzora. Tentó rozdiel treba mať pri konkrétnych úpravách na pamäti.

4.5 GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA ZLOŽIEK
NEKONEČNE MALÝCH DEFORMÁCIÍ

V bežnej konštrukčnej praxi spravidla navrhujeme súčasti tak, aby nedochádzalo k veľkým deformáciám. Preto pri analýze deformačného stavu pri takýchto úlohách vystačíme s tenzorom nekonečne malých deformácií. Teraz sa budeme zaoberať geometrickým významom jeho zložiek, pričom budeme napr. vychádzať z Lagrangeovského spôsobu opisu pohybu telesa.

Nech X, Y, Z sú pravouhlé súradnice. V tomto súradnicovom systéme uvažujme dĺžkový element $dX = ds_0$, ktorý je rovnobežný s osou X (t.j. $dY = dZ = 0$). Zmena štvorcov dĺžky tohto elementu (obr. 4.3) bude podľa (4.3-6)



Obr. 4.3
Predĺženie dĺžkového elementu

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 E_{11} (dX)^2 \quad (4.5-1)$$

a po úprave

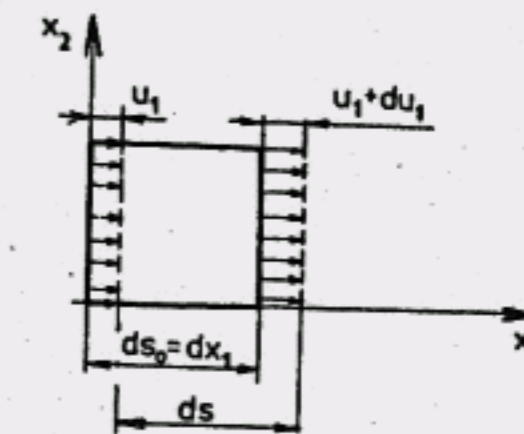
$$ds - ds_0 = \frac{2 E_{11} (dX)^2}{ds + ds_0} \quad (4.5-2)$$

V prípade nekonečne malých deformácií sa ds líši od ds_0 len o veľmi malú hodnotu du , na základe čoho môžeme tvrdiť, že $ds + ds_0 = 2 ds_0 = 2 dX$. Potom zo (4.5-2) dostaneme

$$E_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \epsilon_{11} \quad (4.5-3)$$

čo je vlastne pomerne predĺženie, resp. pomerná zmena dĺžky vektora rovnobežného s osou X k jeho pôvodnej dĺžke. K tomu istému záveru by sme dospeli rovnakými úvahami zo vzťahu (4.3-7). Využime predchádzajúce úvahy pre rovinný element, pričom nebudeme už robiť rozdiel medzi Lagrangeovskými a Eulerovskými súradnicami a budeme ich označovať všeobecne malými písmenami.

Uvažujme prípad, že $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} > 0$ a posunutie v smere x_2 sa rovná nule ($u_2 = 0$), (obr. 4.4).



Obr. 4.4
Posunutie v smere osi x_1

Potom

$$ds - ds_0 = du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$$

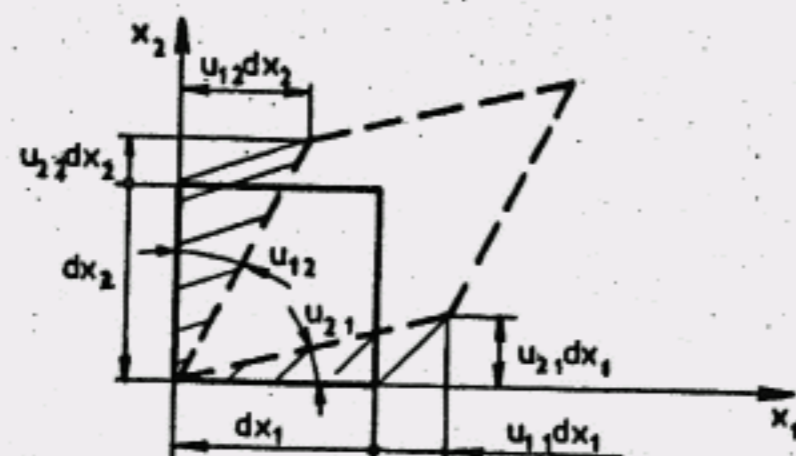
a po úprave

$$\frac{ds - ds_0}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \epsilon_{11} \quad (4.5-4)$$

Podobné výrazy by sme dostali pre ϵ_{22} , príp. pre ϵ_{33} , ak by šlo o úlohu priestorovú. Vidíme, že ϵ_{ij} pre $i = j$ sú vlastne zložkami gradientu deformácie v príslušnom súradnicovom smere.

Aby sme videli geometrický význam zložiek tenzora nekonečne malých deformácií ak $i \neq j$, uvažujme deformáciu elementu podľa obr. 4.5. Urobíme pomer strán vo vyšrafovaných trojuholníkoch a dostaneme

$$\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \quad (4.5-6)$$



Obr. 4.5
Skosenie elementu

resp.

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \quad (4.5-7)$$

Za predpokladu malých deformácií môžeme výrazy $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ oproti jednotke zanedbať a z (4.5-6), resp. (4.5-7) dostaneme

$$\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = u_{2,1}, \quad \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = u_{1,2} \quad (4.5-8)$$

Zo vzťahu (4.4-6) napr. pre $i = 1$ a $j = 2$ máme

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (4.5-9)$$

Porovnaním (4.5-8) a (4.5-9) vidíme, že zložky tenzora nekonečne malých deformácií pre $i \neq j$ vyjadrujú polovičnú zmenu pravého uhla x_1 a x_2 podľa obr. 4.5.

Ako sme už uviedli, v inžinierskej praxi sa zložky tenzora ε_{ij} pre $i \neq j$ zdvojnásobujú, označujú sa symbolom γ a nazývajú sa pomernými uhlami skosenia.

4.6 NEKONEČNE MALÉ ROTÁCIE

Uvažujme pole infinitezimálnych posunutí $u_i(x_1, x_2, x_3)$. Jeho gradient bude tenzorom druhého rádu

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.6-1)$$

úpravou

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \frac{1}{2} u_{j,i} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$$

sme ho rozdelili na symetrickú a nesymetrickú časť. Symetrická časť $\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ je vlastne Cauchyho tenzorom nekonečne malých deformácií ε_{ij} a

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = -\omega_{ji} \quad (4.6-2)$$

je antisymetrickým tenzorom, ktorý má len tri nezávislé zložky (členy na diagonále antisymetrického tenzora sú nulové). Tenzor

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6-3)$$

budeme nazývať tenzorom nekonečne malých rotácií (natočenia). Z vlastností antisymetrických tenzorov vieme, že môžeme vytvoriť duálny vektor

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{ijk} \omega_{ij} \quad (4.6-4)$$

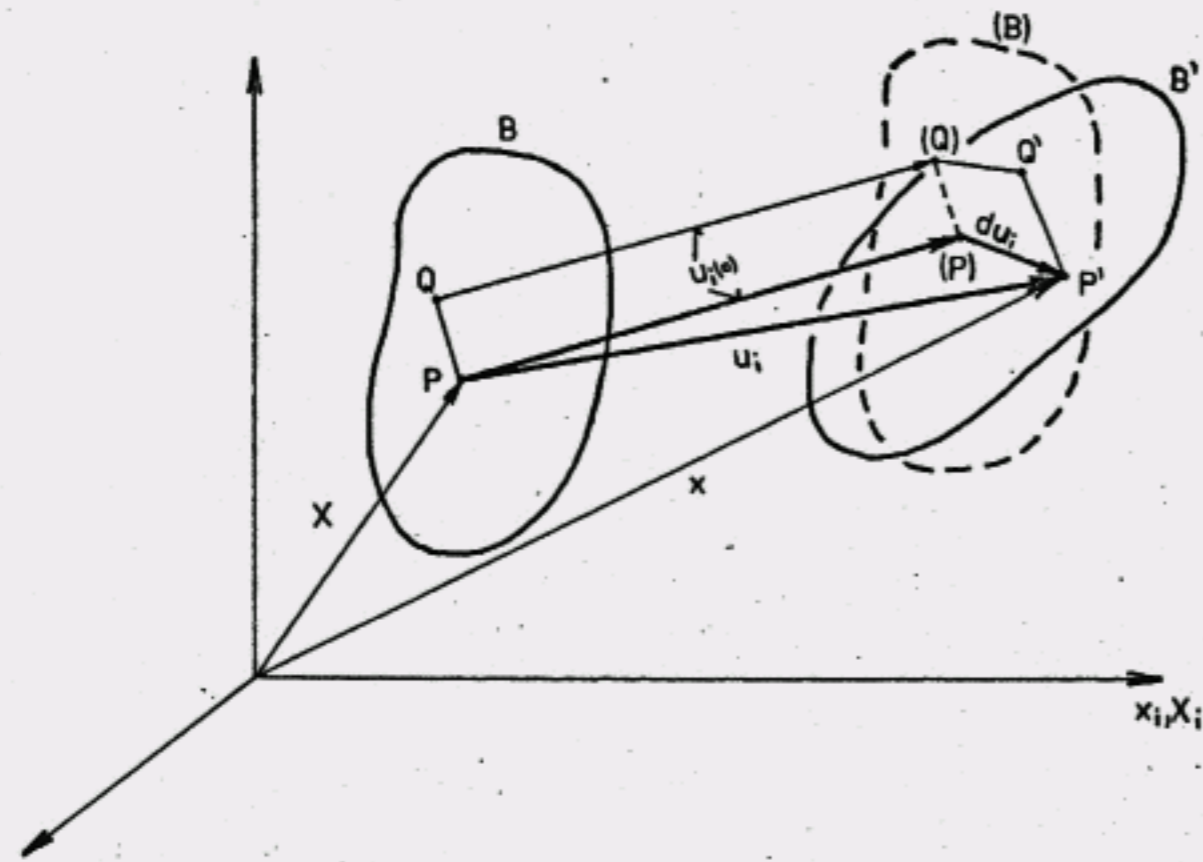
ktorý budeme nazývať vektorom rotácie (natočenia). e_{ijk} je známy permutačný symbol.

Ku vzťahu (4.6-4) možno odvodiť inverzný výraz pre tenzor rotácie

$$\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k \quad (4.6-5)$$

V kapitole 4.3 sme ukázali, že nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby nejaký bod, včítane jeho malého okolia, vykonával tuhý pohyb, je, aby zlož-

ky tenzora deformácie $E_{ij} = e_{ij} = 0$. Tuhý pohyb pozostáva z translačnej a rotačnej zložky. Transláciou pri malých deformáciách je posunutie $u_{i(0)}$. Teraz vzniká otázka, čo je to rotácia. Ukážeme, že pre pole malých posunutí, pre ktoré je tenzor deformácie v nejakom bode P nulový, rotácia okolia bodu P bude daná vektorom rotácie ω_k . Nech bod P' zodpovedá bodu P v deformovanej konfigurácii a bod Q je bodom z okolia P. Do bodu P' sa dostaneme transláciou telesa $u_{i(0)}$ a relatívnym posunutím du_i (obr. 4.6).



Obr. 4.6
Pohyb bodu P

Posunutie bodu P - u_i obsahuje teda translačnú zložku $u_{i(0)}$ do bodu (P) a relatívne posunutie du_i do P'. Ako sme už povedali, pri teorii malých deformácií $X_i \approx x_i$, čo má za následok, že tuhý posuv vylúčime a relatívne posunutie $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \ll 1$. Využitím vlastnosti gradientu deformácie $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ môžeme pre relatívne posunutie bodu P, ktoré vo všeobecnosti zanedbať nemôžeme, písať

$$du_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx_j + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) dx_j = \epsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j \quad (4.6-6)$$

Celkové posunutie bodu P do P' bude $u_i = u_{i(0)} + \epsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j$. Za predpokladu tuhého pohybu je $\epsilon_{ij} = 0$ a z (4.6-6) dostaneme

$$du_i = \omega_{ij} dx_j = (e_{ijk} \omega_k) dx_j = (\omega \times dx)_i \quad (4.6-7)$$

Teda relatívne posunutie bodu P je vektorovým súčinom ω a dx . Na záver môžeme teda zhrnúť, že zložka posunutia $u_{i(0)}$ nám predstavuje transláciu, ω_{ij} - rotáciu elementárneho okolia P a ϵ_{ij} čisté pretvorenie okolia bodu P.

Nekonečne malé okolie bodu P môžeme teda do konečného stavu previesť vždy pomocou nasledujúcich krokov:

- a) element je podrobený deformáciám ϵ_{ij} a potom je orientovaný tak, aby smer hlavných napätí bol totožný s ich pôvodným smerom;
- b) element je podrobený takej translácii, aby bod P zaujal svoju konečnú polohu (posunutie $u_{i(0)}$);
- c) element rotuje okolo bodu P tak, aby zaujal konečnú orientáciu. Táto rotácia je popísaná vektorom ω_i a je zrejme, že ide vlastne o rotáciu hlavných osí.

4.7 ZLOŽKY KONEČNÝCH DEFORMÁCIÍ

Keď nie sú zložky pretvorenia malé, je ťažšie stanoviť geometrický význam zložiek tenzora deformácie.

Uvažujme pravouhlý súradnicový systém X_i , $i = 1, 2, 3$, vzhľadom na ktorý sú definované zložky Green - Lagrangeovho tenzora deformácie E_{ij} . V tomto súradnicovom systéme uvažujeme priamkový element dX so zložkami $dX_1 = ds_0$, $dX_2 = dX_3 = 0$.

Definujeme predĺženie E_1 tohto elementu nasledovne

$$E_1 = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (4.7-1)$$

alebo

$$ds = (1 + E_1) ds_0 \quad (4.7-2)$$

Z (4.3-6) máme

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j = 2 E_{11} (dX_1)^2 \quad (4.7-3)$$

Kombináciou rovníc (4.7-2) a (4.7-3) dostaneme

$$(1 + E_1)^2 - 1 = 2 E_{11} \quad (4.7-4)$$

alebo

$$E_1 = \sqrt{1 + 2 E_{11}} - 1 \quad (4.7-5)$$

E_1 nám teda predstavuje relatívne (pomerné) predĺženie priamkového elementu v smere osi X_1 . Podobné vzťahy by sme dostali pre smery X_2 a X_3 , resp.

$$E_2 = \sqrt{1 + 2 E_{22}} - 1$$

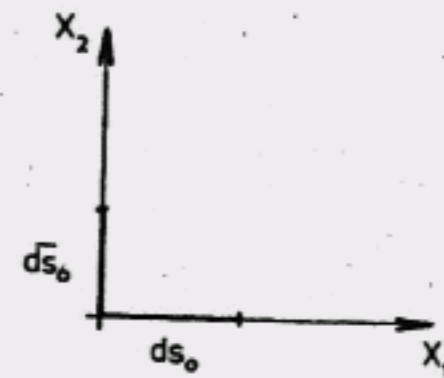
$$E_3 = \sqrt{1 + 2 E_{33}} - 1 \quad (4.7-6)$$

Z rovníc (4.7-5) a (4.7-6) vidíme, že zložky tenzora konečných deformácií nemajú priamy fyzikálny význam, ako je to pri zložkách tenzora malých deformácií. Celkove môžeme povedať, že E_{11} , E_{22} , E_{33} nám charakterizujú relatívne predĺženie priamkových elementov do deformácií rovnobežných so súradnicovými osami. Ak napr. E_{11} je oproti jednotke malé, potom

$$E_1 \approx E_{11} = \varepsilon_{11} \quad (4.7-7)$$

čo, samozrejme, možno predpokladať len pri teórii nekonečne malých deformácií, ako sme to ukázali v kapitole 4.5.

Aby sme určili fyzikálny význam zložky E_{12} , uvažujme dva priamkové elementy ds_0 a $d\bar{s}_0$ podľa obr. 4.7, ktoré v nedeformovanom stave zvierajú pravý uhol.



Obr. 4.7
Priamkové elementy

Po deformácii budú tieto elementy ds , (dx_i) ; $d\bar{s}$, $(d\bar{x}_i)$. Po vykonaní skalárneho súčinu

$$ds d\bar{s} \cos\theta = dx_k d\bar{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial X_2} ds_0 d\bar{s}_0$$

Vzhľadom na (4.3-8), pretože $\delta_{12} = 0$, máme

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial X_2} \right)$$

Potom

$$ds d\bar{s} \cos\theta = 2 E_{12} ds_0 d\bar{s}_0 \quad (4.7-8)$$

Z rovnice (4.7-2) a (4.7-5) dostaneme

$$ds = \sqrt{1 + 2 E_{11}} ds_0$$

$$d\bar{s} = \sqrt{1 + 2 E_{22}} d\bar{s}_0$$

Potom z rovnice (4.7-8) vyplýva

$$\cos\theta = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2 E_{11}} \sqrt{1 + 2 E_{22}}} \quad (4.7-9)$$

Uhol θ je uhol medzi priamkovými elementmi ds a ds_0 po deformácii. Zmena uhla medzi dvoma priamkovými elementmi, ktoré boli pôvodne na seba kolmé, je $\alpha_{12} = \pi/2 - \theta$. Z rovnice (4.7-9) potom dostaneme

$$\sin \alpha_{12} = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2 E_{11}} \sqrt{1 + 2 E_{22}}} \quad (4.7-10)$$

V prípade malých pretvorení sa nám tento výraz zredukuje na

$$\alpha_{12} \approx 2 E_{12} \quad (4.7-11)$$

Analogickú interpretáciu možno urobiť pre Almansiho tenzor deformácie e_{ij} .

4.8 HLAVNÉ PRETVORENIE

Vzhľadom na to, že tenzor deformácie je symetrický, môžeme odvodiť analogické závery, ako sme to robili pri tensore napätia, len namiesto slova napätie použijeme pojem pretvorenie (deformácia).

To znamená:

- a) existujú tri hlavné pomerné predĺženia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, ktoré sú riešením kubickej rovnice

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}| = 0 \quad (4.8-1)$$

Korene rovnice (4.8-1) sú všetky reálne čísla.

- b) pre každé hlavné pomerné predĺženie, napr. ε_1 , existuje hlavná os so smerovými kosínusmi $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}$, ktoré sú riešením rovnice

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_1 \delta_{ij}) \gamma_j^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.8-2)$$

Tri sady riešení $(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)})$, $(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)})$, $(\gamma_1^{(3)}, \gamma_2^{(3)}, \gamma_3^{(3)})$ sú zložkami troch jednotkových vektorov. Ak korene rovnice (4.8-1) sú navzájom rôzne ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$), potom všetky tri hlavné osi tvoria ortogonálny súradnicový systém. Ak dve z troch hlavných pomerných predĺžení sú rovnaké, potom rovnica (4.8-2) má nekonečne veľa riešení, pričom jedna z osí spravidla býva osou symetrie.

Ak $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, potom každý pravouhlý súradnicový systém je HSS.

- c) roviny kolmé na hlavné osi nazývame hlavnými rovinami.
d) ak súradnicové osi splyvajú s HSS, potom tenzor deformácie možno vyjadriť v tvare

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

- e) existujú tri nezávislé invarianty deformácie:

$$I_1 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik}$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{km} \varepsilon_{mi}$$

(4.8-3)

- f) možno zostrojiť Mohrove kružnice na grafickú analýzu deformácie. Podobne možno aplikovať aj Lamého elipsoid deformácie.

4.9 INÉ MIERKY PRETVORENIA

Treba si uvedomiť, že popísané tenzory deformácie nie sú jedinými typmi. Určenie uvedených veličín uľahčuje Pythagorova veta, podľa ktorej sme stanovili, že štvorec vzdialenosti medzi dvoma bodmi so súradnicami x_i , resp. $x_i + dx_i$ je

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (4.9-1)$$

Vychádzajúc z tohto predpokladu sme definovali Eulerov, resp. Green - Lagrangeov tenzor deformácie pre konečné deformácie a Cauchyho tenzor malých deformácií.

Pretvorenie telesa však nemusí vychádzať z týchto úvah. Napríklad môžeme popísať zmenu ds miesto $(ds)^2$, alebo môžeme použiť sadu deviatich prvých parciálnych derivácií podľa posunutí

$$(u_{i,j}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.9-2)$$

ktorý sme v predchádzajúcich kapitolách nazvali gradientom deformácie. Rozdelením tohto gradientu, ktorý je tenzor 2. stupňa, na symetrickú a antisymetrickú časť dostaneme

$$(u_{i,j}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) \\ & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) \\ \text{sym.} & & u_{3,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{1,2}-u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}-u_{3,1}) \\ & 0 & \frac{1}{2}(u_{2,3}-u_{3,2}) \\ \text{antisym.} & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9-3)$$

Je evidentné, že prvá, symetrická časť gradientu je známym tenzorom malých deformácií.

Majme dané zobrazenie

$$x_i = X_i + u_i \quad (4.9-4)$$

pre ktoré Cauchy definoval ďalšie tenzory deformácie

$$C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}, \quad \text{resp.} \quad \bar{C}_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (4.9-5)$$

Opačne definoval tieto tenzory Finger

$$B_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k}, \quad \text{resp.} \quad \bar{B}_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \quad (4.9-6)$$

Tieto tenzory však nie sú invariantné voči tuhému pohybu telesa, pretože v tomto prípade ($x_i \equiv X_i$) je $C_{ij} = \delta_{ij}$, $B_{ij} = \delta_{ij}$. Týmto tenzormi sa ďalej nebudeme zaoberať.

5. Rýchlosť posunutia, podmienky kompatibility deformácie

5.1 POLE RÝCHLOSTI POSUNUTIA

V predchádzajúcich úvahách sme vylúčili vplyv času na jednotlivé fyzikálne procesy. Uvažujme teraz, že deformácia telesa je závislá od času, to znamená, že bude závisieť od rýchlosti posunutia jednotlivých hmotných bodov z jednej konfigurácie do druhej. Ak zohľadníme polohu každého hmotného bodu na nejaký vzťažný systém so súradnicami (x_i , $i = 1, 2, 3$), potom pole rýchlosti posunutia bude popísané vektorovým poľom $v(x_i)$, ktoré definuje rýchlosť posunutia v každom bode kontinua (x_1, x_2, x_3). Ak zložky vektora malých posunutí sú u_i , potom zložky vektorového poľa rýchlosti posunutia budú

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1-1)$$

Majme body P a P' v po sebe idúcich polohách so súradnicami x_i , resp. $x_i + dx_i$.

Rozdiel v rýchlosti týchto dvoch bodov bude

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1-2)$$

kde derivácia $v_{i,j}$ je robená v bode P. Využitím vlastnosti tenzora druhého stupňa môžeme písať

$$dv_i = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})dx_j + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})dx_j = V_{ij}dx_j + \Omega_{ij}dx_j \quad (5.1-3)$$

V rovnici (5.1-3) je V_{ij} symetrickým tenzorom druhého rádu, ktorý nazývame tenzorom rýchlosti pretvorenia. Antisymetrický tenzor Ω_{ij} nazývame tenzorom rýchlosti rotácie (spin - tenzor). Využitím vzťahu (5.1-1) môžeme (5.1-3) upraviť

$$\begin{aligned}
 dv_i &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right] dx_j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right] dx_j = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (u_{i,j}) + \frac{\partial}{\partial t} (u_{j,i}) \right] dx_j + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (u_{i,j}) - \frac{\partial}{\partial t} (u_{j,i}) \right] dx_j = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ij}) dx_j + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial t} (\omega_{ij}) dx_j = \dot{\varepsilon}_{ij} dx_j + \dot{\omega}_{ij} dx_j \quad (5.1-4)
 \end{aligned}$$

Bodka (*) vo výrazoch (5.1-4) nám predstavuje časovú deriváciu tenzora nekonečne malých deformácií, resp. tenzora nekonečne malých rotácií.

Porovnaním (5.1-3) s (5.1-4) máme

$$v_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \dot{\omega}_{ij} \quad (5.1-5)$$

Analýza poľa rýchlosti posunutia je veľmi podobná analýze poľa nekonečne malých posunutí. Vzťahy a rovnice uvedené v tejto kapitole, ako aj geometrická interpretácia jednotlivých fyzikálnych veličín je obdobná vzťahom a významom platným v teórii nekonečne malých deformácií. Formálne treba nahradiť slovo "posunutie" výrazom "rýchlosť" posunutia, deformácie, ... Teória rýchlosti posunutia nachádza uplatnenie v úlohách, v ktorých je rýchlosť deformácie značná. Pri normálnych elastických deformáciách, ako sme už spomenuli, je faktor času zanedbateľný.

5.2 PODMIENKY SPOJITOSTI (KOMPATIBILITY) DEFORMÁCIE

Vzťahom

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.2-1)$$

sme určili šesť nezávislých zložiek deformácie zo zložiek vektora posunutia u_i , ktoré nezahŕňajú tuhý posuv telesa. Zložky deformácie nemôžu byť úplne

nezávislé, ale musia spĺňať podmienku, že teleso ostane spojité (súvislé) aj po deformácii. To znamená, že musí existovať určitý vektor posunutia, z ktorého možno túto deformáciu odvodiť. Podmienky, ktoré musia zložky tenzora deformácie plniť, sa nazývajú podmienkami spojitosti (kompatibility) deformácie.

Ich význam možno spojiť aj s matematickým pojmom integrability.

Predpokladajme, že je daná sústava dvoch parciálnych diferenciálnych rovníc pre jednú neznámu funkciu $u(x_1, x_2)$, ktorá je definovaná na jednonásobne súvislej oblasti R

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1 + 3x_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2 \quad (5.2-2)$$

Keby sme chceli tento systém vyriešiť, zistili by sme, že tieto dve rovnice nie sú konzistentné, t.j. keď urobíme druhú deriváciu už uvedených rovníc podľa x_2 , resp. x_1 , dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_1 \quad (5.2-3)$$

Vidíme, že pravé strany oboch rovníc nie sú si rovné, a teda systém (5.2-2) nie je vo všeobecnosti vyriešiteľný. To znamená, že diferenciálne rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = g(x_1, x_2) \quad (5.2-4)$$

môžu byť integrovateľné, ak spĺňajú podmienku

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad (5.2-5)$$

Podmienka (5.2-5) je podmienkou integrability systému rovníc (5.2-4).

Uvažujme rovinný stav napätosti. Ďalej, na nejakom modeli sme experimentálne namerali (prípadne vypočítali) zložky tenzora deformácie

$$\varepsilon_{11} = f(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{22} = g(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{12} = h(x_1, x_2)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

Otázka teraz znie, či tieto údaje sú konzistentné (či sú kompatibilné), resp. či môžeme vypočítať posunutia $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ z týchto údajov.

Ak sú deformácie malé, môže byť táto otázka položená v matematickom zmysle integrovateľnosti diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = g(x_1, x_2) \\ 2 \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2 h(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.2-6)$$

Keď derivujeme prvú rovnicu systém (5.2-6) podľa x_2 , druhú dvakrát podľa x_1 , a tretiu podľa x_1 a x_2 , dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} &= \frac{2 \partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (5.2-7)$$

Na základe (5.2-5) dostaneme nutnú podmienku z (5.2-7) v tvare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{2 \partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.2-8)$$

Experimentálne, resp. vypočítané výsledky musia podmienku (5.2-8) spĺňať, ináč sú nesprávne.

Dosađením (5.2-6) do (5.2-8) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.2-9)$$

čo je podmienka kompatibility deformácie pre rovinnú napätosť.

5.3 PODMIENKY KOMPATIBILITY DEFORMÁCIE PRE PRIESTOROVÚ NAPÄTOSŤ

Ak rozvineme predchádzajúcu diskusiu na priestorové úlohy, máme vlastne integrovať systém diferenciálnych rovníc

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.3-1)$$

aby sme určili posunutia u_i .

Inými slovami, šesť nezávislých rovníc pre tri neznáme funkcie má jednoznačné riešenie len vtedy, ak funkcie ε_{ij} spĺňajú podmienky kompatibility deformácie.

Dvojnásobnou parciálnou deriváciou rovnice (5.3-1) dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) \\ \varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \\ \varepsilon_{jl,ik} &= \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \\ \varepsilon_{ik,jl} &= \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) \end{aligned} \quad (5.3-2)$$

Dostaneme štyri tenzorové rovnice (5.3-2) (vzhľadom na symetriu ε_{ij} budú ostatné lineárnou kombináciou týchto štyroch), pre ktoré sa dá dokázať, že

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad (5.3-3)$$

Výraz (5.3-3) obsahuje vlastne $3^4 = 81$ rovníc, z ktorých len 6 je lineárne nezávislých a nazývajú sa St. Venantovými podmienkami kompatibility deformácie.

Napr. pre $i = j = k = l = 1$ máme

$$\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{11,11} - \varepsilon_{11,11} - \varepsilon_{11,11} = 0$$

resp. pre $i = j = 1, k = 2, l = 3$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{12,13} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Zvyšných päť rovníc by sme dostali z (5.3-3) v tvare

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{2 \partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \quad (5.3-4)$$

$$\frac{2 \partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{2 \partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}$$

System rovníc (5.3-4) je nutnou a postačujúcou podmienkou pre zložky deformácie, aby sme z nich určili zložky posunutia pre jednoducho súvislú oblasť. Pre viacnásobne súvislú oblasť treba k týmto rovniciam dodať ďalšie podmienky, ktoré tu však neuvádzame.

6. Konštitutívne rovnice

Látka, ktorá vyplňa kontinuum, sa vyznačuje určitými materiálovými vlastnosťami. Zákony, alebo rovnice, ktoré popisujú správanie sledovaného materiálu pri pôsobení vonkajších vplyvov, sa nazývajú konštitutívnymi rovnicami. V pružnosti je to zákon, ktorý určuje vzájomný vzťah medzi napätím a pretvorením, v termomechanike medzi stavovými veličinami, atď... My sa budeme hlavne zaoberať vzájomným vzťahom medzi napätím a deformáciou.

Pre veľký počet pevných látok sú deformácie proporcionálne k zataženiu. Experimentálne získaný fakt, že s narastaním zataženia narastajú deformácie a s klesaním zataženia deformácie klesajú a napokon po vymiznutí zataženia deformácie vymiznú, čo nám stanovuje Hookeov zákon, viedlo k jeho zovšeobecneniu. Podľa zovšeobecného Hookeovho zákona je každá zložka stavu napätosti lineárnou funkciou zložiek deformácie v danom bode telesa. V matematickom tvare

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

kde τ_{ij} je tenzor napätia, ε_{kl} tenzor nekonečne malých deformácií a C_{ijkl} je tenzor 4. rádu, ktorý má $3^4 = 81$ zložiek. Tieto zložky popisujú materiálové vlastnosti kontinua. Tento idealizovaný zákon popisuje pomerne dobré správanie troch skupín materiálov:

- hookeovské pružné teleso;
- neviskóznou kvapalinu;
- newtonovskú viskóznou tekutinu.

Zovšeobecnený Hookeov zákon idealizuje správanie uvedených materiálov a približuje ho viac alebo menej ku skutočnosti. Keď sú rozdiely v správaní materiálu príliš veľké, hovoríme o reálnom plyne, nenewtonovskej tekutine, viskoelastickom prostredí, plasticite, ..., ktorých popisovanie je omnoho komplikovanejšie. V tejto kapitole budú uvedené konštitutívne rovnice len pre tri skupiny materiálov, pretože poslucháči špecializácie "Aplikovaná mechanika", ktorým sú tieto skriptá určené, sa v špeciálnych predmetoch zaoberajú mechanikou tekutín, plynov, príp. teóriou plasticity.

6.1 HOOKEOVSKÉ ELASTICKÉ PEVNÉ TELESO

Budeme sa zaoberať pevným telesom schopným sa deformovať tak, že vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou je lineárny, t.j. vyhovuje zovšeobecnenému Hookeovmu zákonu. Nech uvažované teleso, prípadne jeho časť má objem V a plochu S . Ak pôsobia na teleso vonkajšie sily, dochádza k jeho deformácii. Je zrejmé, že vonkajšie sily pritom konajú prácu, pretože v dôsledku posunutí pôsobia na určitej dráhe du_i . Túto prácu nazývame deformačnou prácou, a označíme ju W . V samotnom telese sa bude vplyvom deformácie akumulovať energia, ktorú nazývame deformačnou energiou U . Pri odľahčovaní telesa sa táto energia naspäť uvoľňuje, pretože vracia teleso do svojho pôvodného tvaru, čo znamená, že zas vnútorné sily konajú prácu. Ako ukazujú experimenty, deformácia je vo všeobecnosti nehomogénna, a preto i deformačná energia môže byť v telese rozložená nerovnomerne. Preto zavádzame tzv. pomernú energiu deformácie, resp. hustotu deformačnej energie dU . Predstavuje nám energiu v danom bode telesa vzťahovanú na jednotku počiatočného objemu. Keď predpokladáme proces deformácie za adiabatický, musí sa deformačná práca rovnať deformačnej energii

$$dW = dW_B + dW_S = d\left(\int_V U dV\right) = \int_V (dU) dV \quad (6.1-1)$$

V rovnici (6.1-1) dW_B predstavuje deformačnú prácu objemových síl

$$dW_B = \int K_1 du_1 dV = \iiint_V (K_1 du_1 + K_2 du_2 + K_3 du_3) dV \quad (6.1-2)$$

Ďalej dW_S je práca plošných síl

$$dW_S = \int_S \overset{j}{T}_i du_i dS = \int_S \tau_{ji} \nu_j du_i dS \quad (6.1-3)$$

kde $\overset{j}{T}_i = \tau_{ji} \nu_j$ sú zložky vektora napätia, τ_{ji} sú zložkami tenzora napätia v bode plochy s vonkajšou normálou ν_j . Výraz (6.1-3) upravíme pomocou Gausovej vety

$$\int_S \tau_{ji} \nu_j du_i dS = \int_S (\tau_{ji} du_i) \nu_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} du_i) dV \quad (6.1-4)$$

Dosađením (6.1-4) a (6.1-2) do rovnice (6.1-1) dostaneme

$$\int_V K_i du_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} du_i) dV = \int_V (dU) dV \quad (6.1-5)$$

Urobíme naznačenú deriváciu vo vzťahu pre plošné sily a rovnicu upravíme do tvaru

$$\int_V \left(K_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) du_i dV + \int_V \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) dV = \int_V (dU) dV \quad (6.1-6)$$

Ak sa uvažované teleso nachádza v statickej rovnováhe, potom prvý člen v (6.1-6) je vzhľadom na podmienku rovnováhy nulový, čím sa nám táto rovnica upraví na

$$\int_V \tau_{ji} d\epsilon_{ij} dV = \int_V (dU) dV \quad (6.1-7)$$

Zrejme platí úprava

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) = d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = d\epsilon_{ij} \quad (6.1-8)$$

pričom $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$ sú zložky gradientu deformácie.

Z rovnosti integrálov v (6.1-7) vyplýva rovnosť integrantov, t.j.

$$\tau_{ji} d\epsilon_{ij} = dU \quad (6.1-9)$$

a odtiaľ

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (6.1-10)$$

Ak z gradientu deformácie vynecháme nekonečne malé rotácie, potom $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ a deformačná energia bude funkciou zložiek tenzora malých deformácií ($U = U(\epsilon_{ij})$). Dôsledkom toho môžeme rovnicu (6.1-10) vyjadriť v tvare

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (6.1-11)$$

Pre jednotlivé zložky tenzora napätia z (6.1-11) dostaneme

$$\tau_{11} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad \tau_{22} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad \dots, \quad \tau_{32} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{32}} \quad (6.1-12)$$

Ak účinkom vonkajších síl je zmena stavu telesa izotermálna, dá sa dokázať, že funkcia U existuje a spĺňa rovnice (6.1-6). Funkciu U , ako sme už spomenuli, nazývame funkciou hustoty deformačnej energie. Použitie tejto funkcie a z nej odvodené vzťahy je možné len pre telesá pružné, u ktorých je možný návrat do svojho originálneho tvaru, keď vymiznú napätia.

6.2 ZOVŠEOBECNENÝ HOOKEOV ZÁKON

Ako sme už uviedli v úvode tejto kapitoly, pri zovšeobecnení Hookeovho zákona predpokladáme, že každá zo zložiek tenzora napätia je lineárnou funkciou zložiek tenzora deformácie. To je možné zapísať rovnicou

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.2-1)$$

kde tenzor štvrtého rádu, C_{ijkl} , tiež nazývame tenzorom pružnosti. Tento tenzor má $3^4 = 81$ zložiek. Ako uvidíme neskôr, tenzor pružnosti sa nám zjednoduší, pretože nie všetky jeho zložky sú nezávislé a niektoré môžu byť aj nulové.

Zo vzťahu (6.2-1) napr. pre τ_{12} dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= C_{1211} \varepsilon_{11} + C_{1221} \varepsilon_{21} + C_{1231} \varepsilon_{31} = \\ &= C_{1211} \varepsilon_{11} + C_{1212} \varepsilon_{12} + C_{1213} \varepsilon_{13} + \\ &+ C_{1221} \varepsilon_{21} + C_{1222} \varepsilon_{22} + C_{1223} \varepsilon_{23} + \\ &+ C_{1231} \varepsilon_{31} + C_{1232} \varepsilon_{32} + C_{1233} \varepsilon_{33} \end{aligned}$$

Pretože tenzor napätia je symetrický, bude platiť

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

a po zohľadnení (6.2-1) dostaneme

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \tau_{ji} = C_{jikl} \varepsilon_{kl} \quad (6.2-2)$$

Odtiaľ vyplýva

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (6.2-3)$$

Teraz ukážeme, že tenzor pružnosti je symetrický aj v dvoch posledných indexoch. Za tým účelom predpokladajme, že teleso je v takom deformačnom stave, kde rôzne od nuly sú len zložky deformácie $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

Pre tento špeciálny prípad môžeme (6.2-1) písať v tvare

$$\tau_{ij} = C_{ij12} \varepsilon_{12} + C_{ij21} \varepsilon_{21} \quad (6.2-4)$$

alebo

$$\tau_{ij} = (C_{ij12} + C_{ij21}) \varepsilon_{12} \quad (6.2-5)$$

Zaveďme si novú konštantu C'_{ij12} definovanú výrazom

$$C'_{ij12} = -(C_{ij12} + C_{ij21}) \quad (6.2-6)$$

Vidíme, že C'_{ij12} je symetrická v dvoch posledných indexoch. Využitím (6.2-6) môžeme rovnicu (6.2-5) upraviť

$$\tau_{ij} = 2 C'_{ij12} \varepsilon_{12} = (C'_{ij12} + C_{ij21}) \varepsilon_{21} \quad (6.2-7)$$

Porovnaním (6.2-7) a (6.2-4) je zjavné, že C_{ijkl} je symetrický aj v druhých dvoch indexoch k a l , a potom

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jikl} \quad (6.2-8)$$

Na základe (6.2-8) môžeme vzťah pre zložku napätia τ_{12} upraviť na tvar

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= C_{1211} \varepsilon_{11} + C_{1222} \varepsilon_{22} + C_{1233} \varepsilon_{33} + \\ &+ 2 (C_{1212} \varepsilon_{12} + C_{1213} \varepsilon_{13} + C_{1232} \varepsilon_{32}) \end{aligned}$$

Využitím symetrie tenzora pružnosti sa nám zredukuje počet jeho nezávislých zložiek z 81 na 36 konštánt.

Za predpokladu existencie funkcie hustoty deformačnej energie U môžeme počet konštánt ďalej znížiť.

V zhode s rovnicou (6.1-5) dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{11}} = \tau_{11} = C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1122} \epsilon_{22} + \dots + C_{1132} \epsilon_{32} \quad (6.2-9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{22}} = \tau_{22} = C_{2211} \epsilon_{11} + C_{2222} \epsilon_{22} + \dots + C_{2232} \epsilon_{32}$$

Odtiaľ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{11} \partial \epsilon_{22}} = C_{1122} = \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{22} \partial \epsilon_{11}} = C_{2211}$$

A vo všeobecnosti bude platiť rovnosť

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{ijkl} = C_{klij} \quad (6.2-10)$$

Rovnica (6.2-10) nám hovorí, že tenzor C_{ijkl} musí byť symetrickým i pri zámene prvej dvojice indexov s druhou:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (6.2-11)$$

Tým sa nám vo všeobecnom prípade znižuje počet nezávislých konštánt pružnosti na 21. Týchto 21 koeficientov popisuje elastické vlastnosti v tesnom okolí určitého bodu a vo všeobecnom prípade môžu byť funkciami polohy bodu (jeho súradníc). Napríklad pri konečných deformáciách musíme robiť rozdiel medzi deformovanou a nedeformovanou konfiguráciou telesa. V tomto prípade treba, vzhľadom na príslušnú transformáciu, považovať tieto konštanty za závislé veličiny od polohy sledovaného bodu. Vo väčšine prípadov sa však tomuto problému pristupuje dogmaticky a tenzor pružnosti sa nepodrobuje transformácii pri prechode z jednej konfigurácie telesa do druhej. Taktiež sa predpokladá homogénnosť elastických vlastností, t.j. v každom bode uvažovaného telesa sú elastické vlastnosti konštantné a rovnaké. Podmienky homogénnosti vlastností pružnosti však plne vyhovujú len v teórii malých deformácií.

Zložky tenzora pružnosti sa zvyknú označovať aj dvojindexovými symbolmi A_{ij} ; $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Napríklad:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= C_{11k1} \epsilon_{k1} = C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1121} \epsilon_{21} + C_{1131} \epsilon_{31} = \\ &= C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1122} \epsilon_{22} + C_{1133} \epsilon_{33} + \\ &+ (C_{1112} + C_{1121}) \epsilon_{12} + (C_{1123} + C_{1132}) \epsilon_{23} + \\ &+ (C_{1131} + C_{1113}) \epsilon_{31} = C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1122} \epsilon_{22} + C_{1133} \epsilon_{33} + \\ &+ 2 C_{1112} \epsilon_{12} + 2 C_{1123} \epsilon_{23} + 2 C_{1131} \epsilon_{31} = \\ &= A_{11} \epsilon_{11} + A_{12} \epsilon_{22} + A_{13} \epsilon_{33} + A_{14} \epsilon_{12} + A_{15} \epsilon_{23} + A_{16} \epsilon_{31} \end{aligned}$$

V maticovom tvare vyjadríme nezávislé zložky tenzora napätia pomocou nezávislých koeficientov C_{ijkl} , resp. A_{ij} takto:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (6.2-12)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (6.2-13)$$

Ako sme už uviedli, vzhľadom na symetriu (6.2-1), počet nezávislých zložiek elastických vlastností sa nám zníži z 36 na 21 (6 na diagonále matice matric. vlastností + polovičku zo zvyšných 30 členov). Pre maticu vo vzťahu (6.2-11) sme už tento fakt dokázali. Podobným spôsobom to urobíme pre maticu vo vzťahu (6.2-12). Pre zložky napätia platí

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{11}} = \sigma_{11} = A_{11} \epsilon_{11} + A_{12} \epsilon_{22} + A_{13} \epsilon_{33} + A_{14} \epsilon_{12} + A_{15} \epsilon_{23} + A_{16} \epsilon_{31}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{22}} = \sigma_{22} = A_{21} \epsilon_{11} + A_{22} \epsilon_{22} + A_{23} \epsilon_{33} + A_{24} \epsilon_{12} + A_{25} \epsilon_{23} + A_{26} \epsilon_{31}$$

Po derivácii prvej rovnice podľa ϵ_{22} a druhej podľa ϵ_{11} máme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{22} \partial \epsilon_{11}} = A_{12}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{11} \partial \epsilon_{22}} = A_{21} \quad (6.2-14)$$

to znamená, že $A_{12} = A_{21}$. Na tomto základe môžeme tvrdiť, že

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Treba si uvedomiť, že A_{ij} už nie sú zložkami tenzora a teda nemožno napísať všeobecný vzťah, obdobný tvrdeniu (6.2-10). Ako sme už spomenuli, materiálové vlastnosti sú tenzorom štvrtého stupňa a sú vo všeobecnosti závislé od transformácie súradnicového systému. To znamená, že ak v počítateľnom súradnicovom systéme ($x_i, i = 1, 2, 3$) má tenzor pružnosti zložky C_{ijkl} , potom v súradnicovom systéme natočenom ($x'_i, i = 1, 2, 3$) budú zodpovedajúce zložky podrobené transformačnému zákonu tenzora 4. stupňa

$$C'_{opqr} = a_{oi} a_{pj} a_{qk} a_{rl} C_{ijkl} \quad (6.2-15)$$

Vzťah medzi napätím a deformáciou, vyjadrený zákonom (6.2-1), možno vyjadriť aj v inverznom tvare

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (6.2-16)$$

kde S_{ijkl} sú konštanty tzv. "kompliančného" tenzora. Tento tenzor sa vyznačuje obdobnou symetriou, ako C_{ijkl} .

V maticovom tvare (s využitím kompliančnej matice) môžeme (6.2-16) vyjadriť takto

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2312} & S_{2323} & S_{2331} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3112} & S_{3123} & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad (6.2-17)$$

6.3 SYMETRIA PRUŽNOSTI (ELASTICITY)

Elastické vlastnosti sa vyznačujú určitou symetrickosťou. Typ príslušnej symetrie posudzujeme podľa stupňa invariantnosti tenzora C_{ijkl} (alebo S_{ijkl}) pri transformácii súradnic natočením.

Známe sú nasledujúce typy symetrie:

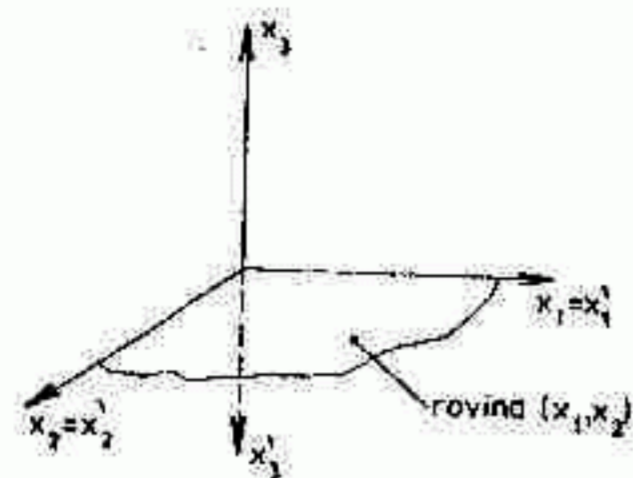
- symetria vzhľadom na rovinu;
- symetria na dve navzájom kolmé roviny (ortotropia);
- rotačná symetria vzhľadom na jednu os (anizotropia);
- rotačná symetria na dve navzájom kolmé osi (izotropia).

a) Symetria vzhľadom na jednu rovinu

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických vlastností vzhľadom na jednu rovinu, sa nazýva monoklinický.

Uvažujme, že rovinou symetrie je rovina (x_1, x_2) (obr. 6.1). Počítateľný súradnicový systém ($x_i, i = 1, 2, 3$) sa preklopí do polohy ($x'_i, i = 1, 2, 3$).

Požiadavka je, aby sa elasticke konštanty pri prechode jedného súradnicového systému do druhého nezmenili. Smerové kosínusy uhlov medzi osami (x'_i, x_j) označíme a_{ij} , a pre náš prípad budú



Obr. 6.1
Symetria vzhľadom na rovinu (x₁, x₂)

$$\cos(x_1', x_j) = a_{1j} = (1, 0, 0)$$

$$\cos(x_2', x_j) = a_{2j} = (0, 1, 0) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6.3-1)$$

$$\cos(x_3', x_j) = a_{3j} = (0, 0, 1)$$

Podľa (6.2-15) musí potom platiť

$$\begin{aligned} C'_{1111} &= a_{1p} a_{1q} a_{1r} a_{1s} C_{pqrs} = \\ &= a_{11} a_{11} a_{11} a_{11} C_{1111} + a_{12} a_{12} a_{12} a_{12} C_{2222} + \dots + \\ &+ a_{11} a_{12} a_{13} a_{13} C_{1233} \end{aligned}$$

Pretože všetky $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$, nakoniec dostaneme

$$C'_{1111} = C_{1111} \quad (6.3-2)$$

čo podmienke symetrie (invariantnosti) plne vyhovuje. Podobným spôsobom pre tento typ symetrie by sme mali dostať

$$C'_{1123} = a_{1p} a_{1q} a_{2r} a_{3s} C_{pqrs} = C_{1123} \quad (6.3-3)$$

čo však nedosiahneme, lebo v skutočnosti je

$$a_{1p} a_{1q} a_{2r} a_{3s} C_{pqrs} = -C_{1123} \quad (6.3-4)$$

Aby sa splnila podmienka symetrie (6.3-3), musí byť $C_{1123} = 0$. Takýmto spôsobom sa dá ukázať, že pôvodná matica materiálových vlastností sa zredukuje na trinásť nezávislých členov

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2331} & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (6.3-5)$$

Pre závislosť medzi deformáciou a napätím by sme dostali

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3312} & 0 & 0 \\ S_{1112} & S_{2212} & S_{3312} & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & S_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2331} & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix} \quad (6.3-6)$$

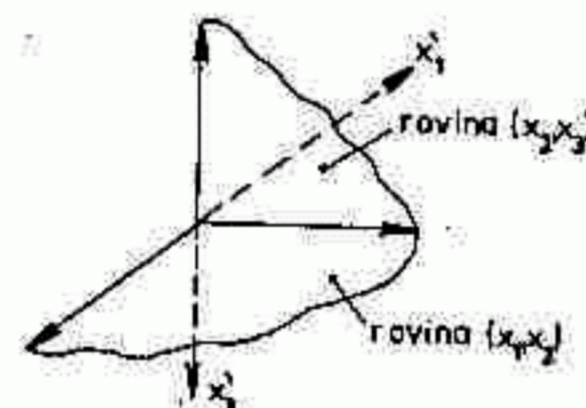
Matrica (6.3-6) umožňuje robiť prehľadný názor o jednotlivých zložkách deformácie, ak zložky napätia pôsobia jednotlivo. Ak napríklad jediným nenulovým napätím je $\tau_{33} \neq 0$, potom vzniknú tri normálové pomerné predĺženia ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} a jedna zložka pomerného skosenia ϵ_{12} . Obidve zvyšné zložky ϵ_{23} a ϵ_{31} sú rovné nule.

Pri aplikácii zložky τ_{13} sú všetky normálové pomerné predĺženia nulové, len ϵ_{23} a ϵ_{31} sú rôzne od nuly.

b) Symetria vzhľadom na dve ortogonálne roviny

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických vlastností vzhľadom na dve navzájom kolmé roviny, sa nazýva ortotropickým. Nech rovinami symetrie sú (x_1, x_2) a (x_2, x_3) (obr. 6.2), smerové kosínusy (x'_i, x_j) v tomto prípade budú

$$\begin{aligned} a_{1j} &= (-1, 0, 0) = \cos(x'_1, x_j) \\ a_{2j} &= (0, 1, 0) = \cos(x'_2, x_j) \\ a_{3j} &= (0, 0, -1) = \cos(x'_3, x_j) \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6.3-7)$$



Obr. 6.2

Symetria vzhľadom na dve ortogonálne roviny

Požiadavkou symetrie vzhľadom na dve roviny sa nám oproti symetrii na jednu rovinu zníži počet nezávislých konštánt z 13 na 9. Matica materiálových vlastností bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (6.3-8)$$

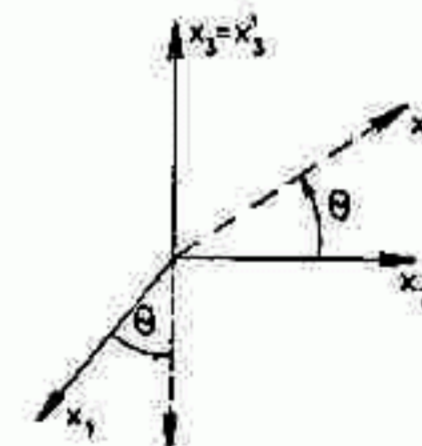
Kompliančná matica má opäť rovnaký tvar ako (6.3-8). Vzhľadom na kompliančnú maticu má závislosť deformácia - napätie tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{31} \end{bmatrix} \quad (6.3-9)$$

Tieto rovnice ukazujú, že pre ortotropické materiály normálové napätia spôsobujú len normálové deformácie a šmykové napätia spôsobujú len pomerné skosenia. Platí to však len pre prípad systému súradníc, ktorý je zhodný so súradnicovým systémom, vzhľadom na ktorý je definovaná symetria.

c) Rotačná symetria vzhľadom na jednu os

Materiál vyznačujúci sa takouto symetriou, sa nazýva anizotropickým. Takáto symetria vyžaduje, aby elastické konštanty ostali nezmenené pri každej rotácii o nejaký uhol θ okolo osi symetrie (obr. 6.3).



Obr. 6.3

Rotačná symetria na jednu os

Nech touto osou symetrie je x_3 . Dá sa dokázať, že pre tento druh symetrie sa nám počet nezávisle premenných zredukuje na päť a matica materiálových vlastností bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111}-c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} \end{bmatrix} \quad (6.3-10)$$

Po vyjadrení kompliancej matice dostaneme vzájomný vzťah medzi deformáciou a napätím

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ s_{1122} & s_{1111} & s_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ s_{1133} & s_{1133} & s_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{1111}-s_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (6.3-11)$$

d) Rotáčna symetria vzhľadom na dve navzájom kolmé osi

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických konštánt vzhľadom na natočenie okolo dvoch navzájom kolmych osí, nazývame izotropickým. Vzhľadom na predchádzajúci prípad symetrie, v tomto prípade sa nám počet nezávisle premenných konštánt zníži na dve, pretože dostaneme

$$\begin{aligned} c_{1313} &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{3333} &= c_{1111} \\ c_{1133} &= c_{1122} \end{aligned} \quad (6.3-12)$$

Matice materiálových vlastností potom bude

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1122} & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111}-c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111}-c_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111}-c_{1122}) \end{bmatrix} \quad (6.3-13)$$

Závislosť medzi deformáciou a napätím uprevíme na tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1122} \\ s_{1122} & s_{1111} & s_{1122} \\ s_{1122} & s_{1122} & s_{1111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{1111}-s_{1122}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{1111}-s_{1122}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{1111}-s_{1122}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad (6.3-14)$$

Elastické konštanty v (6.3-13) sa označujú obyčajne takto:

$$\begin{aligned} c_{1122} &= \lambda \\ c_{1212} &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) = \mu \\ c_{1111} &= \lambda + 2\mu \end{aligned} \quad (6.3-15)$$

Dvojicu konštánt λ, μ nazývame Lamého konštantami. Vzťah medzi napätím a deformáciou vyjadríme na základe (6.3-15) v tvare

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (6.3-16)$$

alebo skrátenejším zápisom

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{nn} \quad (6.3-17)$$

A pre inverznú závislosť by sme z (6.3-17) dostali

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \tau_{nn} + \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} \quad (6.3-18)$$

Obvykle musíme požadovať, aby $\mu \neq 0$ a $3\lambda + 2\mu \neq 0$. Vzťah (6.3-18) odvodíme napr. takto: Z rovnice (6.3-17) máme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} \delta_{ij} \varepsilon_{nn} \quad (6.3-19)$$

Zdžením (6.3-18) dostaneme (pričom $\delta_{ii} = 3$)

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ii} - \frac{3\lambda}{2\mu} \varepsilon_{nn} \quad (6.3-20)$$

a po premenovaní sčítacích indexov i na n

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{2\mu} \tau_{nn} - \frac{3\lambda}{2\mu} \varepsilon_{nn} \quad (6.3-21)$$

Úpravou (6.3-21) pre ε_{nn} napokon máme

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\tau_{nn}}{2\mu + 3\lambda} \quad (6.3-22)$$

a po dosadení do (6.3-19) dostaneme rovnicu (6.3-18).

Aby sme videli fyzikálny význam Lamého konštánt, vyjadríme z rovnice (6.3-18) hodnotu pomerného predĺženia

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \tau_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \quad (6.3-23)$$

Ak uvažujeme jednoosovú napätosť, potom $\tau_{22} = \tau_{33} = 0$ a z (6.3-23) je

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu + 3\lambda} \right) \tau_{11} = \frac{\tau_{11}}{E} \quad (6.3-24)$$

E je modul pružnosti v ťahu, pre ktorý zo (6.3-24) dostaneme

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

Pre zložku deformácie ε_{22} z rovnice (6.3-23) vypočítame

$$\varepsilon_{22} = - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \tau_{11} \quad (6.3-25)$$

a zároveň taktiež pre jednoosovú napätosť platí rovnica

$$\varepsilon_{22} = - \frac{\gamma}{E} \tau_{11} \quad (6.3-26)$$

kde γ je Poissonovo číslo.

Porovnaním (6.3-25) a (6.3-26) pre Poissonovo číslo dostaneme

$$\gamma = \frac{\lambda E}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \quad (6.3-27)$$

a po dosadení za modul pružnosti podľa (6.3-24) nakoniec máme

$$\gamma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6.3-28)$$

Riešením rovníc (6.3-24) a (6.3-28) pre konštanty λ a μ dospejeme k výrazom

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\gamma E}{(1 + \gamma)(1 - 2\gamma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \gamma)} \equiv G \quad (6.3-29)$$

prídom je zaužívané označenie $\mu = G$, kde pod G rozumieme modul pružnosti materiálu v šmyku.

Nahradením Lamého konštánt v rovnici (6.3-17) a (6.3-19) materiálovými konštántami E, ν dostaneme vzťahy

$$\epsilon_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_{ij} + \frac{\gamma E}{(1 + \gamma)(1 - 2\gamma)} \delta_{ij} \epsilon_{nn} \quad (6.3-30)$$

resp.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \gamma) \sigma_{ij} - \gamma \delta_{ij} \sigma_{kk}] \quad (6.3-31)$$

Na záver si uvedieme tabuľku, v ktorej si pre názornosť uvedieme dosiahnuté vzájomné vzťahy medzi Lamého konštántami a materiálovými konštántami E, ν .

Závislosť medzi materiálovými konštántami

Tabuľka 6.1

Konštanty	Základná dvojica	
	$\lambda, \mu = G$	E, ν
λ	λ	$\frac{\gamma E}{(1 + \gamma)(1 - 2\gamma)}$
$\mu = G$	μ, G	$\frac{E}{2(1 + \gamma)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	ν

6.4 NEVISKÓZNA KVAPALINA

Je to taká kvapalina, pre ktorú je tenzor napätia izotropický

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (6.4-1)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerova delta a p je skalár (tlak). V maticovom vyjadrení

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (6.4-2)$$

V ideálnom tvare je tlak p vzťahovaný v stavovej rovnici na objem a teplotu

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (6.4-3)$$

Vo vzťahu (6.4-3) R predstavuje plynovú konštantu, T - teplotu a ρ mernú hmotnosť.

Pre reálny plyn alebo kvapalinu môžeme stavovú rovnicu napísať v tvare

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (6.4-4)$$

Väčšinu kvapalín však môžeme považovať za nestlačiteľnú, čo možno vyjadriť podmienkou

$$\rho = \text{konst} \quad (6.4-5)$$

Pri plynoch je obvykle hustota funkciou tlaku $\rho = \rho(p)$ a vtedy treba prihliadať aj na stavovú rovnicu. Napríklad voľu a vzduch možno pokladať za neviskóznou tekutinu. Na základe týchto vzťahov môžeme povedať, že neviskózna tekutina nekladie odpor voči zmene tvaru. Tento odpor nazývame viskozitou a z toho potom vyplýva názov neviskózna tekutina. Ak je neviskózna tekutina v rovnováhe, potom v každom jej bode pôsobí tlak vo všetkých smeroch rovnaký, kolmo na ľubovoľnú elementárnu plošku. Pretože tlak p je skalárom, zložky napätia podľa (6.4-2) nie sú závislé od zmeny vzťažného súradnicového systému.

6.5 NEWTONOVSKÉ VISKÓZNE TEKUTINY

Newtonovská tekutina je viskózna tekutina, pre ktorú je ťmykové napätie priamoúmerné rýchlosti deformácie. Vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou je definovaný rovnicou

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl} V_{kl} \quad (6.5-1)$$

kde τ_{ij} je tenzorom napätia, V_{kl} je tenzor rýchlosti deformácie, D_{ijkl} je tenzor (koeficientov) viskozity tekutiny a p je statický tlak. Člen $-p\delta_{ij}$ reprezentuje možný zvyškový stav napätia, ak $V_{kl} = 0$. Tlak p je, v zhode so stavovou rovnicou, uvažovaný ako funkcia hustoty a viskozity tekutiny. Ďalej budeme uvažovať, že zložky D_{ijkl} môžu závisieť od teploty, ale sú nezávislé od napätí a rýchlosti deformácie. Tenzor D_{ijkl} je tenzorom štvrtého stupňa a má, podobne ako pri hookeovskom telese, $3^4 = 81$ zložiek. Vzhľadom na symetriu τ_{ij} a V_{kl} , a tiež podľa atomistickej štruktúry, sa počet nezávislých zložiek zníži podľa zložitosti uvažovanej tekutiny.

Väčšina uvažovaných tekutín má izotropické vlastnosti, pre ktoré je štruktúra D_{ijkl} veľmi jednoduchá.

Pre tento prípad symetrie možno D_{ijkl} vyjadriť pomocou dvoch nezávislých konštánt λ a μ .

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.5-2)$$

a po úprave môžeme vzťah (6.5-1) napísať v tvare

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \quad (6.5-3)$$

Zúžením tenzora τ_{ij} dostaneme

$$\tau_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk} \quad (6.5-4)$$

Pretože $\tau_{kk} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ je veličina invariantná, je nezávislá na rýchlosti deformácie. Je zrejmé, že $p = -\frac{\tau_{kk}}{3}$, čo má za následok podmienku

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

a odtiaľ

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Na základe toho môžeme (6.5-3) vyjadriť v závislosti len od jednej nezávislej konštanty μ

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3} V_{kk} \delta_{ij} \quad (6.5-5)$$

Rovnica (6.5-5) je nazvaná Stokesovou a tekutina, ktorá ju splňuje, je Stokesovou tekutinou. Konštantu μ nazývame koeficientom viskozity. Ak $\mu = 0$, potom z (6.5-5) dostaneme rovnicu naviskózne tekutiny

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Prítomnosť statického tlaku p v konštitutívnych rovniciach spôsobuje hlavný rozdiel medzi mechanikou tekutín a napr. elastostatikou. Tento tlak je obsiahnutý v stavovej rovnici

$$f(p, \rho, T) = 0$$

Tekutiny, ktoré nespĺňajú uvedené rovnice, nazývame nenewtonovskými tekutinami. Je to napríklad v prípade, ak viskozita závisí od rýchlosti deformácie.

6.6 VPLYV TEPLoty

V predchádzajúcich kapitolách sme predpokladali nemennosť materiálových vlastností, C_{ijkl} resp. D_{ijkl} vzhľadom na zmenu teploty. Je zrejmé, že tieto zákony možno použiť len pre izotermálne procesy. Ak uvažujeme teplotnú závislosť, musia sa základné zákony vyjadriť v závislosti od zmeny teploty.

Pre elastické telesá môžeme Hookeov zákon modifikovať do Duhamel - Neumannovho tvaru, o ktorom podrobnejšie píšeme v kapitole 9.

7. Základy variačného počtu. Variačné princípy

Variačný počet nachádza široké uplatnenie v mechanike kontinua, najmä v nových moderných numerických metódach. Je to oblasť matematiky, ktorá študuje stacionárne vlastnosti funkcie funkcií - funkcionálu. Veľa fyzikálnych dejov je opísaných funkcionálmi, a riešením daného problému je nájsť funkciu, pre ktorú funkcionál nadobúda extrémnu hodnotu (minimum alebo maximum). Príkladmi funkcionálov napríklad sú: potenciálna energia, deformačná energia, My sa budeme v ďalšom zaoberať problémami, v ktorých bude treba hľadať minimálnu hodnotu funkcionálu, inými slovami - budeme minimalizovať funkcionál. Na základe získaných všeobecných poznatkov uvedieme najčastejšie uplatňované variačné princípy v mechanike kontinua.

7.1 MINIMALIZÁCIA FUNKCIONÁLU

Majme funkciu $u(x)$ definovanú na intervale (a,b) a J je veličina definovaná

$$J[u] = \int_a^b [u(x)]^2 dx \quad (7.1-1)$$

ktorá je závislá od funkcie $u(x)$ ako celku. Veličinu $J[u] = J[u(x)]$ nazývame funkcionálom funkcie $u(x)$.

Základný problém variačného počtu možno ilustrovať na nasledujúcom príklade. Uvažujme funkcionál $J[u]$, definovaný výrazom

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (7.1-2)$$

Funkcia $u(x)$ je spojitá a diferencovateľná so spojitými deriváciami $u'(x)$ a $u''(x)$ v intervale (a,b) , a splňuje okrajové podmienky

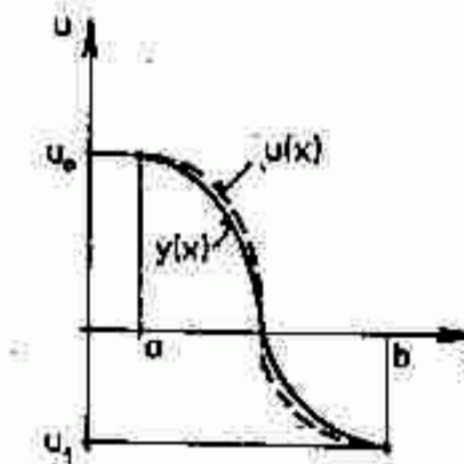
$$\begin{aligned} u(a) &= u_0 \\ u(b) &= u_1 \end{aligned} \quad (7.1-3)$$

V podmienkach (7.1-3) sú u_0 a u_1 dané hodnoty. Ďalej uvažujme, že $F(x, u, u')$ je spojitá a diferencovateľná vzhľadom na x , u a u' až do druhej derivácie.

Z množiny všetkých funkcií $u(x)$, ktoré spĺňajú podmienky kompatibility a okrajové podmienky (7.1-3), budeme hľadať špeciálnu jednu $u(x) = y(x)$ s vlastnosťami, že $J[u]$ dosahuje minimum, keď $u(x) = y(x)$, vzhľadom na dostatočne malé okolie (h) funkcie $y(x)$. Okolie (h) funkcie $y(x)$ definujeme nasledujúcim spôsobom: Ak h je kladná veličina, potom funkcia $u(x)$ leží v okolí funkcie $y(x)$, keď platí nerovnosť

$$|y(x) - u(x)| < h \quad (7.1-4)$$

pre všetky $x \in (a,b)$. Táto definícia je ilustrovaná na obr. 7.1.



Obr. 7.1
Funkcia $y(x)$ a $u(x)$

Uvažujme, že neznačený problém má riešenie, označené $y(x)$. To znamená, že existuje funkcia $y(x)$, ktorá splňuje nerovnosť

$$J[y] \leq J[u] \quad (7.1-5)$$

pre všetky funkcie $u(x)$ z dostatočne malého okolia (h) funkcie $y(x)$. Z tohto predpokladu možno urobiť nasledujúce závery.

Nech $\zeta(x)$ je všeobecná funkcia s vlastnosťou, že $\zeta(x)$ a jej derivácie $\zeta'(x)$ a $\zeta''(x)$ sú spojitý v intervale (a,b) a že

$$\zeta(a) = \zeta(b) = 0 \quad (7.1-6)$$

Potom aj funkcia

$$u(x) = y(x) + \epsilon \zeta(x)$$

spĺňa podmienky spojivosti a okrajové podmienky (7.1-3). V skutočnosti každá funkcia $u(x)$, spĺňajúca tieto podmienky, môže byť týmto spôsobom reprezentovaná rovnakou funkciou $\zeta(x)$. Pre dostatočne malé $\alpha > 0$ táto funkcia $u(x)$ patrí pre všetky ϵ také, že $|\epsilon| < \alpha$, do predpísaného okolia (h) funkcie $y(x)$. Teraz uvažujme funkcionál

$$J[u] = J[y + \epsilon \zeta] = \int_a^b F[x, u, u'] dx = \int_a^b F[x, y(x) + \epsilon \zeta(x), y'(x) + \epsilon \zeta'(x)] dx = \tilde{J}(\epsilon) \quad (7.1-7)$$

Pretože $y(x)$ považujeme za známu funkciu, $\tilde{J}(\epsilon)$ je funkciou len ϵ pre každú $\zeta(x)$. V zhode s nerovnosťou (7.1-5) musí platiť

$$\tilde{J}(0) \leq \tilde{J}(\epsilon) \quad (7.1-8)$$

pre všetky ϵ , pričom $|\epsilon| < \alpha$. Inými slovami, $\tilde{J}(\epsilon)$ nadobúda minimum pre $\epsilon = 0$.

Funkcia $\tilde{J}(\epsilon)$ je podľa predpokladu diferencovateľná podľa ϵ . Preto nevyhnutnou podmienkou pre existenciu minima funkcie $\tilde{J}(\epsilon)$ v $\epsilon = 0$ je, aby

$$\left[\tilde{J}'(\epsilon) \right]_{\epsilon=0} = 0 \quad (7.1-9)$$

Deriváciou (7.1-7) podľa ϵ dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{J}'(\epsilon) &= \frac{\partial \tilde{J}(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial \epsilon} \right] dx = \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u} \zeta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'} \zeta' dx \end{aligned} \quad (7.1-10)$$

Použitím pravidla per partes pre integrovanie súčinu podľa premennej x druhej časti rovnice (7.1-10) a po úprave dostaneme

$$\tilde{J}'(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \zeta(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \zeta(x) \right]_a^b \quad (7.1-11)$$

Vzhľadom na (7.1-6) sa posledný člen (7.1-11) rovná nule. Potom

$$\tilde{J}'(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \right) \right] \zeta(x) dx \quad (7.1-12)$$

Ak položíme $\epsilon = 0$, potom $u = y$, $u' = y'$ a

$$\tilde{J}'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) \right] \zeta(x) dx = 0 \quad (7.1-13)$$

Platnosť (7.1-13) vyžaduje, aby integrant

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) = 0 \quad (7.1-14)$$

Rovnica (7.1-14) je Eulerovou diferenciálnou rovnicou, ktorá platí pre všetky $\zeta(x)$ spĺňajúce predpísané podmienky.

Dosiahnutý výsledok zovšeobecniť bez uvádzania dôkazu. Nech $\Psi(x)$ je spojitá v intervale $\langle a, b \rangle$. Ak rovnica

$$\int_a^b \Psi(x) \zeta(x) dx = 0 \quad (7.1-15)$$

platí pre všetky funkcie $\zeta(x)$ také, že sú nulové pre $x = a$ a b , a sú spojitá včítane prvých dvoch derivácií, potom $\Psi(x) = 0$.

Podobný výsledok by sme dostali pri hľadaní maxima funkcionálu. Zároveň môžeme zhrnúť, že platnosť Eulerovej diferenciálnej rovnice je nutnou podmienkou na to, aby funkcia $y(x)$ bola extrémom funkcionálu $J[u]$ vzhľadom na dostatočne malé okolie (h). Postačujúcou podmienkou však nie je. Pre zložitosť tejto podmienky nebudeme sa ňou ani zaoberať.

Je zaužívané výraz $\epsilon \zeta(x)$ nazývať variáciou funkcie $u(x)$ a písať

$$\epsilon \zeta(x) = u(x) - y(x) = \epsilon \frac{\delta u(x)}{\delta \epsilon} = \delta u(x) \quad (7.1-16)$$

Symbol δ budeme nazývať variačným symbolom. Podobne, ak $J[u]$ je funkcionál, potom definujeme jeho prvú variáciu

$$\delta J = \epsilon \frac{\partial \tilde{J}(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \epsilon \tilde{J}'(\epsilon) \quad (7.1-17)$$

V tomto zmysle vynásobíme (7.1-12) s veličinou ϵ . Po príslušných úpravách dostaneme

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \right) \right] \delta u(x) dx + \left[\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \delta u(x) \right] \quad (7.1-14)$$

Medzi prvou variáciou funkcionálu F a úplným diferenciálom nejakej funkcie f možno vidieť určitú analógiu.

Úplný diferenciál je definovaný

$$df = \epsilon f'(x)$$

Potom bude

$$d\mathcal{J}(\epsilon) = \frac{\partial \mathcal{J}(\epsilon)}{\partial \epsilon} \epsilon \approx \epsilon \mathcal{J}'(\epsilon) = \delta J$$

kde ϵ je všeobecný malý parameter, napr. pri úplnom diferenciáli - dx .

Obvykle prvá variácia δJ závisí od $u(x)$ a jej variácií $\delta u(x)$. Preto nevyhnutnou podmienkou na to, aby $J[u]$ nadobudol extrém pre $u(x) = y(x)$, je aby sa prvá variácia δJ rovnala nule pre všetky variácie δu také, že $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$.

Príklad:

Majme funkcionál

$$J[u] = \int_a^b (1 + u'^2) dx$$

pričom $u(a) = 0$, $u(b) = 1$. Nájdime funkciu $y(x)$, ktorá tento funkcionál minimalizuje.

Nutnou podmienkou existencie minima je, aby Eulerova diferenciálna rovnica bola nulová

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (7.1-19)$$

Ak $F = F(x, y, y') = 1 + y'^2$, potom $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$. Dosadením do (7.1-19) dostaneme

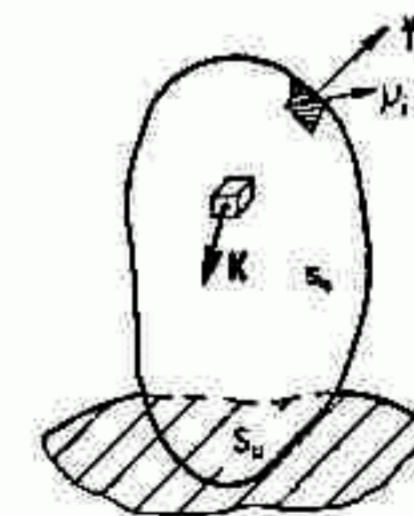
$$- \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} 2y' = 2y'' = 0$$

Hľadaná funkcia $y(x)$ bude priamka, prechádzajúca bodmi $(a, 0)$ a $(b, 1)$.

Obdobným spôsobom možno stanoviť nevyhnutnú podmienku pre existenciu extrémov zložitejších funkcionálov, v ktorých vystupujú derivácie funkcie $u(x)$ vyššieho stupňa, funkcionálu závislému od viacerých funkcií, atď. Taktiež možno stanoviť variáciu vyššieho stupňa funkcie, popr. funkcionálu. V našich ďalších úvahách vystačíme s prvou variáciou funkcionálu typu $F(x, u, u')$ a preto sa ďalšími typmi funkcionálov zaoberať nebudeme.

7.2 PRINCÍP MINIMA POTENCIÁLNEJ ENERGIE AKO DOSLEDOK VARIÁCIE POSUNUTÍ

Poznanky z variačného počtu, keď sme porovnávali stacionárny stav funkcionálu s jeho veľmi blízkym stavom, preniesieme teraz na rovnovážny stav kontinua so susedným stavom, ktorý je spôsobený elementárnym vychýlením z rovnovážneho stavu o akési "virtuálne posunutie δu_i " hmotných bodov.



Obr. 7.2
Označenia

Uvažujme teleso v statickej rovnováhe, na ktoré pôsobia objemové a plošné sily (obr. 7.2). Povrch telesa S pozostáva z dvoch častí, $S_{\mathcal{L}}$, $S_{\mathcal{U}}$, s nasledujúcimi okrajovými podmienkami:

- na $S_{\mathcal{L}}$ je predpísané zaťaženie $\bar{T}_i = \bar{T}_i^*$;
- na $S_{\mathcal{U}}$ je predpísané posunutie $u_i = u_i^*$.

Predpokladajme, že existuje systém posunutí u_1, u_2, u_3 spĺňajúci rovnice kompatibility a dané okrajové podmienky (teleso je v rovnovážnom stave vzhľadom na posunutie u_1, u_2, u_3). Nech $u_i + \delta u_i$ je trieda všeobecných posunutí, ktoré sú konzistentné s deformáciou telesa, t.j. δu_i musí byť nulové na $S_{\mathcal{U}}$ a ľubovoľné na $S_{\mathcal{L}}$. Požadujeme, aby δu_i boli diferencovateľné a také veľké, že materiál ostáva v elastickom stave. Takýmito ľubovoľnými posunutiami hovoríme virtuálne posunutia.

V mechanike dokonale tuhých telies je definovaná virtuálna práca vonkajších síl na virtuálnych posunutiach. V určitom časovom okamžiku sa porovnáva skutočný stav telesa so stavom variovaným. Rovnovážny stav sa vyznačuje tým, že práca pôsobiacich síl na vratných (virtuálnych) posunutiach sa rovná nule. Pre konzervatívne sily (statické úlohy) je tento výrok ekvivalentný s podmienkou, že prvá variácia potenciálnej energie sa rovná nule. Ide teraz o to, preniesť túto vetu na telesá schopné deformovať sa a akým spôsobom budeme potenciálnu energiu takýchto telies definovať. Pretože pri tuhom pohybe telesa nevznikajú vnútorné sily (napätia), ich virtuálna práca sa v tomto prípade rovná nule. Nás zaujímajú len také posunutia, pri ktorých sa mení vzdialenosť dvoch susedných hmotných bodov, čiže len vlastné pretvorenie telesa. Pri týchto virtuálnych posunutiach konajú vonkajšie sily deformačnú prácu. Súčasne sa v telese akumuluje deformačná energia telesa, ktorá sa po prerušení pôsobenia vonkajších síl mení na prácu vnútorných síl. Prácu teda konajú sily objemové, ako aj sily plošné (vnútorné aj vonkajšie), pokiaľ im to podmienky uloženia dovoľujú. A z týchto sa zrejme bude skladať variácia potenciálnej energie deformácie schopného telesa, nachádzajúceho sa v rovnovážnom stave. Najprv vypočítame deformačnú prácu vonkajších síl na virtuálnych posunutiach δu_i , ktorú nazveme virtuálnou prácou δW . Táto virtuálna práca objemových síl na jednotku objemu a vonkajších plošných síl \bar{T}_i (na predpísanom povrchu $S_{\mathcal{L}}$) na jednotku plochy bude

$$\delta W = \int_V K_i \delta u_i dV + \int_S \bar{T}_i^* \delta u_i dS \quad (7.2-1)$$

Rovnicu (7.2-1) dostaneme využitím poznatkov z predchádzajúcej kapitoly tak, že budeme porovnávať prácu vonkajších síl W v rovnovážnej konfigurácii na posunutiach u_i a prácou vonkajších síl W' vo variovannej konfigurácii na posunutiach $u_i + \delta u_i$.

$$\begin{aligned} \delta W = W' - W &= \left[\int_V K_i (u_i + \delta u_i) dV + \int_S \bar{T}_i^* (u_i + \delta u_i) dS \right] - \\ &- \left[\int_V K_i u_i dV + \int_S \bar{T}_i^* u_i dS \right] = \int_V K_i \delta u_i dV + \int_S \bar{T}_i^* \delta u_i dS \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpísané okrajové podmienky musí na povrchu telesa $S_{\mathcal{L}}$ platiť

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i^* = \epsilon_{ij} \nu_j \quad (7.2-2)$$

Dosađením podmienky (7.2-2) do posledného člena rovnice (7.2-1) a aplikáciou Gausovej vety na plošný integrál dostaneme

$$\begin{aligned} \int_S \bar{T}_i^* \delta u_i dS &= \int_S \epsilon_{ij} \delta u_i \nu_j dS = \int_V \frac{\partial (\epsilon_{ij} \delta u_i)}{\partial x_j} dV = \\ &= \int_V \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \delta u_i \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

V rovnici (7.2-3) je $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$ gradientom deformácie a ďalej zo statických podmienok rovnováhy vyplýva

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} = -K_i \quad (7.2-4)$$

Po dosađení (7.2-4) do (7.2-3) dostaneme rovnicu

$$\int_S \bar{T}_i^* \delta u_i dS + \int_V K_i \delta u_i dV = \int_V \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (7.2-5)$$

ktorú nazývame princípom virtuálnych prác (alebo tiež virtuálnych posunutí). Treba podotknúť, že plošný integrál na ľavej strane princípu (7.2-5) je potrebné počítať len cez povrch $S_{\mathcal{L}}$, pretože na $S_{\mathcal{U}}$ je $\delta u_i = 0$. Keď dosadíme (7.2-3) do (7.2-1) a porovnáme s rovnicou (6.1-7), mal by výraz

$$\int_V \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (7.2-6)$$

predstavovať akási virtuálnu deformačnú energiu.

Ak existuje funkcia hustoty deformačnej energie $U(\epsilon_{ij})$, potom podľa vzťahu (6.1-9) je

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial U(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (7.2-1)$$

Potom

$$\int_V \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial U(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \delta \int_V U(\epsilon_{ij}) dV \quad (7.2-2)$$

Tvrdenie (7.2-3) dokážeme na základe definície prvej variácie funkcionálu (7.1-18). V našom prípade $U = U(x, \epsilon_{ij})$ a

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial \epsilon'_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} dV + \left[\frac{\partial U}{\partial \epsilon'_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \right]_a^b = \\ &= \int_V \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \delta \int_V U dV \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

pretože $\frac{\partial U}{\partial \epsilon'_{ij}} = 0$.

Výraz $\delta \int_V U dV$ nám predstavuje virtuálnu deformačnú energiu uvažovaného telesa.

Princíp virtuálnych prác, vyjadrený pomocou deformačnej energie (7.2-9), má teda tvar

$$\delta \int_V U dV - \int_V K_i \delta u_i dV - \int_S T_i^* \delta u_i dS = 0 \quad (7.2-10)$$

alebo slovami povedané: Ak prevedieme nekonečne malým virtuálnym posunutím elastické teleso zo stavu rovnovážneho do stavu variovaného, práca vonkajších objemových a plošných síl sa rovná zväčšeniu celkovej deformačnej energie. Ak uvažujeme, že objemové sily a plošné zaťaženia sú konzervatívne, pričom $G(u_1, u_2, u_3)$ a $P(u_1, u_2, u_3)$ sú potenciálmi objemových síl K_i , resp. plošných síl T_i^* , potom

$$K_i = - \frac{\partial G}{\partial u_i}, \quad T_i^* = - \frac{\partial P}{\partial u_i}$$

Na základe toho

$$- \int_V K_i \delta u_i dV - \int_S T_i^* \delta u_i dS = \delta \int_V G dV + \delta \int_S P dS \quad (7.2-11)$$

a po dosadení do (7.2-10) nakoniec dostaneme

$$\delta \mathcal{K} = 0 \quad (7.2-12)$$

Pod označením \mathcal{K} budeme rozumieť potenciálnu energiu systému

$$\mathcal{K} = \int_V (U + G) dV + \int_S P dS \quad (7.2-13)$$

alebo

$$\mathcal{K} = \int_V U(\epsilon_{ij}) dV - \int_V K_i u_i dV - \int_S T_i^* u_i dS \quad (7.2-14)$$

Rovnica (7.2-12) stanovuje, že potenciálna energia systému nadobúda stacionárnu hodnotu pre skupinu prípustných variácií δu_i posunutí u_i v rovnovážnom stave.

Formulované inými slovami:

Všetky posunutia, spĺňajúce okrajové podmienky a rovnice rovnováhy, robia potenciálnu energiu stacionárnou. Porovnaním rovnovážneho stavu s blízky-
mi stavmi z jeho okolia sa dá ukázať, že táto stacionárna hodnota je hodnotou minimálnou. Preto (7.2-12) nazývame tiež princípom minima potenciálnej energie.

Pre dokonale tuhé teleso je $U(\epsilon_{ij}) = 0$ a odvodené vzťahy potom platia aj pre túto skupinu telies. Poznemenajme ešte, že pri odvodzení princípu virtuálnych prác nebola nikde vyslovená požiadavka, aby vzťah medzi napätím a deformačiou bol lineárny. Na základe toho môžeme tvrdiť, že princíp virtuálnych prác platí aj pre posunutia konečné, ak správanie materiálu je elastické.

Po vylúčení tuhých zložiek rotácie nahradíme gradient deformačie ϵ_{ij} tenzorom malých deformačii ϵ_{ij} , v tomto prípade princíp virtuálnych prác má tvar

$$\int_S T_i^* \delta u_i dS + \int_V K_i \delta u_i dV = \int_V \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (7.2-15)$$

v ktorom sa potom využíva v teórii malých deformácií. Z princípu minima potenciálnej energie možno odvodiť rovnice rovnováhy telesa. Vychádzajúc z rovnice (7.2-1) je

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = - \int_V \tau_{ij,j} \delta u_i dV + \int_S \tau_{ij} \nu_j \delta u_i dS$$

Odtiaľ

$$\int_V (\tau_{ij,j} + K_i) \delta u_i dV + \int_S (T_i^* - \tau_{ij} \nu_j) \delta u_i dS = 0$$

čo je splnené pre ľubovoľné $\delta u_i = 0$ na S_σ vtedy, keď

$$\tau_{ij,j} + K_i = 0 \quad \text{na } V,$$

a pre $\delta u_i = 0$ na S_u , alebo tiež pre

$$T_i^* = \tau_{ij} \nu_j \quad \text{na povrchu } S_\sigma$$

Tým je daná jednoznačná závislosť medzi diferenciálnymi rovnicami rovnováhy a princípom virtuálnych prác. To znamená, že posunutia vypočítané z princípu virtuálnych prác exaktne spĺňajú podmienky rovnováhy.

7.3 PRINCÍP MINIMA KOMPLEMENTÁRNEJ ENERGIE AKO DOSLEDOK VARIÁCIE NAPÄTIA

V kapitole 6.1 sme ukázali na existenciu funkcie deformačnej energie U , ktorá závisela od zložiek gradientu deformácie ϵ_{ij} , resp. zložiek tenzora deformácie ϵ_{ij} . Podobnou úvahou by sme dospeli k existencii funkcie energie napätosti, ktorá bude závislá od zložiek napätia τ_{ij} . To znamená, že $U = U(\tau_{ij})$ a po derivácii

$$\frac{\partial U(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}} = \epsilon_{ij} \quad (7.3-1)$$

Na rozdiel od princípu virtuálnych prác, kde sme porovnávali rovnovážny stav so susedným stavom, vzniknutým virtuálnym posunutím δu_i , budeme teraz tento rovnovážny stav porovnávať so stavom spôsobeným virtuálnou zmenou napätia $\delta \tau_{ij}$. Celková energia napätosti v rovnovážnom stave je

$$A = \int_V U(\tau_{ij}) dV \quad (7.3-2)$$

a vo variovanom stave (použitím Taylorovho rádu)

$$\begin{aligned} A' &= \int_V U(\tau_{ij} + \delta \tau_{ij}) dV = \int_V U(\tau_{ij}) dV + \int_V \frac{\partial U}{\partial \tau_{ij}} \delta \tau_{ij} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{kl}} \delta \tau_{ij} \delta \tau_{kl} dV + \dots = \\ &= A + \int_V \frac{\partial U}{\partial \tau_{ij}} \delta \tau_{ij} dV + \dots (\text{zanedb.}) \end{aligned}$$

Potom prvá variácia deformačnej energie sa podľa definície rovná rozdielu

$$\delta A = A' - A = \int_V \frac{\partial U}{\partial \tau_{ij}} \delta \tau_{ij} dV = \int_V \epsilon_{ij} \delta \tau_{ij} dV \quad (7.3-3)$$

Vypočítajme teraz komplementárnu prácu vonkajších objemových a plošných síl. Za tým cieľom uvažujme, že deformované teleso je v rovnovážnom stave a že zložky posunutia, deformácie a napätia sú u_i , ϵ_{ij} a τ_{ij} . Tento stav teraz porovnáme so susedným stavom, v ktorom zložky napätia sú $\tau_{ij} + \delta \tau_{ij}$. Požadujeme ďalej, aby napätia τ_{ij} a $\tau_{ij} + \delta \tau_{ij}$ splňovali podmienky rovnováhy, a okrajové podmienky tam, kde sú zadané vonkajšie plošné zataženia T_i^* (obr. 7.2) t.j.

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + K_i = 0, \quad \tau_{ij} \nu_j = T_i^* \quad \text{na } S_\sigma$$

a

$$\frac{\partial (\tau_{ij} + \delta \tau_{ij})}{\partial x_j} + K_i + \delta K_i = 0$$

pričom

$$(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) \nu_j = T_i^* \quad \text{na } S_T$$

To znamená, že $\delta \sigma_{ij} = 0$ na S_T a $(\delta \sigma_{ij}) \nu_j = \delta T_i^*$ na S_u . Porovnaním podmienok rovnováhy v oboch stavoch dostaneme

$$\frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta K_i = 0 \quad \text{na } V. \quad (7.3-4)$$

Komplementárna práca v rovnovážnom stave je

$$W_c = \int_V K_i u_i dV + \int_S T_i^* u_i dS \quad (7.3-5)$$

a v susednom stave

$$W_c' = \int_V (K_i + \delta K_i) u_i dV + \int_S (T_i^* + \delta T_i^*) u_i dS \quad (7.3-6)$$

Rozdiel (7.3-6) a (7.3-5) je vlastne virtuálnou komplementárnou prácou

$$\delta W_c = W_c' - W_c = \int_V \delta K_i u_i dV + \int_S \delta T_i^* u_i dS \quad (7.3-7)$$

Virtuálna práca plošných síl na S je

$$\int_S \delta T_i^* u_i dS = \int_{S_T} \delta T_i^* u_i dS + \int_{S_u} \delta T_i^* u_i dS \quad (7.3-8)$$

a po zohľadnení okrajových podmienok $\delta T_i^* = 0$ na S_T , $\delta T_i^* = \delta T_i^* = (\delta \sigma_{ij}) \nu_j$ na S_u , z rovnice (7.3-8) dostaneme

$$\int_S \delta T_i^* u_i dS = \int_{S_u} (\delta \sigma_{ij}) u_i \nu_j dS \quad (7.3-9)$$

Taktiež z rovnice (7.3-4) vyplýva

$$\delta K_i = - \frac{\partial (\delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} \quad (7.3-10)$$

Dosađením (7.3-9) a (7.3-10) do rovnice (7.3-7) dostaneme

$$\delta W_c = - \int_V \frac{\partial (\delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} u_i dV + \int_{S_u} (\delta \sigma_{ij} u_i) \nu_j dS \quad (7.3-11)$$

Plošný integrál v (7.3-11) prevedieme Gaussovou vetou na objemový, čím virtuálna komplementárna práca bude

$$\begin{aligned} \delta W_c &= - \int_V \frac{\partial (\delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} u_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \sigma_{ij} u_i) dV = \\ &= - \int_V \frac{\partial (\delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} u_i dV + \int_V \frac{\partial (\delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} u_i dV + \\ &+ \int_V \delta \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV \end{aligned} \quad (7.3-12)$$

Porovnaním rovníc (7.3-3) a (7.3-12) dostaneme rovnosť virtuálnej deformačnej energie a virtuálnej komplementárnej práce

$$\delta A = \delta W_c \quad (7.3-13)$$

Miesto gradientu deformácie použijeme vo vzťahu (7.3-3) zložky tenzora malých deformácií (súčin $\omega_{ij} \delta \sigma_{ij} = 0$) a keď pravú stranu rovnice (7.3-13) nahradíme výrazom (7.3-7), dostaneme princíp virtuálnej komplementárnej práce

$$\int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_S u_i \delta T_i^* dS + \int_V u_i \delta K_i dV \quad (7.3-14)$$

Rovnicu (7.3-13) upravíme do tvaru

$$\delta (A - W_c) = \delta \pi_c = 0 \quad (7.3-15)$$

kde

$$\pi_c = \int_V U(\sigma_{ij}) dV - \int_S u_i T_i^* dS - \int_V u_i K_i dV \quad (7.3-16)$$

nazývame komplementárnou energiou. Zo vzťahu (7.3-15) vyplýva, že π_c nadobúda v rovnovážnom stave stacionárnu hodnotu, a sice minimum. Preto (7.3-14)

je tiež nazývaný princípom minimálnych virtuálnych komplementárnych prác. Bez dôkazu uvedieme, že Eulerova diferenciálna rovnica funkcionálu (7.3-10) predstavuje podmienky kompatibility deformácie. Vypočítané posunutia z prílohu (7.3-14) nutne teda spĺňajú rovnice kompatibility. Ak má byť splnená podmienka $\delta \sigma_{ij} = 0$ na S_σ , potom $\delta T_i^* = \delta T_i^*$ na S_u , $\delta T_i^* = 0$ na S_σ a $\delta K_i = 0$ na V .

Princíp komplementárnych virtuálnych prác sa zjednoduší na tvar

$$\delta \pi_c = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} u_i^* \delta T_i^* dS = 0 \quad (7.3-17)$$

príčom komplementárna energia

$$\pi_c = \int_V U(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} T_i^* u_i^* dS \quad (7.3-18)$$

Ak teda nájdeme také σ_{ij} , pre ktoré je komplementárna energia minimálna, sú tieto napätia riešením danej úlohy. Teorém minima komplementárnej energie sa tiež nazýva Castiglianovým princípom, z ktorého potom možno odvodiť Castiglianove vety, využívané v základných úlohách pružnosti a pevnosti. Treba podotknúť, že existujú ďalšie variačné princípy, ktoré však pre nedostatok miesta nebudeme uvádzať.

8. Základy nelineárnej teórie

Existujú rôzne oblasti mechaniky kontinua, kde vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou už nie je lineárny. Ako príklady môžeme uviesť:

- plasticita pri kovech;
- viskoelasticita a viskoplasticita;
- geometricky nelineárne úlohy;
- úlohy s trením;
- kontakt, atď...

Vyskytujúce nelinearity vo všeobecnosti môžeme rozdeliť na dve skupiny:

- geometrické;
- fyzikálne.

Pri geometrických nelinearitách sa predpokladá, že posunutia a ich derivácie $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ nie sú nekonečne malé, ale sú konečné. Stav elastického telesa vstupom konečných deformácií je v porovnaní s nezataženým stavom značne zmenený. Pri sledovaní deformačných stavov treba potom použiť lagrangeovský alebo eulerovský spôsob opisu pohybu telesa.

Pri fyzikálnych nelinearitách deformácie prekročia medzu úmernosti, čo má za následok neplatnosť Hookeovho zákona. Doteraz sú napätové a deformačné veličiny formulované a objasnené len pre malé deformácie, to znamená pre stavy, pri ktorých dochádza len k miestnym plastifikáciám a tečeniu materiálu, ale väčšina okolitého materiálu sa správa elasticky. Avšak pre veľké posunutia a veľké pretvorenia za medzu klzu nie je doteraz správanie materiálu úplne objasnené, resp. výsledky získané napr. numerickými metódami nie sú plne vyhovujúce.

Pri analýze deformačného stavu treba rozlišovať tri typy telies:

- tenkostenné;
- primerane hrubé (stredne hrubé, tiež orientované);
- hrubostenné (masívne).

Všeobecná dvoj- alebo trojdimenzionálna analýza sa vzťahuje bezprostredne na posledný typ telies. Z oblasti posunutia sú možné v tomto prípade len translačné zložky. Geometria poddajného telesa prvých dvoch typov je obvykle zviazaná s definíciou vzťažnej línie (napr. nosník), vzťažnej plochy (doska) alebo povrchovej plochy (škrupina). Príslušná teória je potom prispôbena daným pomerom (orientovaná). Pritom tu možno za neznáme voliť tak

translácie, ako aj rotácie. Obidve tieto zložky môžu byť pri stradne hrubých telesách špecifikované nezávisle od seba. Pri tenkostenných telesách sa rotácie určujú z parciálnych derivácií poľa posunutí. Rozlišujeme malé (alebo infinitezimálne) a veľké zmeny tvaru (pretvorenie), malé, primerané a veľké posunutia. Na základe toho môžeme urobiť rozdelenie do troch stupňov:

- 1) teória prvého stupňa - malé posunutia, malé deformácie (pretvorenia);
- 2) teória druhého stupňa - veľké posunutia, malé pretvorenia;
- 3) teória tretieho stupňa - veľké posunutia, veľké pretvorenia.

Pod pojmom posunutie tu treba rozumieť transláciu a rotáciu, a pod pretvorením - pomerné deformácie.

Pretvorenia sú malé, keď každá zložka pomerných deformácií je zanedbateľná oproti jednotke.

Posunutia sú malé, keď norma vektora posunutia je zanedbateľná oproti charakteristickému rozmeru telesa.

Primerané posunutia prichádzajú do úvahy pri orientovaných telesách, kde treba zväžiť stupeň rotácie. Posunutia alebo rotácie sú primerané, keď norma vektora natočenia je zanedbateľná oproti jednotke (čiže malé).

Keď sú posunutia malé alebo primerané, pretvorenia sú v normálnom prípade tiež malé. Keď sú pretvorenia veľké, sú aj posunutia vo všeobecnosti veľké až na jeden dôležitý prípad, keď veľkým posunutiam zodpovedajú malé pretvorenia (najmä pri orientovaných telesách - nosníkoch, doskách, tenkých škrupinách).

Inžinier považuje pretvorenia za malé, keď nepresahujú hodnotu jedného percenta, pričom v tom je zahrnutá aj podstatná časť plastickej oblasti používaných materiálov. Niektorí autori považujú rotácie za primerané, keď možno s nimi harábať ako s vektormi, a ktoré nepresahujú desatinu polomeru. Dá sa ľahko dokázať, že takéto rotácie vyvolávajú podľa Kármánovej teórie len akúsi "umelú deformáciu" veľkosti 0,00125 %. Takéto rotácie znamenajú hodnotu uhla asi 6°.

Keď chceme popísať správanie tuhého telesa, urobíme to pomocou štyroch kategórií rovníc, ktoré sme použili aj v predchádzajúcich častiach skript bez špeciálneho zamerania na ich kategorizáciu. Tieto rovnice obsahujú:

- a) kinematiku, ktorá zahrňuje pohyb telesa a udáva geometrické vzťahy (kap. 8.1);

- b) kinetiku, ktorá zavádza mechanické princípy (pohybové a rovnice rovnováhy), pojem napätia a dáva vzťahy, ktoré spájajú mechanické rovnice (kap. 8.2);
- c) termodynamiku, ktorá vstupuje prostredníctvom jej dvoch hlavných princípov. Keď neuvažujeme tepelné efekty, ale len mechanické záležitosti, používa sa len prvý princíp hovoriaci o zachovaní mechanickej energie, vyúsťujúci princípom virtuálnych posunutí (prác) (kap. 8.3);
- d) konštitutívne vzťahy medzi kinematickými, kinetickými a termodynamickými veličinami, ktoré popisujú fyzikálne správanie materiálu, z ktorého je uvažované teleso zložené (kap. 8.4).

Ako sme už spomínali, v praxi prevažuje lagrangeovský opis pohybu telesa, pretože počiatočná nedeformovaná konfigurácia telesa je obvykle vždy známa. Uvedieme zovšeobecnený lagrangeovský opis, z ktorého je potom možné formálnym spôsobom prejsť na tzv. totálnu lagrangeovskú formuláciu (TL) a upravenú (opravujúcu sa) lagrangeovskú formuláciu (UL) opisu pohybu telesa.

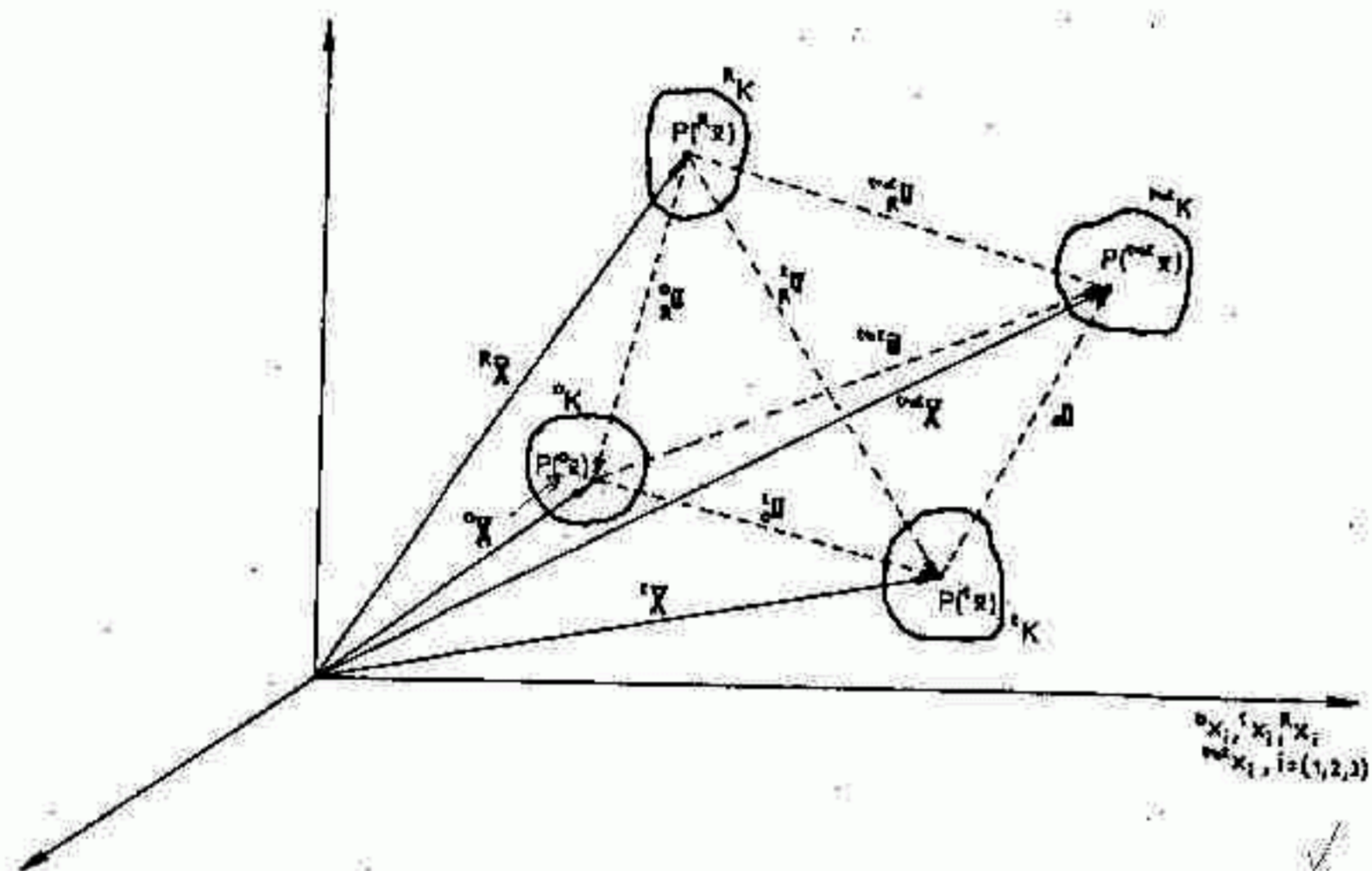
8.1 KINEMATIKA

V Euklidovskom priestore uvažujeme kontinuum, ktoré je zložené z nekonečného množstva hmotných bodov. Polohu každého hmotného bodu môžeme vyjadriť pomocou troch čísiel, ktoré udávajú jeho súradnice vzhľadom na vzťažný súradnicový systém. V každom časovom okamihu vytvárajú hmotné body konfiguráciu daného telesa. Vývoj po sebe idúcich konfigurácií v priestore a čase považujeme za pohyb telesa.

Na obr. 8.1 je znázornený všeobecný pohyb telesa.

Pohyb telesa je znázornený nasledujúcimi konfiguráciami:

- 0K - nedeformovaná poloha (začiatočná) v čase $t = 0$, ktorej nejaký bod $P({}^0\bar{x})$ určuje polohový vektor 0x_i , $i = 1, 2, 3$;
- tK - deformovaná konfigurácia telesa v čase t , ktorej zodpovedajúci bod $P({}^t\bar{x})$ má polohový vektor tx_i , $i = 1, 2, 3$;
- ${}^{t+\Delta t}K$ - deformovaná (okamžitá) konfigurácia telesa v čase $t + \Delta t$, ktorej zodpovedajúci bod je $P({}^{t+\Delta t}\bar{x})$;
- ${}^R K$ - všeobecná vzťažná konfigurácia v čase R , ktorej príslušiaci bod je $P({}^R\bar{x})$.



Obr. 8.1
Pohyb telesa

Symbolom \bar{u} sú označené vektory posunutí z konfigurácie, ktorú určuje dolný ľavý index, do konfigurácie, ktorú označuje horný ľavý index. Z obrázku 8.1 je zřejmé, že súradnice pohybujúceho bodu v jednotlivých konfiguráciách vzhľadom na R_K budú:

$${}^0x_i = {}^R X_i + {}^0_R u_i \quad (8.1-1)$$

Pre zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie v okamžitej konfigurácii $t+\Delta t_K$ vzhľadom na vzťažnú konfiguráciu R_K dostaneme (kap. 4)

$${}^{t+\Delta t} R_{Eij} = \frac{1}{2} \left[{}^{t+\Delta t} R_{i,j}^{u_i} + {}^{t+\Delta t} R_{j,i}^{u_j} + {}^{t+\Delta t} R_{k,i}^{u_k} + {}^{t+\Delta t} R_{k,j}^{u_k} \right] \quad (8.1-2)$$

V rovnici (8.1-2) napr. výraz predstavuje

$${}^{t+\Delta t} R_{i,j}^{u_i} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_i}{\partial {}^R X_j}$$

alebo slovami, je to parciálna derivácia zložiek vektora posunutia v čase $t+\Delta t$ podľa vzťažných súradníc X_j v čase R .

Ak za vzťažnú konfiguráciu volíme počiatočnú konfiguráciu telesa, čiže $R = 0$, hovoríme o totálnej Lagrangeovej formulácii (TL). Ak naproti tomu za vzťažnú konfiguráciu zvolíme t_K , čiže $R = t$, nazývame túto formuláciu upravenou (opravujúcou sa) (UL).

Obidva spôsoby formulácie nachádzajú široké uplatnenie, najmä v moderných numerických metódach, ako je napr. metóda konečných prvkov.

Ak všeobecne označíme súradnice bodov telesa a iné charakteristiky v okamžitej polohe malými písmenami a vo vzťažnej (počiatočnej) konfigurácii veľkými písmenami, potom pri Lagrangeovskom popise

$$x_i = x_i(X_j)$$

a vzájomný vzťah medzi elementárnym dĺžkovým, plošným a objemovým elementom v oboch konfiguráciách telesa bude:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

$$ds_i = J \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dS_j \quad (8.1-3)$$

$$dv = JdV$$

Vo vzájomných vzťahoch (8.1-3) je písmenom J označený Jacobiho determinant

$$J = \det F_{ij} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \quad (8.1-4)$$

kde F_{ij} je deformačný gradient.

8.2 KINETIKA

V kapitole 3 sme zaviedli pojem pre deformované teleso. Medzi vektorom napätia a tenzorom napätia platila Cauchyho formula

$$T_i = \sigma_{ij} v_j \quad (8.2-1)$$

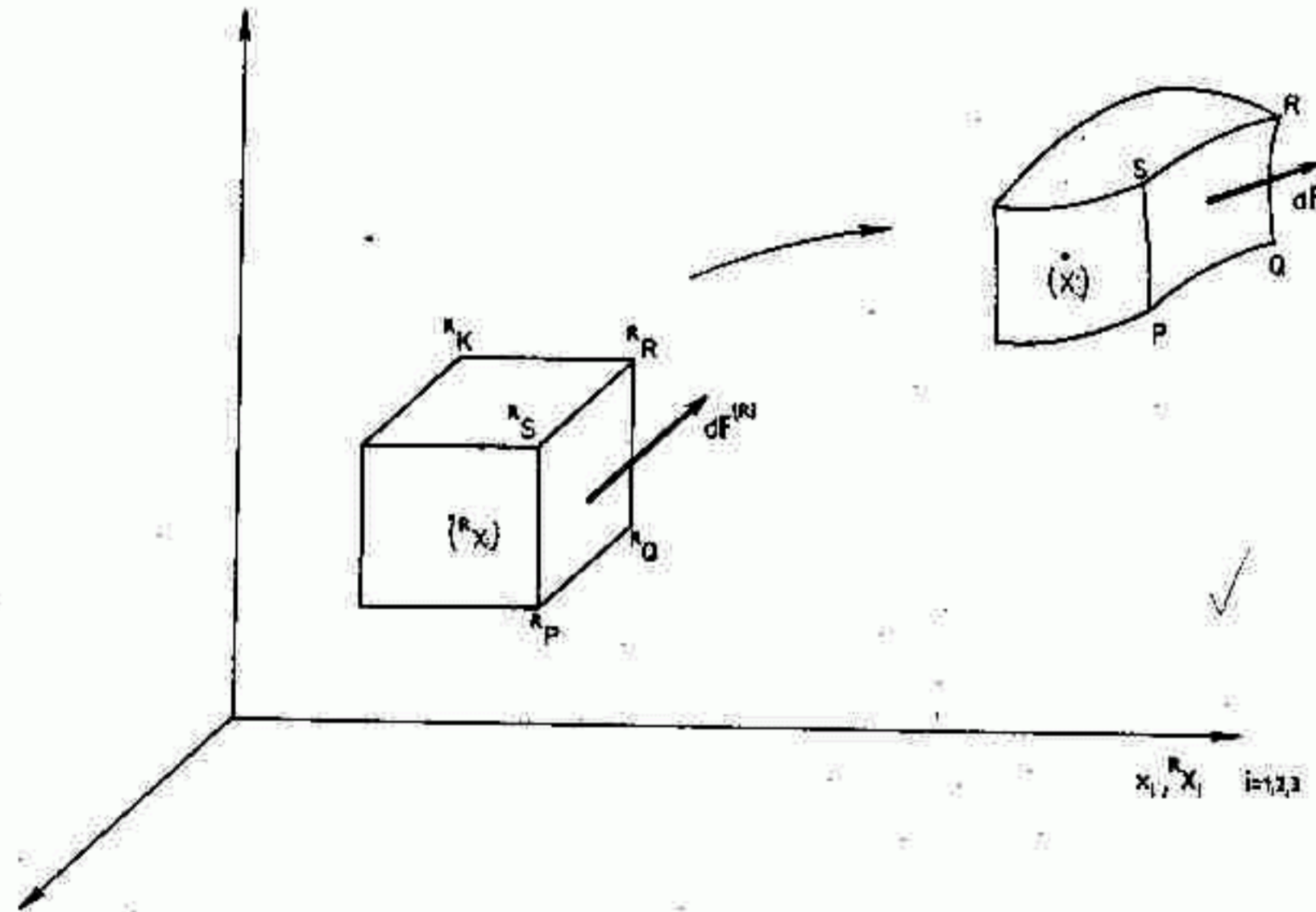
pričom zložky tenzora napätia spĺňali podmienky rovnováhy

$$\sigma_{ij,j} + K_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

(8.2-2)

Tento Cauchyho tenzor napätia sme potom prostredníctvom zovšeobecneného Hookeovho zákona spojili s Cauchyho tenzorom nekonečne malých deformácií, čo zodpovedalo aj fyzikálnej predstave problému. Pri konečných deformáciách musíme všetky fyzikálne veličiny vzťahovať na jednu, referenčnú konfiguráciu. Ako sme už uviedli, pri Lagrangeovskom spôsobe opisu pohybu telesa je to 0K alebo tK . Z tohto dôvodu nemôžeme spájať Green-Lagrangeov tenzor deformácie s Cauchyho tenzorom napätia, ale sú zavedené nové tenzory napätia, ktorými sa teraz budeme podrobnejšie zaoberať. Uvažujme elementárny hraničák vo vzťažnej a okamžitej konfigurácii podľa obr. 8.2.

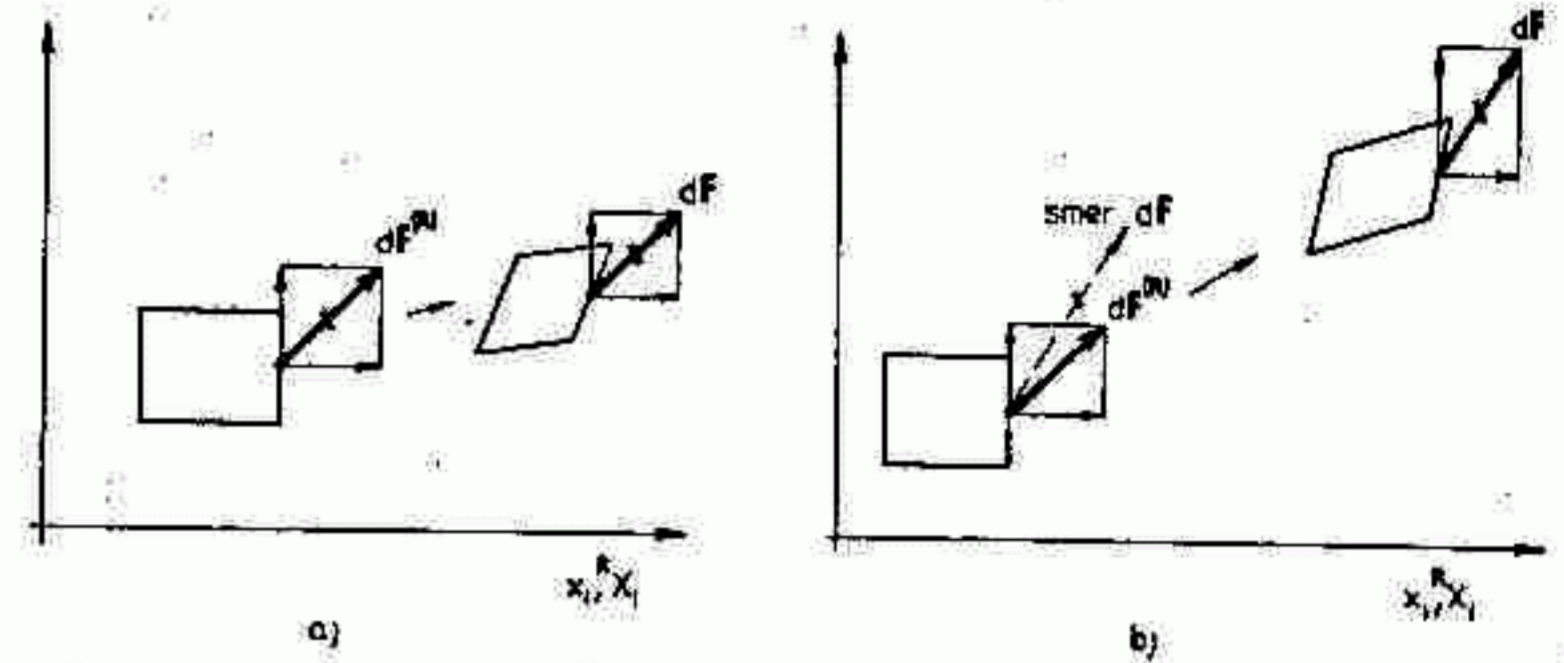


Obr. 8.2

Vektor plošných síl v okamžitej a vo vzťažnej konfigurácii telesa

Na ploche PQRS pôsobí vektor plošných síl dF . Na zodpovedajúcej ploške $(PQRS)^R$ je vektor $dF^{(R)}$. Určíme si závislosť medzi vektorom napätia $T = \frac{dF}{dS}$ a $T^{(R)} = \frac{dF^{(R)}}{dS^{(R)}}$, pričom $dS^{(R)}$ a dS je plocha $(PQRS)^R$, resp.

PQRS. Táto závislosť však musí byť matematicky správne formulovaná. Sú známe dve alternatívy tejto vzájomnej závislosti pomenované ako Lagrangeove alebo Kirchhoffove (viď obr. 8.3).



Obr. 8.3

Vzájomná závislosť vektora plošných síl definovaná (a) Lagrangeom a (b) Kirchhoffom

Pri Lagrangeovom spôsobe sa predpokladá, že vektory síl v oboch konfiguráciách sú rovnaké

$$[dF_i^{(R)}]_L = dF_i \quad \left([dF^{(R)}]_L = dF \right) \quad (8.2-3)$$

Podľa Kirchhoffa sa plošné sily pri prechode zo vzťažnej do okamžitej konfigurácie transformujú ako vektory

$$[dF_i^{(R)}]_K = \frac{\delta x_i}{\delta X_j} dF_j \quad (8.2-4)$$

Indexy L a K v (8.2-3), resp. (8.2-4) označujú Lagrangeov, resp. Kirchhoffov predpoklad.

Vektor dF so zložkami dF_i označuje plošné sily pôsobiace na ploške dS s vonkajšou normálou ν , zatiaľ čo $dF^{(R)}$ pôsobí na zodpovedajúcej vzťažnej ploške $dS^{(R)}$ s príslušnou normálou $\nu^{(R)}$. Ak σ_{ij} je tenzor napätia v okamžitom stave, potom podľa Cauchyho formuly

$$dF_i = \sigma_{ji} \nu_j dS \quad (8.2-5)$$

Podobným spôsobom budeme teraz definovať zložky napätia vzhľadom na vzájomnú konfiguráciu. Pre (8.2-3) dostaneme

$$[dF_i^{(R)}]_L = T_{ji} v_j^{(R)} dS^{(R)} = dF_i \quad (8.2-4)$$

Ak uvažujeme Kirchhoffov predpoklad, z (8.2-4) dostaneme

$$[dF_i^{(R)}]_K = S_{ji} v_j^{(R)} dS^{(R)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j^{(R)}} dF_j \quad (8.2-7)$$

Tenzory ϵ_{ij} , T_{ij} , S_{ij} nazývame Cauchyho (Eulerov), Lagrangeovými a Kirchhoffovými napätiami.

Keď chceme nájsť závislosť medzi ϵ_{ij} , T_{ij} a S_{ij} , musíme ju najskôr nájsť medzi $v_j dS$ a $v_j^{(R)} dS^{(R)}$.

Uvažujme dva dĺžkové elementy v okamžitom stave $dx(dx_1, dx_2, dx_3)$ a $\delta x(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$, ktoré zodpovedajú dĺžkovým elementom $dX^{(R)}$ a $\delta X^{(R)}$ vo vzájomnej konfigurácii. Nech plocha paralelogramu so stranami dx a δx je dS , ktorej veľkosť je daná vektorovým súčinom $dx \times \delta x$, čo možno pomocou permutačného symbolu vyjadriť v tvare

$$v_i dS = \epsilon_{ijk} dx_j \delta x_k \quad (8.2-8)$$

v_i sú zložky vektora jednotkovej normály plošky dS . Podobne, nech vo vzájomnej konfigurácii je $dS^{(R)}$ plocha paralelogramu, daná vektorovým súčinom

$$v_i^{(R)} dS^{(R)} = \epsilon_{ijk} dX_j^{(R)} \delta X_k^{(R)} \quad (8.2-9)$$

pričom $v_i^{(R)}$ sú zložky jednotkovej normály plošky $dS^{(R)}$.

Pretože $dX_j = \frac{\partial X_j}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$ a $\delta X_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_\beta} \delta x_\beta$, potom rovnicu (8.2-9) upravíme na

$$v_i^{(R)} dS^{(R)} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_k^{(R)}}{\partial x_\beta} dx_\alpha \delta x_\beta \quad (8.2-10)$$

Vynásobíme teraz obidve strany rovnice (8.2-10) s $\frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_\gamma}$ a upravme ju s využitím znalosti, že

$$\det \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_m} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_1} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_2} \frac{\partial X_k^{(R)}}{\partial x_3}$$

alebo tiež

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_\beta} \frac{\partial X_k^{(R)}}{\partial x_\gamma} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \det \left(\frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_m} \right)$$

pričom zo zákona zachovania hmoty je

$$\frac{\rho}{\rho^{(R)}} = \det \left(\frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_m} \right)$$

Potom dostaneme

$$\frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_\gamma} v_i^{(R)} dS^{(R)} = \frac{\rho}{\rho_0} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} dx_\alpha \delta x_\beta = \frac{\rho}{\rho^{(R)}} v_\gamma dS \quad (8.2-11)$$

kde ρ a $\rho^{(R)}$ je hustota látky v okamžitom, resp. vo vzájomnom stave. Pre Lagrangeov tenzor napätia z (8.2-6) máme

$$T_{ji} v_j^{(R)} dS^{(R)} = \tau_{ji} v_j dS = \frac{\rho^{(R)}}{\rho} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_m} \tau_{mi} v_j^{(R)} dS^{(R)} \quad (8.2-12)$$

resp.

$$T_{ji} = \frac{\rho^{(R)}}{\rho} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_m} \tau_{mi} \quad (8.2-13)$$

Podobne z (8.2-7) dostaneme výraz pre Kirchhoffov tenzor napätia

$$S_{ij} = \frac{\rho^{(R)}}{\rho} \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_\beta} \frac{\partial X_j^{(R)}}{\partial x_\alpha} \tau_{\beta\alpha} \quad (8.2-14)$$

Z (8.2-13) vidíme, že Lagrangeov tenzor napätia nie je symetrický. Preto sa ani príliš často nepoužíva. V literatúre je známejší pod pojmom I. Piolla - Kirchhoffov tenzor napätia. Naproti tomu S_{ij} je tenzorom symetrickým a v oblasti konečných deformácií nachádza široké uplatnenie. Nazýva sa tiež II. Piolla - Kirchhoffovým tenzorom napätia.

Z (8.2-4) určíme vzájomný vzťah medzi S_{ij} a T_{ji}

$$S_{ij} = \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_j} T_{ji} \quad (8.2-15)$$

Pretože

$$\delta_{ij} = \frac{\partial X_i^{(R)}}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_j^{(R)}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j^{(R)}} \frac{\partial X_p^{(R)}}{\partial x_j}$$

potom

$$\tau_{ij} = \frac{\rho}{\rho^{(R)}} \frac{\partial x_i}{\partial X_p^{(R)}} T_{pj} = \frac{\rho}{\rho^{(R)}} \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha^{(R)}} \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta^{(R)}} S_{\beta\alpha} \quad (8.2-16)$$

$$T_{ij} = S_{ip} \frac{\partial x_j}{\partial X_p^{(R)}} \quad (8.2-17)$$

Po vyjadrení S_{ij} a τ_{ij} pomocou posunutí u_i , t.j. $x_i = X_i^{(R)} + u_i$, pričom $\frac{\partial x_i}{\partial X_j^{(R)}} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j^{(R)}}$, resp. $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dostaneme

$$S_{ij} = \frac{\rho^{(R)}}{\rho} \left[\tau_{ij} - \left(\delta_{j\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \delta_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} \right) \tau_{\beta\alpha} \right] \quad (8.2-18)$$

$$\tau_{ji} = \frac{\rho}{\rho^{(R)}} \left[S_{ij} + \left(\delta_{j\beta} \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha^{(R)}} + \delta_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial X_\beta^{(R)}} + \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha^{(R)}} \frac{\partial u_j}{\partial X_\beta^{(R)}} \right) S_{\beta\alpha} \right] \quad (8.2-19)$$

Pre II. Piolla - Kirchhoffov tenzor napätie podmienky rovnováhy budú

$$\frac{\partial}{\partial X_j^{(R)}} \left(S_{im} \frac{\partial x_i}{\partial X_m^{(R)}} \right) + K_i = 0 \quad (8.2-20)$$

$$S_{ij} = S_{ji}$$

8.3 TERMODYNAMIKA

Bez dôkazu uvedieme, že princíp virtuálnych prác neustráca pri konečných posunutíach svoju platnosť a pre okamžitú konfiguráciu $t + \Delta t_K$ má tvar

$$\int_{R_V} t + \Delta t_R S_{ij} \delta t + \Delta t_R E_{ij} R_{jV} = \int_{R_S} t + \Delta t_R F_i \delta t + \Delta t_R u_i R_{iS} + \int_{R_V} t + \Delta t_R K_i \delta t + \Delta t_R u_i R_{iV} \quad (8.3-1)$$

kde $t + \Delta t_R S_{ij}$ je II. Piolla - Kirchhoffov tenzor napätia, $t + \Delta t_R E_{ij}$ je Green - Lagrangeov tenzor deformácie, $t + \Delta t_R F_i$ sú vonkajšie plošné sily, $t + \Delta t_R u_i$ je vektor posunutia, $t + \Delta t_R K_i$ sú objemové sily, všetko v okamžitej konfigurácii $t + \Delta t_K$ vzhľadom na vzťažnú konfiguráciu R_K . R_V a R_S je objem a povrch telesa v R_K .

8.4 KONSTITUTÍVNE ROVNICE

Ako sme už spomínali v kapitole 6, konštitutívne rovnice popisujú makroskopické správanie materiálu pod účinkom vonkajších vplyvov. Tieto matematické zákony však musia obsahovať fyzikálne, resp. mechanické vlastnosti daného materiálu. Skutočné správanie materiálu je veľmi komplikované a jeho skúmanie v laboratóriách je obťažné. Výsledky pokusov ovplyvňujú všetky nedokonalosti, ktoré pri spolupôsobení stroj - skúmané teleso - meracie zariadenie - okolie - pozorovateľ vystupujú. Zistenými veličinami sa preto pokryje len určitá oblasť správania materiálu a pre potreby výpočtov sa tieto zákony často extrapolujú alebo s rôznym úspechom zovšeobecňujú.

Zatiaľ čo experimentálne metódy vždy využili a zlepšovali inžinieri, matematická formulácia konštitutívnych rovníc je mladý vedný odbor, ktorý sa začal rozvíjať približne od r. 1965, predovšetkým prostredníctvom teoretikov (napr. KRINGEN, TRUESDELL, NOLL, COLEMAN, RIVLIN, IĽJUŠIN, ...). Táto "Teória konštitutívnych rovníc" urobila v posledných rokoch veľké pokroky a s veľkou presnosťou stanovila podmienky, ktoré konštitutívne rovnice musia

splňovať. V niektorých prípadoch sa poukázalo na nesprávny tvar niektorých experimentálnych zákonov.

Rozvoj matematických postupov však problém ďalej sťažuje, pretože matematické priblíženie je také komplexné, že inžinier ho nemôže plnohodnotne sledovať a na druhej strane matematici pokladajú existujúcu masu experimentálnych výsledkov za neprehľadnú a neúčastitočnú. Riešenie treba však hľadať v dialektickej jednote týchto dvoch prístupov.

My sa tu nebudeme zaoberať matematickými, často abstraktnými pojmami Teórie konštitutívnych rovníc, ale obmedzíme sa na popísanie troch typov materiálov, ktoré najmä v oblasti teórie I. a II. stupňa vyhovujú. Treba podotknúť, že nelineárna teória III. stupňa ešte nie je celkom teoreticky ani experimentálne zvládnutá. Pre materiály elastické, hyperelastické a hypoelastické popíšeme v ďalšom vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou.

8.4.1 Elastický (pružný) materiál

Materiál nazývame elastickým, ak stav napätosti nie je závislý od predchádzajúcich konfigurácií, ale od okamžitého deformačného stavu. Predchádzajúci priebeh deformácie teda neovplyvní príslušný stav napätosti.

Všeobecný tvar konštitutívnej rovnice je

$$S_{ij} = f(E_{kl}) \tag{8.4-1}$$

Táto definícia je rozšírením pojmov Cauchyho lineárnej "infinitesimalnej" pružnosti. V tomto prípade, ak ϵ_{ij} je tenzor nekonečne malých deformácií, potom konštitutívna rovnica je zovšeobecneným Hookeovým zákonom

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{8.4-2}$$

Všetky obvyklé kovové materiály s veľkou presnosťou spĺňajú tento zákon v oblasti malých zmien tvaru telesa.

Pre oblasť konečnej pružnosti bude platiť

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \tag{8.4-3}$$

kde S_{ij} , E_{kl} , C_{ijkl} je II. Piolla - Kirchhoffov tenzor napätia, Green - Lagrangeov tenzor deformácie, resp. tenzor pružnosti.

8.4.2 Hyperelastický materiál

Materiál považujeme za hyperelastický, ak práca vnútorných napätí závisí len od zmeny tvaru, to znamená, že pre takýto materiál možno predpokladať existenciu funkcie, z ktorej možno odvodiť zložky napätia

$$S_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \tag{8.4-4}$$

Funkcia $U(E_{ij})$, definovaná vzhľadom na vzťažnú konfiguráciu, sa nazýva hustotou deformačnej energie. Táto definícia zovšeobecňuje pojem lineárnej "infinitesimalnej" pružnosti zavedenej Greenom

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{8.4-5}$$

Obvyklé kovové materiály sú teda tiež hyperelastické v oblasti nekonečne malých deformácií. Sú však materiály typu guma a pod., pri ktorých hyperelastická nachádza najširšie použitie.

8.4.3 Hypoelastické materiály

Materiál nazývame hypoelastickým, keď v dôsledku prírastku deformácie, ktoré sa udiala medzi dvoma susednými konfiguráciami, je prírastok napätia elastický, zatiaľ čo celkové napätie je závislé od všetkých predchádzajúcich konfigurácií. Konštitutívnu rovnicu napíšeme v tvare

$$dS_{ij} = D_{ijkl}(S_{mn})dE_{kl} \tag{8.4-6}$$

a $S_{mn} = f(E_{pq})$. Prírastok je tu vo význame diferenciálu. Hypoelastická zovšeobecňuje elasticitu zavedením prírastkového konštitutívneho vzťahu. Zatiaľ čo každý elastický alebo hyperelastický materiál je zároveň hypoelastický, opak neplatí. Hypoelastická je zvlášť dôležitá pre obvyklé kovové materiály, pretože pokrýva diferenciálnu teóriu plasticity.

9. Pružnosť a termodynamika

V tejto kapitole budeme hovoriť o obmedzeniach, ktoré kladie klasická termodynamika na teóriu pevných látok, ďalej odvodíme zo zákonov termodynamiky niektoré informácie, ktoré sa týkajú pevných látok. Budeme tiež diskutovať otázku existencie deformačnej energie, ktorá, ako sme videli, má v teórii pružnosti dôležitú úlohu. Predpokladáme pritom, že čitateľ ovláda základy klasickej termodynamiky.

9.1 ZÁKLADNÉ POJMY

Množinu (súhrn) objektov materiálneho sveta, ktorú študujeme, nazveme system. Uvažujeme len uzavreté systémy, t.j. systémy, ktoré nevymieňajú hmotu s okolím. Príležitostne si zavedieme i ďalšie obmedzenie, že nedochádza k žiadnej interakcii medzi systémom a okolím - taký systém voláme izolovaný. Uvažujme daný systém. Keď poznáme všetky potrebné informácie na charakterizáciu systému, hovoríme, že poznáme stav systému. Napríklad, pre určité pružné teleso v rovnováhe pre úplný popis jeho termodynamického stavu treba udať špecifikáciu materiálu, z ktorého je vyhotovené, t.j. množstvo každej chemickej látky, ktorú obsahuje, jeho geometriu v prirodzenom stave (t.j. v beznapäťovom stave), jeho výchylky z prirodzeného stavu alebo pole napätí. Ak niektoré fyzikálne vlastnosti závisia od toho, či teleso je studené alebo horúce, potrebujeme ďalšiu nezávislú veličinu, ktorá určuje stupeň chladnosti, resp. horúčosti. Tieto veličiny sa nazývajú stavové premenné, alebo stavové veličiny. Ak istá stavová premenná môže byť vyjadrená ako jednodnotová funkcia množiny iných stavových premenných, takáto funkčná závislosť sa volá stavová (konštitutívna) rovnica. Ak sú v nejakom systéme hodnoty stavových premenných nezávislé od času, hovoríme, že systém je v termodynamickej rovnováhe. Ak sa stav mení v čase, hovoríme, že v systéme sa odohráva proces. Počet stavových premenných potrebných na popis procesu môže byť väčší ako počet potrebný na popis systému v termodynamickej rovnováhe. Napríklad na popis toku kvapaliny je potrebné poznať tiež jej viskozitu. Hranica alebo stena rozdeľujúca dva systémy sa volá izolujúca, ak má nasledujúcu vlastnosť:

Ak ľubovoľný systém v úplnej vnútornej tepelnej rovnováhe je úplne obklopený izolujúcou stenou, nevzniknú žiadne zmeny v systéme vyvolané vonkajším vplyvom, okrem zmien spôsobených pohybom steny alebo zmien vyvolaných obje-

movými silami, napríklad gravitáciou. Systém, ktorý je obklopený izolujúcou stenou, sa volá tepelne izolovaný a každý proces odohrávajúci sa v ňom sa volá adiabatický.

Systém sa volá homogénny, ak stavové veličiny nezávisia od priestorových súradníc. Klasická termodynamika sa zaoberá podmienkami rovnováhy homogénneho systému alebo heterogénneho systému, ktorý je zložený z homogénnych častí, tzv. fáz. Zovšeobecnenie na nehomogénne systémy vyžaduje určité dodatočné hypotézy, ktorými sa však nebudeme zaoberať.

9.2 ZÁKONY TERMODYNAMIKY

Prvým krokom pri formulácii termodynamiky je zavedenie pojmu teploty. Postulujeme: Ak každý z dvoch systémov je v tepelnej rovnováhe s tretím systémom, tak sú aj vo vzájomnej rovnováhe. Z toho vyplýva, že podmienka tepelnej rovnováhy medzi niekoľkými systémami je rovnosť istej jednodnotovej funkcie termodynamických stavov systému, ktorú môžeme nazývať teplotou θ . Ktorýkoľvek zo systémov sa môže použiť ako "teplomér" odčítavajúci teplotu θ na vhodnej škále. Teplota, ktorej existencia bola takto postulovaná, je meraná stupnicou, ktorá je určená ľubovoľnou voľbou teplomera a volá sa empirická teplota.

Prvý zákon termodynamiky môžeme formulovať nasledovne:

Ak tepelne izolovaný systém môžeme dostať zo stavu 1 do stavu 2 rôznymi spôsobmi (cestami), potom práca vykonaná na systéme (alebo systémom) má rovnakú hodnotu pre každú takúto (adiabatickú) cestu. Z toho môžeme usudzovať, že existuje jednodnotová funkcia stavu systému, ktorú voláme energia taká, že pre každý adiabatický proces prírastok energie sa rovná práci vykonanej na systéme. Teda

$$\Delta \text{energie} = \text{vykonaná práca} \quad (\text{adiabatický proces}) \quad (9.2-1)$$

Treba poznamenať, že na takúto definíciu energie stačí, aby bolo možné adiabatickým procesom zmeniť stav systému zo stavu 1 do stavu 2 alebo opačne.

Množstvo tepla Q absorbovaného neizolovaným systémom definujeme teraz ako prírastok energie systému zmenšený o prácu vykonanú na systéme,

$$Q = \Delta \text{energie} - \text{vykonaná práca} \quad (9.2-2)$$

alebo

$$\Delta \text{energie} = Q + \text{vykonaná práca} \quad (9.2-3)$$

Ak poslednú rovnicu pokladáme za zákon zachovania energie a porovnáme ju s rovnicou (9.2-1), zistíme, že energia systému môže byť zväčšená alebo prácou na systéme vykonanou, alebo dodaním tepla systému.

Je zvykom rozlišovať niekoľko typov energie, ktorých sčítaním dostaneme celkovú energiu; kinetická energia K, gravitačná energia G a vnútorná energia E. Teda rovnicou

$$\text{energia} = K + G + E \quad (9.2-4)$$

môžeme pokladať za definíciu celkovej vnútornej energie.

Druhý zákon termodynamiky pre homogénne systémy môžeme sformulovať nasledovne:

Existujú dve jednodnotové funkcie stavu T (nazývame ju absolútna teplota) a S (nazývame ju entropia) s nasledujúcimi vlastnosťami:

- a) T - je kladné číslo, ktoré je jedine funkciou empirickej teploty ϑ ;
- b) S - entropia systému sa rovná súčtu entropií jeho častí (veľičina aditívna). Môže sa meniť dvoma rôznymi spôsobmi a to interakciou s okolím a zmenami dejúcimi sa vo vnútri systému. Symbolicky možno napísať

$$dS = dS_i + dS_v \quad (9.2-5)$$

kde dS značí nárast entropie systému, dS_i značí časť nárastu kvôli interakcii s okolím, a dS_v značí časť tohto nárastu kvôli zmenám vo vnútri systému. Ak dQ značí množstvo tepla prijatého systémom z jeho okolia, tak

$$dS_i = \frac{dQ}{T} \quad (9.2-6)$$

Zmena dS_v nikdy nie je záporná. Ak $dS_v = 0$, potom proces nazývame reverzibilný. Ak $dS_v > 0$ proces sa nazýva irreverzibilný. Zostávajúci tretí prípad $dS_v < 0$ sa v prírode nikdy nevyskytuje.

Absolútna teplota T a entropia S sú dve základné veličiny. Sú definované výlučne pomocou vlastností vyjadrených v druhom zákone termodynamiky. Stupnica absolútnej teploty je určená definovaním teploty pri rovnovážnom stave kvapalnej vody a ľadu pri tlaku 0,1 MPa na 273,15 stupňa na Kelvinovej stupnici. Tieto postuláty tvoria základ klasického termodynamiky. Overením tých-

to postulátov je empirický fakt, že všetky uzávery vyplývajúce z týchto predpokladov boli bez výnimky v zhode s experimentálne pozorovaným správaním systémov v prírode - na makroskopickej úrovni.

Je dôležité, aby sme si uvedomili, že pojem entropie je vlastnosť látky, takisto ako jeho hmotnosť či elektrický náboj. Kilogram kyslíka má určité množstvo entropie, ktoré môže byť zmenené zmenou teploty a špecifického objemu plynu. Analogicky kilogram ocele pri danej teplote a denom napätostnom stave má tiež jednoznačne určené množstvo entropie.

9.3 ROVNICA ENERGIE

Vyjadríme teraz rovnicu energetickej rovnováhy (9.2-3) a (9.2-4) v tvare, ktorý je pohodlnejší a preto sa častejšie používa v mechanike kontinua. Poznámame, že táto kapitola sa neobmedzuje len na homogénne systémy. Pre teleso v konfigurácii, ktorá zaberá oblasť V ohraničenú povrchom S, kinetická energia je

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV \quad (9.3-1)$$

kde v_i sú zložky vektora rýchlosti čiastočky zaberajúcej elementárny objem dV a ρ je hustota materiálu. Vnútorná energia sa píše v tvare

$$E = \int_V \rho e dV \quad (9.3-2)$$

kde e je vnútorná energia na jednotku hmoty. Treba poznamenať, že zavedenie vnútornej energie na jednotku objemu by viedlo k určitým matematickým ťažkostiam. Vstup tepla do telesa sa musí diať cez hranicu. Definujeme nový vektor, vektor hustoty tepelného toku q so zložkami q_1, q_2, q_3 nasledovne: nech dS je elementárna ploška na povrchu telesa s vonkajšou normálou ν_i . Potom množstvo tepla, ktoré sa preniesie cez plochu dS za jednotku času v smere ν_i , sa rovná $q_i \nu_i dS$. Kvôli jednoduchoosti, v prípade pohybujúceho sa média predpokladáme, že tepelný tok prechádza cez povrch dS zložený z rovnakých čiastočiek. Množstvo dodaného tepla za jednotku času je potom

$$\dot{Q} = - \int_S q_i \nu_i dS = - \int_V q_{j,j} dV \quad (9.3-3)$$

Práca vykonaná na telese objemovými silami K_i vo V a povrchovými silami γ_i na ploche S (viď rovnicu (3.3-5))

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int K_i v_i dV + \int \gamma_i v_i dS = \int K_i v_i dV + \int \tau_{ij} \gamma_j v_i dS = \\ &= \int K_i v_i dV + \int (\tau_{ij} v_{i,j}) dV \end{aligned} \quad (9.3-4)$$

Na základe prvého termodynamického zákona

$$\dot{K} + \dot{E} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (9.3-5)$$

Kde bodka nad symbolmi značí materiálnu deriváciu D/Dt , o ktorej sme už hovorili v predchádzajúcich kapitolách. Po dosadení a úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{v^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{v^2}{2} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D\rho}{Dt} + \rho q \operatorname{div} \mathbf{v} = \\ = -q_{j,j} + K_i v_i + \tau_{ij,j} v_i + \tau_{ij} v_{i,j} \end{aligned} \quad (9.3-6)$$

Ak dosadíme rovnicu kontinuity a pohybové rovnice

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{Dv_i}{Dt} = K_i + \tau_{ij,j}$$

do rovnice (9.3-6), dostaneme

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} v_{ij} \quad (9.3-7)$$

kde

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.3-8)$$

Je symetrická časť tenzora $v_{i,j}$, ktorú voláme tenzorom rýchlosti deformácie. Antisymetrická časť z $v_{i,j}$ nepridáva nič k sume $\tau_{ij} v_{i,j}$, pretože τ_{ij} je tenzor symetrický.

V klasickej termodynamike sme uvažovali len tzv. "delta" okolia termodynamického rovnováhy. V tejto kapitole tiež budeme uvažovať len infinitezimálne

deformácie, ktoré sú vyvolané veľmi pomaly. V tomto prípade môžeme rovnicu (9.3-7) napísať v tvare

$$\rho de = dQ + \tau_{ij}^d \epsilon_{ij} \quad (9.3-9)$$

ako sa bežne používa v učebniciach termodynamiky. Ak sa počas procesu neprodukuje vnútorná entropia, t.j. $\delta s_v = 0$, potom podľa druhého zákona $dQ = T ds_v$, kde s označuje špecifickú entropiu alebo entropiu na jednotku hmoty. Teda

$$de = T ds + \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^d \epsilon_{ij} \quad (9.3-10)$$

9.4 FUNKCIA DEFORMAČNEJ ENERGIE

V teórii pružnosti je často potrebné definovať funkciu $U(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33})$ zložiek tenzora deformácie s takou vlastnosťou, že

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = \tau_{ij} \quad (9.4-1)$$

Túto funkciu U sme nazvali v kapitole 7. funkciou deformačnej energie. Ako si ukážeme, pri izentropickom procese možno U stotožňovať s vnútornou energiou a pri izotermickom procese s voľnou energiou.

Podľa definície napätostný stav v pružnom telese je jednoznačná funkcia stavu deformácie a naopak. Preto postačí zvoliť si jeden z tenzorov ϵ_{ij} alebo τ_{ij} ako nezávislú stavovú premennú. Teraz na rovnicu (9.3-10)

$$de = \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^d \epsilon_{ij} + T ds \quad (9.4-2)$$

sa môžeme pozerat ako na stavovú funkciu, $e(\epsilon_{ij}, s)$, ktorá je funkciou tenzora deformácie ϵ_{ij} a špecifickej entropie s . Podľa známeho pravidla derivovania dostaneme

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{s} d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\epsilon_{ij}} ds \quad (9.4-3)$$

Porovnajúc pravé strany posledných dvoch rovníc máme

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_s = \tau_{ij}, \quad \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_{\epsilon_{ij}} = T \quad (9.4-4)$$

Pretože pri malých deformáciach hustota ρ zostáva konštantná, rovnica (9.4-4) hovorí, že pri vratnom adiabatickom procese existuje skalárna funkcia ρe , ktorej parciálna derivácia vzhľadom na zložky tenzora deformácie dáva zodpovedajúce zložky tenzora napätia.

Na druhej strane, ak je proces izotermický ($T = \text{const.}$), bude účelné zaviesť Helmholtzovu funkciu (volá sa tiež Gibbsova funkcia) voľnej energie na jednotku hmoty

$$f = e - Ts \quad (9.4-5)$$

Potom z rovníc (9.4-5) a (9.4-2) dostaneme

$$df = -s dT + \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^d \epsilon_{ij} \quad (9.4-6)$$

odkiaľ

$$\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \tau_{ij}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}} = -s \quad (9.4-7)$$

Z týchto rovníc môžeme vyčítať, že pri izotermickom procese tiež existuje skalárna funkcia ρf , ktorej parciálna derivácia podľa zložiek tenzora deformácie dáva príslušné zložky tenzora napätia v každom bode pružného telesa.

Porovnaním rovníc (9.4-1) a (9.4-4) alebo (9.4-7) vidíme, že U sa môže stožňovať buď s ρe alebo ρf , v závislosti od toho, či ide o izotermickú alebo izoentropickú zmenu.

Ďalší zaujímavý výsledok a síce

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau_{ij}} \right)_T = -\epsilon_{ij} \quad (9.4-8)$$

by sme dostali s Gibbsovho termodynamického potenciálu \bar{f} , ktorý je definovaný takto

$$\bar{f} = e - Ts - \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \epsilon_{ij} = f - \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \epsilon_{ij} \quad (9.4-9)$$

Úplný diferenciál prvej časti tejto rovnice

$$d\bar{f} = de - s dT - T ds - \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^d \epsilon_{ij} - \frac{1}{\rho} \epsilon_{ij}^d \tau_{ij} \quad (9.4-10)$$

a dosadením rovnice (9.4-2) dostaneme

$$d\bar{f} = -s dT - \frac{1}{\rho} \epsilon_{ij}^d \tau_{ij} \quad (9.4-11)$$

Pri izotermickom procese $dT = 0$ a z (9.4-11) priamo dostaneme rovnicu (9.4-8). Keď teda funkciu $-\rho \bar{f}$ nazveme funkciou komplementárnej energie a označíme si ju U_c , bude mať vlastnosť

$$\frac{\partial U_c}{\partial \tau_{ij}} = \epsilon_{ij} \quad (9.4-12)$$

Dosiahnuté výsledky môžeme zhrnúť nasledovne. Určili sme deformačnú energiu pre dva dobre známe a v praktických aplikáciách najčastejšie používané termodynamické procesy, adiabatický a izotermický. Tieto procesy majú tú vlastnosť, že vo funkcii sa explicitne nevyskytuje teplota T . Ináč povedané, našli sme takú súvislosť deformácie a napätia, v ktorej teplota nevystupuje. Treba však poznamenať, že v ostatných termodynamických procesoch situácia je o niečo zložitejšia a je už potrebný explicitný výskyt teploty. Vo všeobecnosti teda U je funkciou ϵ_{ij} a T .

9.5 PODMIENKY TERMODYNAMICKEJ ROVNOVÁHY A NIEKTORÉ JEJ DOSLEDKY

Druhý zákon termodynamiky má mimoriadne veľký praktický význam. Tvrdím, že $ds_v < 0$ nikdy v prírode nenastane, tento zákon stanovuje smer pohybu udalostí v celom materiálnom svete. Na základe tohto zákona možno ukázať až také ďalekosiahle uzávery, ako správnosť Darwinovho evolučného princípu. K čomu smerujú udalosti (procesy) materiálneho sveta? Smerujú vždy a výlučne k termodynamickej rovnováhe.

Aby sme mohli odvodiť nutnú a postačujúcu podmienku termodynamickú rovnováhy, porovnajme rovnovážny systém so systémami, ktorých stavové premenné sú o málo (infinitesimalne) odlišné od premenných v rovnovážnom stave, ale sa vzťahujú k tým istým okrajovým podmienkam. Pri porovnaní využijeme základy variačného počtu. Označme si δT , δs atď. infinitesimalne veľičiny (variácie) prvého rádu a ΔT , Δs atď. variácie včítane prvých, druhých a infinitesimalov vyšších rádo. Ak uvažujeme teraz homogénny systém A a susedný (nekonečne blízky) stav B, jednotlivé premenné budú

Systém A v rovnováhe	Systém B blízko ku A
$e, \epsilon_{ij}, \tau_{ij}, s, T$	$e + \Delta e, \epsilon_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}, \tau_{ij} + \Delta \tau_{ij},$ $s + \Delta s, T + \Delta T$

Ak predpokladáme platnosť prvého zákona termodynamiky, pre variácie platí

$$\Delta e = \Delta Q + \frac{1}{\rho} (\tau_{ij} + \Delta \tau_{ij}) \Delta \epsilon_{ij} \quad (9.5-1)$$

resp.

$$\delta e = \delta Q + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij}$$

Uvažujme nasledovný špeciálny prípad. Žiadame, aby systém A mal rovnakú energiu ako B, pritom okraje systému sú také pevné, že na systéme nemôže byť vykonaná žiadna práca, teda $\Delta e = 0, \Delta \epsilon_{ij} = 0$. Potom z (9.5-1) vyplýva, že tiež $\Delta Q = 0$. Systém B má teraz entropiu $s + \Delta s$. Podľa druhého zákona termodynamiky, ak v systéme B vôbec nastane spontánny (svojoľný) proces, tak sa vyskytne v smere rastúcej entropie. Systém B sa môže meniť v systém A len vtedy, keď platí

$$s \text{ (entropia systému A)} > s + \Delta s \text{ (entropia systému B)} \quad (9.5-2)$$

Preto teda $\Delta s < 0$ a taký proces, že $\Delta s > 0$ je vylúčený. Druhý zákon termodynamiky však nehovorí, že ak $\Delta s < 0$, musí nastať zmena (proces). Ale ak urobíme dotatočný predpoklad - ako dodatok k druhému zákonu - čo je dovolené 2. zákonom, to sa v prírode aj naozaj vyskytuje, tak $\Delta s < 0$ nutne implikuje, že B prejde do A. Na druhej strane ak $\Delta s < 0$ nemôže nastať zmena A na B (poklesla by entropia, rozpor s 2. zákonom). Môžeme urobiť teda takýto uzáver. Ak zmena (variácia) energie je nulová, potom nutná a postačujúca podmienka termodynamickú rovnováhy systému A je

$$(\Delta s)_e < 0 \quad (9.5-3)$$

Inými slovami entropia s systému A je maximálna vzhľadom ku všetkým susedným stavom s tou istou energiou. Môžeme tiež písať

$$s = \max, \quad e = \text{const.}, \quad \epsilon_{ij} = \text{const.} \quad (9.5-4)$$

Keď sa obmedzíme na infinitesimaly prvého rádu, podmienka termodynamickú rovnováhy bude daná nerovnosťou

$$(\delta s)_e \leq 0 \quad (9.5-5)$$

ktorá sa v odbornej literatúre zaužívala ako Gibbsova podmienka rovnováhy. Gibbs podal inú formuláciu, ktorá je ľahšie aplikovateľná v úlohách mechaniky kontinua. Pre rovnováhu lubovoľného izolovaného systému je nutná a postačujúca, aby pri všetkých možných variáciách stavu systému, ktoré menia jeho entropiu, variácia jeho energie bola kladná alebo nulová

$$(\Delta e)_s > 0, \quad (\delta e)_s \geq 0 \quad (9.5-6)$$

V podstate teda vnútorná energia má byť minimálna vzhľadom na všetky susedné stavy, ktoré majú tú istú entropiu. Možno ukázať, že podmienky (9.5-3) a (9.5-6) sú ekvivalentné.

Uvedené Gibbsove podmienky termodynamickú rovnováhy znamenajú už trošku viac než 1. a 2. termodynamický zákon. Podmienky zaručujú viac ako rovnováhu v obyčajnom slova zmysle - zaručujú stabilnú rovnováhu v tom zmysle, že susedný variovaný stav bude mať sklon vrátiť sa do rovnovážneho stavu.

Z vlastných skúseností vieme, že kus ocele na laboratórnom stole môže dlho existovať bez spontánnych zmien odchráňajúcich sa v ňom. Sú totiž splnené podmienky stabilnej termodynamickú rovnováhy, alebo sa tiež hovorí, že je v prírodzenom stave. Keď však priložením vonkajších síl vyvodíme v telese akési pole napätí, teleso sa dostane do stavu porušeného, odlišného od svojho prírodzeného stavu. Len čo prestanú pôsobiť vonkajšie sily, teleso sa vráti do svojho pôvodného prírodzeného stavu (za predpokladu, že kov zostáva dokonale pružný). Táto tendencia vracat sa do prírodzeného stavu je základnou vlastnosťou funkcie deformačnej energie, ktorú teraz budeme skúmať.

Nech vnútorná energia zataženého telesa je e a nezataženého e_0 . Podľa Gibbsovej vety, stabilita nenapnutého telesa vyžaduje, aby rozdiel $\Delta e = e - e_0$ bol kladný (nula sa rovná len v prírodzenom stave). Preto teda pri izoentropických procesoch

$$\Delta e = e - e_0 \geq 0 \quad (9.5-7)$$

Hovorí sa tiež, že $e - e_0$ je pozitívne definitná.

V prípade izotermického procesu Helmholtzova funkcia f voľnej energie dosahuje svoje minimum f_0 pri termodynamickej rovnováhe. Z analogickej úvahy ako vyššie vyplýva, že

$$\Delta f = f - f_0 \quad (9.5-11)$$

je pozitívne definitná v okolí prirodzeného stavu (predpokladáme pritom izotermický proces).

Ako sme o tom už hovorili, deformačná energia v prípade adiabatického, resp. izotermického deja sa stotožňuje s $\rho (e - e_0)$, resp. $\rho (f - f_0)$. Keďže $\rho > 0$ funkcia U deformačnej energie je tiež pozitívne definitná v okolí prirodzeného stavu. Z pozitívnej definitnosti funkcie deformačnej energie možno odvodiť nasledujúce vety:

- 1) Jednoznačnosť riešenia elastostatiky a dynamiky
- 2) Princíp minima potenciálnej energie
- 3) Princíp minima komplementárnej energie
- 4) Saint - Venantov princíp (v určitom slova zmysle)

Princípy 2 a 3 sme rozobrali v kap. 7, s obsahom bodov 1 a 4 sa môže čitateľ podrobnejšie oboznámiť v literatúre [1].

9.6 OBMEDZENIE TERMODYNAMIKY NA NAPÄŤOVO - - DEFORMAČNÝ ZÁKON IZOTROPNÉHO MATERIÁLU

Predpokladajme, že súvislosť medzi napätím a deformáciou (rovnica (6.2-1)) platí pri izotropických podmienkach. Funkciu deformačnej energie sme definovali tak, že $dU = \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}$. Ak dosadíme rovnicu (6.3-16) do tejto rovnice, dostaneme

$$dU = (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^d) d\varepsilon_{ij} = \lambda \varepsilon d\varepsilon + 2G \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij} \quad (9.6-1)$$

Treba poznamenať, že Lamého konštanty sa pri adiabatických a izotermických podmienkach líšia len nepatrne a rozdiel je zanedbateľný.

Integrovaním rovnice (9.6-1) od stavu prirodzeného po konečný deformačný stav dostaneme

$$U = \int_0^\varepsilon \lambda \varepsilon d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{ij}^d} 2G \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij} \quad (9.6-2)$$

$$U = \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} + G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (9.6-3)$$

Ako vyplývalo z termodynamických úvah predchádzajúcej kapitoly, táto funkcia má byť pozitívne definitná. Pretože všetky vyskytujúce členy sú štvorce, naša požiadavka bude splnená keď

$$\lambda > 0, \quad G > 0 \quad (9.6-4)$$

Ľahko si ukážeme, že takto sformulovaná podmienka je príliš silná, pretože $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$ je závislá od ε .

Úplne analogicky ako v kapitole 3.9.5 možno zaviesť deviačný tenzor deformácie

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (9.6-5)$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$. Ľahko si ukážeme, že prvý invariant tohto tenzora (ktorý sa rovná stope, tr ε'_{ij}) sa rovná nule. Potom rovnicu (9.6-3) môžeme prepísať do tvaru

$$U = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{2}{3} G \right) \varepsilon^2 + G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right) \quad (9.6-6)$$

Druhý invariant deviačného tenzora deformácie ε'_{ij} (analogicky ako sme to robili v prípade napätia, viď. rovnicu (3.9.5-9)) bude

$$J_2 = \frac{1}{2} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \quad (9.6-7)$$

Rovnicu (9.6-6) potom môžeme napísať takto:

$$U = \frac{1}{2} K \varepsilon^2 + 2GJ_2 \quad (9.6-8)$$

Uvedená konštanta $K = \lambda + \frac{2}{3} G$ je modulom stlačiteľnosti materiálu.

Nutnú a postačujúcu podmienku pozitívnej definitnosti U môžeme napísať potom takto:

$$K > 0, \quad G > 0 \quad (9.6-9)$$

Využívajúc rovnice (6.3-28) pre K a G dostaneme

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.6-10)$$

a z nerovnosti (9.6-9) teda vyplýva, že

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (9.6-11)$$

Fyzikálnu podstatu prvej nerovnosti ľahko pochopíme na jednoduchom príklade. V prípade jednoosovej napätosti ľubovoľného reálneho homogénneho a izotropného materiálu ťahové napätie musí vyvolať predĺženie (a nie skrútenie!). Druhá podmienka je tiež splnená pre každý materiál. V skutočnosti materiály so zápornými hodnotami ν ani nepoznáme. Hodnota ν je najväčšia pre olovo 0,45 a najmenšia pre berýlium $\nu = (0,01 - 0,06)$, pre oceľ $\nu \approx 0,3$.

9.7 ZOVŠEOBECNENÝ HOOKEOV ZÁKON OBSAHUJÚCI JAV TEPELNEJ ROZŤAŽNOSTI

Uvažujme o napätovo-deformačnom zákone vo všeobecnom prostredí bez toho, že by sa obmedzili na izotermické alebo izoentropické podmienky. Bez hlbšieho matematického rozboru predpokladáme, že funkciu deformačnej energie môžeme rozvinúť do mocninového radu

$$2U = C_0 + C_{ij} \varepsilon_{ij} + C'_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \quad (9.7-1)$$

kde súčinitele C_0, C_{ij}, \dots atď. sú funkciami mernej entropie s a teploty T . Keďže pri nulovej deformácii ($\varepsilon_{ij} = 0$) musí byť i deformačná energia nulová ($U = 0$), z rovnice (9.7-1) vyplýva, že $C_0 = 0$. Zložky tenzora napätia z deformačnej energie dostaneme deriváciou podľa zložiek tenzora deformácie

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{C_{ij}}{2} + \frac{C'_{ijkl}}{2} \varepsilon_{kl} + \dots \quad (9.7-2)$$

Pri nulovej deformácii na pravej strane tejto rovnice všetky členy, okrem prvého sú nulové. C_{ij} sú teda dvojnásobky zložiek napätia, pri nulovej deformácii. Takéto napätia môžu vzniknúť napr. od lineárnej teplotnej rozťažnosti v dôsledku zmeny teploty od štandardného stavu. Najjednoduchšie bude ak predpokladáme, že C_{ij} je priamo úmerné teplotným zmenám

$$C_{ij} = -2\beta_{ij}(T - T_0) \quad (9.7-3)$$

kde β_{ij} sú konštanty. Z rovnice (9.7-1), za predpokladu malých deformácií ε_{ij} a keď zanedbáme členy vyššieho rádu ako druhého, dostaneme

$$U = -\beta_{ij}(T - T_0) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C'_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (9.7-4)$$

Zodpovedajúce zložky tenzora napätia budú

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} (C'_{ijkl} + C'_{klij}) \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(T - T_0) \quad (9.7-5)$$

Táto rovnica v odbornej literatúre sa zaužívala pod názvom zovšeobecnený Duhamel - Neumannov Hookeov zákon. Využitím symetrie tenzora materiálových vlastností (kap. 6.2), teda

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (9.7-6)$$

môžeme rovnicu (9.7-5) upraviť takto

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(T - T_0) \quad (9.7-7)$$

Pretože ε_{ij} a τ_{ij} sú symetrické tenzory, musí platiť

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (9.7-8)$$

Pri využití týchto symetrií (viď. kap. 6.2) pre neizotropné kontinuum dostaneme 21 nezávislých elastických konštánt a 6 nezávislých konštánt β_{ij} . Keď kontinuum je izotropné, potrebujeme len dve konštanty C a jednu konštantu β . V tomto prípade rovnica (9.7-7) sa nám zredukuje takto

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta(T - T_0) \delta_{ij} \quad (9.7-9)$$

resp.

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \alpha(T - T_0) \delta_{ij} \quad (9.7-10)$$

kde

$$\varepsilon_{ii} = \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon \quad (9.7-11)$$

$$\sigma_{ii} = \text{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad (9.7-12)$$

Zodpovedajúca funkcia deformačnej energie

$$\begin{aligned} U &= G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \beta(T - T_0) \varepsilon = \\ &= G \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1+2\nu} \varepsilon^2 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \alpha(T - T_0) \varepsilon \right] = \\ &= \frac{1}{4G} \left[\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma^2 \right] + \alpha(T - T_0) \sigma \end{aligned} \quad (9.7-13)$$

V uvedených rovniciach α je súčiniteľ teplotnej rozťažnosti, T_0 je teplotu referenčného stavu telesa a $T - T_0$ je nárast teploty nad referenčný stav, tzv. prevyšujúca teplota. Funkcia deformačnej energie má byť relatívne minimálna v prirodzenom stave (viď. kap. 9.5), čo implikuje, že ak $T = T_0$, funkcia

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (9.7-14)$$

má byť kladne definitná.

9.8 TERMODYNAMICKÉ FUNKCIE IZOTROPICKÉHO HOOKEOVSKÉHO MATERIÁLU

V tejto kapitole sa zameriavame na určenie termodynamických funkcií pre izotropický, dokonale pružný materiál. Pri odvodení sa zasa obmedzíme na tenzor malých deformácií.

Uvažujme dokonale elastické, izotropické teleso, pre ktoré platí Duhamel - Neumannov zovšeobecnený Hookeov zákon. Pri reverzibilnej, infinitezimálnej deformácii platí rovnica

$$df = -s dT - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (9.8-1)$$

Ak za tenzor napätia dosadíme z rovnice (9.7-8), po úpravách dostaneme

$$\rho df = -\rho s dT + \lambda \varepsilon d\varepsilon - \beta(T - T_0) d\varepsilon + 2G \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (9.8-2)$$

alebo po integrácii podľa deformácie

$$\rho f = \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} - \beta(T - T_0) \varepsilon + G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + C_1(T) \quad (9.8-3)$$

kde konštanta $C_1(T)$ je funkciou teploty. Urobme parciálnu deriváciu tejto rovnice podľa teploty

$$\rho \frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial T} + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \frac{\partial G}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T} [\beta(T - T_0)] + \frac{\partial C_1(T)}{\partial T} \quad (9.8-4)$$

Pri konštantnej deformácii ε_{ij} však platí (pozri rovnicu (9.4-7))

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} = -s \quad (9.8-5)$$

Potom rovnicu (9.8-4) môžeme upraviť takto

$$\rho s = -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial T} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \frac{\partial G}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} [\beta(T - T_0)] - \frac{\partial C_1}{\partial T} \quad (9.8-6)$$

Zatiaľ neznámu funkciu C_1 môžeme vyjadriť pomocou špecifickej tepelnej kapacity pri konštantnej deformácii (teda i pri konštantnom objeme) C_v .

Na jednej strane entropia je funkciou teploty T a tenzora deformácie ε_{ij} . Pri konštantnej deformácii, keď $\varepsilon_{ij} = 0$, tak

$$dQ = T \rho ds = T \rho \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} dT \quad (9.8-7)$$

Na druhej strane priamo z definície špecifickej tepelnej kapacity (pri konštantnom objeme) je

$$dQ = \rho C_v dT \quad (9.8-8)$$

Porovnaním pravých strán rovníc (9.8-7), (9.8-8) dostaneme

$$C_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} \quad (9.8-9)$$

a keď za s dosadíme z rovnice (9.8-6), dostaneme hľadajú súvislosť medzi C_1 a C_v . Pomerne jednoduchú závislosť dostaneme pri nulovej deformácii (objem konštantný)

$$(C_v)_{\varepsilon_{ij}=0} = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}=0} = - \frac{T}{\rho} \frac{d^2 C_1}{dT^2} \quad (9.8-10)$$

alebo ak predpokladáme, že s a f sú nulové pri $\varepsilon_{ij} = 0$ a $T = T_0$

$$C_1 = - \int_{T_0}^T \left[\int_{T_0}^T \frac{\rho}{T} (C_v)_{\varepsilon_{ij}=0} dT \right] dT \quad (9.8-11)$$

Vnútornú energiu môžeme určiť z rovníc (9.8-3), (9.8-6) a z rovníc (9.6-3), (9.6-10), výsledok uvedieme bez odvodu

$$\begin{aligned} \rho e = \rho(f + Ts) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ii}^2 \left[K - T \frac{\partial K}{\partial T} \right] + 2 J_2 \left[G - T \frac{\partial G}{\partial T} \right] + \\ &+ \varepsilon_{ii} \left[\beta T_0 + T(T - T_0) \frac{\partial \beta}{\partial T} \right] + C_1 - T \frac{dC_1}{dT} \end{aligned} \quad (9.8-12)$$

Ak λ , G , β a C_v sú nezávislé od teploty, rovnice (9.8-11) a (9.8-12) sa zjednodušia nasledovne

$$C_1 = - C_v T_0 \left(\frac{T}{T_0} \log \frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1 \right) \quad (9.8-13)$$

$$\rho e = \frac{1}{2} K \varepsilon^2 + 2 G J_2 + \beta T_0 \varepsilon + (C_v)_{\varepsilon_{ij}=0} (T - T_0) \quad (9.8-14)$$

kde J_2 je druhý invariant tenzora deformácie

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right)^2 \quad (9.8-15)$$

9.9 VZÁJOMNÁ SÚVISLOSŤ TEPELNÝCH A MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ PEVNÝCH LÁTK

Rovnice, ktoré udávajú vzájomnú súvislosť merného tepla, modulu pružnosti, latentného tepla, zmeny napätia alebo deformácie, boli odvodené Kelvinom a Gibbsom.

Špecifické teplo pri konštantnej deformácii a latentné teplo v závislosti od deformácie sú definované nasledovnou rovnicou

$$dQ = C_v dT + \varepsilon_{1ij} d\varepsilon_{ij} \quad (9.9-1)$$

dQ je pritom množstvo tepla potrebné na zmenu teploty jednotkovej hmoty o dT a na zmenu deformácie o $d\varepsilon_{ij}$, C_v je merné teplo v stave konštantnej deformácie. Upozorňujeme, že ľavý horný index pri ε_{1ij} nie je indexom v zmysle Einsteinovho sumačného pravidla. V ďalšom si takto označíme latentné teplo pri konštantnej deformácii (ε_{1ij}) alebo pri konštantnom napätí (σ_{1ij}). Tenzor ε_{1ij} značí 6 zložiek latentných tepiel na jednotku hmoty vyvolaných zmenami zložiek deformácie. Chápeme to tak, že vo všetkých prípadoch teplota a zvyšných 5 zložiek deformácie zostáva nezmenených. Pri vratných procesoch zmenu entropie môžeme vyjadriť nasledovne

$$ds = \frac{dQ}{dT} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{\varepsilon_{1ij}}{T} d\varepsilon_{ij} \quad (9.9-2)$$

a keďže s je funkciou T a ε_{ij} , máme

$$ds = \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (9.9-3)$$

Keď porovnáme pravé strany rovníc (9.9-2) a (9.9-3) dostaneme

$$\varepsilon_{1ij} = T \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (9.9-4)$$

a

$$C_v = T \frac{\partial s}{\partial T} \quad (9.9-5)$$

Ďalšou deriváciou (9.4-7) dostaneme

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} = - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial T} \quad (9.9-6)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial T^2} \quad (9.9-7)$$

Keď tieto výsledky porovnáme s rovnicami (9.9-4) a (9.9-5) máme

$$\varepsilon_{1ij} = - \frac{T}{\varphi} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial T} \quad (9.9-8)$$

$$\frac{\partial C_v}{\partial \varepsilon_{ij}} = - \frac{T}{\varphi} \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial T^2} \quad (9.9-9)$$

Podobným spôsobom za termodynamické premenné môžeme zvoliť teplotu a šesť nezávislých zložiek tenzora napätia. Potom možno definovať merné teplo pri konštantnom napätí C_p (v klasickej termodynamike sme mali merné teplo pri konšt. tlaku) a latentné teploty na jednotku hmoty vyvolaných zmenami zložiek tenzora napätia. Definičná rovnica bude analogická k rovnici (9.9-2)

$$ds = \frac{C_p}{T} dT + \frac{1}{T} \varepsilon_{1ij} d\varepsilon_{ij} \quad (9.9-10)$$

Merné teplo $C_p(T, \varepsilon_{ij})$ sa experimentálne môže určiť pomerne jednoducho, pričom vonkajšie veličiny pôsobiace na teleso musia byť konštantné. Z analýzy Gibbsovho potenciálu Φ by sme dostali výsledky

$$\varepsilon_{1ij} = \frac{T}{\varphi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \quad (9.9-11)$$

$$\frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{T}{\varphi} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial T^2} \quad (9.9-12)$$

Rozdiel dvoch merných tepiel môže byť určený z nasledovných úvah. Nech dôjde k infinitezimálnej zmene pri konštantnom napätí. Zmenu entropie môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi. Podľa rovnice (9.9-2)

$$ds = \frac{C_v}{T} dT + \frac{1}{T} \varepsilon_{1ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} dT \quad (9.9-13)$$

a podľa rovnice (9.9-10)

$$ds = \frac{C_p}{T} dT \quad (9.9-14)$$

Porovnaním pravých strán dostaneme

$$C_p = C_v + \varepsilon_{1ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \quad (9.9-15)$$

a využitím rovnice (9.9-8)

$$C_p - C_v = - \frac{T}{\varphi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(T, \varepsilon)}{\partial T} \frac{\partial \tau_{ij}(T, \varepsilon)}{\partial T} \quad (9.9-16)$$

10. Tepelná pružnost

Teória tepelnej pružnosti spája teóriu pružnosti a termodynamiku s cieľom určiť deformačné a napätové pole pružno-pevného kontinua vystaveného všeobecným tepelným a mechanickým účinkom.

10.1 ZÁKLADNÉ ROVNICE TEPELNEJ PRUŽNOSTI

Uvažujme pevné teleso vystavené účinkom vonkajších síl a ohrevu. Uvažujme lineárne pružný materiál, ďalej predpokladajme, že po odstránení všetkých vonkajších síl pri konštantnej teplote T_0 je teleso v beznapätovom stave. O tomto beznapätovom stave budeme hovoriť ako o vzťažnom stave a o teplote T_0 ako o vzťažnej (referenčnej) teplote. Pre matematický popis budeme používať systém pravouhlých kartézskych súradníc x_i . O posunutí u_i každého bodu v okamžitom stave (vzhľadom na vzťažný stav) predpokladáme, že sú tak malé, že infinitezimálne zložky tenzora deformácie budú

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10.1-1)$$

Okamžitú absolútnu teplotu si označíme T a tzv. prevyšujúcu teplotu θ , pričom

$$\theta = T - T_0 \quad (10.1-2)$$

Za týchto podmienok základné rovnice tepelnej pružnosti (o ktorých v iných súvislostiach sme už hovorili v predchádzajúcich kapitolách) môžeme zhrnúť nasledovne:

a) základnou rovnicou je konštitutívna rovnica, Duhamel-Neumannov zovšeobecnený Hookeov zákon

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (\theta - T_0) \quad (10.1-3)$$

b) rovnica kontinuity (zákon zachovania hmoty)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (10.1-4)$$

c) Newtonov zákon (pohybová rovnica)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + K_i = \rho \dot{v}_i \quad (10.1-5)$$

d) zákon zachovania energie (bilančná rovnica)

$$\dot{e} = \tau \dot{s} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} v_{ij}, \quad \text{kde} \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.1-6)$$

e) merná zmena entropie

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) - \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (10.1-7)$$

f) rovnica vedenia tepla (Fourierov zákon)

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (10.1-8)$$

g) definičná rovnica merného tepla, keď $\varepsilon_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$)

$$- \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho c_v \dot{T} \quad (10.1-9)$$

V rovniciach indexy sa menia 1 až 3. Označenia sú v súlade s predchádzajúcimi kapitolami, teda

- ρ - merná hmotnosť
- σ_{ij} - sú zložky tenzora napätia
- C_{ijkl} - sú moduly pružnosti
- β_{ij} - súčinitele teplotnej rozťažnosti
- v_i - zložky vektora rýchlosti posunutia
- K_i - zložky vektora objemových síl
- k_{ij} - súčinitele tepelnej vodivosti
- q_i - zložky vektora hustoty tepelného toku
- c_v - je merné teplo pri konštantnom objeme

Bočka (*) nad premennou značí substancionálnu deriváciu príslušnej premennej, teda

$$(*) = \frac{D(\)}{Dt} = \frac{\partial(\)}{\partial t} + v_k \frac{\partial(\)}{\partial x_k} \quad (10.1-10)$$

ktorú za predpokladu malých rýchlostí posunutia môžeme aproximovať parciálnou deriváciou podľa času. V ďalších našich úvahách zavedieme tento predpoklad a bodka nad premennou bude značiť parciálnu deriváciu podľa času.

Rovnicu (10.1-7) môžeme upraviť zavedením voľnej energie

$$r = e - Ts \quad (10.1-11)$$

pre ktorú sme mali (rovnica 9.4-7))

$$\rho \left(\frac{\partial r}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij}, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} = -s \quad (10.1-12)$$

Pomocou týchto rovností upravíme (10.1-7) nasledovne:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= \rho \dot{s} = \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} = \\ &= -\rho \frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial^2 r}{\partial T^2} \dot{T} \end{aligned} \quad (10.1-13)$$

Vynásobením poslednej rovnice T, za predpokladu, že $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$, po porovnaní s rovnicou (10.1-9) dostaneme

$$c_v = -T \frac{\partial^2 r}{\partial T^2} \quad (10.1-14)$$

Porovnajúc rovnice (10.1-12) a (10.1-13) platí

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \rho \frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij} \quad (10.1-15)$$

Keď využijeme tieto rovnosti, rovnicu (10.1-13) môžeme upraviť takto

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c_v \dot{T} \quad (10.1-16)$$

Nakoniec dosadením Fourierovho zákona (10.1-8) do poslednej rovnice

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c_v \dot{T} \quad (10.1-17)$$

Za predpokladu izotropického materiálu konštitutívna rovnica sa zredukuje na tvar

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta \quad (10.1-18)$$

a konštanty v uvedených rovniciach budú

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta \delta_{ij} \\ k_{ij} &= k \delta_{ij} \end{aligned} \quad \beta = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} = (3\lambda + 2G)\alpha \quad (10.1-19)$$

Konštanta α je súčiniteľ lineárnej teplotnej rozťažnosti a k je tepelná vodivosť.

Základné rovnice tepelnej pružnosti pre homogénny izotropný materiál v niektorých učebniciach sa používajú v tvare

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = K_1 + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (10.1-20)$$

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} = k \frac{\partial \theta}{\partial x_j \partial x_j} \quad (10.1-21)$$

Rovnicu (10.1-20) môžeme odvodiť z rovnice rovnováhy (10.1-5), dosadením za zložky σ_{ij} z Duhamel - Neumannovho rozšíreného Hookovho zákona (10.1-18) a vyjadrením zložiek tenzora deformácie ε_{ij} pomocou zložiek posunutí (10.1-1). Druhú rovnicu (10.1-21) dostaneme z rovnice (10.1-17), zohľadnením podmienok izotropnosti materiálu (10.1-19).

10.2 TEPLOTNÉ ZMENY VYVOLANÉ DEFORMÁCIOU

Ako je nám už známe, zo základov termomechaniky, adiabatická expanzia plynu je sprevádzaná poklesom jeho teploty. Analogicky, pre pružne pevné telesá, pri adiabatickej zmene deformačného stavu možno očakávať akési zmenu teploty. Pre kovové materiály pri adiabatickom rozpínaní (odľahčení) napnutého telesa dôjde k poklesu teploty. Keď predpokladáme, že tepelná vodivosť $k_{ij} = 0$, z rovnice (10.1-17) dostaneme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{T}{\rho C_v} \beta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (10.2-1)$$

Táto rovnica v odbornej literatúre je zaužívaná pod názvom Kelvinov vzorec a udáva zmenu teploty v závislosti od zmeny deformačného stavu. Keďže zmena deformačného stavu vyvolá zmenu teploty, treba tiež rozlíšiť moduly pružnosti, podľa toho, pri akých podmienkach boli určené. Ak meriame modul pružnosti na vzorke, ktorá je úplne izolovaná, alebo keď zmena deformačného stavu je takýchle, že teplo nemá čas uniknúť, nameranú hodnotu nazývame adiabatickým modulom pružnosti. Na druhej strane, keď v priebehu merania teplota je konštantná, nameriame izotermický modul pružnosti.

Súčinitele C_{ijkl} v Duhamel - Neumannovom zákone sú izotermickými modulmi pri nulovej pravyšujúcej teplote $\Theta = 0$.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Theta, \quad \Theta = T - T_0 \quad (10.2-2)$$

Ak deformácia je adiabatická a nedochádza k vedeniu tepla, z rovnice (10.1-16) dostaneme

$$\rho C_v \dot{\Theta} + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (10.2-3)$$

resp. po integrácii

$$\rho C_v \Theta + T_0 \beta_{kl} \varepsilon_{kl} = \text{const.} \quad (10.2-4)$$

Integračná konštanta bude nulová, keď pre $\Theta = 0$, deformačný stav je nulový, $\varepsilon_{ij} = 0$. Ak vyjadríme Θ z poslednej rovnice a dosadíme do (10.2-2), pre adiabatický proces dostaneme

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} + \frac{T_0}{\rho C_v} \beta_{ij} \beta_{kl} \right) \varepsilon_{kl} = C'_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (10.2-5)$$

Odtiaľto už dostaneme súvislosť medzi izotermickým a adiabatickým modulom pružnosti

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} + \frac{T_0}{\rho C_v} \beta_{ij} \beta_{kl} \quad (10.2-6)$$

10.3 NIEKTORÉ ÚLOHY TEPELNEJ PRUŽNOSTI

Úlohy tepelnej pružnosti podľa ich charakteru možno riešiť dvojakým spôsobom. Prvý, exaktný spôsob je známy pod názvom viazaná teória tepelnej pružnosti a vyznačuje sa tým, že problémy rieši exaktne, na základe rovníc uvedených v predchádzajúcej kapitole. Zohľadňuje teda vzájomnú interakciu tepelných a mechanických procesov odohrávajúcich sa v pevných látkach.

Pri riešení určitých typov úloh však dáva uspokojivé výsledky i tzv. kvázi-statická (neviazaná) teória tepelnej pružnosti, ktorá skúma vedenie tepla a termoelasticitu ako dva oddelené problémy. Toto zjednodušenie teórie v ďalšom ešte zdôvodníme (kap. 10.5), v prvom priblížení však môžeme uviesť nasledovné argumenty. Podľa rovnice (10.2-1) sa môžeme presvedčiť, že zmena teploty pružného telesa, zapríčinená adiabatickou deformáciou, je veľmi malá.

Ak zanedbáme túto interakciu medzi deformáciou a teplotou, zostáva jediný efekt vyvolaný zmenou teplotného poľa a to zmena rozmerov telesa. Zmenu rozmeru môžeme určiť ako súčin lineárneho rozmeru telesa L , prevyšujúcej teploty Θ a súčiniteľa teplotnej rozťažnosti β . Keď uvažujeme $L = 1 \text{ cm}$, $\Theta = 500 \text{ }^\circ\text{C}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, zmena rozmeru je 10^{-2} cm , čo z hľadiska vedenia tepla pri skúmaní teplotného poľa môžeme zanedbať.

Ak zmena teploty o $500 \text{ }^\circ\text{C}$ nastane za časový úsek $0,1 \text{ sec}$, potom zrýchlenie bude

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{10^{-2} \text{ cm}}{(0,1)^2 \text{ sec}^2} = 1 \text{ cmsec}^{-2}$$

Keď tento výsledok porovnáme s gravitačným zrýchlením, už vidíme, že ani od takého rýchleho nárastu teploty nemôžeme očakávať silné dynamické účinky. Vypočítajme príslušný prírastok napätia, ktorý môže byť približne určený z rovnice

$$\Delta \sigma_{11} \approx \Delta x \rho \frac{d^2 u}{dt^2}$$

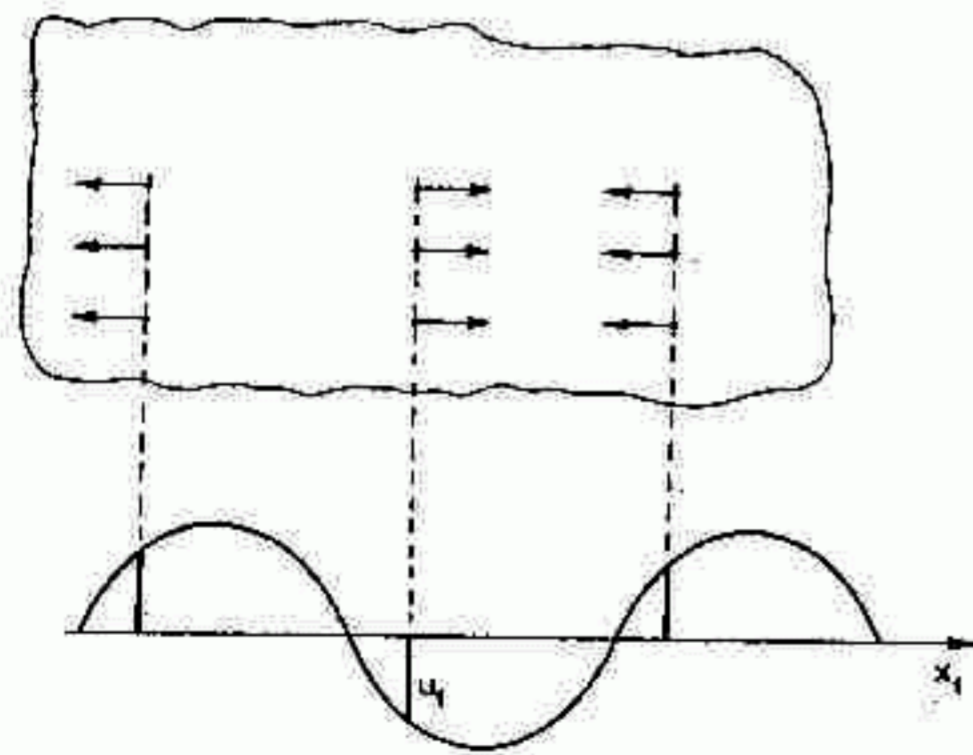
Merná hmotnosť ocele je 7600 kg/m^3 a ak uvažujeme materiál hrúbky 1 cm , po dosadení v homogénnych jednotkách dostaneme

$$\Delta \sigma_{11} = 10^{-2} \cdot 7600 \cdot 10^{-2} = 0,76 \text{ Nm}^{-2}$$

Takéto napätie je zanedbateľné vo väčšine strojárskych aplikácií, kde napätia sú rádozo rovné dovolenému napätiu, alebo dokonca sa môžu vytvoriť lokálne nie príliš rozsiahle plastické oblasti (prasknutím medze klzu materiálu). Treba poznamenať, že viazaná teória tepelnej pružnosti má široké uplatnenie pri problémoch vnútorného trenia kovov, pri tvárnení atď.

10.4 TERMOELASTICKÉ VIBRÁCIE

Ako príklad na viazanú teóriu uvedieme idealizovaný problém voľných pozdĺžnych vibrácií termoelastického materiálu nekonečných rozmerov, podľa obr. 10.1. Voodorovnú súradnicu si označíme ako x , a predpokladáme, že čiastočky materiálu sú v čase $t = 0$, rozmiestené podľa zákonitosti



Obr. 10.1
Výchyľky bodov z rovnovážnej polohy

$$u_1(x,0) = A \cos(mx) \quad (10.4-1)$$

kde A a m sú konštanty. Ďalej nech platí, že v čase $t = 0$, sú rýchlosti častíc nulové, teda

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (10.4-2)$$

Ako vyplýva zo zadania, ide o jednorozmernú úlohu, posunutia u_1 v smere súradnicovej osi x budú funkciou súradnice a času, pričom posuvy $u_2 = u_3 = 0$. Okamžitá prevyšujúca teplota θ bude tiež funkciou súradnice a času.

Riešenie úlohy dostaneme z rovníc (10.1-20) a (10.1-21), ktoré pre jednorozmernú úlohu môžeme upraviť nasledovne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.4-3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = h \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10.4-4)$$

kde súčinitele c_1 , c_2 , γ a h sú definované pomocou konštant λ a G , mernej hmotnosti ρ a tepelno-fyzikálnych konštant β , C_v a T_0 takto

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\rho} \quad (10.4-5)$$

$$c_2 = \frac{\beta T_0}{\rho C_v}, \quad h = \frac{k}{\rho C_v}$$

V súlade s počiatočnou podmienkou 10.4-2 riešenie predpokladáme v tvare

$$u = e^{-at} (A \cos Kt + B \sin Kt) \cos mx \quad (10.4-6)$$

kde a a K sú konštanty. Keď derivujeme rovnicu (10.4-6) podľa času a dosadíme do počiatočnej podmienky (10.4-2), pre B dostaneme

$$B = \frac{a}{K} A \quad (10.4-7)$$

Dosadením predpokladaného riešenia (10.4-6) do rovnice (10.4-3), integráciou dostaneme prevyšujúcu teplotu

$$\theta = e^{-at} (C \cos Kt + D \sin Kt) \sin mx \quad (10.4-8)$$

kde

$$C = - \frac{c_1^2 m^2 - a^2 - K^2}{\gamma m} A \quad (10.4-9)$$

$$D = - \frac{c_1^2 m^2 + a^2 + K^2}{\gamma m} A \quad (10.4-10)$$

Riešenie samozrejme musí spĺňať i rovnicu (10.4-4). Dosadením (10.4-6) a (10.4-8) do tejto rovnice dostaneme

$$D_1 \cos Kt + D_2 \sin Kt = 0 \quad (10.4-11)$$

kde

$$D_1 = - [2a^3 - 2aK^2 + hm^2(c_1^2 m^2 - a^2 - K^2)] \quad (10.4-12)$$

$$D_2 = \frac{a^2 + K^2}{\gamma K m} [a^2 - K^2 + m^2(c_1^2 + \gamma c_2 - ha)] - \frac{ha c_1^2 m^3}{\gamma K} \quad (10.4-13)$$

Rovnica (10.4-11) pre ľubovoľný čas t bude splnená vtedy, keď $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$.

Zavedením substitúcií

$$\bar{K} = \frac{K}{m c_1}, \quad \bar{a} = \frac{a}{m c_1}, \quad \bar{c} = \frac{\gamma c_2}{c_1^2}, \quad \bar{h} = \frac{hm}{c_1} \quad (10.4-14)$$

pre určenie \bar{a} a \bar{K} dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{K}^2(\bar{h} - 2\bar{a}) - 2\bar{a}^3 + h\bar{a}^2 - \bar{h} &= 0 \\ (\bar{a}^2 + \bar{K}^2)(\bar{a}^2 - \bar{K}^2 + 1 + \bar{c} - h\bar{a}) - h\bar{a} &= 0 \end{aligned} \quad (10.4-15)$$

Keď za veličinu \bar{c} v druhej rovnici dosadíme nulu, dostaneme čisto izotermické pružné riešenie, $\bar{K} = 1$, $\bar{a} = 0$. Predpoklad $\bar{c} = 0$, fyzikálne znamená, že súčiniteľ teplotnej rozťažnosti sa rovná nule, v dôsledku zvýšenia teploty nedôjde k rozpínaniu materiálu.

Keďže hodnota \bar{c} , ktorá je určená pomerom tepelných konštánt pre pevné látky je malá (rádu 10^{-2} a menšia), potom riešenie rovníc (10.4-15) v prvom priblížení môžeme určiť v tvare

$$\bar{a} = \frac{\bar{h} \bar{c}}{2(1 + \bar{h}^2)} \quad (10.4-16)$$

$$\bar{K} = 1 + \frac{\bar{c}}{2(1 + \bar{h}^2)}$$

Pre pôvodné premenné potom dostaneme

$$a = \frac{m^2 h \gamma c_2}{2(c_1^2 + h^2 m^2)} \quad (10.4-17)$$

$$K = m c_1 \left[1 + \frac{\gamma c_2}{2(c_1^2 + h^2 m^2)} \right]$$

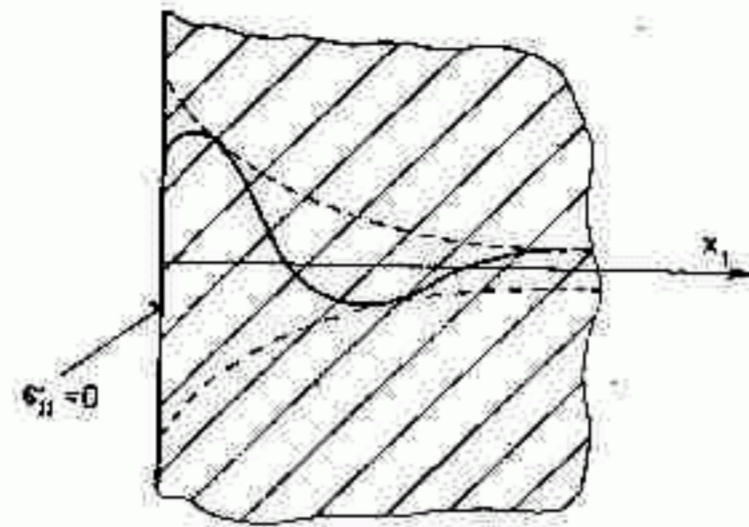
Vzhľadom na to, že pre reálne pevné telesá súčiniteľ teplotnej rozťažnosti sa nerovná nule, tiež $\gamma \neq 0$ a $c_2 \neq 0$, pre a dostaneme nenulovú hodnotu. Z rovníc (10.4-6) a (10.4-8) potom vyplýva, že vibrácie ako i nerovnomerné rozdelenie teploty s narastajúcim časom t sa utlmia. Hodnotu K určenú rovnicou (10.4-17) keď porovnáme s riešením pre $\bar{c} = 0$ (dostali sme $\bar{K} = 1$, teda $K = m c_1$) vidíme, že frekvencia vibrácií bude vyššia, než bez uvažovania teplotných efektov.

10.5 PERIODICKÁ ZMENA TEPLoty NA OKRAJI TERMOELASTICKÉHO POLPRIESTORU

Predpokladajme, že na okraji nekonečného polpriestoru je periodická zmena teploty podľa zákona

$$\theta = \theta_0 \sin Kt \quad (10.5-1)$$

a na tomto okraji nepôsobia žiadne povrchové sily (voľný okraj), (obr. 10.2)



Obr. 10.2
Šírenie teplotných vln v polpriestore

Úloha matematicky je popísaná rovnicami (10.1-20) a (10.1-21). Keď úlohu považujeme za jednorozmernú

$$u_1 = u(x, t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \theta = \theta(x, t) \quad (10.5-2)$$

potom dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.5-3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = h \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10.5-4)$$

kde príslušné konštanty majú ten istý význam ako v predchádzajúcom. Aby sme riešenie čo najviac zjednodušili, zavedieme predpoklad (ktorý však neskôr overíme) a to, že zrýchlenie materiálu, ktoré vzniká v dôsledku ohrevu, resp. ochladzovania, je nepodstatné, zanedbateľné, teda $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$. Okrem toho predpokladáme, že zmeny teploty materiálu v dôsledku zmeny deformačného poľa sú pomerne malé, teda člen $c_2 \partial^2 u / \partial x \partial t$ v rovnici (10.5-4) je zanedbateľný. Fyzikálne to znamená, že napr. merné teplo je veľmi veľké, teda $c_2 = \beta T_0 / \rho c_v = 0$. Potom predchádzajúce rovnice možno napísať v tvare

$$c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (10.5-5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = h \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10.5-6)$$

Zavedením týchto predpokladov, ktoré vedú k týmto rovniciam, ako sme sa o tom už zmienili v kapitole 10.3, dostaneme tzv. kvázistatickú (neviazanú) teóriu tepelnej pružnosti. Riešením týchto rovníc dostaneme rozloženie teploty a posunutí v polpriestore. Z povahy okrajových podmienok usudzujeme, že teplotné vlny prebiehajúce na povrchu sa budú šíriť konečnou rýchlosťou v materiáli. Predpokladajme riešenie v tvare

$$\theta = \theta_0 e^{-ax} \sin(Kt - mx) \quad (10.5-7)$$

kde a a m sú konštanty. Dosaďením predpokladaného riešenia do rovnice (10.5-6) po úprave dostaneme

$$(K - 2mah) \cos(Kt - mx) + h(m^2 - a^2) \sin(Kt - mx) = 0 \quad (10.5-8)$$

Táto rovnica pre ľubovoľný čas t bude splnená, keď $m = a$, a potom

$$m = a = \sqrt{\frac{K}{2h}} \quad (10.5-9)$$

Z rovnice (10.5-7) môžeme určiť rozloženie teploty v ľubovoľnom mieste v závislosti od času. Posuvy dostaneme tiež ľahko, rovnicu (10.5-7) dosadíme do rovnice (10.5-5) a dvakrát integrujeme

$$u = -\frac{\gamma}{c_1^2} \frac{\theta_0}{2a} e^{-ax} [\sin(Kt - ax) - \cos(Kt - ax)] \quad (10.5-10)$$

V tejto rovnici sme zaviedli okrajovú podmienku $u = 0$ pre $x \rightarrow \infty$ a takisto, že povrchové sily $\epsilon_{xx} = 0$ na hranici polpriestoru $x = 0$.

Zostáva nám ešte overiť, do akej miery sú splnené zavedené predpoklady pre reálne pevné telesá. Podľa prvého predpokladu sme zanedbali zrýchlenie, ktoré vzniká v dôsledku zvýšenia teploty. Toto možno urobiť, keď v príslušnej rovnici člen, ktorý vyjadruje toto zrýchlenie, je rádovo menší ako ostatné členy rovnice (10.5-3). Teda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ll c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.5-11)$$

Ak dosadíme za príslušné derivácie, dostaneme

$$\frac{K^2}{2C_1^2 a} \ll a \quad (10.5-12)$$

alebo keď za a dosadíme (10.5-9)

$$K \ll \frac{C_1^2}{h} \quad (10.5-13)$$

Pre väčšinu pevných látok je tento predpoklad splnený. Napríklad pre hliník $C_1^2/h = 3,8 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$, takže frekvencia teplotných zmien do 10^9 Hz ešte stále dovoľujú kvázistatické riešenie, ako dobrú aproximáciu reality.

Druhý predpoklad bol, že teplotné zmeny vznikajúce v dôsledku sprievodných zmien deformácií sú zanedbateľné. Aby tento predpoklad bol správny, podľa rovnice (10.5-4) má platiť

$$C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \ll \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (10.5-14)$$

Keď dosadíme za príslušné derivácie, dostaneme

$$\frac{\gamma C_2}{C_1^2} \ll 1 \quad (10.5-15)$$

eventuálne keď za γ , C_2 a C_1 dosadíme pôvodné konštanty

$$\frac{\beta^2 T_0}{\rho C_V} \frac{1}{\lambda + 2G} \ll 1 \quad (10.5-16)$$

Pre väčšinu pevných látok táto podmienka pri teplote blízko izbovej je splnená, rádová hodnota ľavej strany je 10^{-2} (pre hliník $3 \cdot 10^{-2}$). Kvázistatická teória teda v tomto prípade dáva dostatočne presný popis deja.

Literatúra

- 1 BRDIČKA, M.: Mechanika kontinua. Praha 1956.
- 2 SEDOV, L.I.: Mechanika splošnej sedy I., II. Moskva 1976.
- 3 SOKOLNIKOV, I.S.: Tenzorová analýza. Moskva 1960.
- 4 FUNG, Y.C.: A first Course in Continuum Mechanics. Prentice Hall 1969.
- 5 FUNG, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics. Prentice Hall 1963.
- 6 LEIPHOLZ, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. Karlsruhe 1968.
- 7 LONG, R.R. - LEIPHOLZ, H.: Kontinuumsmechanik. Stuttgart 1961.
- 8 WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford - London - New York, Pergamon Press 1968.
- 9 BATHE, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall 1982.

Obsah

PREDSLOV	3	4.5 Geometrická interpretácia zložiek nekonečne malých deformácií	108
1. ÚVOD	5	4.6 Nekonečne malé rotácie	111
2. TENZORY	10	4.7 Zložky konečných deformácií	113
2.1 Kartézské tenzory	10	4.8 Hlavné pretvorenie. Mohrove kružnice	116
2.2 Súmačné pravidlo	10	4.9 Iné miarky pretvorenia	117
2.3 Transformácia súradníc	13	5. RÝCHLOSŤ POSUNUTIA. PODMIENKA KOMPATIBILITY DEFORMÁCIE	119
2.4 Vektory	18	5.1 Pole rýchlosti posunutia	119
2.5 Dyády a tenzory vyššieho stupňa, základné operácie s tenzormi	25	5.2 Podmienky spojitosti (kompatibility) deformácie	120
2.6 Derivácia tenzorov	31	5.3 Podmienky kompatibility deformácie pre priestorovú napätosť	123
2.7 Gausova veta	35	6. KONŠTITUTÍVNE ROVNICE	125
2.8 Izotropické tenzory	39	6.1 Hookeovské elastické pevné teleso	126
2.9 Transponované, symetrické a antisymetrické tenzory	42	6.2 Zovšeobecnený Hookeov zákon	128
2.10 Vlastné hodnoty, vlastné vektory, hlavné osi, invarianty symetrického tenzora	44	6.3 Symetria pružnosti (elasticity)	133
3. TENZOR NAPÄTIA	50	6.4 Neviskózna kvapalina	143
3.1 Pojem napätí	50	6.5 Newtonovské viskózne tekutiny	144
3.2 Označovanie zložiek napätia	55	6.6 Vplyv teploty	145
3.3 Pohybové rovnice kontinua	58	7. ZÁKLADY VARIÁČNEHO POČTU. VARIÁČNÉ PRINCÍPY	146
3.4 Cauchyho formula	60	7.1 Minimalizácia funkcionálu	146
3.5 Rovnice rovnováhy	64	7.2 Princíp minima potenciálnej energie ako dôsledok variácie posunutí	151
3.6 Zmena zložiek napätia pri transformácii súradnicového systému	68	7.3 Princíp minima komplementárnej energie ako dôsledok variácie napätia	156
3.7 Zložky napätia v ortogonálnych - krivočiarych súradniciach (cylindrické)	70	8. ZÁKLADY NELINEÁRNEJ TEÓRIE	161
3.8 Okrajové podmienky pre napätie	72	8.1 Kinematika	163
3.9 Hlavné napätia a hlavné osi	75	8.2 Kinetika	165
3.9.1 Úvodné pojmy	75	8.3 Termodynamika	171
3.9.2 Rovinná napätosť	76	8.4 Konštitutívne rovnice	171
3.9.3 Priestorová napätosť	80	8.4.1 Elastický pružný materiál	172
3.9.4 Šmykové napätie	84	8.4.2 Hyperelastický materiál	173
3.9.5 Deviátor napätia	87	8.4.3 Hypoelastické materiály	173
3.9.6 Lamého elipsoid napätia	89	9. PRUŽNOSŤ A TERMOBYNAMIKA	174
3.9.7 Mohrove kružnice priestorovej napätosti	90	9.1 Základné pojmy	174
4. DEFORMAČNÝ STAV	97	9.2 Zákony termodynamiky	175
4.1 Počdajné kontinuum	97	9.3 Rovnice energie	177
4.2 Lagrangeovské a eulerovské súradnice	98	9.4 Funkcia deformačnej energie	179
4.3 Pretvorenie telesa	101	9.5 Podmienky termodynamického rovnováhy a niektoré jej dôsledky	181
4.4 Zložky deformácie v pravouhlom kartézskom súradnicovom systéme	105	9.6 Obmedzenie termodynamiky na napätovo - deformačný zákon izotropného materiálu	184
		9.7 Zovšeobecnený Hookeov zákon obsahujúci jav tepelnej rozťažnosti	186
		9.8 Termodynamické funkcie izotropického hookeovského materiálu	189
		9.9 Vzájomná súvislosť tepelných a mechanických vlastností pevných látok	191

10. TEPELNÁ PRUŽNOST	194
10.1 Základné rovnice tepelnej pružnosti	194
10.2 Teplotné zmeny vyvolané deformáciou	198
10.3 Niektoré úlohy tepelnej pružnosti	199
10.4 Termoelastické vibrácie	200
10.5 Periodická zmena teploty na okraji termoelastického polpriestoru	203
LITERATÚRA	207

Autori	Ing. J. Murín, CSc. - Ing. P. Élesztős, CSc.
Názov	MECHANIKA KONTINUA
Vydanie	I. vydanie
Náklad	80 výtlačkov
Rozsah	210 strán, 51 obrázkov, 10,372 AH, 10,640 VH
Edičné číslo	3197
Číslo povolenia	ČÚKK Š-331/66
Tlač	Edičné stredisko SVŠT v Bratislave
Vytlačené	február 1986

17 - 51

85 - 238 - 86
Kčs 8,50 -b-